

# Ungleichförmige und zufällig geführte Mehrfachleitungen in komplexen, technischen Systemen

**Dissertation**

zur Erlangung des akademischen Grades

**Doktoringenieur  
(Dr.-Ing.)**

von **Dipl.-Ing. Torsten Steinmetz**

geb. am 24.09.1970 in Magdeburg

genehmigt durch die Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik  
der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg

Gutachter:

Univ.-Prof. Dr. rer. nat. habil. Jürgen Nitsch

Univ.-Prof. Dr.-Ing. Günter Wollenberg

Univ.-Prof. Dr. rer. nat. habil. Achim Enders

Promotionskolloquium am 27.06.2006



*„Die Annäherung von Wissenschaft und Praxis gibt fruchtbare Resultate, und es ist nicht nur die Praxis, die daraus Vorteil zieht; die Wissenschaft selbst entwickelt sich unter dem Einfluss der Praxis, denn diese eröffnet neue Probleme für die Forschung oder neue Seiten an längst bekannten Gegenständen...“*

P.L. Tschebyschew



# Inhaltsverzeichnis

Danksagung	7
Kurzfassung	9
Symbole und Formelzeichen	11
<b>1 Motivation und Einleitung</b>	<b>15</b>
<b>2 Elektromagnetische Topologie</b>	<b>21</b>
2.1 Darstellung der topologischen Zerlegung . . . . .	21
2.2 Topologische Netzwerke . . . . .	26
2.2.1 Wellengrößen . . . . .	27
2.2.2 BLT 1 Gleichung . . . . .	27
2.2.3 BLT 2 Gleichung . . . . .	30
2.2.4 Admittanzdarstellung . . . . .	33
2.3 Leitungsstrukturen als <i>tubes</i> oder <i>junctions</i> . . . . .	37
2.3.1 Transformation zur Propagationsmatrix . . . . .	40
2.3.2 Äquivalente Streumatrizen . . . . .	41
2.3.3 Admittanzmatrix . . . . .	42
<b>3 Ungleichförmige Mehrfachleitungen</b>	<b>45</b>
3.1 Parameter ungleichförmiger Leitungen . . . . .	46
3.2 Bestimmung des Matrizenanten . . . . .	49
3.2.1 Iteration nach <i>Picard</i> . . . . .	50
3.2.2 Kalkül nach <i>Volterra</i> und das Produktintegral . . . . .	51
3.2.3 Rekursionformel bei linearer Interpolation . . . . .	53
3.2.4 Approximation durch Potenzreihen . . . . .	55
3.2.5 Interpolationsansätze mit Diagonalisierung . . . . .	59
3.2.6 Numerische Integrationsverfahren . . . . .	62
3.2.7 Vergleich der Effizienz und Auswahl eines geeigneten Verfahrens . . . . .	73
3.3 Beispiel für ein Netzwerk aus ungleichförmigen Leitungen . . . . .	76
<b>4 Zufällig geführte, ungleichförmige Mehrfachleitungen</b>	<b>81</b>
4.1 Zufällige Parameter bei gleichförmiger Leitungsführung . . . . .	83
4.2 Stochastische Simulation . . . . .	86

4.2.1	Verfahren zur Populationsgewinnung . . . . .	89
4.2.2	Vergleich stochastischer Simulationen . . . . .	97
4.3	Wahrscheinlichkeitstheoretische Beschreibung . . . . .	103
4.4	Die <i>Markov</i> -Leitung . . . . .	104
4.4.1	Mittelwerte . . . . .	110
4.4.2	Varianzen und Kovarianzen . . . . .	112
4.4.3	Stochastische Eigenschaften abgeleiteter Größen . . . . .	113
4.4.4	Beispiel einer <i>Markov</i> -Leitung . . . . .	114
4.4.5	Messung an realer Leitungsanordnung . . . . .	121
<b>5</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>127</b>
<b>A</b>	<b>Matrizant</b>	<b>129</b>
A.1	Wichtige Eigenschaften des Matrizants . . . . .	129
<b>B</b>	<b>Darstellungsformen der Leitungsgleichung</b>	<b>131</b>
B.1	$\mathbf{v}$ - $\mathbf{i}$ -Darstellung . . . . .	131
B.2	$\mathbf{v}$ - $\mathbf{v}_0$ -Darstellung . . . . .	131
B.3	$\mathbf{v}_1$ - $\mathbf{v}_2$ -Darstellung . . . . .	132
B.4	$\mathbf{w}_+$ - $\mathbf{w}_-$ -Darstellung . . . . .	132
B.5	$\varphi$ - $\mathbf{i}$ -Darstellung . . . . .	133

# Danksagung

Eine erfolgreiche Arbeit kann nur in einem kreativen wissenschaftlichen Umfeld gelingen. Aus diesem Grunde möchte ich allen Kollegen und Freunden danken, die dazu beigetragen haben, diese Arbeit Wirklichkeit werden zu lassen.

Die Arbeit entstand während meiner Tätigkeit am Institut für Grundlagen der Elektrotechnik und Elektromagnetische Verträglichkeit der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg. Daher danke ich an erster Stelle allen Mitarbeitern des IGET, insbesondere Herrn Prof. Jürgen Nitsch für die Themenstellung, Betreuung und die stete Bereitschaft zur fachlichen Unterstützung und die hervorragenden Arbeitsbedingungen am Lehrstuhl.

Die zahlreichen fachlichen Diskussionen und wertvollen Hinweise meiner Kollegen, insbesondere von den Herren Dr. Haase, Dr. Gronwald, Dr. Krauthäuser, Dr. Knauff und Dr. Tkachenko, werden dazu beitragen, dass mir meine Zeit am IGET immer in bester Erinnerung bleiben wird.

Den Herren Prof. Wollenberg und Prof. Enders danke ich für die Bereitschaft zur Übernahme der Koreferate und die rasche Durchsicht der Manuskripte.

Ganz besonders möchte ich mich bei meiner Familie und meinen Eltern für die Unterstützung und das entgegengebrachte Verständnis bedanken.



# Kurzfassung

Kabel und Leitungen spielen eine wichtige Rolle bei der Beurteilung der EMV und Signalintegrität von technischen Systemen. Betrachtet man dabei reale technische Systeme, so stellt man fest, dass die dort verwendeten Kabelbäume aus ungleichförmigen Leitungsstrukturen bestehen. Diese Ungleichförmigkeiten führen zu Unterschieden des Übertragungsverhaltens im Vergleich zum Fall gleichförmiger Leitungen. Bei der Behandlung solcher ungleichförmigen Leitungen entstehen Leitungsgleichungen, die nicht mehr mit den klassischen Verfahren gelöst werden können.

In dieser Arbeit werden Methoden vorgestellt, mit denen die Leitungsgleichungen für ungleichförmige Mehrfachleitungen gelöst werden können. Dabei werden neben analytischen Verfahren, wie Reihenentwicklungen und Diagonalisierungsverfahren, auch numerische Verfahren behandelt. Für die verschiedenen Verfahren werden geschlossene Formeln für den Matrizen (Fundamentallösung) und die äquivalenten Quellen angegeben. Zur Verwendung der Ergebnisse in Netzwerkdarstellungen sind Transformationsvorschriften zu Streu-, Propagations- und Admittanzmatrizen beigefügt.

Für die Anwendung der deterministischen Verfahren müssen die exakten geometrischen Positionen der einzelnen Adern entlang des Kabelbaumes bekannt sein. In der Mehrzahl der Fälle sind diese Daten aber nicht bekannt und unterliegen großen Fertigungstoleranzen. Dies führt zu stochastischen Schwankungen über einer Produktionsserie. Hier wird ein *Markov*-Modell für eine zufällig geführte, ungleichförmige Mehrfachleitung entwickelt, welches es ermöglicht, die ersten und zweiten stochastischen Momente analytisch zu berechnen. Auf deren Basis können die Mittelwerte und (Ko)-Varianzen abgeleiteter Größen, wie Spannungen, Ströme oder Streuparameter, angegeben werden.

**Schlagworte** ungleichförmige Leitung, zufällig geführte Mehrfachleitung, elektromagnetische Topologie, Leitungsnetzwerke

## Abstract

Multiconductor transmission lines have an important influence on the electromagnetic compatibility (EMC) and signal integrity of complex technical systems. In real life systems most of these cables are nonuniform. These nonuniformities lead to differences if compared to the properties of a uniform transmission line. This thesis describes numerical and semi-analytical methods to solve the transmission line equation for nonuniform lines which is a non-homogeneous system of first order differential equations with non-constant parameters. Formulas are given to obtain the matrizant (product integral) and the equivalent source vector. Transformations to scattering, propagation and admittance matrices are formulated to use the results in network descriptions of complex cable harnesses. But for the application of these deterministic methods the geometric positions of all wires along the cable tube must be known. In the majority of cases these data are not available and may significantly vary along the cable tube and between samples of a production series. These variations lead to deviation of transmission and EMC characteristics if compared to an ideal, deterministic situation. In this thesis a Markov-model for a random multiconductor transmission line is presented. For this model the first and second stochastic moments of voltages and currents can be analytically calculated. On the basis of these moments the expected values, standard deviations and covariances of (interference) voltages and currents or scattering parameters can be computed.

**Keywords** nonuniform transmission line, random transmission line, electromagnetic topology, transmission line network

## Symbole und Formelzeichen

$\mathbf{A}$	Matrix
$\overline{\mathbf{A}}$	Supermatrix 1. Ordnung – Matrix bestehend aus Blockmatrizen
$\overline{\overline{\mathbf{A}}}$	Supermatrix 2. Ordnung – Matrix bestehend aus blockweise angeordneten Supermatrizen 1. Ordnung
$\mathbf{x}$	Vektor
$\overline{\mathbf{x}}$	Supervektor 1. Ordnung
$\overline{\overline{\mathbf{x}}}$	Supervektor 2. Ordnung
$A_{i,j}$	Element (i,j) der Matrix oder Supermatrix
$\mathbf{v}$	Spannungsvektor
$\mathbf{i}$	Stromvektor
$\mathbf{w}_+, \mathbf{w}_-$	hin- bzw. rücklaufender Wellenvektor auf einer Leitungsstruktur
$\mathbf{a}, \mathbf{b}$	ein- bzw. auslaufender Wellenvektor zur Definition der Streuparameter
$\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$	hin- bzw. rücklaufender Wellenvektor eines <i>tubes</i> im Sinne der elektromagnetischen Topologie – Im Gegensatz zur herkömmlichen Definition der Wellengrößen auf Leitungsstrukturen ist die Laufrichtung des rücklaufenden Wellenvektors positiv festgelegt.
$\mathbf{Z}_c$	Normalisierungsimpedanzmatrix, Wellenwiderstandsmatrix einer Mehrfachleitung
$\overline{\mathbf{Y}}$	Admittanzsupermatrix einer Leitungsstruktur
$\overline{\overline{\mathbf{\Gamma}}}$	Propagationssupermatrix einer Leitungsstruktur
$\overline{\overline{\mathbf{S}}}$	Streusupermatrix einer Leitungsstruktur
$\mathbf{Z}'$	längenbezogene Längsimpedanzmatrix $\mathbf{Z}' = \mathbf{R}' + j\omega\mathbf{L}'$
$\mathbf{Y}'$	längenbezogene Queradmittanzmatrix $\mathbf{Y}' = \mathbf{G}' + j\omega\mathbf{C}'$
$\mathbf{R}'$	Matrix des Widerstandsbelages einer Mehrfachleitung
$\mathbf{L}'$	Matrix des Induktivitätsbelages einer Mehrfachleitung
$\mathbf{G}'$	Matrix des Leitwertbelages einer Mehrfachleitung
$\mathbf{C}'$	Matrix des Kapazitätsbelages einer Mehrfachleitung
$z$	Parameter für den Ausbreitungsweg entlang der Leitungsstruktur

$z_0$	Anfang der Leitung
$z_L$	Ende der Leitung
$n_L$	Anzahl der Adern in der Leitungsstruktur (ohne Referenz)
$N$	Dimension einer Matrix, eines Problems
$\bar{\mathbf{x}}$	Supervektor der unbekanntenen Größen in der entsprechenden Formulierung der Leitungsgleichungen
$\bar{\mathbf{x}}^{(s)}$	Supervektor der verteilten Quellgrößen
$\bar{\mathbf{R}}^x$	Parametersupermatrix in der Formulierung der Leitungsgleichungen bezüglich der Größen $x$
$\mathcal{M}_{z_0}^{z'}\{\bar{\mathbf{R}}^x\}$	Matrizant (Propagator) von Punkt $z_0$ bis $z'$ in der Formulierung der Leitungsgleichungen für die Größen $x$
$\bar{\mathbf{M}}^w, \bar{\mathbf{M}}^{vi}$	Matrizant für die gesamte Leitung in Wellendarstellung bzw. Spannungs-Strom-Darstellung
$\mathbf{M}_{12}^w, \mathbf{M}_{12}^{vi}$	Blockmatrix (Teilmatrix) der Dimension $(n_L, n_L)$ von $\bar{\mathbf{M}}^w$ bzw. $\bar{\mathbf{M}}^{vi}$ – erster Zeilenblock in der zweiten Blockspalte
$\mathbf{E}, \bar{\mathbf{E}}$	Einheitsmatrix
$e^{\mathbf{A}}$	Matrixexponentialfunktion
$\  \cdot \ $	Matrix Norm
$\  \cdot \ _{\infty}$	$\infty$ -Norm
$\  \cdot \ _2$	2-Norm
$\text{tr}(\mathbf{A})$	Spur der Matrix $\mathbf{A}$
$\mathbf{A} \oplus \mathbf{B}$	direkte Summe der Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$
$\bigoplus \mathbf{A}_i$	direkte Summe der Matrizen $\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_N$
$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$	<i>Kronecker</i> -Produkt der Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$
$\mathbf{x}^T, \mathbf{A}^T$	transponierter Vektor, transponierte Matrix
$\text{colvec}(\mathbf{A})$	Umordnen der Matrix $\mathbf{A}$ zu einem Spaltenvektor
$\bar{\sigma}$	absoluter Fehler, Abweichung der Approximation vom wahren Wert
$\epsilon$	absolutes Genauigkeitsmaß
$\kappa$	relative Genauigkeitsmaß
$\max$	Maximum
$\sup$	Supremum
$\Re\{\mathbf{A}\}$	Realteil einer komplexen skalaren Größe oder Matrix
$\Im\{\mathbf{A}\}$	Imaginärteil einer komplexen skalaren Größe oder Matrix
$x(\gamma)$	zufällige Größe $x$ , der Wert der Variablen $x$ unterliegt zufälligen Änderungen
$f_x(x)$	Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung von $x$
$\langle x \rangle$	Erwartungswert von $x$
$\text{Var}\{x\}$	Varianz der Größe $x$

---

$\text{Cov}\{x, y\}, C_{x,y}$	Kovarianz der Größen $x$ und $y$
$\sigma_x$	Standardabweichung der Größe $x$
$U[a, b]$	Gleichverteilung im Intervall $[a, b]$
$N[\mu, \sigma^2]$	Normalverteilung mit dem Mittelwert $\mu$ und der Standardabweichung $\sigma$ bzw. Varianz $\sigma^2$
$\mathbf{V}(\mathbf{x})$	Fehlermatrix des Vektors $\mathbf{x}$
$\mathbf{V}(\mathbf{A})$	Fehlermatrix der Matrix $\mathbf{A}$ , ist identisch mit $\mathbf{V}(\text{colvec}(\mathbf{A}))$
$\mathbf{J}$	<i>Jacobi</i> -Matrix
$m(z)$	diskreter <i>Markov</i> -Prozess über $z$
$e_q$	möglicher Zustand des <i>Markov</i> -Prozesses
$Q$	Anzahl der verschiedenen möglichen Zustände $e_q$
$\mathcal{P}\{e\}$	Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses $e$
$\lambda_{p,q}$	Übergangsrate des <i>Markov</i> -Prozesses vom Zustand $q$ zu Zustand $p$
$\lambda$	Matrix der Übergangsraten
$p_q(\mathbf{x}', z')$	Kurznotation für $\mathcal{P}\{\mathbf{x} = \mathbf{x}', z = z'   m(z) = e_q\}$
$f_q(\mathbf{x}, z')$	bedingte Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung über den Vektorraum von $\mathbf{x}$ unter der Bedingung, dass an der Stelle $z = z'$ das Ereignis $e_q$ eintritt
$\Delta V_{q, \mathbf{x}'(z)}$	Volumenelement im Vektorraum von $\mathbf{x}$ um den Punkt $\mathbf{x}'(z)$ unter der Bedingung, dass $m(z) = e_q$



# Kapitel 1

## Motivation und Einleitung

Die Anzahl der elektrischen und elektronischen Komponenten in industriellen Produkten, Geräten und Anlagen nahm in den letzten Jahrzehnten kontinuierlich zu. Da sich im Umfeld von technischen Einrichtungen somit immer mehr solcher Komponenten konzentrieren und Informationen austauschen, kommt der Elektromagnetischen Verträglichkeit (EMV) als Produkteigenschaft eine zunehmende Bedeutung zu.

Die Tendenz zu steigenden Arbeitsfrequenzen, zu wachsender Kommunikation – sowohl drahtgebunden als auch drahtlos – und die zunehmende Verkleinerung elektronischer Strukturen tragen zur Verstärkung dieses Trends bei.

Durch die steigende Anzahl der verbauten Komponenten wird die EMV-Analyse des Gesamtsystems erschwert. Zum einen beeinflussen sich immer mehr Teilsysteme gegenseitig, andererseits ist eine steigende Anzahl von Verbindungsstrukturen für die Informations- und Energieübertragung notwendig.

So bestand beispielsweise das Bordnetz des VW Käfers in den 50er Jahren aus einem Kabelbaum mit 9 Adern bei einer Gesamtlänge von 4 m (siehe Abbildung 1.1). Heutzutage findet man in einem Mittelklassewagen in etwa zweitausend Leitungsadern mit einer Gesamtlänge von ca. 4 km. An diesem Kabelbaum – oder besser Netzwerk von Kabelbäumen – sind bereits heute bis zu 80 elektronische Steuergeräte angeschlossen. Einen Eindruck verschafft die dreidimensionale Darstellung in Abbildung 1.2. Man erwartet einen weiteren Anstieg bis zum Jahr 2010 um 15 bis 30 Prozent. Dies stellt die EMV und insbesondere deren Analyse vor neue Anforderungen.

Eine weitere Herausforderung ist die Virtualisierung des klassischen Entwicklungsprozesses. Bei den heutzutage zur Verfügung stehenden Produktentwicklungszeiten ist es nicht möglich, mit der Lösung der EMV-Problematik bis zur Erstellung eines Prototypen zu warten. Vielmehr muss auf die EMV im Designprozess eingegangen werden. Dazu ist eine numerische EMV-Analyse bzw. Simulation nötig.

Für die Beurteilung der Elektromagnetischen Verträglichkeit von Systemen und Anlagen ist es extrem wichtig zu wissen, wie die Verbindungsstrukturen das elektromagnetische Verhalten beeinflussen, sowohl bezüglich der Störabstrahlung als auch der Störempfindlichkeit.

Die gewaltigen Fortschritte bei der Entwicklung moderner Rechentechnik in den letzten Jahren spiegeln sich sowohl in der Leistungsfähigkeit moderner Rechenanlagen als auch in der

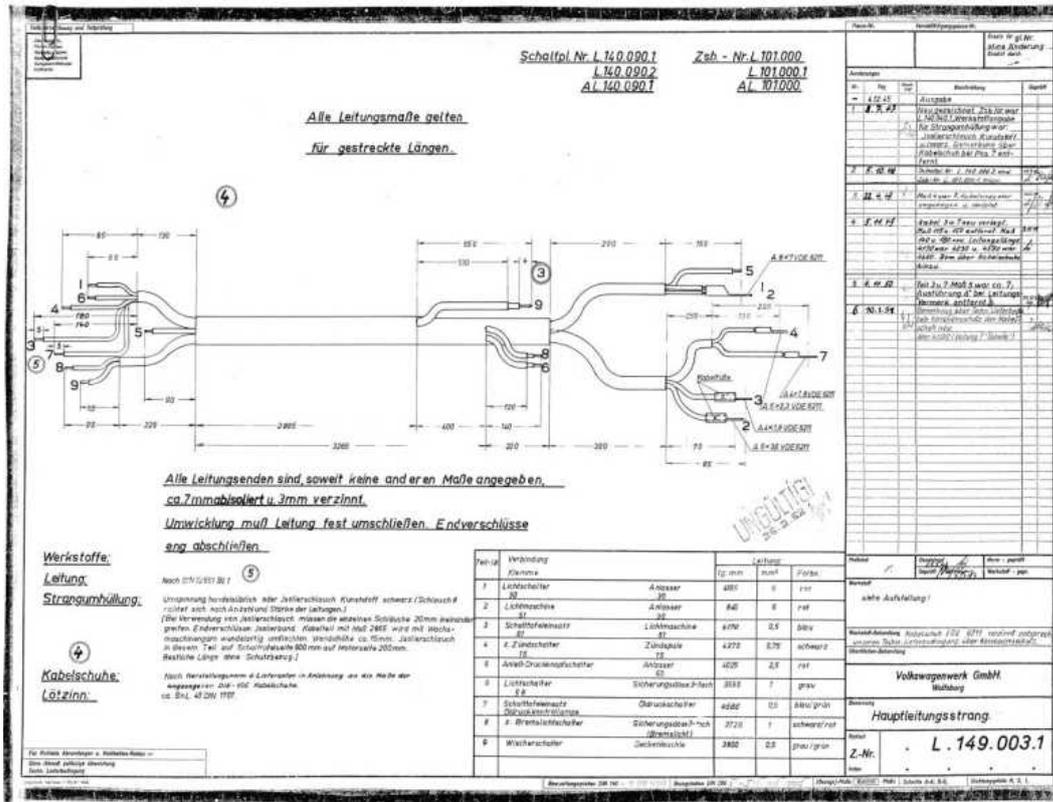


Abbildung 1.1: Im VW Käfer der 50er Jahre war das Bordnetz noch überschaubar. (Illustration: Volkswagen [1])

Entwicklung verschiedenster leistungsfähiger Programmpakete zur Simulation elektromagnetischer Felder wider. Gerade auf dem Gebiet des Entwurfes von integrierten elektronischen Schaltungen, insbesondere in der Hochfrequenz-Technik, haben sich extrem leistungsfähige Programmpakete etabliert, die es ermöglichen, schon im Designstadium Aussagen über das Verhalten des Produktes zu treffen und Optimierungen vorzunehmen. Beispielhaft seien hier als die bekanntesten Methoden die Finite Differenzen im Zeitbereich (FDTD), die Momentenmethode (MoM), Physikalische Optik (PO), die Methode der Finiten Integrale (FIT) oder auch die PEEC-Methode erwähnt. Für jede dieser Methoden existieren meist mehrere sehr leistungsfähige Implementierungen. Dabei hat jede ihre eigenen Vor- und Nachteile für eine spezifische Aufgabenstellung [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9].

Trotz des massiven Fortschrittes sind Aussagen zur Elektromagnetischen Verträglichkeit von komplexen Systemen aufgrund numerischer Simulationen schwierig. Dies liegt zum einen an der großen elektrischen Ausdehnung der zu untersuchenden Objekte. Die Größenordnung der interessierenden Systeme erstreckt sich bis zum Hundertfachen der Wellenlänge. Zum anderen unterscheiden sich die charakteristischen Geometrien im System extrem, d.h. das Verhältnis der Gesamtgeometrie zu den kleinsten zu berücksichtigenden Abmessungen im System kann bis zu einem Hunderttausendstel betragen. Beispielsweise liegen die typischen Adernquerschnitte bei Verkabelungen in der Größenordnung von Millimetern, bei gedruckten

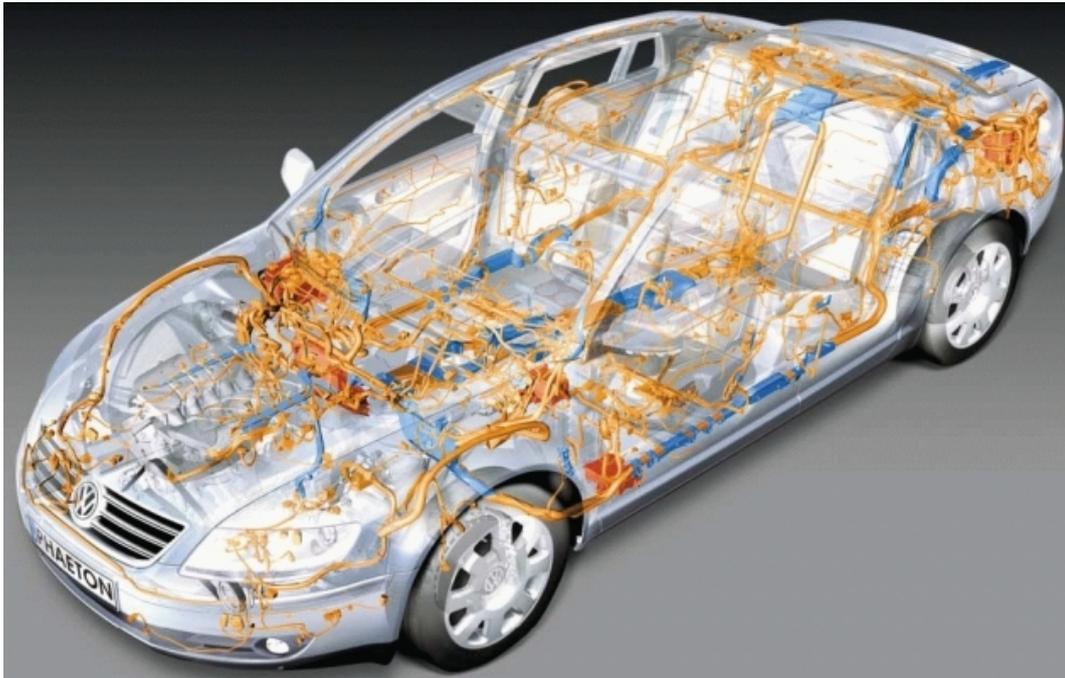


Abbildung 1.2: Der Kabelbaum im VW Phaeton besteht aus 2110 Einzelleitungen und hat eine Gesamtlänge von 3860 Metern – bei einem Gewicht von 64 Kilogramm. (Illustration: Volkswagen [1])

Schaltungen noch eine Größenordnung kleiner. Die typische Dimension des Gesamtsystems variiert von mehreren Zentimetern bis zu vielen Metern. So erreicht beispielsweise der Airbus A 380-800 eine Länge von 73 Metern und eine Spannweite von knapp 80 Metern.

Diese unterschiedlichen Anforderungen an die Diskretisierung des Gesamtproblems erschweren eine feldnumerische Berechnung komplexer Systeme mit Kabeln und Leitungen und machen sie für diese Aufgabenstellung extrem ineffizient. Hybridmethoden, welche z.B. die Leitungstheorie mit numerischen Feldberechnungsverfahren koppeln, bringen Erleichterung bei der Berechnungsfähigkeit [10, 2].

So stellt die Leitungstheorie auch nach ihrer mehr als 130-jährigen Geschichte ein wichtiges Instrument zur Untersuchung elektromagnetischer Vorgänge dar. Historisch gesehen nahm diese schon 1747 ihren Anfang, als *Sir William Watson* die Möglichkeit erkannte, über einen elektrischen Draht mit der Erde als Rückleiter elektrische Signale zu übertragen. Diese erste Leitung entstand über 100 Jahre bevor *Maxwell* seine Gleichungen formulierte. Wenig später, im Jahre 1753, entstand aus diesen Versuchen die Idee, einen Telegraphen aufzubauen, um Nachrichten zu versenden. Es sollte allerdings noch bis ins nächste Jahrhundert dauern, bis der erste Landtelegraph eine größere Strecke überbrückte und in Betrieb genommen werden konnte. Im Jahre 1851 wurde erstmalig ein Koaxialkabel als Unterwasserkabel verwendet. Die immer länger werdenden Kabel in der Telegraphie machten eine mathematische Beschreibung der Vorgänge auf Leitungen notwendig. Die erste Formulierung einer

Leitungsgleichung aus dem Jahre 1854 stammt von *William Thomson*\* und bezog sich auf Koaxialkabel. Er berücksichtigte die Querkapazität und den Längswiderstand. Aufgrund der geringen auftretenden Frequenzen, die sich in erster Linie aus der Bedienungsgeschwindigkeit des Telegraphieschalters ergaben, spielte die Längsinduktivität in seinen Betrachtungen noch keine entscheidende Rolle. *Oliver Heaviside* erweiterte die Gleichungen und berücksichtigte 1874 die Leitfähigkeit der Isolation und zwei Jahre später die Induktivität. Er entwickelte diese Leitungsgleichungen auf netzwerktheoretischer Basis unabhängig von den Arbeiten *Maxwells*. Das erste Kabel für transatlantische Fernsprechkommunikation wurde 1956 in Betrieb genommen. Es ermöglichte 36 simultane Fernsprechverbindungen. Im Jahre 1988 erlaubte das erste transatlantische Lichtwellenleiterkabel schon 8000 simultane Gespräche (8000 x 64kBit).

Trotz der abnehmenden Bedeutung der nichtoptischen leitungsgeführten Fernkommunikation, bedingt durch die Verwendung von Lichtwellenleitern und Satellitentechnik zur Übertragung, stellen Kabel und Leitungen ein wichtiges Problemfeld in der Elektrotechnik, insbesondere der Elektromagnetischen Verträglichkeit, dar. Zum einen werden die Strukturen mit zunehmender Arbeitsfrequenz elektrisch lang und Verbindungselemente agieren als Leitungen. Zum anderen stellen Kabel und Leitungen auf kurzen Strecken z.B. in der Fahrzeugindustrie und Automatisierungstechnik noch den Großteil der verwendeten Informationsübertragungsmedien dar, auch wenn hier im zunehmenden Maße die Funkkommunikation Einzug hält (z.B. Bluetooth). Ursache hierfür sind hauptsächlich die verhältnismäßig geringen Herstellungskosten und die einfache und robuste Installationstechnik, insbesondere die Kontaktierungstechnologien und Steckerkonfektionierung der drahtgeführten Übertragungstechnik. Bei der Funkkommunikation stellt sich immer das Problem des begrenzten Funkraumes und der Sicherstellung der inneren EMV im Gesamtsystem. Gerade im Automobilbau hat sich die Elektronik zu einer Schlüsseltechnologie entwickelt.

Im Rahmen dieser Arbeit soll der Einfluss der konkreten Auslegung der elektrischen Verbindungsstrukturen auf die dominanten elektromagnetischen Vorgänge in komplexen Systemen untersucht werden. Ausgangspunkt ist die topologische Darstellung komplexer Systeme, die auf [11] zurückgehen. Diese Ansätze sollen dahingehend erweitert werden, dass auch Netzwerke von ungleichförmigen Leitungen in die Betrachtungen eingeschlossen werden. Dabei werden Leitungsstrukturen und Netzwerke ausschließlich im Frequenzbereich behandelt. Die zur Lösung der ungleichförmigen Leitungsgleichung notwendigen Algorithmen werden hergeleitet, charakterisiert und verglichen. Aufbauend auf diese Lösungsverfahren wird die Integration in verschiedenen Netzwerkdarstellungen verdeutlicht.

In den letzten Jahren wurden verschiedene Versuche unternommen, die klassische Leitungstheorie der gleichförmigen Leitungen zu erweitern, um ungleichförmig geführte Leitungen zu berücksichtigen [12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20]. Darüber hinaus wurden beachtliche Fortschritte bei der Untersuchung ungleichförmiger Leitungen errungen [21, 22, 23, 24, 25]. Hierbei werden Leitungsgleichungen aufgestellt, bei denen die Parameter im Allgemeinen ortsabhängig sind. Damit wird es notwendig, neue Lösungsverfahren, vorwiegend numeri-

---

\*Im Jahre 1892 wurde *Thomson* in den Adelstand erhoben und wurde *Baron Kelvin of Largs*.

---

scher Natur, aufzustellen und zu untersuchen. Dies soll Hauptgegenstand des Kapitels 3 sein.

Ein weiteres Problem stellt die Tatsache dar, dass die geometrischen und elektrischen Randbedingungen sowie sämtliche Materialparameter für eine Simulation bekannt sein müssen. Dies ist in den seltensten Fällen der Fall. Oftmals wird dann nur mit Annahmen oder Schätzungen gearbeitet. Betrachtet man beispielsweise das Problem der Verkabelung eines Kraftfahrzeuges oder Flugzeuges, so erkennt man schnell, dass es nicht möglich ist, die exakten Positionen aller verlegten Adern der Kabelbäume zu bestimmen. Selbst wenn dieses gelänge, ist eine Aussage über das elektromagnetische Verhalten des Produktes in der Serienfertigung aufgrund von Simulationen mit diesen Daten mehr als fragwürdig, da das Produkt Fertigungstoleranzen unterliegt. Einige Aussagen zu Ursachen und Größenordnung dieser Toleranzen sind in [26] zu finden.

Gerade im Bereich der Kabelverlegung ist das Produktionsergebnis oftmals von der „Tagesform“ des Monteurs abhängig. Um trotz dieser „Unwissenheit“ zu einer Aussage zu gelangen, ist zwingend eine statistische Analyse solcher Problemstellungen notwendig. Diese Notwendigkeit ergibt sich in gleicher Weise auch bei Messungen zur Elektromagnetischen Verträglichkeit an Prototypen bzw. Stichproben einer Fertigungsreihe.

Aus diesem Grunde wird im Kapitel 4 der Einfluss zufälliger Änderungen der geometrischen Anordnung der einzelnen Leiter im Kabelbündel analysiert. Dabei werden diese Änderungen statistisch und wahrscheinlichkeitstheoretisch untersucht und deren Auswirkungen auf die Leitungsparameter bzw. den Matrizen angegeben. Dies schließt auch Verfahren zur Generierung stochastischer Leitungsführungen ein, welche in *Monte-Carlo* Simulationen verwendet werden. Weitergehend wird eine wahrscheinlichkeitstheoretische Methode abgeleitet, mit deren Hilfe statistische Momente für eine stochastische Mehrfachleitung mit *Markov*-Eigenschaften analytisch berechnet werden können.

Aus diesen Ergebnissen lassen sich Toleranzen für eingekoppelte Stör- und übertragene Nutzsignale ableiten.



## Kapitel 2

# Elektromagnetische Topologie

Ausgangspunkt der Überlegungen dieser Arbeit sind die Beiträge von *Baum*, *Liu* und *Tesche* [11, 27], *Lee* [28] \*, *Karlsson* [29] und *Parmantier* [30], aber auch Arbeiten über die Theorie der gleichförmigen Mehrfachleitungen [31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38]. Die folgende Darstellung des aktuellen Standes der Forschung auf dem Gebiet der Beschreibung von komplexen Systemen mit Leitungsnetzwerken soll als Ausgangspunkt für weiterführende Überlegungen dienen. Soweit in diesem Kapitel von Leitungen gesprochen wird, sind gleichförmige Mehrfachleitungen gemeint.

### 2.1 Darstellung der topologischen Zerlegung

Bei der Untersuchung der EMV komplexer Systeme stößt man schnell an die Grenzen analytischer Betrachtungen, numerischer Berechnungen und auch experimenteller Untersuchungen. Die Ursachen liegen in der Komplexität, die analytische Betrachtungen verhindern oder nur unter extremen Vereinfachungen erlauben. Die Anzahl der zu berücksichtigenden Signale ist schwer überschaubar. Die elektrische Größe der zu untersuchenden Systeme erschwert oder verhindert zudem eine numerische Komplettsimulation des zu untersuchenden Objektes.

Die Vielzahl der Signale und Größen lassen Messungen leicht ausufern. Beschränkungen in der verfügbaren Messzeit führen zu einer begrenzten Anzahl von Aussagen (z.B. einzelne Transferfunktionen) über das System, was eine umfassende Analyse der EMV erschwert. Auch skalierte Experimente beseitigen dieses konzeptuelle Problem nicht. Sie ermöglichen eine vereinfachte Handhabung der Experimente bzw. des skalierten Systems, die große Anzahl der Messgrößen bleibt jedoch bestehen. Die Ergebnisse sind auch immer nur für die konkrete Ausführung relevant und erlauben nur in Ausnahmefällen Rückschlüsse auf zukünftige, geänderte Ausführungen des Systems. Der erhebliche finanzielle und zeitliche Aufwand für die Durchführung der erforderlichen Messkampagnen soll auch nicht unerwähnt bleiben.

Zudem müssen für Messungen die Systeme oder Prototypen gegenständlich verfügbar sein. Dies ist im heutigen Design- und Entwicklungsprozess nicht mehr zu gewährleisten, da ein Großteil der Entwicklung virtuell ohne Prototypenfertigung durchgeführt wird. Eine zu späte Berücksichtigung der EMV im Design verursacht allerdings erhöhte Kosten durch Redesign

---

\*In [11] wird für die Systemgleichung eines Netzwerkes von Mehrfachleitungen der Begriff der BLT Gleichung nach den Anfangsbuchstaben der Autoren geprägt.

und Härtung.

Dies motiviert zur Suche nach neuen Methoden zur Analyse und zum Design komplexer Systeme. Diese neuen Methoden müssen Hilfsmittel zur Verfügung stellen, mit denen die signifikanten, leistungsbestimmenden Systemvariablen ermittelt werden können. Die Ursache der begrenzten Anwendbarkeit der numerischen und experimentellen Methoden ist die Tatsache, dass sie versuchen, das gesamte Problem mit einer einzelnen Methodik zu lösen. Im Gegensatz dazu steht die Elektromagnetische Topologie (EMT). Sie basiert auf der Zerlegung des Gesamtsystems in gekoppelte, kleinere Teilsysteme auf der Grundlage von hierarchischen und/oder elektromagnetischen Annahmen (z.B. Schirmung aufgrund des Gehäuses). Die Wechselwirkungen zwischen diesen Teilsystemen werden mit Hilfe des Interaktionsgraphen und des topologischen Diagramms graphisch dargestellt. Diese rein formale Darstellung des Gesamtproblems wird anschließend in eine Netzwerkbeschreibung überführt. Die Teilsysteme werden dann einzeln mit den dafür geeignetsten Methoden gelöst. Die Verkopplung wird durch die Netzwerkbeschreibung realisiert. Ein Vorteil der EMT ist es, dass sie die Verknüpfung von Ergebnissen numerischer Simulationen und Messungen ermöglicht. Dabei können Resultate verschiedenster Methoden kombiniert und somit für das jeweilige Teilproblem die effizienteste Methode gewählt werden.

Das Ziel der EMT ist also eine größtmögliche Modularisierung. Dadurch werden drei neue Möglichkeiten für den Designprozess und die Systemanalyse geschaffen:

- *Hybridisierung* - Verwendung verschiedener Lösungsverfahren für die einzelnen Teilprobleme bis hin zu Messungen,
- *Datenbanken* - Aufbau topologischer Datenbanken für wiederverwendbare Komponenten,
- *Parametrisierung* - Untersuchung von Systemveränderungen aufgrund der Änderung von Parametern in Teilsystemen.

Die rasante Entwicklung moderner Rechentechnik und entsprechender 3D-Simulationsprogramme für die Lösung der *Maxwell'schen* Gleichungen in den letzten Jahren erlaubt es heutzutage, das äußere Problem, d.h. die Erregung des Gesamtsystems aufgrund externer Quellen, bequem zu lösen. So können bei Quellen, die außerhalb des Systems angeordnet sind, die Oberflächenstrombelegung und das gestreute Feld sehr genau berechnet werden. Unvoreilhafterweise erfordert die Behandlung des inneren Problems, d.h. die Ausbreitung eingekoppelter Störungen im System und deren Wirkung, eine sehr detailreiche Beschreibung bzw. Diskretisierung der Systemgeometrie. Dies stellt alle gängigen 3D-Simulationsprogramme vor Probleme.

Die Behandlung des inneren Problems mit Hilfe der EMT gestaltet sich dreistufig:

1. Unterteilung des Gesamtsystems in kleinere Teilsysteme,
2. Behandlung der einzelnen entkoppelten Teilsysteme,
3. Lösung des Netzwerkes der gekoppelten Teilsysteme.

Die Unterteilung des Gesamtsystems in Teilsysteme ist in der Regel ein sehr intuitiver Vorgang, da diese Zerlegung erst einmal willkürlich erfolgt. Hierbei ist auch ein signifikanter Unterschied zu den klassischen 3D Methoden der Feldberechnung zu sehen. Während bei diesen unter Beachtung von Diskretisierungs- und anderer *Rule-of-Thumb*-Regeln im Allgemeinen brauchbare Ergebnisse zu erzielen sind, ist bei fehlerhafter Dekomposition des Gesamtsystems kein sinnvolles Ergebnis zu erreichen.

Oftmals ist es sinnvoll, als Grenzen eines Teilproblems physikalische Oberflächen (metallische Wände, Schirme, Kabel) zu verwenden. Dadurch vereinfacht sich aufgrund physikalischer Beziehungen (z.B. Schirmdämpfung) meist das im Anschluss aufzustellende topologische Netzwerk, da einzelne Zweige entfallen oder sogar Teilnetze entkoppelt werden können. Dabei werden grundsätzlich zwei Arten von topologischen Oberflächen unterschieden.

1. Oberflächen, die als idealer Schirm wirken und Signale auf dem Weg von der einen zur anderen Seite sehr stark dämpfen. Bezeichnet werden diese im Englischen als *proper surface* in dem Sinne, dass sie elektromagnetisch wirklich separierende Oberflächen darstellen. Beispiele wären die Außenhaut eines Flugzeuges, ein Kabelschirm oder auch eine Schirmbox für elektronisches Equipment. Diese Oberflächen ermöglichen eine getrennte Behandlung der Kopplungs- und Ausbreitungsvorgänge auf beiden Seiten und dienen später der Festlegung der Schirmungsebene (*shielding level*).
2. Oberflächen, die keine ideale elektromagnetische Schirmwirkung besitzen. Sie dienen der Einteilung der Teilprobleme nach funktionalen und physikalisch-geometrischen Aspekten. Damit sind die Signale auf beiden Seiten der Oberfläche miteinander verknüpft. Diese Oberflächen werden im Englischen als *elementary surface* bezeichnet. Sie geben mit ihren natürlichen Grenzen Anhaltspunkte für die Dekomposition des Systems und die Interaktionen der Teilsysteme. Ein Beispiel hierfür wäre ein Schirmblech mit Loch bzw. mit Kabeldurchführung. Die Schirmblechoberfläche wäre eine ideale Grenze zur Unterteilung in Teilsysteme (Dekomposition). Das Loch bzw. die Kabeldurchführung entspricht dabei einem Propagationsweg, d.h. einer Interaktion zwischen den Teilsystemen.

Bereiche, die komplett von topologischen Oberflächen umschlossen sind, werden als topologische Volumina bezeichnet. Auch hier unterscheidet man in Analogie zu den topologischen Oberflächen zwischen *proper volumes* und *elementary volumes*. Dabei ist ein Volumen nur dann ein *proper volume*, wenn es komplett und ausschließlich von *proper surfaces* begrenzt wird. Alle verbleibenden Volumina sind automatisch *elementary volumes*. Diese vorgenommene Einteilung in Teilvolumina wird im Topologischen Diagramm (*topological diagram*) graphisch dargestellt. In einem *proper volume* treten bei der Annahme einer guten Schirmung (*good shielding approximation*) nur Wechselwirkungen innerhalb dieser Schirmungsebene auf, da durch die äußeren Oberflächen keine Wechselwirkungen mit der Umgebung möglich sind.

Auf Grundlage dieses Diagramms, welches den Darstellungen der Mengentheorie ähnelt, können Interaktionsgraphen aufgestellt werden. Diese beschreiben die Wechselwirkungen zwischen den einzelnen topologischen Volumina. Dabei kann sich ein Interaktionsgraph auf einen bestimmten Wirkungsmechanismus, wie z.B. die Kopplung und Ausbreitung von Störungen

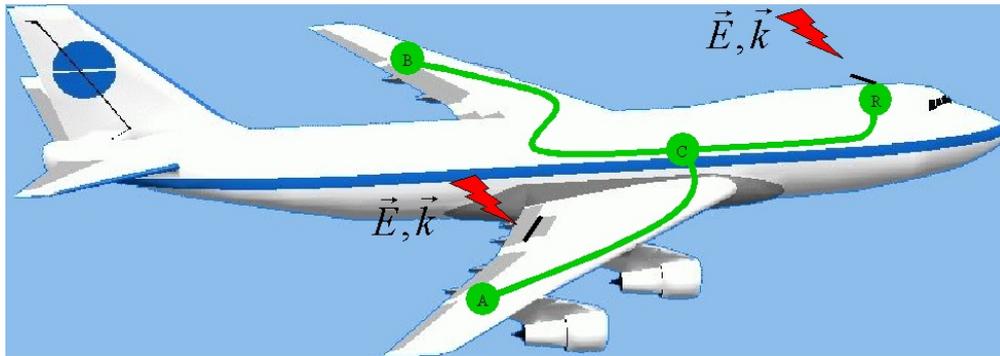


Abbildung 2.1: Verkehrsflugzeug mit Verkabelung als komplexes technisches System

entlang Kabeln und Leitungen, konzentrieren. So können für eine topologische Zerlegung eines komplexen Systems mehrere Interaktionsgraphen aufgestellt werden.

Ist die topologische Zerlegung durchgeführt und ein Interaktionsgraph für ein komplexes System aufgestellt, kann sehr einfach ein Schutz-, EMV- oder Schirmungszonenmodell des Systems abgeleitet werden. Dabei ergeben sich die Beeinflussungsmatrizen, die beispielsweise in [39] zur systematischen Beschreibung eingeführt wurden, als ein qualitatives Ergebnis der topologischen Zerlegung und der Analyse des Interaktionsgraphen. Die Einhaltung des Schutzzonen-Konzeptes oder auch dessen Verletzung kann leichter erkannt werden, und eine nachfolgende Analyse kann Verbesserungsmöglichkeiten aufzeigen.

Die Vorgehensweise der topologischen Zerlegung soll an einem Beispiel verdeutlicht werden. In Abbildung 2.1 ist als Beispiel für ein zu untersuchendes komplexes System ein Verkehrsflugzeug dargestellt. Beispielhaft werden folgende im Flugzeug installierte Subsysteme betrachtet:

- ein Kommunikationsmodul mit Antenne in der Nähe des Cockpits (R),
- eine zentrale Steuereinheit (C) im Flugzeugrumpf,
- ein Aktor (A) im rechten Tragflügel und
- ein Sensor (B) im linken Tragflügel.

Die Subsysteme sind mit Kabeln untereinander verbunden, wie in Abbildung 2.1 angedeutet ist. Zur Vereinfachung der entstehenden Graphen sollen im Folgenden nur zwei Einkopplungspfade von vielen möglichen untersucht werden. Ein Pfad repräsentiert die Einkopplung über eine Apertur am Höhenruder der rechten Tragfläche. Der zweite stellt die gewünschte Einkopplung des Nutzsignales (und die unerwünschte Stör-Einkopplung) über die Empfangsantenne des Kommunikationsmodules in der Nähe des Cockpits dar. Des Weiteren soll die Wechselwirkung über die Kabel und Leitungen berücksichtigt werden.

Der erste Schritt zur Umsetzung des topologischen Konzeptes ist die Zerlegung des Gesamtvolumens „Flugzeug“ in Teilvolumina. Idealerweise werden dabei metallische Gehäusegrenzen mit berücksichtigt. Das topologische Diagramm ist in Abbildung 2.2 dargestellt.

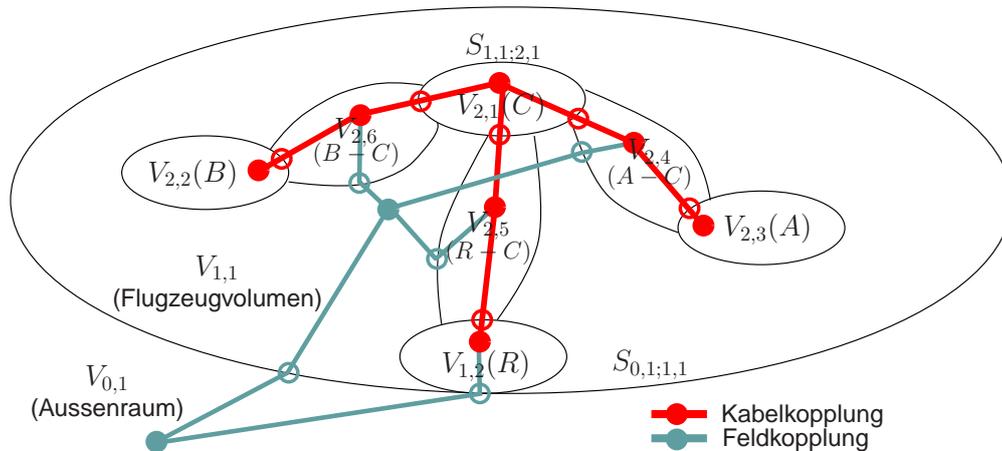


Abbildung 2.2: Topologisches Diagramm und Interaktionsgraphen für das Beispiel „Flugzeug“

Die Flugzeugoberfläche  $S_{0,1;1,1}$  trennt dabei das Flugzeuginnere  $V_{1,1}$  vom Umgebungsvolumen  $V_{0,1}$  ab. Dabei stellt der erste Index  $k$  der Volumina  $V_{k,i}$  die Schirmungsebene dar, der zweite Index  $i$  ist eine durchgehende Nummerierung der Volumina dieser Schirmungsebene. Die konkrete geometrische Gestaltung der Volumenbegrenzungsflächen wird dabei nicht nachgebildet, vielmehr wird das Volumen symbolisch als Ellipse dargestellt. Diese Zerlegung setzt sich dann nach innen weiter fort. Die Gehäuseoberfläche der zentralen Steuereinheit  $S_{1,1;2,1}$  trennt den Flugzeuginnenraum  $V_{1,1}$  vom Gerätevolumen  $V_{2,1}$  der Steuereinheit. So wird weiter verfahren, bis das System in genügend kleine Teilvolumina aufgeteilt ist.

Im zweiten Schritt müssen deren Wechselwirkungen mit Hilfe der Interaktionsgraphen beschrieben werden. Hierbei können für verschiedene Wechselwirkungsmechanismen unterschiedliche Graphen aufgestellt werden. Denkbar sind auch frequenzvariable Graphen, bei denen ab einer bestimmten Grenzfrequenz Kanten zum Graphen ergänzt oder im Graphen eliminiert werden.

In Abbildung 2.2 sind zwei Interaktionsgraphen zu sehen, einer für die Kabelkopplung und einer für die Feldwechselwirkung. So ist eine Feldwechselwirkung (Kante im entsprechenden Graphen) zwischen dem äusseren Volumen  $V_{0,1}$  und dem Volumen  $V_{1,1}$  zu erkennen. Diese Kante entspricht der Kopplung durch die Apertur. Eine weitere Feldwechselwirkung stellt die Einkopplung in die Kommunikationsantenne oberhalb des Cockpits dar. Diese koppelt dann an den Interaktionsgraphen für die Kabelkopplung als konzentrierte Quelle im Volumen  $V_{1,2}$  an.

Identisch ist der Interaktionsgraph für die Kabelkopplung zu interpretieren. Die Steuereinheit C (Volumen  $V_{2,1}$ ) interagiert über das Kabelvolumen  $V_{2,4}$  mit dem Volumen des Aktors A im rechten Tragflügel (Volumen  $V_{2,3}$ ).

So werden alle Wechselwirkungen im Interaktionsgraphen erfasst. Dabei ist es wichtig, einerseits Vereinfachungen und a priori Wissen über das System einfließen zu lassen, um den Graphen so einfach wie möglich zu halten und andererseits keine signifikanten Wechselwirkungen zu ignorieren. Im Zweifelsfall sollte die Wechselwirkung mit einbezogen werden.

## 2.2 Topologische Netzwerke

Zur quantitativen Beschreibung der Interaktionsgraphen ist es notwendig, diese in topologische Netzwerke zu überführen. Diese bestehen aus den folgenden zwei Grundelementen:

- *tubes* - beschreiben die Ausbreitung von elektromagnetischen Größen entlang eines Weges
- *junctions* - beschreiben die Verteilung (Streuung) an den definierten Toren.

Das topologische Netzwerk bildet dabei das elektromagnetische Verhalten des Gesamtsystems als Verkopplung von Teilvolumina ab. Im Netzwerk werden dazu die Volumina als *junctions* modelliert und mit Hilfe der *tubes* miteinander gekoppelt. Die Erregung des Netzwerkes erfolgt auf der Basis von äquivalenten Quellen entweder entlang der *tubes* (BLT1) oder konzentriert an den Toren der *junctions* (BLT2).

Betrachtet man reine Leitungsnetzwerke, ergibt sich die abzubildende Topologie auf natürliche Weise. Die Kabel und Leitungen werden dabei als *tubes* im Netzwerk repräsentiert und die angeschlossenen Geräte sowie Klemm- und Verteilungsstellen als *junctions*. Dabei erweist sich als vorteilhaft, dass die angeschlossenen Geräte meist in metallischen Gehäusen verbaut sind. Somit kann unter Verwendung der *good shielding approximation* eine weitgehende Entkopplung von *junction*-Volumen und Außenvolumen angenommen werden. Elektromagnetische Störungen und Signale können dann nur dominierend über die Kabel und Leitungen mit den *junctions* wechselwirken. Eine Möglichkeit zur Beschreibung des Ausbreitungsverhaltens entlang der *tubes* (Kabel und Leitungen) stellt die klassische Mehrfachleitungstheorie dar. Die Wechselwirkungen des Interaktionsgraphen für die Feldeinkopplung werden durch Einkoppelmodelle im Rahmen der Leitungstheorie mit berücksichtigt. Aber auch andere Methoden können zum Einsatz kommen. Das Streuverhalten der angeschlossenen Geräte ergibt sich aus analytischen Betrachtungen oder numerischen Simulationen. Beispielsweise kann die Streumatrix einer idealen *junction* (Klemmstelle zwischen Leitungsabschnitten, direkte Verbindung von Leitungsenden ohne weitere eingebrachte Zweipole) direkt aus den Wellenwiderständen der angeschlossenen Leitungen bestimmt werden [40]. Zur numerischen Bestimmung der Streumatrix einer *junction* in einem metallisch geschlossenen Gehäuse bieten sich volumendiskretisierende Verfahren wie z.B. die FDTD- oder TLM-Methode an, da diese die Randbedingungen für geschlossene Räume besonders einfach und effektiv implementieren. Aber auch der Einsatz anderer numerischer Methoden oder die messtechnische Bestimmung der Streuparameter ist möglich.

Dabei ist das topologische Konzept allerdings nicht nur auf Kabel und Leitungen beschränkt. Bei Verbindungsnetzwerken ist lediglich die Anwendung desselben besonders vorteilhaft und die Struktur einfach ins topologische Konzept zu übertragen. Allerdings kann mit einem *tube* auch ein Verhalten beschrieben werden, dass nicht auf der Leitungstheorie basiert. Man denke hierbei beispielsweise an die Ausbreitung und Übertragung von Signalen zwischen zwei Antennen. Die elektromagnetischen Felder zwischen den Antennen sind im Allgemeinen von sehr komplexer Natur. Trotzdem kann eine solche Strecke in ein topologisches Netzwerk integriert werden, indem nur die Auswirkungen auf die Größen am Speisepunkt der Antennen betrachtet werden, und diese im topologischen Netzwerk verwendet werden.

### 2.2.1 Wellengrößen

Grundsätzlich ist die EMT nicht auf eine bestimmte Wahl der Größen festgeschrieben. Dabei können TE- oder TM-Wellen in Hohlleitern, genauso wie TEM-Wellen, Spannungen und Ströme auf Leitungen oder andere Wellenfestlegungen gewählt werden. Entscheidend ist dabei die Möglichkeit, die Auswirkungen der Felder innerhalb der Mehr Tore auf die Torwellen bzw. -größen beschreiben zu können.

Im Rahmen dieser Arbeit werden die Wellengrößen für Kabel und Leitungen aus den Strömen und Spannungen mit

$$\mathbf{w}_+(z) = \mathbf{v}(z) + \mathbf{Z}_c \mathbf{i}(z) \quad (2.1)$$

$$\mathbf{w}_-(z) = \mathbf{v}(z) - \mathbf{Z}_c \mathbf{i}(z) \quad (2.2)$$

berechnet. Dies wurde im Rahmen der EMT für komplexe Leitungsnetzwerke in [11] eingeführt. Je nach Wahl der Normierungsimpedanz  $\mathbf{Z}_c$  erhält man unterschiedliche Zahlenwerte der Parameter in der Wellendarstellung. So unterscheidet man beispielsweise S50-Parameter und topologische S-Parameter. Bei den S50-Parametern wird eine Diagonalmatrix mit 50 Ohm zur Normierung gewählt, d.h. die S-Parameter so bestimmt, als wären die Tore mit 50 Ohm Widerständen gegen Masse abgeschlossen. Bestimmt man die topologischen S-Parameter, werden die Tore mit den Wellenwiderständen der anzuschließenden *tubes* belastet. Diese sind damit von der Netzwerktopologie – eben von den angeschlossenen Leitungen – abhängig.

Oft wird in der Literatur [32, 41] von hin- und rücklaufenden Spannungswellen gesprochen

$$\mathbf{v}_+(z) = \frac{1}{2} [\mathbf{v}(z) + \mathbf{Z}_c \mathbf{i}(z)] = \frac{\mathbf{w}_+}{2} \quad (2.3)$$

$$\mathbf{v}_-(z) = \frac{1}{2} [\mathbf{v}(z) - \mathbf{Z}_c \mathbf{i}(z)] = \frac{\mathbf{w}_-}{2}. \quad (2.4)$$

Die Werte der Streu- bzw. Propagationsparameter bleiben dabei unverändert, da die Wellengrößen aufeinander bezogen werden.

### 2.2.2 BLT 1 Gleichung

Eine *junction*  $i$  wird durch die Streugleichung

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_n \end{bmatrix}_i = \bar{\mathbf{S}}_i \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{bmatrix}_i \quad (2.5)$$

beschrieben. Dabei werden die Blöcke gemäß der Zuordnung zu den angeschlossenen *tubes* gebildet, d.h. in den Teilvektoren  $\mathbf{a}_1$  und  $\mathbf{b}_1$  sind alle Wellen zusammengefasst, die zum ersten angeschlossenen *tube* gehören (siehe dazu Abbildung 2.3). Dies wird äquivalent für alle an die *junction* angeschlossenen *tubes* fortgesetzt.

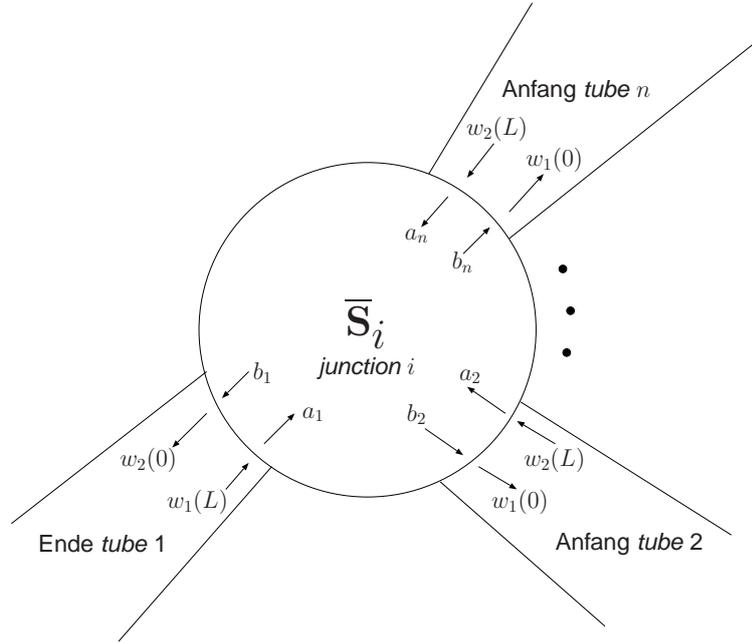


Abbildung 2.3: Blockbildung in der Streumatrix  $\bar{\mathbf{S}}_i$  - junction mit  $n$  angeschlossenen tubes

Innerhalb der BLT 1 Gleichung arbeitet man für gewöhnlich mit topologischen Streuparametern. Topologisch bedeutet hierbei, dass die Wellen mit Hilfe der Leitungswellenwiderstände der an den Toren der junction angeschlossenen tubes gebildet werden.

Die Propagationsparameter eines tubes  $\bar{\Gamma}_i$  berechnen sich beispielsweise aus der Lösung der Mehrfachleitungstheorie (siehe folgendes Kapitel). Beschrieben wird ein tube  $i$  durch die Gleichung

$$\begin{bmatrix} \mathbf{w}_1(L) \\ \mathbf{w}_2(L) \end{bmatrix}_i = \bar{\Gamma}_i \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1(0) \\ \mathbf{w}_2(0) \end{bmatrix}_i + \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1^{(s)}(L) \\ \mathbf{w}_2^{(s)}(L) \end{bmatrix}_i. \quad (2.6)$$

Es gelten die Vereinbarungen wie sie in Abbildung 2.4 dargestellt sind. Dabei ist zu beachten, dass die Laufrichtung der rücklaufenden Welle  $\mathbf{w}_2$  positiv festgelegt wurde, und damit der Anfangspunkt 0 dieses Wellenvektors bei  $z = z_L$  und der Endpunkt  $L$  bei  $z = z_0$  liegt.

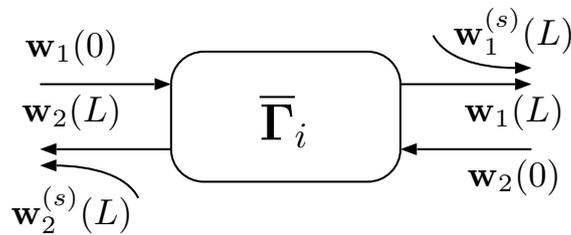


Abbildung 2.4: Definition der Propagationsmatrix  $\bar{\Gamma}_i$  für ein tube im topologischen Netzwerk

Um ein komplettes Netzwerk aus tubes und junctions zu beschreiben und die zugehörigen Netzwerkgleichungen aufzustellen, werden die Streugleichungen der einzelnen junctions (2.5)

und die Propagationsgleichungen der einzelnen *tubes* (2.6) jeweils zu einer Supermatrizen-gleichung zusammengefasst. Man erhält dann die blockdiagonale Streugleichung für das Gesamt-zusammengefasst.

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_{n_1} \end{bmatrix}_1 \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_{n_k} \end{bmatrix}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{S}}_1 & \dots & \bar{\mathbf{0}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\mathbf{0}} & \dots & \bar{\mathbf{S}}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{n_1} \end{bmatrix}_1 \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{n_k} \end{bmatrix}_k \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

$$\bar{\mathbf{b}} = \bar{\mathbf{S}} \bar{\mathbf{a}} \quad (2.8)$$

und die Propagationsgleichung für das Netzwerk

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1(L) \\ \mathbf{w}_2(L) \end{bmatrix}_1 \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1(L) \\ \mathbf{w}_2(L) \end{bmatrix}_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{\Gamma}}_1 & \dots & \bar{\mathbf{0}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\mathbf{0}} & \dots & \bar{\mathbf{\Gamma}}_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1(0) \\ \mathbf{w}_2(0) \end{bmatrix}_1 \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1(0) \\ \mathbf{w}_2(0) \end{bmatrix}_l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1^{(s)}(L) \\ \mathbf{w}_2^{(s)}(L) \end{bmatrix}_1 \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1^{(s)}(L) \\ \mathbf{w}_2^{(s)}(L) \end{bmatrix}_l \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

$$\bar{\mathbf{w}}(L) = \bar{\mathbf{\Gamma}} \bar{\mathbf{w}}(0) + \bar{\mathbf{w}}^{(s)}(L). \quad (2.10)$$

Die Dimension der Matrizen in beiden Gleichungen ist gleich groß und ergibt sich als  $d = \sum_{i=1}^k n_{p_i}$  mit  $k$  als Anzahl der *junctions* und  $n_{p_i}$  als Anzahl der Tore der  $i$ -ten *junction* - oder als  $d = \sum_{i=1}^l 2n_{cond_i}$  mit  $l$  als Anzahl der *tubes* im Netzwerk und  $n_{cond_i}$  als Anzahl der Leiter im  $i$ -ten *tube* ohne Referenz.

Um die beiden Gleichungen (2.7) und (2.9) kombinieren zu können, müssen die Größen  $\bar{\mathbf{a}}$  und  $\bar{\mathbf{b}}$  durch  $\bar{\mathbf{w}}(0)$  und  $\bar{\mathbf{w}}(L)$  ausgedrückt werden. Betrachtet man Abbildung 2.3, so stellt man fest, dass an jeder *junction* dem auslaufenden Wellenvektor einer Torgruppe  $\mathbf{b}_i$  ein einlaufender Wellenvektor eines angeschlossenen *tubes*  $\mathbf{w}_n(0)$  zugeordnet werden kann. Analog kann dieses mit  $\mathbf{a}_i$  und  $\mathbf{w}_n(L)$  geschehen. Gemäß der Verschaltung des Netzwerkes können die Supervektoren  $\bar{\mathbf{a}}$  und  $\bar{\mathbf{b}}$  ausgedrückt werden als

$$\bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{J}}\bar{\mathbf{T}}_a \bar{\mathbf{w}}(L) \quad \text{und} \quad \bar{\mathbf{b}} = \bar{\mathbf{J}}\bar{\mathbf{T}}_b \bar{\mathbf{w}}(0). \quad (2.11)$$

Die Supermatrizen  $\bar{\mathbf{J}}\bar{\mathbf{T}}_a$  und  $\bar{\mathbf{J}}\bar{\mathbf{T}}_b$  sind Permutationsmatrizen, die angeben, welche *junction* mit welchem *tube* verbunden ist. Die Einträge in dieser Supermatrix bestehen aus Nullen

und Einsen, die Zeilensummen und Spaltensummen sind eins. Die Inverse ist gleich der Transponierten. Damit ergibt sich folgende Streusupergleichung

$$\overline{\overline{\mathbf{w}}}(L) = \overline{\overline{\mathbf{J}\mathbf{T}_a}}^\top \overline{\overline{\mathbf{S}}}^{-1} \overline{\overline{\mathbf{J}\mathbf{T}_b}} \overline{\overline{\mathbf{w}}}(0), \quad (2.12)$$

welche in die Propagationssupergleichung eingesetzt werden kann. Als Ergebnis erhält man die BLT 1 Gleichung

$$\left( \overline{\overline{\mathbf{E}}} - \overline{\overline{\mathbf{J}\mathbf{T}_b}}^\top \overline{\overline{\mathbf{S}}} \overline{\overline{\mathbf{J}\mathbf{T}_a}} \overline{\overline{\mathbf{I}}} \right) \overline{\overline{\mathbf{w}}}(0) = \overline{\overline{\mathbf{J}\mathbf{T}_b}}^\top \overline{\overline{\mathbf{S}}} \overline{\overline{\mathbf{J}\mathbf{T}_a}} \overline{\overline{\mathbf{w}}^{(s)}}(L). \quad (2.13)$$

Der Ausdruck  $\overline{\overline{\mathbf{J}\mathbf{T}_b}}^\top \overline{\overline{\mathbf{S}}} \overline{\overline{\mathbf{J}\mathbf{T}_a}}$  stellt dabei eine umgeordnete Streusupermatrix dar. Die Anzahl der besetzten Elemente ist unverändert geblieben, lediglich der Ort des Auftretens hat sich durch Zeilen- und Spaltentauschoperationen geändert.

Durch das Auflösen dieser Gleichung nach  $\overline{\overline{\mathbf{w}}}(0)$  und Einsetzen der Ergebnisse in die Gleichung (2.12) erhält man alle im Netzwerk laufenden Wellen.

### 2.2.3 BLT 2 Gleichung

Verwendet man zur Konstruktion des topologischen Netzwerkes ausschließlich *junctions*, die an den Toren direkt miteinander verbunden sind, erhält man eine zweite Darstellungsmöglichkeit. Weil diese Formulierung des Netzwerkes ohne *tubes* aufgebaut ist, müssen alle Erregungen (z.B. aufgrund konzentrierter oder verteilter Quellen) als zusätzliche Terme zu den auslaufenden Wellen addiert werden. Die Streuparameter müssen dabei so definiert werden, dass die verbundenen Tore zweier *junctions* auf den gleichen Wellenwiderstand normiert sind. Der Einfachheit halber verwendet man, im Gegensatz zu den BLT 1 Gleichungen, Streuparameter mit einheitlicher Impedanz für alle Tore als Bezugssystem. Als Beispiel seien die S50-Parameter genannt, bei denen als Referenz das 50-Ohm Koaxialsystem verwendet wird ( $\overline{\overline{\mathbf{Z}}}_0 = 50\Omega \overline{\overline{\mathbf{E}}}$ ). Da damit die Bezugsimpedanzen nicht von der Verschaltung im Netzwerk abhängen, bleiben die Streumatrizen bei Veränderungen gleich.

Die erweiterte Streugleichung für eine *junction*  $i$  lautet dann

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_n \end{bmatrix}_i = \overline{\overline{\mathbf{S}}}_i \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{bmatrix}_i + \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^{(s)} \\ \vdots \\ \mathbf{b}_n^{(s)} \end{bmatrix}_i. \quad (2.14)$$

Wie in Abbildung 2.5 dargestellt, sind jeweils ein Tor bzw. eine Torgruppe von zwei *junctions* direkt miteinander verbunden. Es wird dabei keine Mehrfachverbindung oder Aufzweigung erlaubt. Eine solche würde wiederum eine *junction* darstellen. Diese Struktur des Netzwerkes wird durch die Verbindungssupermatrix  $\overline{\overline{\mathbf{C}}}$  beschrieben. Sie gibt an, welche auslaufende Welle  $b_i$  der einen *junction* einer einlaufenden Welle  $a_j$  der anderen *junction* entspricht

$$\overline{\overline{\mathbf{a}}} = \overline{\overline{\mathbf{C}}} \overline{\overline{\mathbf{b}}}. \quad (2.15)$$

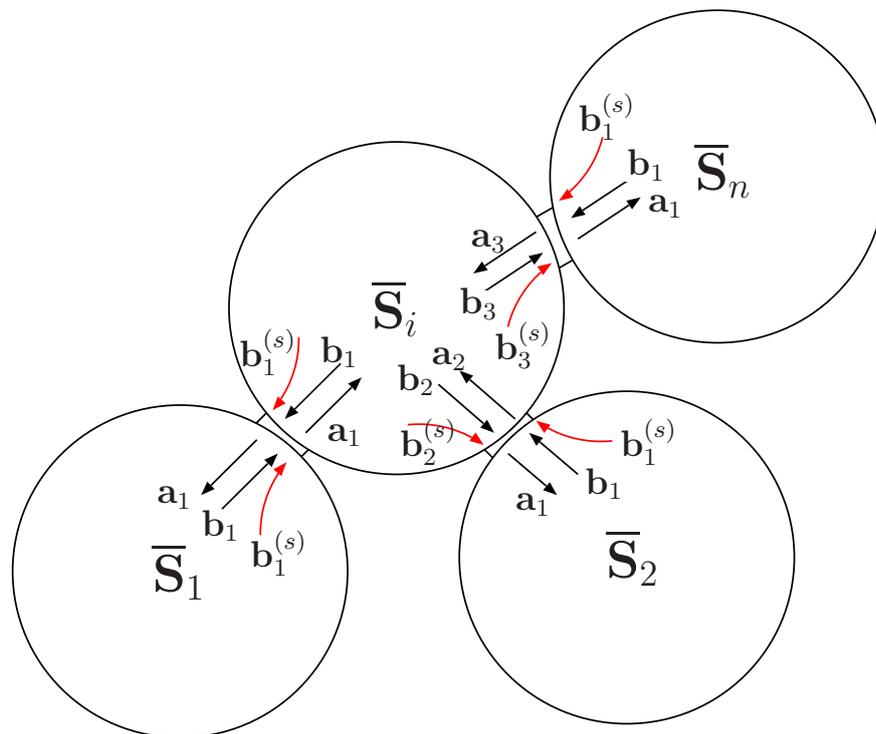


Abbildung 2.5: Topologisches Netzwerk aus *junctions*. Auf eine Kennzeichnung der Zugehörigkeit der Wellenvektoren zu einer *junction* durch einen zusätzlichen Index wurde verzichtet. Alle Vektoren innerhalb eines Kreises sind der entsprechenden *junction* zugeordnet und unterscheiden sich von den identisch bezeichneten Vektoren anderer *junctions*.

Man kann dann damit die einlaufenden Wellen im Netzwerk durch die auslaufenden Wellen substituieren. Die Verbindungssupermatrix  $\overline{\overline{\mathbf{C}}}$  ist wieder eine Permutationsmatrix, die allerdings in diesem Fall symmetrisch ist.

Fasst man die Streugleichung (2.14) aller *junctions* zu einer Supermatrizengleichung zusammen,

$$\overline{\overline{\mathbf{b}}} = \overline{\overline{\mathbf{S}}} \overline{\overline{\mathbf{a}}} + \overline{\overline{\mathbf{b}}}^{(s)}, \quad (2.16)$$

wobei  $\overline{\overline{\mathbf{S}}}$  blockdiagonal ist, kann man sie unter Verwendung von Gleichung (2.15) zur BLT 2 Gleichung

$$\left( \overline{\overline{\mathbf{E}}} - \overline{\overline{\mathbf{S}}} \overline{\overline{\mathbf{C}}} \right) \overline{\overline{\mathbf{b}}} = \overline{\overline{\mathbf{b}}}^{(s)}, \quad (2.17)$$

umformen. Es ist zu bemerken, dass das Matrizenprodukt  $\overline{\overline{\mathbf{S}}} \overline{\overline{\mathbf{C}}}$  im Allgemeinen nicht mehr blockdiagonal ist. Es handelt sich dabei auch um eine ungeordnete Streusupermatrix, die allerdings nach einem anderen Ordnungsschema als im Fall der BLT 1 Gleichung sortiert ist. Trotz der Tatsache, dass die Darstellung des topologischen Netzwerkes mit Hilfe der BLT 2 Gleichungen ohne *tubes* aufgebaut ist, kann man einen *tube* als eine äquivalente *junction* im Netzwerk modellieren. Dazu wird ein *tube* in eine äquivalente *junction* (siehe dazu Kapitel 2.3.2) umgerechnet und in das Streuknotennetzwerk gemäß Abbildung 2.6 eingebaut.

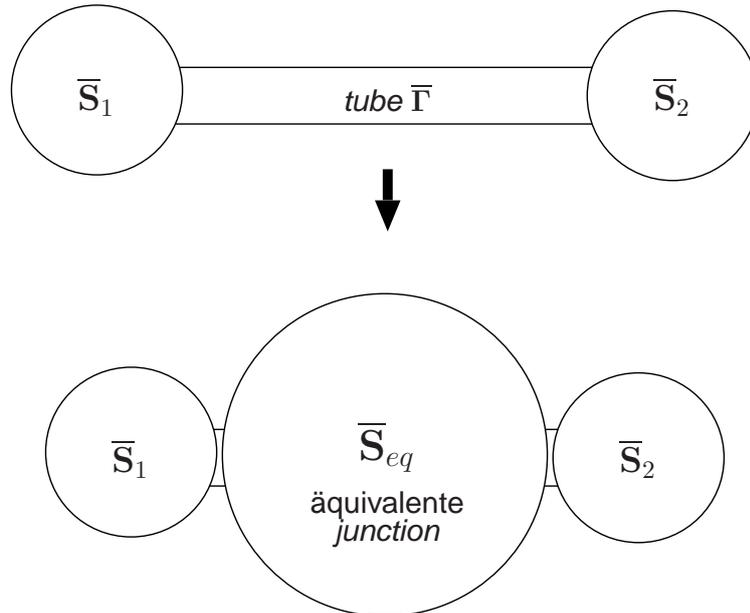


Abbildung 2.6: Umwandlung eines *tubes* in eine äquivalente *junction*

Werden in einem Netzwerk in der Darstellung gemäß der BLT 1 Gleichungen alle *tubes* nach diesem Schema durch äquivalente *junctions* ersetzt, entsteht ein BLT 2 Netzwerk mit doppelter Dimension im Vergleich zur BLT 1 Darstellung.

Der Vorteil der BLT 2 Gleichung liegt in der Möglichkeit der einfachen Implementierung. Die Multiplikation mittels der Permutationsmatrix  $\overline{\overline{\mathbf{C}}}$  von rechts steht für mehrfache Spaltentauschoperationen. Dies und der Vorzeichenwechsel sowie die Addition der Eins auf der

Diagonalen ist leicht zu implementieren. Neben der Inversion der Systemmatrix ist keine weitere Matrixoperation in der Systemgleichung nötig.

Ein weiterer Zusammenhang zwischen der Darstellung gemäß BLT 1 und BLT 2 Gleichung entsteht beim Übergang von allgemeinen *tubes* im BLT 1 Netzwerk zu *zero-length-tubes*. Die Propagationssupermatrix  $\overline{\overline{\mathbf{I}}}$  wird dann zu einer Einheitsmatrix. Damit sind die *junctions* wie bei der BLT 2 Darstellung direkt miteinander gekoppelt. Die BLT 1 Gleichung liest sich dann

$$\left( \overline{\overline{\mathbf{E}}} - \overline{\overline{\mathbf{J}\mathbf{T}_b}}^\top \overline{\overline{\mathbf{S}}} \overline{\overline{\mathbf{J}\mathbf{T}_a}} \right) \overline{\overline{\mathbf{w}}}(0) = \overline{\overline{\mathbf{J}\mathbf{T}_b}}^\top \overline{\overline{\mathbf{S}}} \overline{\overline{\mathbf{J}\mathbf{T}_a}} \overline{\overline{\mathbf{w}}}^{(s)}(L). \quad (2.18)$$

Mit den Beziehungen (2.11) ergibt sich dann

$$\left( \overline{\overline{\mathbf{E}}} - \overline{\overline{\mathbf{S}}} \overline{\overline{\mathbf{J}\mathbf{T}_a}} \overline{\overline{\mathbf{J}\mathbf{T}_b}}^\top \right) \overline{\overline{\mathbf{b}}} = \overline{\overline{\mathbf{b}}}^{(s)}. \quad (2.19)$$

Es folgt weiterhin die Beziehung

$$\overline{\overline{\mathbf{J}\mathbf{T}_a}} \overline{\overline{\mathbf{J}\mathbf{T}_b}}^\top = \overline{\overline{\mathbf{C}}}, \quad (2.20)$$

welche die Ordnungsschemata der BLT 1 und BLT 2 Darstellungen ineinander überführt. Man bemerke, dass die Supervektoren der BLT 1 Gleichung nach den *tubes* geordnet sind, wohingegen bei der BLT 2 Gleichung die Ordnung nach den *junctions* erfolgt.

## 2.2.4 Admittanzdarstellung

Die beiden vorherigen Darstellungen des topologischen Netzwerkes basieren auf Wellengrößen. Abschließend soll noch eine Darstellung mit Hilfe von Spannungen und Strömen dargestellt werden. Hierbei erfolgt die Beschreibung von *junctions* und *tubes* durch Admittanzmatrizen – die Y-Parameter.

Dazu wird die *tube*-Gleichung wie folgt formuliert

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{i}_1 \\ \mathbf{i}_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{i}_t} = \overline{\mathbf{Y}}_t \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}_t} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{i}_1^{(s)} \\ \mathbf{i}_2^{(s)} \end{bmatrix}}_{\mathbf{i}_t^{(s)}}, \quad (2.21)$$

wobei die beiden Torgruppen (Eingang – 1 und Ausgang – 2) torzahlsymmetrisch sind. Siehe dazu die Abbildung 2.7.

Die *junctions* können dagegen eine beliebige Aufteilung in Torgruppen aufweisen (siehe Abbildung 2.8), so dass folgende Gleichung für eine *junction* entsteht

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{i}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{i}_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{i}_j} = \overline{\mathbf{Y}}_j \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}_j} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{i}_1^{(s)} \\ \vdots \\ \mathbf{i}_2^{(s)} \end{bmatrix}}_{\mathbf{j}_j^{(s)}}. \quad (2.22)$$

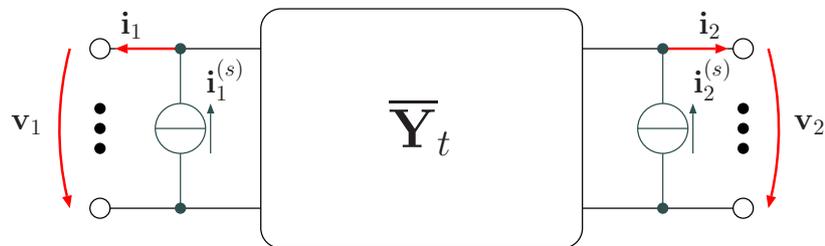


Abbildung 2.7: Darstellung eines *tubes* mittels Admittanzparametern – Aufteilung in zwei Torgruppen gleicher Dimension

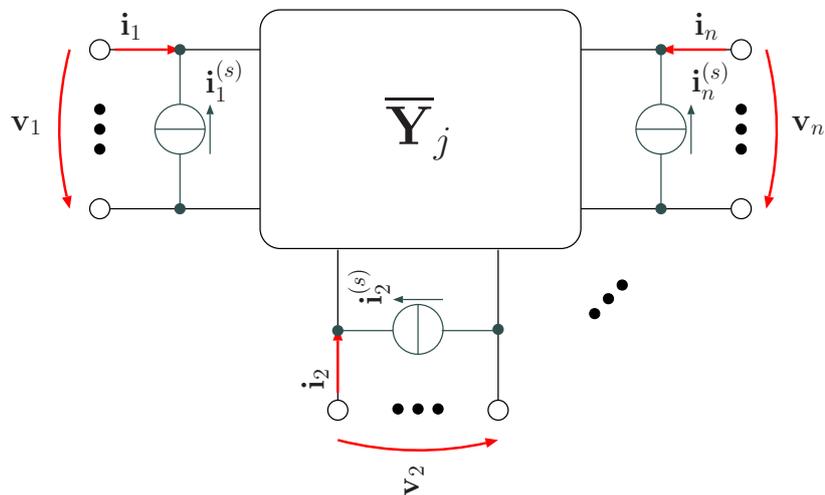


Abbildung 2.8: Darstellung einer *junction* mittels Admittanzparametern. Die Stromrichtung ist im Vergleich zu den *tubes* in gegengesetzter Richtung definiert.

Für eine ideale *junction*<sup>†</sup> kann keine Gleichung der Art (2.22) aufgestellt werden, da eine Admittanzmatrix für diese nicht existiert. Es ist aber möglich, mit Hilfe der Knoten- und Maschensätze eine Beziehung zwischen den Strömen und Spannungen zu formulieren

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{i}_{ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M} \end{bmatrix} \mathbf{v}_{ij}. \quad (2.23)$$

Dabei beinhaltet  $\mathbf{K}$  die  $k - 1$  Gleichungen der  $k$  Knoten in der idealen *junction* und  $\mathbf{M}$  die  $n - k + 1$  Maschengleichungen. Man erkennt, dass die Matrizen  $\begin{bmatrix} \mathbf{K} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$  und  $\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M} \end{bmatrix}$  singulär sind, und somit die Gleichung (2.23) weder nach den Strömen noch nach den Spannungen umgestellt werden kann.

Die Gleichungen für die drei Grundelemente im Netzwerk werden wieder zu Supermatrizen-gleichungen zusammengefasst. Für die  $n_t$  *tubes* erhält man

$$\begin{bmatrix} [\bar{\mathbf{i}}_t]_1 \\ \vdots \\ [\bar{\mathbf{i}}_t]_{n_t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\bar{\mathbf{Y}}_t]_1 & \cdots & \bar{\mathbf{0}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\mathbf{0}} & \cdots & [\bar{\mathbf{Y}}_t]_{n_t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\bar{\mathbf{v}}_t]_1 \\ \vdots \\ [\bar{\mathbf{v}}_t]_{n_t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [\bar{\mathbf{i}}_t^{(s)}]_1 \\ \vdots \\ [\bar{\mathbf{i}}_t^{(s)}]_{n_t} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

$$\bar{\mathbf{i}}_t = \bar{\bar{\mathbf{Y}}}_t \bar{\mathbf{v}}_t + \bar{\mathbf{i}}_t^{(s)} \quad (2.25)$$

und alle *junctions* – ideale *junctions* eingeschlossen –

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{E}} & \cdots & \bar{\mathbf{0}} & \bar{\mathbf{0}} & \cdots & \bar{\mathbf{0}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \bar{\mathbf{0}} & \cdots & \bar{\mathbf{E}} & \bar{\mathbf{0}} & \cdots & \bar{\mathbf{0}} \\ \bar{\mathbf{0}} & \cdots & \bar{\mathbf{0}} & \bar{\mathbf{K}}_1 & \cdots & \bar{\mathbf{0}} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\mathbf{0}} & \cdots & \bar{\mathbf{0}} & \bar{\mathbf{0}} & \cdots & \bar{\mathbf{K}}_{n_{ij}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\bar{\mathbf{i}}_j]_1 \\ \vdots \\ [\bar{\mathbf{i}}_j]_{n_j} \\ [\bar{\mathbf{i}}_{ij}]_1 \\ \vdots \\ [\bar{\mathbf{i}}_j]_{n_{ij}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\bar{\mathbf{Y}}_j]_1 & \cdots & \bar{\mathbf{0}} & \bar{\mathbf{0}} & \cdots & \bar{\mathbf{0}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \bar{\mathbf{0}} & \cdots & [\bar{\mathbf{Y}}_j]_{n_j} & \bar{\mathbf{0}} & \cdots & \bar{\mathbf{0}} \\ \bar{\mathbf{0}} & \cdots & \bar{\mathbf{0}} & \bar{\mathbf{M}}_1 & \cdots & \bar{\mathbf{0}} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\mathbf{0}} & \cdots & \bar{\mathbf{0}} & \bar{\mathbf{0}} & \cdots & \bar{\mathbf{M}}_{n_{ij}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\bar{\mathbf{v}}_j]_1 \\ \vdots \\ [\bar{\mathbf{v}}_j]_{n_j} \\ [\bar{\mathbf{v}}_{ij}]_1 \\ \vdots \\ [\bar{\mathbf{v}}_{ij}]_{n_{ij}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [\bar{\mathbf{i}}_j^{(s)}]_1 \\ \vdots \\ [\bar{\mathbf{i}}_j^{(s)}]_{n_j} \\ \bar{\mathbf{0}} \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{0}} \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

$$\bar{\bar{\mathbf{K}}} \bar{\mathbf{i}}_j = \bar{\bar{\mathbf{Y}}}_j \bar{\mathbf{v}}_j + \bar{\mathbf{i}}_j^{(s)}, \quad (2.27)$$

dann entsprechende Supermatrizen-gleichungen für das gesamte Netzwerk.

<sup>†</sup>Eine ideale *junction* enthält weder Quellen noch Bauelemente, sondern nur Knoten und stellt lediglich ideale elektrische Verbindungen zwischen den Toren her.

Die topologische Struktur des Netzwerkes wird wieder durch eine Verbindungssupermatrix  $\overline{\overline{\mathbf{J}\mathbf{T}_Y}}$  ausgedrückt

$$\overline{\overline{\mathbf{i}}}_t = \overline{\overline{\mathbf{J}\mathbf{T}_Y}} \overline{\overline{\mathbf{i}}}_j = \overline{\overline{\mathbf{i}}}_t \quad \text{und} \quad \overline{\overline{\mathbf{v}}}_t = \overline{\overline{\mathbf{J}\mathbf{T}_Y}} \overline{\overline{\mathbf{v}}}_j = \overline{\overline{\mathbf{v}}}_t, \quad (2.28)$$

die angibt, welche Tore der *tubes* und *junctions* miteinander verbunden sind. Diese ist eine symmetrische Permutationsmatrix.

Kombiniert man Gleichung (2.25), (2.27) und (2.28), erhält man eine Darstellung des Netzwerkes mit Hilfe von Admittanzmatrizen

$$\left( \overline{\overline{\mathbf{K}}} \overline{\overline{\mathbf{J}\mathbf{T}_Y}} \overline{\overline{\mathbf{Y}}}_t - \overline{\overline{\mathbf{Y}}}_j | | \overline{\overline{\mathbf{M}}} \overline{\overline{\mathbf{J}\mathbf{T}_Y}} \right) \overline{\overline{\mathbf{v}}} = \overline{\overline{\mathbf{i}}}_j^{(s)} - \overline{\overline{\mathbf{K}}} \overline{\overline{\mathbf{J}\mathbf{T}_Y}} \overline{\overline{\mathbf{i}}}_t^{(s)}. \quad (2.29)$$

Bei bekannten Spannungen können die Ströme anschließend mit der Gleichung (2.25) berechnet werden.

Sind im Netzwerk keine idealen *junctions* enthalten, wird die Matrix  $\overline{\overline{\mathbf{K}}}$  zur Einheitsmatrix und  $\overline{\overline{\mathbf{Y}}}_j | | \overline{\overline{\mathbf{M}}}$  enthält nur die direkte Summe der Y-Matrizen der einzelnen *junctions*.

Die Dimension der Systemgleichung entspricht der der BLT 1 Gleichung. Die Admittanzdarstellung hat gegenüber der BLT 2 Gleichung damit den Vorteil einer halbierten Dimension der Systemmatrix.

Desweiteren müssen keine Streuparameter für *junctions* berechnet werden. Bei einer Änderung der Wellenwiderstände der angeschlossenen *tubes* müssen in der BLT 1 Darstellung die Streumatrizen der betroffenen *junctions* neu berechnet werden [40].

Die Admittanzmatrix einer gegebenen Schaltung mit konzentrierten Elementen lässt sich einfach mit Methoden der Netzwerkanalyse berechnen. Sie kann für eine *junction*, bei der alle Knoten auch von außen zugängliche Tore darstellen, direkt mit Hilfe der Strukturregel der Knotenanalyse aufgestellt werden. Die sich ergebende Matrix ist quadratisch und symmetrisch zur Hauptdiagonalen. Die Dimension entspricht der Anzahl der Knoten bzw. Tore (ohne Referenz). Auf der Hauptdiagonalen befindet sich die Summe aller am jeweiligen Knoten angeschlossenen Admittanzen, und die Elemente außerhalb der Hauptdiagonalen sind die negativen Admittanzen zwischen den beiden zugehörigen Knoten.

Oft sind jedoch innerhalb einer *junction* Knoten angeordnet, die von außen nicht zugänglich sind und damit keine Tore darstellen. Somit müssen die Y-Parameter der reduzierten Schaltung aus der Admittanzmatrix der kompletten, unreduzierten Schaltung ermittelt werden.

Dazu werden die Knoten in zwei Torgruppen unterteilt –

- Torgruppe 1 – die von außen zugänglichen Tore
- Torgruppe 2 – die unzugänglichen, internen Knoten.

Beschrieben wird die komplette Schaltung der *junction* inklusive der internen Knoten durch

$$\overline{\overline{\mathbf{i}}}_k = \overline{\overline{\mathbf{Y}}}_k \overline{\overline{\mathbf{v}}}_k + \overline{\overline{\mathbf{i}}}_k^{(s)}, \quad (2.30)$$

wobei  $\overline{\overline{\mathbf{Y}}}_k$  mit Hilfe der Strukturregel aufgestellt wird. Der Vektor  $\overline{\overline{\mathbf{i}}}_k^{(s)}$  beinhaltet die am jeweiligen Knoten ab- bzw. zufließenden Quellenströme.

Unterteilt man die Gleichung in die beiden Torgruppen und berücksichtigt, dass an den unzugänglichen, internen Knoten die Ströme verschwinden, erhält man

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{k11} & \mathbf{Y}_{k12} \\ \mathbf{Y}_{k21} & \mathbf{Y}_{k22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{i}_k^{(s)} \\ \mathbf{i}_k^{(s)} \end{bmatrix}. \quad (2.31)$$

Multipliziert man die Gleichung aus und eliminiert  $\mathbf{v}_2$ , erhält man die Bestimmungsgleichung für die gesuchten Größen der *junction*

$$\underbrace{\mathbf{i}_1}_{\mathbf{i}_j} = \underbrace{(\mathbf{Y}_{k11} - \mathbf{Y}_{k12} \mathbf{Y}_{k22}^{-1} \mathbf{Y}_{k21})}_{\bar{\mathbf{Y}}_j} \underbrace{\mathbf{v}_1}_{\bar{\mathbf{v}}_j} + \underbrace{\mathbf{i}_k^{(s)} - \mathbf{Y}_{k12} \mathbf{Y}_{k22}^{-1} \mathbf{i}_k^{(s)}}_{\bar{\mathbf{i}}_j^{(s)}}, \quad (2.32)$$

deren Werte für den entsprechenden Block in der Supermatrizengleichung (2.29) eingesetzt werden können.

## 2.3 Leitungstrukturen als *tubes* oder *junctions*

Mit den Darstellungsformen für topologische Netzwerke im vorangegangenen Abschnitt werden die Elemente der Netzwerke mit Hilfe der Propagations-, Streu- oder Admittanzmatrizen beschrieben. Dabei ist nur die Struktur des Systems in das Netzwerk eingebettet, und dieses beinhaltet an sich noch keine dynamischen Eigenschaften. Diese werden erst mit den konkreten Inhalten der entsprechenden Parametermatrizen  $[\mathbf{\Gamma}]_i$ ,  $[\mathbf{S}]_i$  bzw.  $[\mathbf{Y}]_i$  berücksichtigt. Sie beschreiben das Verhalten der Subsysteme bezüglich der Anschlüsse mit Hilfe frequenzabhängiger, komplexer Parametermatrizen. Die Wechselwirkungen und Verkopplung der Subsysteme untereinander im Gesamtsystem werden durch die Struktur des topologischen Netzwerkes repräsentiert. Für eine numerische Analyse müssen die Parametermatrizen quantitativ beschrieben werden und wertmäßig vorliegen. In Abhängigkeit von den darzustellenden Subsystemen können verschiedene Methoden zur Bestimmung eingesetzt werden.

Bei komplexen Verbindungsstrukturen wäre beispielsweise der Einsatz von numerischen Feldberechnungsverfahren möglich. Dabei werden an den Strukturgrenzen des Subsystems – d.h. an den topologischen Oberflächen, welche die topologischen Volumina begrenzen – entsprechende Ports plziert, die auch im topologischen Netzwerk als Anschlüsse Verwendung finden. Meist werden dabei Quasi-TEM-Ports eingesetzt, bei denen die Spannungen und Ströme eindeutig definiert werden können. Dann ergeben sich die Wellengrößen wie im Abschnitt 2.2.1 dargelegt. In der numerischen Feldsimulation werden dabei ggf. für die Bestimmung der Parametermatrizen Integrationswege vorgegeben.

Bei Verbindungsstrukturen wie Kabel und Leitungen ist es sinnvoll, leitungstheoretische Methoden zur Berechnung der Parametermatrizen zu nutzen. Hierbei werden in einem ersten Schritt statische Leitungsbeläge berechnet und anschließend in einem zweiten Schritt die resultierenden Leitungsdifferentialgleichungen gelöst. Aus dieser Lösung kann jede gesuchte Parametermatrix durch lineare Transformationen und Koeffizientenvergleich bestimmt

werden. Dadurch wird die zeitaufwendige dreidimensionale numerische Feldsimulation vermieden.

Geht man von einer gleichförmig geführten Mehrfachleitung aus [37, 31, 32], lassen sich die klassischen Leitungsgleichungen in Supermatrizennotation als

$$\frac{d}{dz} \begin{bmatrix} \mathbf{v}(z) \\ \mathbf{i}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{Z}' \\ -\mathbf{Y}' & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}(z) \\ \mathbf{i}(z) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{v}^{(s)'}(z) \\ \mathbf{i}^{(s)'}(z) \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

formulieren. Dabei sind  $\mathbf{v}(z)$  bzw.  $\mathbf{i}(z)$  die ortsabhängigen Vektoren der Leiterspannungen bzw. -ströme. Die längenbezogene Längsimpedanzmatrix  $\mathbf{Z}' = \mathbf{R}' + j\omega\mathbf{L}'$  ergibt sich aus der Widerstandsbelagmatrix  $\mathbf{R}'$  und der Matrix des Induktivitätsbelages  $\mathbf{L}'$  der Leiteranordnung im Querschnitt. Äquivalent ermittelt sich die Matrix des Admittanzbelages  $\mathbf{Y}' = \mathbf{G}' + j\omega\mathbf{C}'$  aus dem Leitwertbelag  $\mathbf{G}'$  und dem Kapazitätsbelag  $\mathbf{C}'$ . Methoden und Formeln zur Berechnung der Beläge und der verteilten Quellen aufgrund von Feldeinkopplung, sowie ausführliche Bemerkungen zu deren Bedeutung und Zusammenhänge untereinander sind in [31, 32, 37, 38] zu finden und sollen nicht Gegenstand dieser Arbeit sein.

Die Lösung der Gleichung (2.33) ergibt sich als

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}(z) \\ \mathbf{i}(z) \end{bmatrix} = \underbrace{e^{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{Z}' \\ -\mathbf{Y}' & \mathbf{0} \end{bmatrix} (z-z_0)}}_{\mathcal{M}_{z_0}^z \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{Z}' \\ -\mathbf{Y}' & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right\}} \begin{bmatrix} \mathbf{v}(z_0) \\ \mathbf{i}(z_0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{eq}^{(s)}(z) \\ \mathbf{i}_{eq}^{(s)}(z) \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

mit den äquivalenten Quellen

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{eq}^{(s)}(z) \\ \mathbf{i}_{eq}^{(s)}(z) \end{bmatrix} = \int_{z_0}^{zL} e^{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{Z}' \\ -\mathbf{Y}' & \mathbf{0} \end{bmatrix} (\zeta-z_0)} \begin{bmatrix} \mathbf{v}^{(s)'}(\zeta) \\ \mathbf{i}^{(s)'}(\zeta) \end{bmatrix} d\zeta. \quad (2.35)$$

Der Ausdruck  $\mathcal{M}_{z_0}^z \{ \overline{\mathbf{A}} \}$  wird als Matrizzant bezeichnet und berechnet sich bei einer konstanten Matrix  $\overline{\mathbf{A}}$  mit Hilfe der Matrixexponentialfunktion.

Entlang der Leitungsstruktur sind die elektromagnetischen Felder im Allgemeinen äußerst komplex. Sie müssen aber nicht bekannt sein, sondern man befasst sich nur mit ihren Auswirkungen an den Enden. Dies entspricht dem topologischen Konzept aus Kapitel 2.

Zur Berechnung der Parametermatrizen für das topologische Netzwerk genügt somit die Kenntnis der Größen an den Leitungsenden, wobei folgende Kurznotation verwendet werden soll

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}(L) \\ \mathbf{i}(L) \end{bmatrix} = \underbrace{e^{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{Z}' \\ -\mathbf{Y}' & \mathbf{0} \end{bmatrix} L}}_{\overline{\mathbf{M}}^{vi}} \begin{bmatrix} \mathbf{v}(0) \\ \mathbf{i}(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{eq}^{(s)}(L) \\ \mathbf{i}_{eq}^{(s)}(L) \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

Die Vektoren  $\mathbf{v}(L)$  bzw.  $\mathbf{i}(L)$  sollen dabei die Leiterspannungen bzw. -ströme am Ende der Leitungsstruktur darstellen,  $\mathbf{v}(0)$  bzw.  $\mathbf{i}(0)$  die Größen am Leitungsanfang. Die Kurzform  $\overline{\mathbf{M}}^{vi}$  steht für den Matrizzanten über die ganze Leitung vom Anfang zum Ende.

Betrachtet wird folglich die Leitungsstruktur im Weiteren als Mehrtor mit zwei Torgruppen. Die erste Torgruppe entsteht durch die Anschlussklemmen am Anfang der Leitung, die zweite Torgruppe durch die Klemmen am Ende der Leitung. Die Ordnung der Torgruppen ist dabei gleich groß.

Aus der Darstellung der Lösung nach Gleichung (2.36) kann leicht die Admittanz- oder Impedanzmatrix des Mehrtores berechnet werden. Sind jedoch Streu- oder Propagationsparameter gesucht, muss die Lösung ins Wellenbild transformiert werden.

Wie im Abschnitt 2.2.1 erläutert, wurden im Rahmen der EMT für komplexe Leitungsnetzwerke [11] die Wellengrößen wie folgt definiert

$$\begin{bmatrix} \mathbf{w}_+(z) \\ \mathbf{w}_-(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{Z}_c \\ \mathbf{E} & -\mathbf{Z}_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}(z) \\ \mathbf{i}(z) \end{bmatrix}. \quad (2.37)$$

Diese Transformation gilt auch für die äquivalenten Quellwellen.

Wendet man diese lineare Transformation auf die Leitungsgleichungen an, erhält man

$$\frac{d}{dz} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_+(z) \\ \mathbf{w}_-(z) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{Z}_c \\ \mathbf{E} & -\mathbf{Z}_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{Z}' \\ -\mathbf{Y}' & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{Z}_c \\ \mathbf{E} & -\mathbf{Z}_c \end{bmatrix}^{-1}}_{\begin{bmatrix} -\mathbf{P} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & +\mathbf{P} \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_+(z) \\ \mathbf{w}_-(z) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{w}_+^{(s)'}(z) \\ \mathbf{w}_-^{(s)'}(z) \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

mit  $\mathbf{P}^2 = \mathbf{Z}' \mathbf{Y}' = \mathbf{Y}' \mathbf{Z}'$  und  $\mathbf{Z}_c^2 = \mathbf{Z}' \mathbf{Y}'^{-1} = \mathbf{Y}'^{-1} \mathbf{Z}'$ .

Man erreicht so eine Entkopplung der Supermatrizenblöcke und die Lösung ist weniger aufwendig zu bestimmen. Die Lösung für die Wellengrößen am Anfang und Ende der Leitung in Kurzform ergibt sich als

$$\begin{bmatrix} \mathbf{w}_+(L) \\ \mathbf{w}_-(L) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} e^{-\mathbf{P}L} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & e^{+\mathbf{P}L} \end{bmatrix}}_{\overline{\mathbf{M}}^w} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_+(0) \\ \mathbf{w}_-(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{w}_+^{(s)}(L) \\ \mathbf{w}_-^{(s)}(L) \end{bmatrix}. \quad (2.39)$$

Ist die Lösung dagegen schon in der *v-i*-Darstellung bekannt, kann sie ins Wellenbild gemäß (A.6) übertragen werden

$$\overline{\mathbf{M}}^w = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{Z}_c \\ \mathbf{E} & -\mathbf{Z}_c \end{bmatrix} \overline{\mathbf{M}}^{vi} \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{Z}_c \\ \mathbf{E} & -\mathbf{Z}_c \end{bmatrix}^{-1}, \quad (2.40)$$

bzw. umgekehrt.

Mit diesen beiden Darstellungen der Lösung der Leitungsgleichungen können alle gesuchten Parametermatrizen mit den zugehörigen Quelltermen zur Darstellung im topologischen Netzwerk gewonnen werden. Die Transformationsvorschriften werden im Folgenden angegeben.

### 2.3.1 Transformation zur Propagationsmatrix

Um in ein topologisches Netzwerk gemäß der BLT 1 Gleichung eine Mehrfachleitung einführen zu können, muss die Lösung der verallgemeinerten Leitungsgleichungen in eine Propagationsmatrix  $\bar{\Gamma}_i$  mit den zugehörigen Quellwellen  $\bar{\mathbf{W}}_i^{(s)}(L)$  transformiert werden. Nach einer Transformation in eine Propagationsmatrix  $\bar{\Gamma}_i$  kann diese direkt für den jeweiligen *tube* in die Supermatrix  $\bar{\Gamma}$  eingefügt werden.  $L$  bezeichnet hierbei den Ort  $z$  der Leitung an dem die Leitung endet. Im gleichen Sinne wird der Ausdruck 0 für den Anfang der Leitung verwendet. Da die Propagationsmatrix auf der Basis von Wellengrößen definiert ist, muss der berechnete Matrizen – falls nicht schon im Wellenbild berechnet – unter Benutzung der Wellenwiderstandsmatrix in das Wellenbild transformiert werden. Damit ergibt sich als Ergebnis

$$\begin{bmatrix} \mathbf{w}_+(L) \\ \mathbf{w}_-(L) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11}^w & \mathbf{M}_{12}^w \\ \mathbf{M}_{21}^w & \mathbf{M}_{22}^w \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{M}}^w} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_+(0) \\ \mathbf{w}_-(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{w}_+^{(s)}(L) \\ \mathbf{w}_-^{(s)}(L) \end{bmatrix}. \quad (2.41)$$

Die gesuchte Propagationsmatrix  $\bar{\Gamma}_i$  ergibt sich dann aus der Propagationsgleichung für den *tube*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{w}_1(L) \\ \mathbf{w}_2(L) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1(0) \\ \mathbf{w}_2(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1^{(s)}(L) \\ \mathbf{w}_2^{(s)}(L) \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

und der Gleichung (2.41) durch Koeffizientenvergleich als

$$\bar{\Gamma}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11}^w - \mathbf{M}_{12}^w \mathbf{M}_{22}^{w-1} \mathbf{M}_{21}^w & \mathbf{M}_{12}^w \mathbf{M}_{22}^{w-1} \\ -\mathbf{M}_{22}^{w-1} \mathbf{M}_{21}^w & \mathbf{M}_{22}^{w-1} \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

und die Quellterme als

$$\begin{bmatrix} \mathbf{w}_1^{(s)}(L) \\ \mathbf{w}_2^{(s)}(L) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_+^{(s)}(L) - \mathbf{M}_{12}^w \mathbf{M}_{22}^{w-1} \mathbf{w}_-^{(s)}(L) \\ -\mathbf{M}_{22}^w \mathbf{w}_-^{(s)}(L) \end{bmatrix}. \quad (2.44)$$

Zur näheren Erläuterung sind die Größen in Abbildung 2.9 dargestellt. Hierbei sei nochmals auf die umgekehrte Festlegung der Zählaufrichtung des rücklaufenden Wellenvektors  $\mathbf{w}_2$  vom Ende zum Anfang hingewiesen. Dessen logischer Anfangspunkt (Index 0) liegt am geometrischen Ende der Leitung, d.h.  $\mathbf{w}_2(0) = \mathbf{w}_-(L)$  und  $\mathbf{w}_2(L) = \mathbf{w}_-(0)$ . Dieser Sachverhalt ist in den Transformationsgleichungen berücksichtigt.

Die so gewonnenen Größen  $\bar{\Gamma}_i$  und  $\bar{\mathbf{W}}_i^{(s)}(L)$  können direkt in die BLT-Gleichung für die ungleichförmige Leitung eingesetzt und das Netzwerk gelöst werden. Dies ermöglicht auch eine gemeinsame Behandlung von gleichförmigen und ungleichförmigen Leitungen im Rahmen der BLT 1 Gleichung, wohingegen sich der in [42] vorgestellte Ansatz der NBLT Gleichung weitaus komplizierter darstellt und eine gemeinsame Behandlung erschwert.

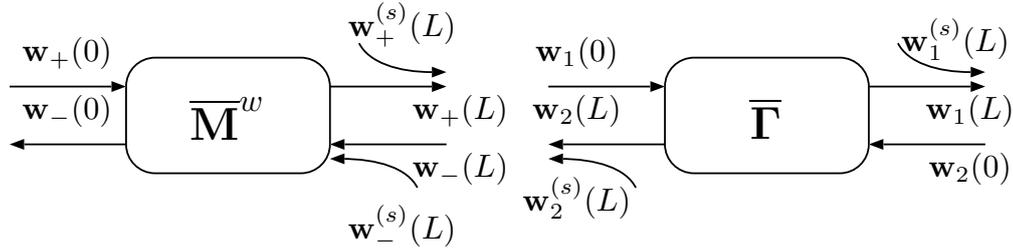


Abbildung 2.9: Matrizant und Propagationsmatrix

### 2.3.2 Äquivalente Streumatrizen

Die Motivation für die Darstellung einer Mehrfachleitung als äquivalente Streumatrix liegt in den Implementierungsdetails der Netzwerkprogramm Pakete. Vielfach dürfen die Propagationsmatrizen  $\bar{\Gamma}_i$  der einzelnen *tubes* nur in Diagonalform vorliegen und werden intern entsprechend so verwaltet, dass eine Substitution mit den Werten einer nicht diagonalisierbaren Propagationsmatrix in den vorhandenen Algorithmen nur durch tiefgreifende Änderungen der Programmstruktur zu realisieren ist. In diesen Fällen ist es wünschenswert, die Leitungsstruktur als äquivalente *junction* im topologischen Netzwerk einzubauen. Eine Transformation zu äquivalenten Streumatrizen erlaubt es somit, die Leitungsstruktur als *junction* darzustellen und in der BLT 1 oder BLT 2 Gleichung zu verwenden. Dabei ergibt sich für eine Leitung eine äquivalente *junction* mit zwei gleichgroßen Torgruppen.

Soll die Leitungsstruktur in ein BLT 2 Netzwerk integriert werden, so ist die Berechnung der S50-Parameter erforderlich (siehe dazu Abschnitt 2.2.3 und 2.2.1). Dabei wird als Wellenwiderstandsmatrix  $\mathbf{Z}_c(z) = 50\Omega \mathbf{E}$  in Gleichung (2.37) zur Transformation verwendet.

Eine weitere Möglichkeit wäre der Einbau als äquivalente *junction* unter Verwendung der topologischen Streuparameter, wobei die Wellengrößen gemäß Gleichung (2.37) mit den Wellenwiderständen am Anfang und am Ende der Leitung gebildet werden. An das Netzwerk angebunden wird die topologische S-Matrix der äquivalenten *junction* mit Hilfe von *zero-length-tubes* mit eben diesen Wellenwiderständen.

Die gesuchte äquivalente Streumatrix für einen *tube* ergibt sich – in der gleichen Art und Weise wie im vorangegangenen Abschnitt die Propagationsmatrix – aus der Gleichung (2.41) und der Definition von Streuparametern durch Koeffizientenvergleich

$$\bar{\mathbf{S}}_{eq} = \begin{bmatrix} -\mathbf{M}_{22}^{w-1} \mathbf{M}_{21}^w & \mathbf{M}_{22}^{w-1} \\ \mathbf{M}_{11}^w - \mathbf{M}_{12}^w \mathbf{M}_{22}^{w-1} \mathbf{M}_{21}^w & \mathbf{M}_{12}^w \mathbf{M}_{22}^{w-1} \end{bmatrix}. \quad (2.45)$$

Die Darstellung einer ungleichförmigen Leitung als eine *junction* sieht folgendermaßen aus

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{eq11} & \mathbf{S}_{eq12} \\ \mathbf{S}_{eq21} & \mathbf{S}_{eq22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^{(s)} \\ \mathbf{b}_2^{(s)} \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

mit

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^{(s)} \\ \mathbf{b}_2^{(s)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{M}_{22}^w \mathbf{w}_-^{(s)}(L) \\ \mathbf{w}_+^{(s)}(L) - \mathbf{M}_{12}^w \mathbf{M}_{22}^{w-1} \mathbf{w}_-^{(s)}(L) \end{bmatrix}. \quad (2.47)$$

Die Größen aus Gleichung (2.41) und (2.46) sind zum besseren Verständnis in Abbildung 2.10 skizziert.

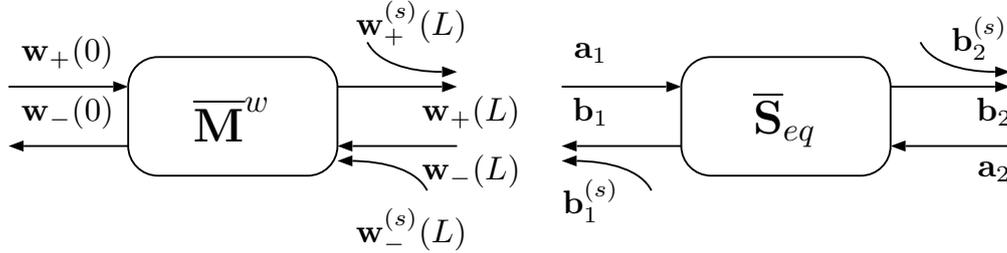


Abbildung 2.10: Matrizant und äquivalente Streumatrizen

Eine weitere Bestimmungsmöglichkeit führt als Zwischenschritt über die Admittanzdarstellung eines *tubes* nach Abschnitt 2.3.3. Verwendet man die Y-Matrix gemäß Gleichung (2.50) ergibt sich die Streumatrix als

$$\bar{\mathbf{S}} = (\bar{\mathbf{E}} + \bar{\mathbf{Z}}_c \bar{\mathbf{Y}}_t) (\bar{\mathbf{E}} - \bar{\mathbf{Z}}_c \bar{\mathbf{Y}}_t)^{-1}. \quad (2.48)$$

Man beachte dabei, dass bei der Definition der Admittanzdarstellung vereinbart wurde, dass die Ströme aus den *tubes* heraus fließen. Die Supermatrix  $\bar{\mathbf{Z}}_c$  beinhaltet die Normierungsimpedanzen der Tore

$$\bar{\mathbf{Z}}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_c(0) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}_c(L) \end{bmatrix}, \quad (2.49)$$

deren Werte je nach gewünschten Parametern – S50- oder topologischen S-Parametern – gewählt werden müssen.

### 2.3.3 Admittanzmatrix

Für die Verwendung der Admittanzdarstellung des Netzwerkes müssen die dynamischen Eigenschaften des *tubes* als Admittanzmatrizen ausgedrückt werden, welche dann in die Systemgleichung (2.29) eingesetzt werden.

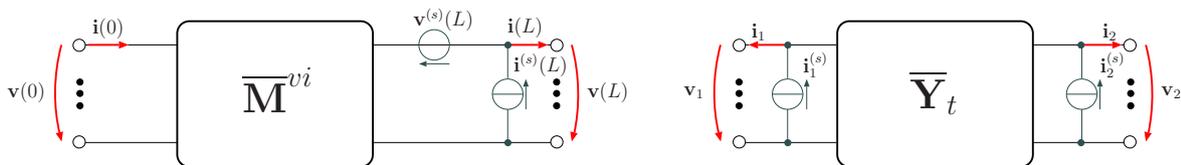


Abbildung 2.11: Matrizant und Admittanzmatrix

Dazu wird der Matrizant in der Strom-Spannungsdarstellung verwendet, und durch Koeffizientenvergleich ergibt sich die Umrechnungsvorschrift (siehe dazu Abbildung 2.11). Man

beachte dabei, dass gemäß Definition in Abschnitt 2.2.4 die Ströme aus den *tubes* heraus fließen. Somit ergibt sich für die Y-Matrix

$$\bar{\mathbf{Y}}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{12}^{vi-1} \mathbf{M}_{11}^{vi} & -\mathbf{M}_{12}^{vi-1} \\ \mathbf{M}_{21}^{vi} - \mathbf{M}_{22}^{vi} \mathbf{M}_{12}^{vi-1} \mathbf{M}_{11}^{vi} & \mathbf{M}_{22}^{vi} \mathbf{M}_{12}^{vi-1} \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

und für den Vektor der Quellströme

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i}_1^{(s)} \\ \mathbf{i}_2^{(s)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{12}^{vi-1} \mathbf{v}^{(s)}(L) \\ \mathbf{i}^{(s)}(L) - \mathbf{M}_{22}^{vi} \mathbf{M}_{12}^{vi-1} \mathbf{v}^{(s)}(L) \end{bmatrix}. \quad (2.51)$$



## Kapitel 3

# Ungleichförmige Mehrfachleitungen

Obwohl praxisrelevante Systemverkabelungen im Allgemeinen ungleichförmig ausgeführt sind, werden sie meist als gleichförmig verlegte Leitungen im Design und in der Analyse behandelt. Dies führt in vielen Fällen zu Unterschieden zwischen Praxis und Analyse. Einige Beispiele typischer Ungleichförmigkeiten in technischen Leitungen sind in Abbildung 3.1 dargestellt.

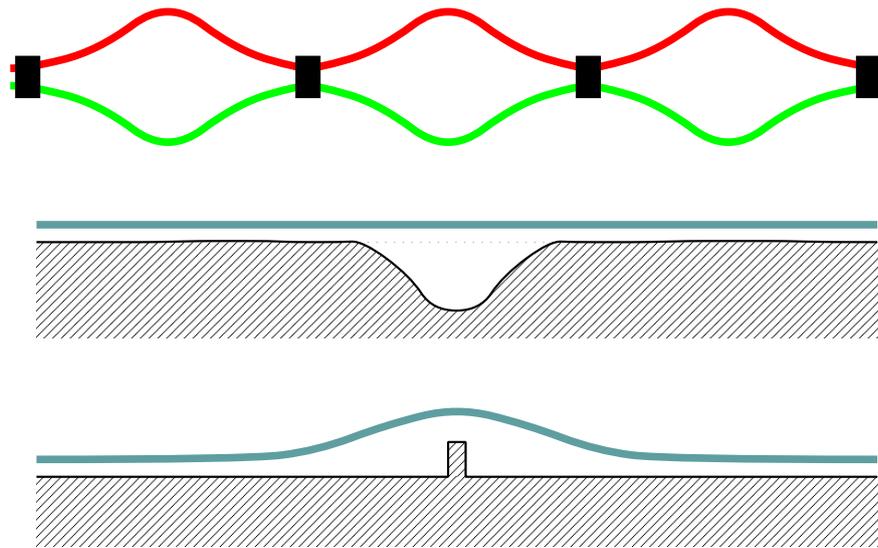


Abbildung 3.1: Beispiele für Ungleichförmigkeiten bei Einfachleitungen.

Bei der Betrachtung solcher Leitungsstrukturen stellen sich zwei Probleme. Zum ersten müssen die Leitungsbeläge für solche Strukturen bestimmt werden. Diese werden in jedem Falle ortsabhängig, d.h. eine Funktion des Ausbreitungsweges  $z$  sein. Als zweites sind Lösungsverfahren für die entstehenden Leitungsgleichungen mit diesen ortsabhängigen Parametern nötig. In diesem Kapitel soll auf Lösungsmethoden der Leitungsgleichungen für die ungleichförmige Leitungsverlegung eingegangen und dabei aufgezeigt werden, wie die Ergebnisse in Netzwerkmethoden zur Behandlung von Zusammenschaltungen von ungleichförmigen (und natürlich auch gleichförmigen) Leitungen genutzt werden können, um zu realistischeren Ergebnissen zu gelangen.

### 3.1 Parameter ungleichförmiger Leitungen

Aus Sicht der Realisierung heißt ungleichförmige Leitungsführung, dass die Abstände der Adern entlang der Leitungsstruktur variabel sind. Dadurch sind die Annahmen der Leitungstheorie (z.B. TEM-Mode) nicht mehr erfüllt.

Sind die Abweichungen vom TEM-Mode allerdings gering, können als eine erste Approximation die Längsimpedanz  $\mathbf{Z}'$  und die Queradmittanz  $\mathbf{Y}'$  als Funktion des Ortes angesehen werden. Damit ergibt sich das System

$$\frac{d}{dz} \begin{bmatrix} \mathbf{v}(z) \\ \mathbf{i}(z) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{Z}'(z) \\ -\mathbf{Y}'(z) & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\overline{\mathbf{R}}^{vi}(z)} \begin{bmatrix} \mathbf{v}(z) \\ \mathbf{i}(z) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{v}^{(s)'}(z) \\ \mathbf{i}^{(s)'}(z) \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

Die Parameterfunktion  $\overline{\mathbf{R}}^{vi}(z)$  wird dabei mit den gleichen Methoden ermittelt, als wäre die Leitung gleichförmig und unendlich ausgedehnt. Dies soll im Folgenden als statische Näherung bezeichnet werden. Aufgrund der über  $z$  variierenden Abstände der Einzeladern, ist auch die Parametermatrix eine Matrizenfunktion über  $z$ . Diese Methode eignet sich nur für schwach ungleichförmige Leitungen mit dominantem TEM-Mode. Diese Voraussetzung ist allerdings bei einer großen Klasse von Verbindungsstrukturen im Nutzfrequenzbereich gegeben. Gerade ausgedehnte Verbindungsstrukturen in komplexen Systemen weisen aufgrund der mitgeführten Referenz oft einen ausgeprägten TEM-Mode auf – trotz eines unstrukturierten Verlegeweges des *tubes*.

Wird die Ungleichförmigkeit der Leitungsführung zu groß, müssen weitergehende Methoden verwendet werden, die diese auch schon bei der Berechnung der Parametermatrix berücksichtigen. Eine Methode zur Berechnung der Leitungsparameter, die *transmission line super theory* (TLST), welche direkt auf den *Maxwellschen* Gleichungen basiert, wird in [43, 21, 25] vorgestellt. Dabei werden die *Maxwellschen* Gleichungen in ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung überführt und die Parameter iterativ berechnet. Hierbei zeigt sich beispielsweise, dass sich auch für eine endlich ausgedehnte, gleichförmige Leitung ortsabhängige Parameter ergeben [23]. Da diese Parameter direkt auf den *Maxwellschen* Gleichungen basieren, sind sie nicht auf den Fall des dominanten TEM-Modes beschränkt und stellen Full-Wave-Parameter dar, die auch Effekte wie Abstrahlung und höhere Moden mit einschließen. Die Parametermatrix ist dann voll besetzt und an die Stelle der Spannung tritt ein äquivalentes Potential. Das System der ungleichförmigen Mehrfachleitung wird dann durch die Gleichung

$$\frac{d}{dz} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}(z) \\ \mathbf{i}(z) \end{bmatrix} = j\omega \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11}^*(z) & \mathbf{P}_{12}^*(z) \\ \mathbf{P}_{21}^*(z) & \mathbf{P}_{22}^*(z) \end{bmatrix}}_{\overline{\mathbf{R}}^{vi}(z)} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}(z) \\ \mathbf{i}(z) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}^{(s)'}(z) \\ \mathbf{i}^{(s)'}(z) \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

beschrieben.

Welches Verfahren zur Bestimmung der Parametermatrix einzusetzen ist, hängt von der gewünschten Genauigkeit, der zu untersuchenden Struktur und den einzubeziehenden physikalischen Effekten ab.

Exemplarisch soll eine Doppelleitung untersucht werden, die in regelmäßigen Abständen durch Kabelbinder fixiert sein soll, wie im oberen Teil der Abbildung 3.2 dargestellt. Unter der Annahme der statischen Näherung kommen die Formeln der klassischen Leitungstheorie zum Einsatz. Damit ergeben sich für die Doppelleitung unter der Annahme eines variierenden Abstandes mit

$$d(z) = d_{min} + \frac{d_{max} - d_{min}}{2} \left[ 1 - \cos \left( \frac{3 \cdot 2\pi \cdot z}{1 \text{ m}} \right) \right] \quad (3.3)$$

folgende Leitungsbeläge [32]

$$\mathcal{F}(z) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arccosh} \left( \frac{d(z)}{2r} \right) \quad (3.4)$$

$$L'(z) = \mu \mathcal{F}(z) \quad (3.5)$$

$$C'(z) = \frac{\epsilon}{\mathcal{F}(z)}. \quad (3.6)$$

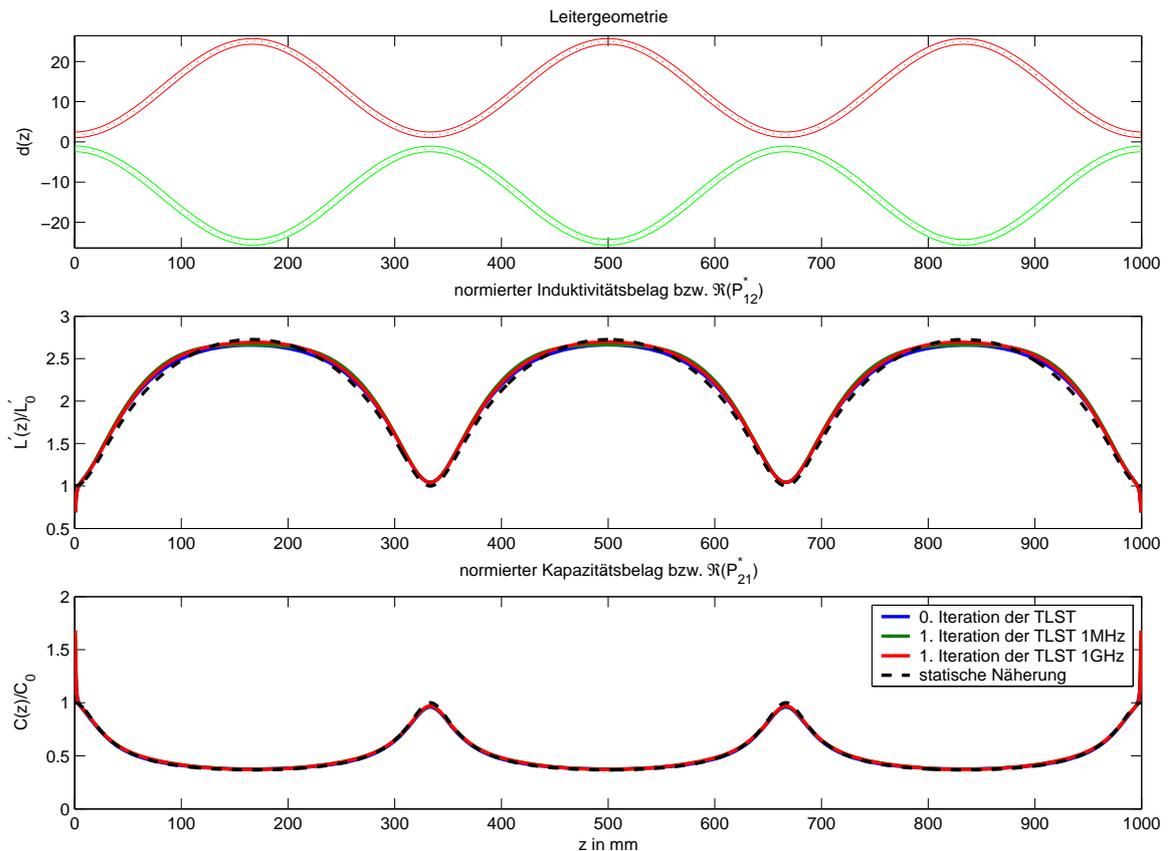


Abbildung 3.2: Geometrie sowie normierter Induktivitäts- und Kapazitätsbelag für die ungleichförmige Doppelleitung. Die Werte sind auf die statischen Beläge bei minimalem Abstand normiert  $d = d_{min} = 5r$ . Weitere Parameter waren  $r = 0.7 \text{ mm}$  und  $d_{max} = 50 \text{ mm}$ .

Die Verläufe des normierten Induktivitäts- und Kapazitätsbelages sind in Abbildung 3.2 als Funktion des Ortes  $z$  dargestellt. Im Vergleich zur statischen Näherung sind auch die mit der TLST ermittelten Werte aufgezeigt, und zwar für die 0. Iteration (d.h. die Startwerte der Iteration für den Grenzwert  $f \rightarrow 0$  Hz) und für 1. Iteration bei zwei unterschiedlichen Frequenzen ( $f_1 = 1$  MHz und  $f_2 = 1$  GHz). Die mit den verschiedenen Methoden ermittelten Belagsgrößen sind nahezu identisch und Unterschiede kaum festzustellen. In weiten Bereichen stimmen die statischen Parameter mit denen der TLST überein. Unterschiede ergeben sich hauptsächlich an den Enden aufgrund der endlichen Ausdehnung der Leitungsstruktur. Bei der statischen Näherung und der 0. Iteration verschwinden die Diagonalelemente  $P_{11}^*(z)$  und  $P_{22}^*(z)$ . Mit zunehmender Frequenz bzw. zunehmender elektrischer Ausdehnung der Querschnittsgeometrie vergrößern sich die Werte dieser Matrixelemente nach der ersten Iteration und damit deren Einfluss auf die Lösung der Leitungsgleichungen.

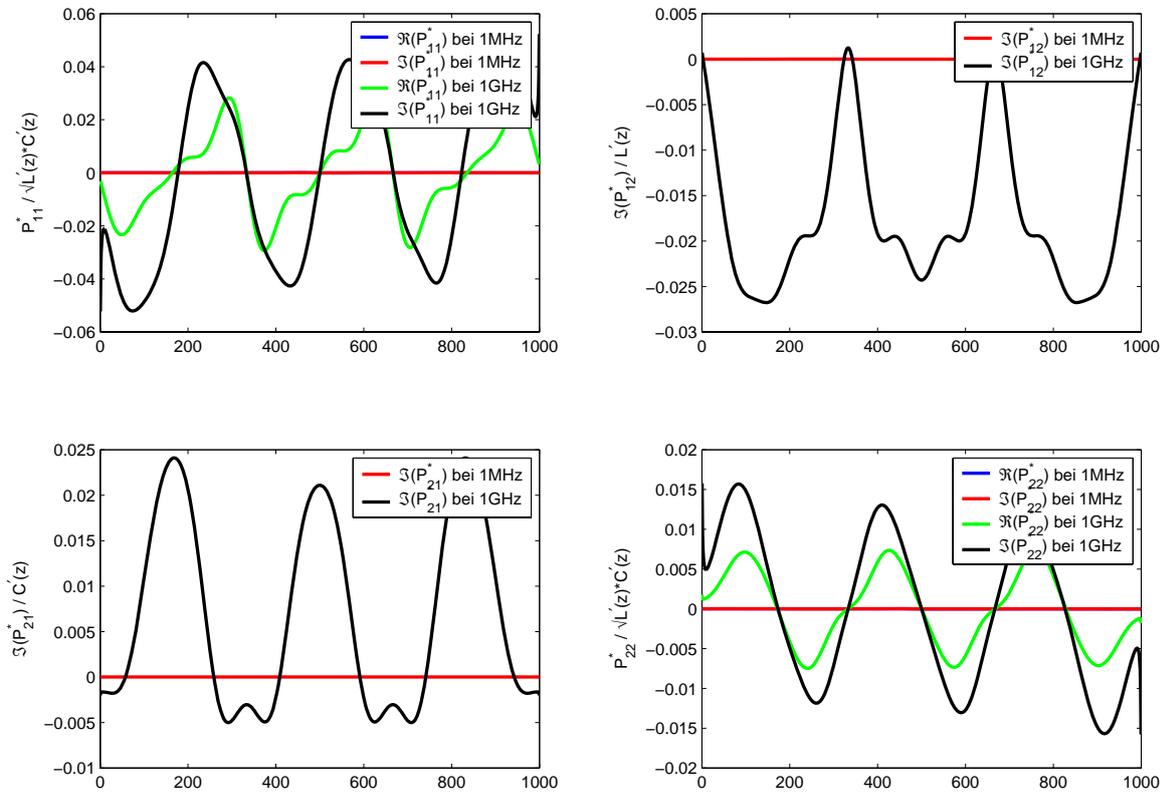


Abbildung 3.3: Normierter Real- und Imaginärteil der Diagonalelemente  $P_{11}^*(z)/\sqrt{L'(z)C'(z)}$  und  $P_{22}^*(z)/\sqrt{L'(z)C'(z)}$  sowie normierte Imaginärteile der Antidiagonalelemente  $P_{12}^*(z)/L'(z)$  und  $P_{21}^*(z)/C'(z)$  als Funktion des Ortes  $z$  bei  $f = 1$  MHz und 1 GHz zugehörig zu der Darstellung und den Parametern aus Abbildung 3.2.

In Abbildung 3.3 sind die Parameter in normierter Form für zwei verschiedene Frequenzen dargestellt. Die Normierung erfolgte, um den relativen Einfluss auf die Lösung beurteilen zu können. Man erkennt deutlich, dass sie bei einer Frequenz von 1 MHz nahezu Null sind. Selbst bei einer Frequenz von 1 GHz ergeben sich nur Abweichungen von weniger als 5 Prozent.

Erhebliche Abweichungen zwischen der statischen Näherung und den Parametern der TLST ergeben sich erst bei noch stärkeren Ungleichförmigkeiten und abrupten Änderungen der Leitungsgeometrie, beispielsweise an Ecken und Knicken. Auch vergrößern sich die Unterschiede mit zunehmender Frequenz.

Bei der Mehrzahl der praxisrelevanten Systemverkabelungen, die in erster Linie dimensioniert werden, um einen dominanten TEM-Mode zu übertragen, stellt die statische Näherung brauchbare Parameter zur Verfügung. Eine exakte Darstellung unter Berücksichtigung von Effekten wie Abstrahlung und höheren Moden erlauben die Parameter der TLST. Die im Folgenden vorgestellten Lösungsverfahren für das entstehende Differentialgleichungssystem der Leitungsgleichungen sind für beide Fälle anwendbar.

Allgemein lassen sich alle aufgeführten Leitungsdifferentialgleichungen (siehe Anhang B) für ungleichförmige Leitungen durch die Gleichung

$$\frac{d\bar{\mathbf{x}}(z)}{dz} = \bar{\mathbf{R}}^x(z)\bar{\mathbf{x}}(z) + \bar{\mathbf{x}}^s(z) \quad (3.7)$$

ausdrücken. Dabei stellen der Supervektor  $\bar{\mathbf{x}}$  die unbekanntes Größen im Rahmen der verwendeten Theorie, die Matrizenfunktion  $\bar{\mathbf{R}}^x(z)$  die Parameter bezüglich der gesuchten Größen in  $\bar{\mathbf{x}}$  und  $\bar{\mathbf{x}}^s(z)$  die verteilte Erregung der Leitungsstruktur dar.

Betrachtet man die Leitungsgleichungen für ungleichförmige Leitungen, reduzieren sich alle im mathematischen Sinne auf ein lineares, inhomogenes Differentialgleichungssystem erster Ordnung mit variabler Koeffizientenmatrix. Die Dimension des Systems ergibt sich dabei aus der doppelten Anzahl der vorhandenen Leiter inklusive der Referenz. Dabei stellt  $\bar{\mathbf{R}}^x(z)$  eine im betrachteten Intervall von  $z_0$  bis  $z$  endliche, komplexwertige Matrizenfunktion dar, d.h. alle Elemente  $R_{i,k}^x(z)$  der Matrix  $\bar{\mathbf{R}}^x(z)$  sind in eben diesem Intervall endliche, reelle oder komplexe Funktionen des reellen Argumentes  $z$ .

Grundsätzlich lassen sich Differentialgleichungssysteme ungleichförmiger Leitungen nicht mehr mit den Lösungsmethoden für gleichförmige Leitungen lösen, sondern setzen Methoden voraus, welche im Folgenden ausführlich aufgezeigt werden. Dabei werden bezüglich der untersuchten Methoden keine Annahmen über die Besetzung der Matrix  $\bar{\mathbf{R}}^x(z)$  gemacht, d.h. die Methoden sind anwendbar sowohl für Parameterrmatrizen, die in klassischer Art und Weise statisch bestimmt wurden (siehe Gleichung (3.1)), als auch für voll besetzte Matrizen nach Gleichung (3.2).

## 3.2 Bestimmung des Matrizen

Um ungleichförmige Leitungen in Netzwerksimulationen einbringen zu können, ist es notwendig, die konkrete Lösung der Leitungsdifferentialgleichung für die ungleichförmige Leitung zu bestimmen. Unvorteilhafterweise existiert für den allgemeinen Fall keine auswertbare geschlossen analytische Form zur Berechnung der Lösung. Im folgenden Kapitel sollen nun verschiedene sowohl numerische als auch semi-analytische Verfahren zur Berechnung der Fundamentallösung vorgestellt werden.

Die Berechnungsverfahren zur Lösung des inhomogenen linearen Differenzialgleichungssystems mit variablen Koeffizienten können in vier verschiedene Klassen unterteilt werden,

- Iterationsverfahren und sukzessive Approximation,
- Analytische Berechnungsverfahren, basierend auf Reihenentwicklungen und auf dem allgemeinen Matrizenkalkül,
- Diagonalisierungs- bzw. Eigenwertverfahren,
- Numerische Integrationsverfahren.

Beispielsweise wendet *Schelkunoff* in [44] eine sukzessive Approximation an, um die Lösung einer ungleichförmigen Einfachleitung zu berechnen. Für eine Einfachleitung mit linear variierendem Wellenwiderstand gibt *Ke Lu* in [18] ein analytisches Verfahren an, welches allerdings nur bei einer Einfachleitung benutzt und nicht auf den allgemeinen Fall einer Mehrfachleitung übertragen werden kann. Zur Behandlung ungleichförmiger Mehrfachleitungen wird in [45] das *Runge-Kutta*-Verfahren eingesetzt. Allerdings werden dort keine geschlossenen Formeln für den Matrizenanten hergeleitet, vielmehr wird auf klassische Art und Weise mehrfach hintereinander das System mit verschiedenen Eingangsvektoren gelöst. Diese Verfahrensweise erfordert je nach Implementierung bestenfalls den gleichen numerischen Aufwand im Vergleich zur Matrix-Formel nach Kapitel 3.2.6.3. Für eine konkrete Implementierung gilt es, entweder bei jedem Erregungsvektor die zur Berechnung der Funktionswerte notwendigen Matrizen neu zu berechnen oder nach der ersten Berechnung abzuspeichern, wodurch der Speicherbedarf drastisch erhöht wird. Aus diesen Erwägungen heraus sollten die Matrix-Formeln für die numerische Integration der mehrfachen Berechnung mit verschiedenen Eingangsvektoren vorgezogen werden.

### 3.2.1 Iteration nach *Picard*

Die Lösung des in Gleichung (3.7) angegebenen Systems mit Hilfe einer Iteration wird beispielsweise in [46] behandelt. Zur Berechnung der homogenen normierten Lösung kann die Methode der sukzessiven Approximation eingesetzt werden. Dabei erhält man eine Näherung für die Fundamentallösung mit Hilfe der Rekursionsformel

$$\frac{d\bar{\mathbf{X}}^{(k+1)}(z)}{dz} = \bar{\mathbf{R}}^x(z)\bar{\mathbf{X}}^{(k)}(z) \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.8)$$

wobei  $\bar{\mathbf{X}}^{(0)}(z)$  die Einheitsmatrix  $\bar{\mathbf{E}}$  darstellt. Wird des weiteren  $\bar{\mathbf{X}}^{(k)}(z_0) = \bar{\mathbf{E}}$  für alle  $k$  gesetzt, erhält man die Darstellungsform

$$\bar{\mathbf{X}}^{(k+1)}(z) = \bar{\mathbf{E}} + \int_{z_0}^z \bar{\mathbf{R}}^x(\xi)\bar{\mathbf{X}}^{(k)}(\xi) d\xi \quad k = 0, 1, 2, \dots. \quad (3.9)$$

Fasst man nun alle Terme zu einer Matrizenreihe zusammen, erhält man die Iterationsformel nach *Picard*

$$\bar{\mathbf{X}}(z) = \bar{\mathbf{E}} + \int_{z_0}^z \bar{\mathbf{R}}^x(\zeta) d\zeta + \int_{z_0}^z \bar{\mathbf{R}}^x(\zeta) \int_{z_0}^{\zeta} \bar{\mathbf{R}}^x(\eta) d\eta d\zeta + \dots \equiv \mathcal{M}_{z_0}^z\{\bar{\mathbf{R}}^x\} \quad (3.10)$$

Das Ergebnis dieser Iterationsformel wird in der Literatur mit Propagator, Matrizen oder auch als Produktintegral bezeichnet. Ein Beweis für absolute und gleichmäßige Konvergenz der Lösung nach Gleichung (3.10) ist in [46] zu finden.

Zur numerischen Berechnung des Matrizen wird das Berechnungsintervall  $[z_0, z]$  in ein Grid mit den Stützstellen  $z_\kappa$  unterteilt. Dieses muss nicht zwingend äquidistant geschehen, sondern kann an den Verlauf der Matrizenfunktion  $\overline{\mathbf{R}}^x(z)$  im Sinne einer geeigneten Norm angepasst werden. Der Matrizen über das Berechnungsintervall ergibt sich dann als

$$\mathcal{M}_{z_0}^z\{\overline{\mathbf{R}}^x\} = \overline{\mathbf{E}} + \overline{\mathbf{X}}^{(1a)}(z) + \overline{\mathbf{X}}^{(2a)}(z) + \overline{\mathbf{X}}^{(3a)}(z) + \dots \quad (3.11)$$

mit den Zwischenergebnissen an allen Punkten des Grids

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{X}}^{(1a)}(z_\kappa) &= \int_{z_0}^{z_\kappa} \overline{\mathbf{R}}^x(\zeta) d\zeta & \longrightarrow & \overline{\mathbf{X}}^{(1b)}(z_\kappa) = \overline{\mathbf{R}}^x(z_\kappa) \overline{\mathbf{X}}^{(1a)}(z_\kappa) \\ \overline{\mathbf{X}}^{(2a)}(z_\kappa) &= \int_{z_0}^{z_\kappa} \overline{\mathbf{X}}^{(1b)}(\zeta) d\zeta & \longrightarrow & \overline{\mathbf{X}}^{(2b)}(z_\kappa) = \overline{\mathbf{R}}^x(z_\kappa) \overline{\mathbf{X}}^{(2a)}(z_\kappa) \\ \overline{\mathbf{X}}^{(3a)}(z_\kappa) &= \int_{z_0}^{z_\kappa} \overline{\mathbf{X}}^{(2b)}(\zeta) d\zeta & \longrightarrow & \overline{\mathbf{X}}^{(3b)}(z_\kappa) = \overline{\mathbf{R}}^x(z_\kappa) \overline{\mathbf{X}}^{(3a)}(z_\kappa) \\ & & & \dots \end{aligned} \quad (3.12)$$

und so weiter. Die Reihe wird abgebrochen, wenn der Term  $\overline{\mathbf{X}}^{(na)}(z)$  keinen signifikanten Beitrag mehr liefert. Die Reihe (3.11) liefert für konstante  $\overline{\mathbf{R}}^x(z) = \overline{\mathbf{R}}^x$  als Ergebnis die Taylor-Reihe für  $e^{\overline{\mathbf{R}}^x(z-z_0)}$ . Die numerische Durchführung der Iteration nach *Picard* ist rechnerisch sehr aufwendig und stellt hohe Anforderungen an die Performance der verwendeten Rechner. Zum einen müssen für jede Stützstelle des Grids Matrixwerte abgelegt und gespeichert werden, und zum anderen sind neben der eigentlichen Integration auch noch Matrixmultiplikationen an jedem Punkt des Grids notwendig. Das Verfahren eignet sich daher nur bei sehr schneller Konvergenz der Iteration.

Wenn die homogene Lösung (Bestimmung des Matrizen mit der Iterationsvorschrift) bestimmt wurde, kann ein korrespondierendes inhomogenes Problem (3.7) durch Anwendung von

$$\overline{\mathbf{x}}(z) = \mathcal{M}_{z_0}^z\{\overline{\mathbf{R}}^x\} \overline{\mathbf{x}}(z_0) + \int_{z_0}^z \mathcal{M}_{z_0}^z\{\overline{\mathbf{R}}^x\} \overline{\mathbf{x}}^s(\zeta) d\zeta \quad (3.13)$$

und (siehe Anhang A)

$$\mathcal{M}_{z_0}^z\{\overline{\mathbf{R}}^x\} = \mathcal{M}_{z_0}^z\{\overline{\mathbf{R}}^x\} \left( \mathcal{M}_{z_0}^z\{\overline{\mathbf{R}}^x\} \right)^{-1} \quad (3.14)$$

auf dem definiertem Grid gelöst werden [46].

### 3.2.2 Kalkül nach *Volterra* und das Produktintegral

Zerlegt man das Grundintervall  $[z_0, z]$  in  $n$  Teilintervalle, so ergibt sich der Matrizen über das Gesamtintervall nach der Regel (A.1) als das geordnete Matrizenprodukt des Matrizen

der Teilintervalle

$$\mathcal{M}_{z_0}^z\{\overline{\mathbf{R}}^x\} = \mathcal{M}_{z_{n-1}}^z\{\overline{\mathbf{R}}^x\} \cdots \mathcal{M}_{z_1}^{z_2}\{\overline{\mathbf{R}}^x\} \mathcal{M}_{z_0}^{z_1}\{\overline{\mathbf{R}}^x\}. \quad (3.15)$$

Unter der Annahme kleiner  $\Delta z_i = z_{i+1} - z_i$  kann zur Berechnung des Matrizenanten das Argument  $\overline{\mathbf{R}}^x(z_i \leq z \leq z_{i+1}) = \overline{\mathbf{R}}_i^x$  im Teilintervall  $i$  als konstant angenommen werden. Es gilt dann

$$\mathcal{M}_{z_i}^{z_{i+1}}\{\overline{\mathbf{R}}^x\} \approx e^{\overline{\mathbf{R}}_i^x \Delta z_i}. \quad (3.16)$$

Dies entspricht einer Stufenapproximation der Matrizenfunktion  $\overline{\mathbf{R}}^x$ . Bildet man den Grenzübergang  $\Delta z_i \rightarrow 0$ , so erhält man

$$\mathcal{M}_{z_0}^z\{\overline{\mathbf{R}}^x\} = \lim_{\Delta z_i \rightarrow 0} [e^{\overline{\mathbf{R}}_i^x \Delta z_i} \cdots e^{\overline{\mathbf{R}}_2^x \Delta z_2} e^{\overline{\mathbf{R}}_1^x \Delta z_1}] = \prod_{z_0}^z e^{\overline{\mathbf{R}}^x(\zeta) d\zeta}. \quad (3.17)$$

Dieser Grenzwert ist das Analogon zur Approximation eines gewöhnlichen *Riemannsches* Integrales durch eine unendliche Summe infinitesimaler Flächensegmente. Daher bezeichnet man diesen Grenzwert auch als Produktintegral. Es wurde zuerst von *Volterra* eingeführt [47].

Wenn alle Werte der Matrizenfunktion  $\overline{\mathbf{R}}(z)$  vertauschbar sind, d.h.

$$\overline{\mathbf{R}}^x(z_1)\overline{\mathbf{R}}^x(z_2) = \overline{\mathbf{R}}^x(z_2)\overline{\mathbf{R}}^x(z_1) \quad (3.18)$$

für beliebige  $z_1$  und  $z_2$  aus dem Intervall  $(z_0, z)$  gilt, vereinfacht sich der Grenzwert zu

$$\mathcal{M}_{z_0}^z\{\overline{\mathbf{R}}^x\} = e^{\int_{z_0}^z \overline{\mathbf{R}}^x(\zeta) d\zeta}, \quad (3.19)$$

wie leicht aus der Gleichung (3.17) und der Beziehung  $e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}}$  für kommutative Matrizen  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  zu ersehen ist. Im Fall einer allgemeinen ungleichförmigen Leitung ist das aber nicht gegeben.

Die in Gleichung (3.15) und (3.17) auftretenden Matrixexponentialfunktionen können zur numerischen Auswertung mit unterschiedlicher Genauigkeit approximiert werden. Bricht man zum Beispiel eine *Taylor*-Approximation nach dem linearen Glied ab, erhält man folgende Näherung

$$\mathcal{M}_{z_0}^z\{\overline{\mathbf{R}}^x\} = \lim_{\Delta z_i \rightarrow 0} [(\overline{\mathbf{E}} + \overline{\mathbf{R}}_i^x \Delta z_i) \cdots (\overline{\mathbf{E}} + \overline{\mathbf{R}}_2^x \Delta z_2) (\overline{\mathbf{E}} + \overline{\mathbf{R}}_1^x \Delta z_1)]. \quad (3.20)$$

Weitere mögliche Approximationen und der sich daraus für ein Teilsegment ergebende Matrizenant  $\mathcal{M}_{z_i}^{z_{i+1}}\{\overline{\mathbf{R}}_i^x\}$  sind in der Tabelle 3.1 aufgeführt.

Generell ist aber bei dieser Vorgehensweise zwischen zwei Approximationsschritten zu unterscheiden. Erstens der Schritt der Stufenapproximation der Matrizenfunktion  $\overline{\mathbf{R}}^x(\zeta)$  und zweitens der Schritt der Approximation der Matrixexponentialfunktion für das konstante Argument  $\overline{\mathbf{R}}_i^x$ . Die numerische Durchführung des zweiten Schrittes, d.h. der Approximation der Matrixexponentialfunktion, entspricht einer numerischen Integration über eine (segmentweise) konstante Matrizenfunktion. Nachteilig ist bei dieser Methode die künstliche Konzentration der kontinuierlichen Streuung entlang der Leitung an den Segmentübergängen. Diese entsteht aufgrund der Stufenapproximation und verschwindet erst beim Übergang  $\Delta z_i \rightarrow 0$ .

Tabelle 3.1: Verschiedene Approximationsansätze für die Matrixexponentialfunktion im Produktintegral

Approximation	Matrizant für ein Teilstück	äquivalentes Integrationsverfahren
<i>Taylor</i> -Approximation, Abbruch nach dem linearen Glied	$\bar{\mathbf{E}} + \bar{\mathbf{R}}_i^x \Delta z_i$	<i>Euler</i> , explizit
<i>Pade</i> -Approximation der Ordnung $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$(\bar{\mathbf{E}} - \bar{\mathbf{R}}_i^x \Delta z_i)^{-1}$	<i>Euler</i> , implizit
<i>Pade</i> -Approximation der Ordnung $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$(\bar{\mathbf{E}} - \frac{1}{2} \bar{\mathbf{R}}_i^x \Delta z_i)^{-1} \cdot (\bar{\mathbf{E}} + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{R}}_i^x \Delta z_i)$	<i>Crank-Nicolson</i> , implizit
<i>Taylor</i> -Approximation, Abbruch nach dem dritten Glied	$\bar{\mathbf{E}} + \bar{\mathbf{R}}_i^x \Delta z_i + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{R}}_i^{x2} \Delta z_i^2$	modifiziertes <i>Euler</i> , explizit
<i>Taylor</i> -Approximation, Abbruch nach dem fünften Glied	$\bar{\mathbf{E}} + \bar{\mathbf{R}}_i^x \Delta z_i + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{R}}_i^{x2} \Delta z_i^2 + \frac{1}{6} \bar{\mathbf{R}}_i^{x3} \Delta z_i^3 + \frac{1}{24} \bar{\mathbf{R}}_i^{x4} \Delta z_i^4$	<i>Runge-Kutta</i> , explizit, 4. Ordnung

### 3.2.3 Rekursionsformel bei linearer Interpolation

Im Folgenden soll aus der *Taylor*-Reihenentwicklung der Lösung um die Stelle  $z$  ein Berechnungsverfahren für den Matrizen hergeleitet werden. Geht man bei der Darstellung der Matrizenfunktion  $\bar{\mathbf{R}}^x(z)$  und der Vektorfunktion  $\bar{\mathbf{x}}^s(z)$  von einer linearen Interpolation innerhalb eines Segments im Intervall  $[z_0, z_1]$  aus, d.h. es gilt

$$\bar{\mathbf{R}}^x(z) = \bar{\mathbf{R}}_0^x + \frac{\Delta \bar{\mathbf{R}}^x}{\Delta z} (z - z_0) \quad (3.21)$$

und

$$\bar{\mathbf{x}}^s(z) = \bar{\mathbf{x}}_0^s + \frac{\Delta \bar{\mathbf{x}}^s}{\Delta z} (z - z_0) \quad (3.22)$$

mit  $\bar{\mathbf{R}}_0^x = \bar{\mathbf{R}}^x(z_0)$ ,  $\Delta \bar{\mathbf{R}}^x = \bar{\mathbf{R}}^x(z_1) - \bar{\mathbf{R}}^x(z_0)$ ,  $\bar{\mathbf{x}}_0^s = \bar{\mathbf{x}}^s(z_0)$ ,  $\Delta \bar{\mathbf{x}}^s = \bar{\mathbf{x}}^s(z_1) - \bar{\mathbf{x}}^s(z_0)$  und  $\Delta z = z_1 - z_0$ , so gilt im Intervall  $[z_0, z_1]$  für die erste Ableitung der Matrizenfunktion

$$\frac{d\bar{\mathbf{R}}^x(z)}{dz} = \frac{\Delta \bar{\mathbf{R}}^x}{\Delta z}, \quad (3.23)$$

sowie für die erste Ableitung des inhomogenen Terms

$$\frac{d\bar{\mathbf{x}}^s(z)}{dz} = \frac{\Delta \bar{\mathbf{x}}^s}{\Delta z}. \quad (3.24)$$

Höhere Ableitungen verschwinden und brauchen somit auch nicht berücksichtigt werden.

Ausgangspunkt für die weiteren Überlegungen ist eine *Taylor*-Approximation des Matrizen- ten um die Stelle  $z_0$

$$\bar{\mathbf{x}}(z_1) = \bar{\mathbf{x}}(z_0) + \Delta z \frac{d}{dz} \bar{\mathbf{x}}(z_0) + \frac{\Delta z^2}{2} \frac{d^2}{dz^2} \bar{\mathbf{x}}(z_0) + \cdots + \frac{\Delta z^n}{n!} \frac{d^n}{dz^n} \bar{\mathbf{x}}(z_0). \quad (3.25)$$

Um die Ableitungen des Matrizen- ten in der *Taylor*-Reihenentwicklung zu eliminieren, wird die Ausgangsdifferentialgleichung (3.7) mehrmalig differenziert und die Ergebnisse in (3.25) eingesetzt. Man erhält unter Berücksichtigung von Gleichung (3.21) und (3.23)

$$\frac{d}{dz} \bar{\mathbf{x}}(z_0) = \bar{\mathbf{R}}^x(z_0) \bar{\mathbf{x}}(z_0) + \bar{\mathbf{x}}^s(z_0) = \bar{\mathbf{Q}}_1 \bar{\mathbf{x}}(z_0) + \bar{\mathbf{x}}_1^s \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dz^2} \bar{\mathbf{x}}(z_0) &= \frac{d\bar{\mathbf{R}}^x(z_0)}{dz} \bar{\mathbf{x}}(z_0) + \bar{\mathbf{R}}^x(z_0) \frac{d\bar{\mathbf{x}}(z_0)}{dz} + \frac{d\bar{\mathbf{x}}^s(z_0)}{dz} \\ &= \underbrace{\left( \frac{\Delta \bar{\mathbf{R}}^x}{\Delta z} + \bar{\mathbf{R}}_0^x \bar{\mathbf{Q}}_1 \right)}_{\bar{\mathbf{Q}}_2} \bar{\mathbf{x}}(z_0) + \underbrace{\frac{\Delta \bar{\mathbf{x}}^s}{\Delta z} + \bar{\mathbf{R}}_0^x \bar{\mathbf{x}}_1^s}_{\bar{\mathbf{x}}_2^s} \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^3}{dz^3} \bar{\mathbf{x}}(z_0) &= \frac{d^2 \bar{\mathbf{R}}^x(z_0)}{dz^2} \bar{\mathbf{x}}(z_0) + 2 \frac{d\bar{\mathbf{R}}^x(z_0)}{dz} \frac{d\bar{\mathbf{x}}(z_0)}{dz} + \bar{\mathbf{R}}^x(z_0) \frac{d^2 \bar{\mathbf{x}}(z_0)}{dz^2} + \frac{d^2 \bar{\mathbf{x}}^s(z_0)}{dz^2} \\ &= 2 \frac{d\bar{\mathbf{R}}^x(z_0)}{dz} \frac{d\bar{\mathbf{x}}(z_0)}{dz} + \bar{\mathbf{R}}^x(z_0) \frac{d^2 \bar{\mathbf{x}}(z_0)}{dz^2} \\ &= \underbrace{\left( 2 \frac{\Delta \bar{\mathbf{R}}^x}{\Delta z} \bar{\mathbf{Q}}_1 + \bar{\mathbf{R}}_0^x \bar{\mathbf{Q}}_2 \right)}_{\bar{\mathbf{Q}}_3} \bar{\mathbf{x}}(z_0) + \underbrace{2 \frac{\Delta \bar{\mathbf{R}}^x}{\Delta z} \bar{\mathbf{x}}_1^s + \bar{\mathbf{R}}_0^x \bar{\mathbf{x}}_2^s}_{\bar{\mathbf{x}}_3^s} \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\dots$$

$$\frac{d^n \bar{\mathbf{x}}(z_0)}{dz^n} = \underbrace{\left( (n-1) \frac{\Delta \bar{\mathbf{R}}^x}{\Delta z} \bar{\mathbf{Q}}_{n-2} + \bar{\mathbf{R}}_0^x \bar{\mathbf{Q}}_{n-1} \right)}_{\bar{\mathbf{Q}}_n} \bar{\mathbf{x}}(z_0) + \underbrace{(n-1) \frac{\Delta \bar{\mathbf{R}}^x}{\Delta z} \bar{\mathbf{x}}_{n-2}^s + \bar{\mathbf{R}}_0^x \bar{\mathbf{x}}_{n-1}^s}_{\bar{\mathbf{x}}_n^s}, \quad (3.29)$$

und das Ergebnis der *Taylor*-Reihenentwicklung (3.25) lässt sich als folgende Formel angeben

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}(z) &= \left( \bar{\mathbf{E}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{\mathbf{Q}}_k (z - z_0)^k}{k!} \right) \bar{\mathbf{x}}(z_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{\mathbf{x}}_k^s (z - z_0)^k}{k!} \\ \bar{\mathbf{x}}(z) &= \mathcal{M}_{z_0}^z \{ \bar{\mathbf{R}}^x \} \bar{\mathbf{x}}(z_0) + \bar{\mathbf{x}}_{eq}^s(z). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Die Elemente  $\bar{\mathbf{Q}}_n$  und  $\bar{\mathbf{x}}_n^s$  lassen sich dabei rekursiv aus den jeweiligen zwei Vorgängern nach Gleichung (3.29) bestimmen.

Zur numerischen Implementierung ist es günstiger, nicht die Terme  $\bar{\mathbf{Q}}_n$  bzw.  $\bar{\mathbf{x}}_n^s$  zu berechnen, sondern die Ausdrücke

$$\hat{\bar{\mathbf{Q}}}_n = \bar{\mathbf{Q}}_n \frac{(z - z_0)^n}{n!} \quad \text{bzw.} \quad \hat{\bar{\mathbf{x}}}_n^s = \bar{\mathbf{x}}_n^s \frac{(z - z_0)^n}{n!} \quad (3.31)$$

auszuwerten. Substituiert man die Terme in (3.26) bis (3.29) erhält man die Ausdrücke für  $\hat{\mathbf{Q}}_n$

$$\hat{\mathbf{Q}}_0 = \bar{\mathbf{E}} \quad (3.32)$$

$$\hat{\mathbf{Q}}_1 = \bar{\mathbf{R}}_0^x \Delta z \quad (3.33)$$

$$\hat{\mathbf{Q}}_2 = \frac{\Delta z}{2} \left[ \Delta \bar{\mathbf{R}}^x \hat{\mathbf{Q}}_0 + \bar{\mathbf{R}}_0^x \hat{\mathbf{Q}}_1 \right] = \frac{\Delta z}{2} \left[ \Delta \bar{\mathbf{R}}^x + \frac{\bar{\mathbf{R}}_0^{x^2}}{\Delta z} \right] \quad (3.34)$$

...

$$\hat{\mathbf{Q}}_n = \frac{\Delta z}{n} \left[ \Delta \bar{\mathbf{R}}^x \hat{\mathbf{Q}}_{n-2} + \bar{\mathbf{R}}_0^x \hat{\mathbf{Q}}_{n-1} \right], \quad (3.35)$$

welche numerisch einfacher und stabiler zu berechnen sind. Damit reduziert sich der numerische Aufwand auf zwei Matrizenmultiplikationen, eine Matrizenaddition und die Skalierung einer Matrix pro Reihenterm und man vermeidet die Division durch große Zahlen aufgrund der Operation Fakultät. Identisch kann mit den inhomogenen Anteilen  $\hat{\mathbf{x}}_n^s$  verfahren werden. Die Terme  $\hat{\mathbf{Q}}_n$  und  $\hat{\mathbf{x}}_n^s$  werden solange berechnet und aufsummiert, bis ein vorgegebener Toleranzwert für die Genauigkeit der Berechnung unterschritten wird. Daraufhin wird die Reihe abgebrochen.

### 3.2.4 Approximation durch Potenzreihen

Weitere analytische Lösungsformeln gewinnt man durch die Approximation der Matrizenfunktionen  $\bar{\mathbf{R}}^x(z)$  und  $\bar{\mathbf{x}}^s(z)$  durch Potenzreihen. Ohne Verlust der Allgemeinheit kann man  $z_0 = 0$  annehmen. Eine Variablensubstitution  $\hat{z} = z - z_0$  ermöglicht dies immer. Mit dieser Annahme kann man  $\bar{\mathbf{R}}^x(z)$  und  $\bar{\mathbf{x}}^s(z)$  ausdrücken durch

$$\bar{\mathbf{R}}^x(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{\mathbf{A}}_k z^k \quad (3.36)$$

$$\bar{\mathbf{x}}^s(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{\mathbf{b}}_k z^k. \quad (3.37)$$

Geht man davon aus, dass die Reihen (3.36) und (3.37) für  $z < R_{conv}$  konvergieren, so lässt sich die Lösung für einen Anfangswert  $\bar{\mathbf{x}}(0)$  auch als Potenzreihe

$$\bar{\mathbf{x}}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{\mathbf{c}}_k z^k = \bar{\mathbf{c}}_0 + \bar{\mathbf{c}}_1 z + \bar{\mathbf{c}}_2 z^2 + \cdots + \bar{\mathbf{c}}_n z^n \quad (3.38)$$

approximieren. Dies soll im Folgenden bewiesen und die Bestimmungsgleichungen für die  $\bar{\mathbf{c}}_k$  angegeben werden.

Ausgehend von (3.38) ergibt sich die Ableitung von  $\bar{\mathbf{x}}(z)$  als

$$\frac{d}{dz} \bar{\mathbf{x}}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \bar{\mathbf{c}}_{k+1} z^k = \bar{\mathbf{c}}_1 + 2 \bar{\mathbf{c}}_2 z + 3 \bar{\mathbf{c}}_3 z^2 + \cdots + (n+1) \bar{\mathbf{c}}_n z^{(n+1)}. \quad (3.39)$$

Setzt man (3.36) bis (3.39) in die Ausgangsdifferentialgleichung (3.7) ein, erhält man

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \bar{\mathbf{c}}_{k+1} z^k = \left( \sum_{k=0}^{\infty} \bar{\mathbf{A}}_k z^k \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} \bar{\mathbf{c}}_k z^k \right) + \sum_{k=0}^{\infty} \bar{\mathbf{b}}_k z^k. \quad (3.40)$$

Multipliziert man die Summen aus und vergleicht die Koeffizienten gleicher Potenzen, ergeben sich die Bestimmungsgleichungen für die Koeffizienten  $\bar{\mathbf{c}}_n$

$$\bar{\mathbf{c}}_0 = \bar{\mathbf{x}}(0) \quad (3.41)$$

$$\bar{\mathbf{c}}_1 = \bar{\mathbf{A}}_0 \bar{\mathbf{c}}_0 + \bar{\mathbf{b}}_0 \quad (3.42)$$

$$2 \bar{\mathbf{c}}_2 = \bar{\mathbf{A}}_1 \bar{\mathbf{c}}_0 + \bar{\mathbf{A}}_0 \bar{\mathbf{c}}_1 + \bar{\mathbf{b}}_1 \quad (3.43)$$

$$3 \bar{\mathbf{c}}_3 = \bar{\mathbf{A}}_2 \bar{\mathbf{c}}_0 + \bar{\mathbf{A}}_1 \bar{\mathbf{c}}_1 + \bar{\mathbf{A}}_0 \bar{\mathbf{c}}_2 + \bar{\mathbf{b}}_2 \quad (3.44)$$

...

$$(n+1) \bar{\mathbf{c}}_{n+1} = \sum_{k=0}^n \bar{\mathbf{A}}_{n-k} \bar{\mathbf{c}}_k + \bar{\mathbf{b}}_n. \quad (3.45)$$

Es stellt sich die Frage nach der Konvergenz der Lösungsreihe. Geht man davon aus, dass die Approximationsreihen (3.36) und (3.37) konvergent sind für  $0 \leq \rho \leq R_{conv}$ , dann gilt mit einer konstanten, endlichen Schranke  $S > 0$

$$\rho^n \|\bar{\mathbf{A}}_n\| \leq S \quad \text{und} \quad \rho^n \|\bar{\mathbf{b}}_n\| \leq S, \quad (3.46)$$

und aus Gleichung (3.45) folgt

$$(n+1) \|\bar{\mathbf{c}}_{n+1}\| \leq \sum_{k=0}^n S \rho^{j-n} \|\bar{\mathbf{c}}_k\| + S \rho^{-n}. \quad (3.47)$$

Definiert man des weiteren obere Schranken für die Normen  $\|\bar{\mathbf{c}}_n\| \leq s_n$ , so folgt aus (3.47)

$$(n+1) s_{n+1} \leq \frac{S}{\rho^n} (s_0 + s_1 \rho + s_2 \rho^2 + \cdots + s_n \rho^n + 1) \quad (3.48)$$

$$\leq S s_n + \frac{1}{\rho} \underbrace{\frac{S}{\rho^{n-1}} (1 + s_0 + s_1 \rho + s_2 \rho^2 + \cdots + s_{n-1} \rho^{n-1})}_{ns_n} \quad (3.49)$$

$$s_{n+1} \leq \left( \frac{S}{n+1} + \frac{n}{n+1} \frac{1}{\rho} \right) s_n. \quad (3.50)$$

Die Konvergenz der Reihe (3.38) ist gewährleistet, wenn  $\sum_{n=0}^{\infty} s_n z^n$  konvergiert. Das Quotientenkriterium nach *d'Alembert*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{s_{n+1} z^{n+1}}{s_n z^n} \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{S}{n+1} + \frac{n}{n+1} \frac{1}{\rho} \right) |z| \quad (3.51)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{s_{n+1} z^{n+1}}{s_n z^n} \right| \leq \frac{|z|}{\rho} \quad (3.52)$$

bestätigt die Konvergenz der Lösungsreihe für  $|z| < \rho$ . Da laut Voraussetzung  $\rho$  beliebig im Intervall  $0 \leq \rho \leq R_{conv}$  liegt, konvergiert die Lösungsreihe für alle  $|z| \leq R_{conv}$ .

Um von Gleichung (3.45) zu einer Darstellung mit Hilfe des Matrizen zu kommen, wird aus den Koeffizienten  $\bar{c}_n$  der Supervektor  $\bar{x}(0)$  separiert

$$\bar{c}_0 = \underbrace{\bar{\mathbf{E}}}_{\hat{\bar{c}}_0} \bar{x}(0) \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned} \bar{c}_1 &= \bar{\mathbf{A}}_0 \bar{c}_0 + \bar{\mathbf{b}}_0 \\ &= \underbrace{\bar{\mathbf{A}}_0 \hat{\bar{\mathbf{C}}}_0}_{\hat{\bar{c}}_1} \bar{x}(0) + \underbrace{\bar{\mathbf{b}}_0}_{\hat{\bar{b}}_0} \end{aligned} \quad (3.54)$$

$$\begin{aligned} \bar{c}_2 &= \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{A}}_1 \bar{c}_0 + \bar{\mathbf{A}}_0 \bar{c}_1 + \bar{\mathbf{b}}_1) \\ &= \frac{1}{2} \underbrace{(\bar{\mathbf{A}}_1 \hat{\bar{\mathbf{C}}}_0 + \bar{\mathbf{A}}_0 \hat{\bar{\mathbf{C}}}_1)}_{\hat{\bar{c}}_2} \bar{x}(0) + \frac{1}{2} \underbrace{(\bar{\mathbf{A}}_0 \hat{\bar{\mathbf{b}}}_0 + \bar{\mathbf{b}}_1)}_{\hat{\bar{b}}_1} \end{aligned} \quad (3.55)$$

$$\begin{aligned} \bar{c}_3 &= \frac{1}{3} (\bar{\mathbf{A}}_2 \bar{c}_0 + \bar{\mathbf{A}}_1 \bar{c}_1 + \bar{\mathbf{A}}_0 \bar{c}_2 + \bar{\mathbf{b}}_2) \\ &= \frac{1}{3} \underbrace{(\bar{\mathbf{A}}_2 \hat{\bar{\mathbf{C}}}_0 + \bar{\mathbf{A}}_1 \hat{\bar{\mathbf{C}}}_1 + \bar{\mathbf{A}}_0 \hat{\bar{\mathbf{C}}}_2)}_{\hat{\bar{c}}_3} \bar{x}(0) + \frac{1}{3} \underbrace{(\bar{\mathbf{A}}_1 \hat{\bar{\mathbf{b}}}_0 + \bar{\mathbf{A}}_0 \hat{\bar{\mathbf{b}}}_1 + \bar{\mathbf{b}}_2)}_{\hat{\bar{b}}_2} \end{aligned} \quad (3.56)$$

...

$$\bar{c}_{n+1} = \frac{1}{n+1} \underbrace{\left( \sum_{k=0}^n \bar{\mathbf{A}}_{n-k} \hat{\bar{\mathbf{C}}}_k \right)}_{\hat{\bar{c}}_n} \bar{x}(0) + \frac{1}{n+1} \underbrace{\left( \sum_{k=0}^{n-2} \bar{\mathbf{A}}_{n-2-k} \hat{\bar{\mathbf{b}}}_k + \bar{\mathbf{b}}_{n-1} \right)}_{\hat{\bar{b}}_{n-1}}. \quad (3.57)$$

Für den Matrizen bzw. den äquivalenten Quellenvektor ergibt sich dann

$$\mathcal{M}_0^z\{\bar{\mathbf{R}}^x\} = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{\bar{\mathbf{C}}}_k z^k \quad \text{bzw.} \quad \bar{x}_{eq}^s(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{\bar{\mathbf{b}}}_k z^k. \quad (3.58)$$

Für den einfachsten Fall einer konstanten Matrixfunktion  $\bar{\mathbf{R}}^x(z) = \bar{\mathbf{A}}_0$  ergibt sich gemäß der Gleichungen (3.53) bis (3.57) und (3.58)

$$\hat{\bar{\mathbf{C}}}_0 = \bar{\mathbf{E}} \quad (3.59)$$

$$\hat{\bar{\mathbf{C}}}_1 = \bar{\mathbf{A}}_0 \hat{\bar{\mathbf{C}}}_0 = \bar{\mathbf{A}}_0 \quad (3.60)$$

$$\hat{\bar{\mathbf{C}}}_2 = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{A}}_0 \hat{\bar{\mathbf{C}}}_1 = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{A}}_0^2 \quad (3.61)$$

...

$$\hat{\bar{\mathbf{C}}}_n = \frac{1}{n} \bar{\mathbf{A}}_0 \hat{\bar{\mathbf{C}}}_{n-1} = \frac{1}{n!} \bar{\mathbf{A}}_0^n, \quad (3.62)$$

und damit für den Matrizenanten die exakte analytische Lösung der Reihendarstellung der Matrixexponentialfunktion

$$\mathcal{M}_0^z\{\bar{\mathbf{R}}^x\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \bar{\mathbf{A}}_0^k z^k = e^{\bar{\mathbf{R}}^x z}. \quad (3.63)$$

Nutzt man eine lineare Funktion zur Approximation von  $\bar{\mathbf{R}}^x(z) = \bar{\mathbf{A}}_0 + \bar{\mathbf{A}}_1 z$ , berechnen sich die Terme  $\hat{\bar{\mathbf{C}}}_n$  zu

$$\hat{\bar{\mathbf{C}}}_0 = \bar{\mathbf{E}} \quad (3.64)$$

$$\hat{\bar{\mathbf{C}}}_1 = \bar{\mathbf{A}}_0 \hat{\bar{\mathbf{C}}}_0 = \bar{\mathbf{A}}_0 \quad (3.65)$$

$$\hat{\bar{\mathbf{C}}}_2 = \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{A}}_1 + \bar{\mathbf{A}}_0^2) \quad (3.66)$$

...

$$\hat{\bar{\mathbf{C}}}_n = \frac{1}{n} (\bar{\mathbf{A}}_0 \hat{\bar{\mathbf{C}}}_{n-1} + \bar{\mathbf{A}}_1 \hat{\bar{\mathbf{C}}}_{n-2}), \quad (3.67)$$

und damit der Matrizenant als

$$\mathcal{M}_0^z\{\bar{\mathbf{R}}^x\} = \bar{\mathbf{E}} + z\bar{\mathbf{A}}_0 + \frac{z^2}{2!} (\bar{\mathbf{A}}_1 + \bar{\mathbf{A}}_0^2) + \frac{z^3}{3!} [\bar{\mathbf{A}}_0 (\bar{\mathbf{A}}_1 + \bar{\mathbf{A}}_0^2) + 2\bar{\mathbf{A}}_1\bar{\mathbf{A}}_0] + \dots \quad (3.68)$$

Dieses Ergebnis ist identisch mit den Formeln nach Kapitel 3.2.3 für den Fall  $z_0 = 0$ .

Als drittes Beispiel soll eine quadratische Approximation von  $\bar{\mathbf{R}}^x(z) = \bar{\mathbf{A}}_0 + \bar{\mathbf{A}}_1 z + \bar{\mathbf{A}}_2 z^2$  untersucht werden. Die Koeffizienten berechnen sich dann als

$$\hat{\bar{\mathbf{C}}}_0 = \bar{\mathbf{E}} \quad (3.69)$$

$$\hat{\bar{\mathbf{C}}}_1 = \bar{\mathbf{A}}_0 \hat{\bar{\mathbf{C}}}_0 = \bar{\mathbf{A}}_0 \quad (3.70)$$

$$\hat{\bar{\mathbf{C}}}_2 = \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{A}}_1 + \bar{\mathbf{A}}_0^2) \quad (3.71)$$

$$\hat{\bar{\mathbf{C}}}_3 = \frac{z^3}{3!} [\bar{\mathbf{A}}_0 (\bar{\mathbf{A}}_1 + \bar{\mathbf{A}}_0^2) + 2\bar{\mathbf{A}}_1\bar{\mathbf{A}}_0 + 2\bar{\mathbf{A}}_2] \quad (3.72)$$

...

$$\hat{\bar{\mathbf{C}}}_n = \frac{1}{n} (\bar{\mathbf{A}}_0 \hat{\bar{\mathbf{C}}}_{n-1} + \bar{\mathbf{A}}_1 \hat{\bar{\mathbf{C}}}_{n-2} + \bar{\mathbf{A}}_2 \hat{\bar{\mathbf{C}}}_{n-3}). \quad (3.73)$$

Der Vorteil des Potenzreihenverfahrens ist, dass man eine allgemeine Vorschrift erhält, nach der Formeln für den Matrizenanten und den äquivalenten Erregungsvektor für eine beliebige Approximationsordnung von  $\bar{\mathbf{R}}^x(z)$  bzw.  $\bar{\mathbf{x}}^s(z)$  einfach konstruiert werden können. Die Anzahl der Terme in der rekursiven Berechnungsformel für  $\hat{\bar{\mathbf{C}}}_n$  ist dabei identisch mit der höchsten Potenz von  $z$  in der Approximation.

### 3.2.5 Interpolationsansätze mit Diagonalisierung

In der Literatur sind verschiedene Lösungsansätze zu finden, bei denen Diagonaltransformationen mit Hilfe von Eigenwerten und Eigenvektoren zum Einsatz kommen, um eine exakte Lösung für spezielle Fälle von ungleichförmigen Leitungen (z.B. zyklische Leitungen) zu erhalten [48, 13, 12]. Hier soll jetzt ein Interpolationsschema vorgestellt werden, welches auf allgemeine ungleichförmige Mehrfachleitungen anwendbar ist.

Dazu wird die Matrizenfunktion  $\overline{\mathbf{R}}^x(z)$  in einem Intervall  $[z_0, z_1]$  der Länge  $\Delta z$  in zwei Terme zerlegt,

$$\overline{\mathbf{R}}^x(z) = \overline{\mathbf{R}}_m^x + \overline{\mathbf{R}}_\Delta^x(z). \quad (3.74)$$

Der erste Term, der Referenzterm,  $\overline{\mathbf{R}}_m^x$  ist unabhängig von der Koordinate  $z$ , die sich im Folgenden immer im Intervall  $[z_0, z_1]$  bewegt. Dieser Referenzterm könnte beispielsweise als Mittelwert über das betrachtete Intervall gewählt werden. Der zweite Wert stellt die Abweichung von diesem Referenzwert dar und variiert innerhalb des Intervalls. Mit dieser Zerlegung ergibt sich das Produktintegral nach Summenregel (A.3) als

$$\mathcal{M}_{z_0}^{z_1}\{\overline{\mathbf{R}}^x\} = \overline{\mathbf{G}}^{(0)}(z_1) \mathcal{M}_{z_0}^{z_1}\{\overline{\mathbf{H}}\} = \overline{\mathbf{G}}^{(0)}(z_1) \overline{\mathbf{G}}^{(1)}(z_1) \quad (3.75)$$

mit

$$\overline{\mathbf{H}}(z) = \{\overline{\mathbf{G}}^{(0)}(z)\}^{-1} \overline{\mathbf{R}}_\Delta^x(z) \overline{\mathbf{G}}^{(0)}(z) \quad (3.76)$$

und

$$\overline{\mathbf{G}}^{(0)}(z) = \mathcal{M}_{z_0}^z\{\overline{\mathbf{R}}_m^x\} = e^{\overline{\mathbf{R}}_m^x(z-z_0)}. \quad (3.77)$$

Überführt man den Referenzterm  $\overline{\mathbf{R}}_m^x$  mit Hilfe einer Ähnlichkeitstransformation\* in die Diagonalform

$$\overline{\mathbf{R}}_m^x = \overline{\mathbf{U}} \overline{\mathbf{\Lambda}} \overline{\mathbf{V}} = \overline{\mathbf{U}} \overline{\mathbf{\Lambda}} \overline{\mathbf{U}}^{-1} = \sum_{n=1}^N \lambda_n \overline{\mathbf{u}}_n \overline{\mathbf{v}}_n^T, \quad (3.78)$$

so erhält man

$$\overline{\mathbf{G}}^{(0)}(z) = \sum_{n=1}^N e^{\lambda_n(z-z_0)} \overline{\mathbf{u}}_n \overline{\mathbf{v}}_n^T \quad (3.79)$$

und

$$\{\overline{\mathbf{G}}^{(0)}(z)\}^{-1} = \sum_{n=1}^N e^{-\lambda_n(z-z_0)} \overline{\mathbf{u}}_n \overline{\mathbf{v}}_n^T. \quad (3.80)$$

Der Summenterm in der Gleichung (3.78) ist eine Darstellung der Diagonaltransformation mit Hilfe von *Dyadischen* Produkten. Dabei stellen die Vektoren  $\overline{\mathbf{v}}_n^T$  und  $\overline{\mathbf{u}}_n$  die Zeilen- bzw. Spaltenvektoren der Transformationsmatrix  $\overline{\mathbf{U}}$  bzw. der zugehörigen inversen Transformationsmatrix  $\overline{\mathbf{V}}$  der Ähnlichkeitstransformation zu einer Diagonalmatrix  $\overline{\mathbf{\Lambda}}$ . Selbstverständlich darf die Transformationsmatrix  $\overline{\mathbf{U}}$  nicht singular sein. Der Wert  $N$  ist die Dimension des Problems, d.h. der Matrizenfunktion  $\overline{\mathbf{R}}^x(z)$ .

---

\*Da der Referenzterm willkürlich festgelegt wird, kann er immer so gewählt werden, dass die Möglichkeit der Transformation zur Diagonalform besteht.

Wählt man nun für den Referenzterm  $\overline{\mathbf{R}}_m^x$  aus der Gleichung (3.74) als den Mittelwert über das Segment des Intervalls  $(z_0, z_1)$

$$\overline{\mathbf{R}}_m^x = \frac{1}{2} (\overline{\mathbf{R}}^x(z_0) + \overline{\mathbf{R}}^x(z_1)) , \quad (3.81)$$

so ergibt sich der variable Term  $\overline{\mathbf{R}}_\Delta^x(z)$  als konstante Differenzmatrix  $\overline{\mathbf{C}}$  multipliziert mit einer Variationsfunktion  $f(z)$

$$\overline{\mathbf{R}}_\Delta^x(z) = f(z) \frac{1}{2} (\overline{\mathbf{R}}^x(z_1) - \overline{\mathbf{R}}^x(z_0)) = f(z) \overline{\mathbf{C}} . \quad (3.82)$$

Dabei ist  $f(z)$  als eine monoton ansteigende Funktion so zu wählen, dass für den Wert an der unteren Intervallgrenze  $f(z_0) = -1$  und an der oberen Intervallgrenze  $f(z_1) = +1$  gilt. Damit ist gewährleistet, dass die Matrizenfunktion  $\overline{\mathbf{R}}^x(z)$  an den Segmentgrenzen exakt abgebildet wird. Die einfachste Wahl für die Variationsfunktion  $f(z)$  wäre eine lineare Funktion gemäß

$$f(z) = \frac{2z - z_1 - z_0}{z_1 - z_0} = \frac{2z - 2z_0 - \Delta z}{\Delta z} = \frac{2}{\Delta z} (z - z_m) \quad (3.83)$$

mit

$$z_m = \frac{z_0 + z_1}{2} = z_0 + \frac{\Delta z}{2} . \quad (3.84)$$

Dieser Ansatz ähnelt der nach dem linearen Glied abgebrochenen *Taylor*-Reihenentwicklung von  $\overline{\mathbf{R}}^x(z)$ . Der Referenzterm  $\overline{\mathbf{R}}_m^x$  entspricht dem konstanten Term bei der Entwicklung um den Mittelwert und es entsteht weiterhin ein lineares Glied mit einer konstanten Matrix multipliziert mit der Variablen  $z$ . Allerdings gewährleistet diese *Taylor*-Reihenentwicklung nicht, dass die Matrizenfunktion  $\overline{\mathbf{R}}^x(z)$  an den Segmentenden exakt abgebildet wird. Es würden Sprünge an den Segmentgrenzen entstehen.

Wählt man Varianzfunktionen  $f(z)$  höherer Ordnung, so kann erreicht werden, dass auch die Ableitungen der Matrizenfunktion  $\overline{\mathbf{R}}^x(z)$  an den Segmentgrenzen stetig verlaufen.

Sind die Terme  $\overline{\mathbf{G}}^{(0)}(z)$  und  $\{\overline{\mathbf{G}}^{(0)}(z)\}^{-1}$  mit Hilfe der Diagonaltransformation nach Gleichungen (3.79) und (3.80) bestimmt, gilt es, die Matrizenfunktion  $\overline{\mathbf{H}}(z)$  bzw. den Matrizenanten dieser zu berechnen. Die Matrizenfunktion  $\overline{\mathbf{H}}(z)$  ergibt sich als

$$\overline{\mathbf{H}}(z) = f(z) \{\overline{\mathbf{G}}^{(0)}(z)\}^{-1} \overline{\mathbf{C}} \overline{\mathbf{G}}^{(0)}(z) \quad (3.85)$$

$$= f(z) \sum_{k=1}^N \sum_{n=1}^N \{e^{(\lambda_k - \lambda_n)(z - z_0)} \overline{\mathbf{u}}_n \overline{\mathbf{v}}_n^T \overline{\mathbf{C}} \overline{\mathbf{u}}_k \overline{\mathbf{v}}_k^T\} \quad (3.86)$$

$$= f(z) \sum_{k=1}^N \sum_{n=1}^N \{e^{(\lambda_k - \lambda_n)(z - z_0)} \overline{\mathbf{u}}_n \overline{\mathbf{v}}_k^T \alpha_{nk}\} , \quad (3.87)$$

mit dem Skalar

$$\alpha_{nk} = \overline{\mathbf{v}}_n^T \overline{\mathbf{C}} \overline{\mathbf{u}}_k . \quad (3.88)$$

Die Matrizenfunktion  $\overline{\mathbf{H}}(z)$  ist eine Ähnlichkeitstransformation der Varianzmatrix  $f(z) \overline{\mathbf{C}}$  und hat deshalb die gleichen Eigenwerte wie diese. Wenn nun  $\overline{\mathbf{C}}$  klein ist im Vergleich zu  $\overline{\mathbf{R}}_m^x$ ,

kann der Matrizen über  $\overline{\mathbf{H}}(z)$  mit relativ großen Schritten im Vergleich zur äquivalenten Berechnung des Matrizen über  $\overline{\mathbf{R}}^x(z)$  numerisch berechnet werden. Mit Hilfe der Gleichung (3.87) und der Diagonalisierung von  $\overline{\mathbf{R}}_m^x$  kann der Matrizen über  $\overline{\mathbf{H}}(z)$  mit anderen, in diesem Kapitel vorgestellten, numerischen Verfahren ermittelt werden.

Eine andere Möglichkeit die Matrix  $\overline{\mathbf{G}}^{(1)}(z_1)$  zu berechnen, vorausgesetzt die Varianzmatrix  $\overline{\mathbf{C}}$  ist ausreichend klein, ist die Auswertung nur der ersten zwei Terme der Picarditeration (3.10),

$$\overline{\mathbf{G}}^{(1)}(z_1) = \overline{\mathbf{E}} + \int_{z_0}^{z_1} \overline{\mathbf{H}}(\zeta) d\zeta + O(|\lambda_{max}^{(C)}| \Delta z^2) \quad (3.89)$$

$$= \overline{\mathbf{E}} + \int_{z_0}^{z_1} f(\zeta) \sum_{k=1}^N \sum_{n=1}^N e^{(\lambda_k - \lambda_n)(\zeta - z_0)} \overline{\mathbf{u}}_n \overline{\mathbf{v}}_k^T \alpha_{nk} d\zeta + O(|\lambda_{max}^{(C)}| \Delta z^2). \quad (3.90)$$

Dabei stellt  $|\lambda_{max}^{(C)}|$  den Betrag des größten Eigenwertes der Matrix C dar. Bei Verkleinerung der Schrittweite  $\Delta z$  wird auch  $|\lambda_{max}^{(C)}|$  kleiner, so dass eher ein Fehlerverhalten der Größenordnung  $O(\Delta z^3)$  entsteht. Da die Zeilen- und Spaltenvektoren  $\overline{\mathbf{u}}_n$  und  $\overline{\mathbf{v}}_k^T$  der Transformationsmatrix  $\overline{\mathbf{U}}$ , sowie der skalare Koeffizient  $\alpha_{nk}$  nicht von der Integrationsvariablen  $\zeta$  abhängen, können sie vor das Integral gezogen werden

$$\overline{\mathbf{G}}^{(1)}(z_1) = \overline{\mathbf{E}} + \sum_{k=1}^N \sum_{n=1}^N \overline{\mathbf{u}}_n \overline{\mathbf{v}}_k^T \alpha_{nk} \int_{z_0}^{z_1} f(\zeta) e^{(\lambda_k - \lambda_n)(\zeta - z_0)} d\zeta + O(|\lambda_{max}^{(C)}| \Delta z^2). \quad (3.91)$$

Setzt man die Interpolationsfunktion  $f(z)$  nach Gleichung (3.83) ein, erhält man für das Integral in Gleichung (3.91)

$$F_{nk} = \int_{z_0}^{z_1} f(\zeta) e^{(\lambda_k - \lambda_n)(\zeta - z_0)} d\zeta \quad (3.92)$$

$$= \int_{z_0}^{z_1} \frac{2}{\Delta z} (\zeta - z_m) e^{(\lambda_k - \lambda_n)(\zeta - z_0)} d\zeta \quad (3.93)$$

$$= \frac{2e^{(\lambda_n - \lambda_k)z_0}}{\Delta z} \int_{z_0}^{z_1} (\zeta - z_m) e^{(\lambda_k - \lambda_n)\zeta} d\zeta \quad (3.94)$$

$$= \frac{e^{(\lambda_n - \lambda_k)z_0}}{(\lambda_k - \lambda_n)^2 \Delta z} \left\{ [(\lambda_k - \lambda_n) \Delta z + 2] e^{(\lambda_k - \lambda_n)z_0} + [(\lambda_k - \lambda_n) \Delta z - 2] e^{(\lambda_k - \lambda_n)z_1} \right\} \quad (3.95)$$

$$= \frac{1}{(\lambda_k - \lambda_n)^2 \Delta z} \left\{ [(\lambda_k - \lambda_n) \Delta z + 2] + [(\lambda_k - \lambda_n) \Delta z - 2] e^{(\lambda_k - \lambda_n)\Delta z} \right\} \quad (3.96)$$

für den Fall, dass  $\lambda_k \neq \lambda_n$ . Sind die Eigenwerte gleichgroß, so ergibt sich das Integral zu

$$F_{nk} = \int_{z_0}^{z_1} f(z) e^{(\lambda_k - \lambda_n)(\zeta - z_0)} d\zeta \quad (3.97)$$

$$= \int_{z_0}^{z_1} \frac{2}{\Delta z} (\zeta - z_m) d\zeta \quad (3.98)$$

$$= \frac{2}{\Delta z} \left[ \frac{1}{2} \zeta^2 - z_m \zeta \right]_{\zeta=z_0}^{z_1} = 0. \quad (3.99)$$

Mit diesen Ergebnissen ergibt sich in der Näherung der Matrizenfunktion des Segmentes im Intervall  $[z_0, z_1]$  zu

$$\mathcal{M}_{z_0}^{z_1}\{\bar{\mathbf{R}}^x\} \approx \left( \sum_{n=1}^N e^{\lambda_n \Delta z} \bar{\mathbf{u}}_n \bar{\mathbf{v}}_n^T \right) \left( \bar{\mathbf{E}} + \sum_{k=1}^N \sum_{n=1}^N \bar{\mathbf{u}}_n \bar{\mathbf{v}}_k^T \alpha_{nk} F_{nk} \right) \quad (3.100)$$

$$\approx e^{\bar{\mathbf{R}}_m^x \Delta z} + e^{\bar{\mathbf{R}}_m^x \Delta z} \sum_{k=1}^N \sum_{n=1}^N \bar{\mathbf{u}}_n \bar{\mathbf{v}}_k^T \alpha_{nk} F_{nk}. \quad (3.101)$$

Dieses Ergebnis lässt sich als die Summe aus dem Matrizenfunktion über eine konstante Matrizenfunktion, d.h. des Matrizenfunktion einer gleichförmigen Leitung mit den Eigenschaften der Matrix  $\bar{\mathbf{R}}_m^x$ , und einem Korrekturterm interpretieren. Für eine konstante Matrizenfunktion verschwindet der Korrekturterm, da die Skalare  $\alpha_{nk}$  immer gleich Null sind.

### 3.2.6 Numerische Integrationsverfahren

Neben den analytischen und semi-analytischen Lösungsverfahren können auch numerische Integrationsverfahren angewendet werden, um den Matrizenfunktion zu berechnen. Dazu könnte die Integration rein numerisch mit verschiedenen Anfangsbedingungen  $\bar{\mathbf{x}}(z_0)$  n-mal zur Berechnung des Matrizenfunktion durchgeführt werden. Im Gegensatz dazu sollen hier entsprechende allgemeine Endformeln für ein Teilintervall hergeleitet werden, indem man die Integrationsverfahren ins Matrizenkalkül überträgt.

Eine Möglichkeit der Klassifizierung von Integrationsverfahren ist die Anzahl der für einen Integrationsschritt verwendeten Intervalle. Danach unterscheidet man Einschrittverfahren und Mehrschrittverfahren. Im Rahmen dieser Arbeit soll das Hauptaugenmerk auf Einschrittverfahren gelegt werden, da sich diese einfach ins Matrizenkalkül übertragen lassen und somit geschlossene Formeln für den Matrizenfunktion herleiten lassen. Prinzipiell ist das auch für Mehrschrittverfahren möglich, führt aber je nach Stufenzahl des Mehrschrittverfahrens zu einer Anzahl von Matrixinversionen vom Matrizenfunktion vorheriger (Teil-)Segmente und wird damit schnell ineffizient.

Für die Anwendung von Integrationsverfahren wird die Differentialgleichung (3.7) durch Integration über ein Intervall  $[z_i, z_{i+1}]$  in eine Integralgleichung umgewandelt,

$$\bar{\mathbf{x}}(z_{i+1}) = \bar{\mathbf{x}}(z_i) + \int_{z_i}^{z_{i+1}} \bar{\mathbf{R}}^x(\zeta) \bar{\mathbf{x}}(\zeta) d\zeta + \int_{z_i}^{z_{i+1}} \bar{\mathbf{x}}^s(\zeta) d\zeta. \quad (3.102)$$

Durch Anwendung einer numerischen Integrationsmethode wird versucht, diese Integralgleichung in die Gestalt

$$\bar{\mathbf{x}}(z_{i+1}) = \mathcal{F}(\Delta z_i, \bar{\mathbf{R}}^x(\zeta)) \bar{\mathbf{x}}(z_i) + \mathcal{F}_S(\Delta z_i, \bar{\mathbf{R}}^x(\zeta), \bar{\mathbf{x}}^s(\zeta)) \quad (3.103)$$

$$= \mathcal{M}_{z_i}^{z_{i+1}}\{\bar{\mathbf{R}}^x\} \bar{\mathbf{x}}(z_i) + \bar{\mathbf{x}}_{eq,i}^s \quad (3.104)$$

umzuformen und damit eine geschlossene Formel für den Matrizenfunktion und den Quellenvektor am Segmentende anzugeben. Der Quellenvektor  $\bar{\mathbf{x}}_{eq,i}^s$  beinhaltet dabei die Wirkung der

verteilten Erregung über das Segment  $\Delta z_i$  am Segmentende und stellt gleichzeitig eine Anfangsbedingung für das nächste Segment  $\Delta z_{i+1}$  dar. Der Matrizen für die gesamte Leitung ergibt sich durch die Kettenmultiplikation der Ergebnisse für die Segmente in der richtigen Reihenfolge. Der äquivalente Quellenvektor am Ende der Leitung ergibt sich für  $n$  Segmente als

$$\bar{\mathbf{x}}_{eq}^s(z) = \sum_{i=1}^n \mathcal{M}_{z_{i+1}}^z \{ \bar{\mathbf{R}}^x \} \bar{\mathbf{x}}_{eq,i}^s. \quad (3.105)$$

Abkürzend wird im Folgenden der Index  $i$  bzw.  $i+1$  für Funktionswerte am Segmentanfang bzw. -ende gebraucht. Werden für die Berechnung Funktionswerte an Zwischenstellen innerhalb des Segmentes  $[z_i, z_{i+1}]$  benötigt, sind diese durch nicht ganzzahlige Indizes gekennzeichnet, z.B.  $\bar{\mathbf{R}}_{i+\frac{1}{2}}^x$  entspricht  $\bar{\mathbf{R}}^x(z_i + \frac{1}{2}\Delta z_i)$ . Die Angabe  $\Delta z_i$  entspricht der Schrittweite des  $i$ -ten Segmentes und ergibt sich aus  $\Delta z_i = z_{i+1} - z_i$ .

Die Eindeutigkeit und Existenz einer Lösung ist für die betrachtete Problemstellung der Leitungsgleichungen immer dann gewährleistet, wenn die *Lipschitz*-Bedingung

$$\| \bar{\mathbf{R}}(z)\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{R}}(z)\bar{\mathbf{v}} \| \leq L \| \bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{v}} \| \text{ mit } L > 0 \quad (3.106)$$

für alle  $z$  erfüllt ist [49]. Daraus folgt, dass eine Lösung im Intervall  $[z_i, z_{i+1}]$  existiert und eindeutig ist, wenn die *Lipschitz*-Konstante

$$L = \sup_{z_i \leq z \leq z_{i+1}} \| \bar{\mathbf{R}}(z) \| \quad (3.107)$$

endlich ist, d.h. die Parametermatrix  $\bar{\mathbf{R}}(z)$  für alle  $z$  begrenzt ist. Dies sollte bei allen Leitungsgeometrien gegeben sein.

### 3.2.6.1 Euler-Cauchy-Verfahren

Am Anfangspunkt des Segmentes  $z_i$  lässt sich die Steigung  $\frac{d\bar{\mathbf{x}}_i}{dz} = \bar{\mathbf{R}}_i^x \bar{\mathbf{x}}_i + \bar{\mathbf{x}}_i^s$  exakt angeben. Mit deren Hilfe wird nun die Lösung am Segmentende unter der Annahme einer konstanten Steigung über dem Segment mit

$$\bar{\mathbf{x}}_{i+1} = \bar{\mathbf{x}}_i + \frac{d\bar{\mathbf{x}}_i}{dz} \Delta z_i \quad (3.108)$$

$$= \underbrace{(\bar{\mathbf{E}} + \bar{\mathbf{R}}_i^x \Delta z_i)}_{\mathcal{M}_{z_i}^{z_{i+1}} \{ \bar{\mathbf{R}}^x \}} \bar{\mathbf{x}}_i + \underbrace{\bar{\mathbf{x}}_i^s \Delta z_i}_{\bar{\mathbf{x}}_{eq,i}^s} \quad (3.109)$$

angenähert. Als Berechnungsformel des Matrizen für ein Segmentintervall  $[z_i, z_{i+1}]$  in dieser Näherung ergibt sich

$$\mathcal{M}_{z_i}^{z_{i+1}} \{ \bar{\mathbf{R}}^x \} = \bar{\mathbf{E}} + \bar{\mathbf{R}}_i^x \Delta z_i. \quad (3.110)$$

Da nur die Matrizenfunktion  $\bar{\mathbf{R}}^x(z_i)$  am Anfang des Segmentes ausgewertet wird, ist die Berechnungsvorschrift identisch für konstante und variable Matrizenfunktionen (im Bereich

eines Segmentes). So ist auch verständlich, dass das Ergebnis sich mit dem für das Kalkül nach *Volterra* aus Kapitel 3.2.2 deckt.

Die in Gleichung (3.110) angegebene Formel stellt das explizite *Euler*-Verfahren dar. Dabei erfolgt die Näherung auf Basis der Steigung am Segmentanfang. Adäquat ergibt sich die Formel für das implizite *Euler*-Verfahren, bei dem die Näherung auf der Basis der Steigung am Segmentende erfolgt,

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}}{dz} &\approx \frac{\bar{x}_{i+1} - \bar{x}_i}{\Delta z_i} = \bar{\mathbf{R}}_{i+1}^x \bar{x}_{i+1} + \bar{x}_{i+1}^s \\ \bar{x}_{i+1} - \Delta z_i \bar{\mathbf{R}}_{i+1}^x \bar{x}_{i+1} &= \bar{x}_i + \Delta z_i \bar{x}_{i+1}^s \\ \bar{x}_{i+1} &= \underbrace{\left(\bar{\mathbf{E}} - \bar{\mathbf{R}}_{i+1}^x \Delta z_i\right)^{-1}}_{\mathcal{M}_{z_i}^{z_{i+1}}\{\bar{\mathbf{R}}^x\}} \bar{x}_i + \underbrace{\left(\bar{\mathbf{E}} - \bar{\mathbf{R}}_{i+1}^x \Delta z_i\right)^{-1} \Delta z_i \bar{x}_{i+1}^s}_{\bar{x}_{e q, i}^s}. \end{aligned} \quad (3.111)$$

Auch beim impliziten Verfahren wird nur die Matrizenfunktion am Ende des Segmentes ausgewertet.

Das explizite *Euler*-Verfahren kann aber auch anders abgeleitet werden. Setzt man voraus, dass die Lösung  $\bar{x}(z)$  beliebig oft differenzierbar ist, so kann diese auch durch die *Taylor*-Reihe

$$\bar{x}_{i+1} = \bar{x}_i + \bar{x}'_i \Delta z_i + \bar{x}''_i \frac{\Delta z_i^2}{2} + \dots \quad (3.112)$$

dargestellt werden. Bricht man diese nach dem zweiten Glied ab und ersetzt  $\bar{x}'_i = \bar{\mathbf{R}}_i^x \bar{x}_i + \bar{x}_i^s$ , erhält man direkt das explizite *Euler*-Verfahren. So ist auch sofort ersichtlich, dass das Fehlerverhalten der Größenordnung  $O(\Delta z_i^2)$  entspricht.

### 3.2.6.2 Integration mit der Trapezregel

Eine wirksame Verbesserung des recht groben *Euler*-Verfahrens kann durch die Verwendung der Trapezregel erreicht werden. Dabei wird eine mittlere „Steigung“ aus den Werten am Segmentanfang und -ende ermittelt und zur Bestimmung des Funktionswertes  $\bar{x}$  am Segmentende genutzt. Damit ergibt sich

$$\bar{x}_{i+1} = \bar{x}_i + \left(\bar{\mathbf{R}}_i^x \bar{x}_i + \bar{\mathbf{R}}_{i+1}^x \bar{x}_{i+1}\right) \frac{\Delta z_i}{2} + \left(\bar{x}_i^s + \bar{x}_{i+1}^s\right) \frac{\Delta z_i}{2} \quad (3.113)$$

$$\bar{x}_{i+1} = \underbrace{\left(\bar{\mathbf{E}} - \frac{\Delta z_i \bar{\mathbf{R}}_{i+1}^x}{2}\right)^{-1} \left(\bar{\mathbf{E}} + \frac{\Delta z_i \bar{\mathbf{R}}_i^x}{2}\right)}_{\mathcal{M}_{z_i}^{z_{i+1}}\{\bar{\mathbf{R}}^x\}} \bar{x}_i + \underbrace{\left(\bar{\mathbf{E}} - \frac{\Delta z_i \bar{\mathbf{R}}_{i+1}^x}{2}\right)^{-1} \left(\bar{x}_i^s + \bar{x}_{i+1}^s\right) \frac{\Delta z_i}{2}}_{\bar{x}_{e q, i}^s}. \quad (3.114)$$

Da bei der Trapezregel die Steigungen am Anfang **und** am Ende des Segmentes ausgewertet werden, wird im Gegensatz zum *Euler*-Verfahren eine Variation der Steigung (d.h. der Parametermatrix  $\bar{\mathbf{R}}^x(z)$ ) über dem Segment berücksichtigt. Dies ist auch bei allen folgenden numerischen Integrationsverfahren der Fall.

Allerdings erfordert die Trapezregel eine Matrixinversion. Soll diese Operation vermieden werden, kann der Funktionswert  $\bar{\mathbf{x}}_{i+1}$  in einem ersten Schritt geschätzt werden und in einem zweiten Schritt durch die Trapezregel korrigiert werden. Die einfachste Schätzung ist  $\bar{\mathbf{x}}_{i+1} = \bar{\mathbf{x}}_i$ . Diese Schätzung ist zwar offensichtlich nicht richtig, führt aber trotzdem zu einer anwendbaren Integrationsformel

$$\bar{\mathbf{x}}_{i+1} = \underbrace{\left( \bar{\mathbf{E}} + \Delta z_i \frac{\bar{\mathbf{R}}_i^x + \bar{\mathbf{R}}_{i+1}^x}{2} \right)}_{\mathcal{M}_{z_i}^{z_{i+1}}\{\bar{\mathbf{R}}^x\}} \bar{\mathbf{x}}_i + \underbrace{(\bar{\mathbf{x}}_i^s + \bar{\mathbf{x}}_{i+1}^s)}_{\bar{\mathbf{x}}_{eq,i}^s} \frac{\Delta z_i}{2}, \quad (3.115)$$

welche allerdings nur erster Ordnung und somit dem *Euler*-Verfahren gleichzusetzen ist. Eine bessere Schätzung für den Lösungswert am Segmentende stellt das explizite *Euler*-Verfahren mit  $\bar{\mathbf{x}}_{i+1} = \bar{\mathbf{x}}_i + \Delta z_i \bar{\mathbf{R}}_i^x \bar{\mathbf{x}}_i + \Delta z_i \bar{\mathbf{x}}_i^s$  zur Verfügung. Diese führt zu folgendem modifizierten Trapez-Integrationsverfahren:

$$\bar{\mathbf{x}}_{i+1} = \underbrace{\left( \bar{\mathbf{E}} + \Delta z_i \frac{\bar{\mathbf{R}}_i^x + \bar{\mathbf{R}}_{i+1}^x + \Delta z_i \bar{\mathbf{R}}_{i+1}^x \bar{\mathbf{R}}_i^x}{2} \right)}_{\mathcal{M}_{z_i}^{z_{i+1}}\{\bar{\mathbf{R}}^x\}} \bar{\mathbf{x}}_i + \underbrace{(\bar{\mathbf{x}}_i^s + \bar{\mathbf{x}}_{i+1}^s)}_{\bar{\mathbf{x}}_{eq,i}^s} \frac{\Delta z_i}{2} + \bar{\mathbf{R}}_{i+1}^x \bar{\mathbf{x}}_i^s \frac{\Delta z_i^2}{2}. \quad (3.116)$$

Der Fehler des Trapezverfahrens bzw. des modifizierten Trapezverfahrens ist von der Größenordnung  $O(\Delta z_i^3)$ .

### 3.2.6.3 Explizite *Runge-Kutta*-Verfahren

Die heute wichtigste Klasse von Einschrittverfahren sind die expliziten *Runge-Kutta*-Verfahren. Zur Herleitung dieser Klasse von Verfahren mit ihren zu erfüllenden Bedingungsgleichungen sei für den skalaren Fall auf entsprechende Lehrbücher verwiesen (siehe z.B. [49, 50]). Danach heißt ein Einschrittverfahren der Gestalt

$$\bar{\mathbf{x}}_{i+1} = \bar{\mathbf{x}}_i + \sum_{m=1}^s b_m \bar{\mathbf{K}}_m \quad (3.117)$$

$$\bar{\mathbf{K}}_m = \Delta z_i \bar{\mathbf{f}} \left( z_{i+c_m}, \bar{\mathbf{x}}_i + \sum_{n=1}^{m-1} a_{m,n} \bar{\mathbf{K}}_n \right) \quad (3.118)$$

$$= \Delta z_i \bar{\mathbf{R}}_{i+c_m}^x \left( \bar{\mathbf{x}}_i + \sum_{n=1}^{m-1} a_{m,n} \bar{\mathbf{K}}_n \right) + \Delta z_i \bar{\mathbf{x}}_{i+c_m}^s \quad (3.119)$$

$s$ -stufiges Runge-Kutta-Verfahren. Substituiert man  $\bar{\mathbf{K}}_m = \hat{\bar{\mathbf{K}}}_m \bar{\mathbf{x}}_i + \bar{\mathbf{x}}_{K_m}^s$ , ergibt sich folgende allgemeine rekursive Formel für den Matrizen

$$\mathcal{M}_{z_i}^{z_{i+1}}\{\bar{\mathbf{R}}^x\} = \bar{\mathbf{E}} + \sum_{m=1}^s b_m \hat{\bar{\mathbf{K}}}_m \quad (3.120)$$

$$\hat{\bar{\mathbf{K}}}_m = \Delta z_i \bar{\mathbf{R}}_{i+c_m}^x \left( \bar{\mathbf{E}} + \sum_{n=1}^{m-1} a_{m,n} \hat{\bar{\mathbf{K}}}_n \right) \quad (3.121)$$

Tabelle 3.2: *Butcher*-Schema für ein s-stufiges und das klassische *Runge-Kutta*-Verfahren

0				
$c_2$	$a_{2,1}$			
$c_3$	$a_{3,1}$	$a_{3,2}$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	
$c_s$	$a_{s,1}$	$a_{s,2}$	$\cdots$	$a_{s,s-1}$
	$b_1$	$b_2$	$\cdots$	$b_s$

0				
1/2	1/2			
1/2	0	1/2		
1	0	0	1	
	1/6	1/3	1/3	1/6

und für den inhomogenen Term

$$\bar{\mathbf{x}}_{eq,i}^s = \sum_{m=1}^s b_m \bar{\mathbf{x}}_{K_m}^s \quad (3.122)$$

$$\bar{\mathbf{x}}_{K_m}^s = \Delta z_i \bar{\mathbf{x}}_{i+c_m}^s + \Delta z_i \bar{\mathbf{R}}_{i+c_m}^x \sum_{n=1}^{m-1} a_{m,n} \bar{\mathbf{x}}_{K_n}^s. \quad (3.123)$$

Die Parameter  $a_{n,m}$ ,  $b_m$  und  $c_m$  werden geeignet gewählt und im so genannten *Butcher*-Schema (siehe Tabelle 3.2) zusammengefasst [49].

Mit dem angegebenen *Butcher*-Schema für das klassische 4-stufige *Runge-Kutta*-Verfahren ergibt sich die Lösung am Segmentende aus der Lösung am Segmentanfang, wie auch schon in [51] erwähnt, als

$$\bar{\mathbf{x}}_{i+1} = \bar{\mathbf{x}}_i + \left( \frac{1}{6} \bar{\mathbf{K}}_1 + \frac{1}{3} \bar{\mathbf{K}}_2 + \frac{1}{3} \bar{\mathbf{K}}_3 + \frac{1}{6} \bar{\mathbf{K}}_4 \right). \quad (3.124)$$

Die Zwischenwerte lauten:

$$\bar{\mathbf{K}}_1 = \Delta z_i \bar{\mathbf{R}}_i^x \bar{\mathbf{x}}_i + \Delta z_i \bar{\mathbf{x}}_i^s \quad (3.125)$$

$$\bar{\mathbf{K}}_2 = \Delta z_i \bar{\mathbf{R}}_{i+\frac{1}{2}}^x \left( \bar{\mathbf{x}}_i + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{K}}_1 \right) + \Delta z_i \bar{\mathbf{x}}_{i+\frac{1}{2}}^s \quad (3.126)$$

$$\bar{\mathbf{K}}_3 = \Delta z_i \bar{\mathbf{R}}_{i+\frac{1}{2}}^x \left( \bar{\mathbf{x}}_i + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{K}}_2 \right) + \Delta z_i \bar{\mathbf{x}}_{i+\frac{1}{2}}^s \quad (3.127)$$

$$\bar{\mathbf{K}}_4 = \Delta z_i \bar{\mathbf{R}}_{i+1}^x (\bar{\mathbf{x}}_i + \bar{\mathbf{K}}_3) + \Delta z_i \bar{\mathbf{x}}_{i+1}^s. \quad (3.128)$$

Diese Zwischenwerte werden dann in Gleichung (3.124) eingesetzt und führen zur Berechnungsformel für den Matrizen

$$\mathcal{M}_{z_i}^{z_{i+1}} \{ \bar{\mathbf{R}}^x \} = \bar{\mathbf{E}} + \bar{\mathbf{R}}^{(1)} \Delta z_i + \bar{\mathbf{R}}^{(2)} \frac{\Delta z_i^2}{2} + \bar{\mathbf{R}}^{(3)} \frac{\Delta z_i^3}{6} + \bar{\mathbf{R}}^{(4)} \frac{\Delta z_i^4}{24} \quad (3.129)$$

mit folgenden Hilfsgrößen

$$\overline{\mathbf{R}}^{(1)} = \frac{1}{6} \left( \overline{\mathbf{R}}_{i+1}^x + 4 \overline{\mathbf{R}}_{i+\frac{1}{2}}^x + \overline{\mathbf{R}}_i^x \right) \quad (3.130)$$

$$\overline{\mathbf{R}}^{(2)} = \frac{1}{3} \left[ \overline{\mathbf{R}}_{i+1}^x \overline{\mathbf{R}}_{i+\frac{1}{2}}^x + \left( \overline{\mathbf{R}}_{i+\frac{1}{2}}^x \right)^2 + \overline{\mathbf{R}}_{i+\frac{1}{2}}^x \overline{\mathbf{R}}_i^x \right] \quad (3.131)$$

$$\overline{\mathbf{R}}^{(3)} = \frac{1}{2} \left[ \overline{\mathbf{R}}_{i+1}^x \left( \overline{\mathbf{R}}_{i+\frac{1}{2}}^x \right)^2 + \left( \overline{\mathbf{R}}_{i+\frac{1}{2}}^x \right)^2 \overline{\mathbf{R}}_i^x \right] \quad (3.132)$$

$$\overline{\mathbf{R}}^{(4)} = \overline{\mathbf{R}}_{i+1}^x \left( \overline{\mathbf{R}}_{i+\frac{1}{2}}^x \right)^2 \overline{\mathbf{R}}_i^x. \quad (3.133)$$

Man sieht leicht, dass im Falle einer konstanten Matrizenfunktion  $\overline{\mathbf{R}}^x(z)$  die Hilfsgrößen  $\overline{\mathbf{R}}^{(k)}$  in die normalen Potenzen der Matrizenfunktion  $(\overline{\mathbf{R}}^x)^k$  übergehen, und die Reihe (3.129) der Reihendarstellung für  $e^{\overline{\mathbf{R}}^x \Delta z_i}$ , abgebrochen nach dem 5. Glied, entspricht.

Die Berechnungsformel für den Quellvektor am Segmentende ergibt sich aus Gleichung (3.122) und (3.123) bzw. aus den verbliebenen Termen der Gleichung (3.124)

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{x}}_{eq,i}^s &= \frac{\Delta z_i}{6} \left( \overline{\mathbf{x}}_i^s + 4 \overline{\mathbf{x}}_{i+\frac{1}{2}}^s + \overline{\mathbf{x}}_{i+1}^s \right) + \\ &\quad \frac{\Delta z_i^2}{6} \left( \overline{\mathbf{R}}_{i+\frac{1}{2}}^x \overline{\mathbf{x}}_i^s + \overline{\mathbf{R}}_{i+\frac{1}{2}}^x \overline{\mathbf{x}}_{i+\frac{1}{2}}^s + \overline{\mathbf{R}}_{i+1}^x \overline{\mathbf{x}}_{i+\frac{1}{2}}^s \right) + \\ &\quad \frac{\Delta z_i^3}{12} \left[ \left( \overline{\mathbf{R}}_{i+\frac{1}{2}}^x \right)^2 \overline{\mathbf{x}}_i^s + \overline{\mathbf{R}}_{i+1}^x \overline{\mathbf{R}}_{i+\frac{1}{2}}^x \overline{\mathbf{x}}_{i+\frac{1}{2}}^s \right] + \frac{\Delta z_i^4}{24} \left[ \overline{\mathbf{R}}_{i+1}^x \left( \overline{\mathbf{R}}_{i+\frac{1}{2}}^x \right)^2 \overline{\mathbf{x}}_i^s \right]. \end{aligned} \quad (3.134)$$

Die Berechnung des Wertes der Matrizenfunktion (bzw. des inhomogenen Termes) an der Stelle  $z_{i+\frac{1}{2}}$  kann mit Hilfe der Mittelwertsformel  $\overline{\mathbf{R}}_{i+\frac{1}{2}}^x = \frac{1}{2} (\overline{\mathbf{R}}_i^x + \overline{\mathbf{R}}_{i+1}^x)$  oder durch höhere Approximationsformeln erfolgen, falls dieser nicht gegeben ist. Der Fehler des klassischen 4-stufigen *Runge-Kutta*-Verfahrens ist von der Größenordnung  $O(\Delta z_i^5)$ .

Natürlich kann mit Hilfe der Gleichungen (3.120) und (3.121) neben dem klassischen auch beliebige andere *Runge-Kutta*-Verfahren ins Matrizenkalkül übertragen werden. Allerdings zeigen diese dichtere Verfahrensmatrizen  $A = [a_{m,n}]$ , was zu einer bedeutend höheren Anzahl von Matrizenprodukten in der Bestimmungsgleichung für den Matrizenanten sorgt und damit numerisch aufwendiger wird.

### 3.2.6.4 Hermite-Integrationsverfahren

Die vorhergehenden Integrationsverfahren benutzten zur Berechnung des Matrizenanten nur die Parameter  $\overline{\mathbf{R}}^x$  an verschiedenen Stützstellen im Intervall. Bei den *Hermite*-Integrationsverfahren werden auch deren Ableitungen verwendet. Erstmals wurde das Verfahren von G. Duffing [52] eingesetzt. Danach ergibt sich ausgehend von der verallgemeinerten *Tay-*

lorschen Formel nach *Hermite*<sup>†</sup>

$$\sum_{v=0}^k \bar{\mathbf{f}}^{(v)}(b) \frac{\Delta z^v}{v!} \frac{\binom{k}{v}}{\binom{k+m}{v}} = \sum_{v=0}^m \bar{\mathbf{f}}^{(v)}(a) \frac{\Delta z^v}{v!} \frac{\binom{m}{v}}{\binom{k+m}{v}} + \bar{\mathbf{R}}_{k,m} \quad (3.135)$$

für den Fall  $k = 1$  und  $m = 2$  ergibt sich aus (3.135) mit  $a = z_i$  und  $b = z_{i+1}$

$$\bar{\mathbf{x}}(z_{i+1}) - \frac{\Delta z}{3} \bar{\mathbf{x}}'(z_{i+1}) = \bar{\mathbf{x}}(z_i) + \frac{2 \Delta z}{3} \bar{\mathbf{x}}'(z_i) + \frac{\Delta z^2}{6} \bar{\mathbf{x}}''(z_i) + \bar{\mathbf{R}}_{1,2}. \quad (3.136)$$

Kombiniert man (3.136) mit der Differentialgleichung (3.7), folgt daraus folgende Lösungsformel

$$\bar{\mathbf{x}}_{i+1} = \bar{\mathbf{x}}_i + \frac{\Delta z_i}{6} \left( 4 \bar{\mathbf{R}}_i^x \bar{\mathbf{x}}_i + 2 \bar{\mathbf{R}}_{i+1}^x \bar{\mathbf{x}}_{i+1} + \Delta z_i \left[ \frac{d}{dz} \bar{\mathbf{R}}^x(z) \bar{\mathbf{x}}(z) \right]_{z=z_i} \right) \quad (3.137)$$

$$\begin{aligned} & + \frac{\Delta z_i}{3} (2 \bar{\mathbf{x}}_i^s + \bar{\mathbf{x}}_{i+1}^s) + \frac{\Delta z_i^2}{6} \bar{\mathbf{x}}_i^{s'} \\ \bar{\mathbf{x}}_{i+1} = & \underbrace{\left( \bar{\mathbf{E}} - \frac{\Delta z_i}{3} \bar{\mathbf{R}}_{i+1}^x \right)^{-1} \left( \bar{\mathbf{E}} + \frac{2 \Delta z_i}{3} \bar{\mathbf{R}}_i^x + \frac{\Delta z_i^2}{6} \left[ \bar{\mathbf{R}}_i^{x'} + (\bar{\mathbf{R}}_i^x)^2 \right] \right)}_{\mathcal{M}_{z_i}^{z_{i+1}} \{ \bar{\mathbf{R}}^x \}} \bar{\mathbf{x}}_i + \\ & \underbrace{\left( \bar{\mathbf{E}} - \frac{\Delta z_i}{3} \bar{\mathbf{R}}_{i+1}^x \right)^{-1} \left[ \frac{\Delta z_i}{3} (2 \bar{\mathbf{x}}_i^s + \bar{\mathbf{x}}_{i+1}^s) + \frac{\Delta z_i^2}{6} (\bar{\mathbf{R}}_i^x \bar{\mathbf{x}}_i^s + \bar{\mathbf{x}}_i^{s'}) \right]}_{\bar{\mathbf{x}}_{eq,i}^s}. \end{aligned} \quad (3.138)$$

Diese Bestimmungsgleichung ist von der Größenordnung  $O(\Delta z_i^4)$ .

In Analogie zum Abschnitt 3.2.6.2 kann auch hier eine Matrixinversion vermieden werden, indem ein Schätzwert für den Funktionswert  $\bar{\mathbf{x}}_{i+1}$  auf der rechten Seite in (3.137) verwendet wird. Für diese Schätzung kann allerdings nicht das *Euler*-Verfahren verwendet werden, da hierbei ein linearer Zusammenhang zwischen dem Schätzwert und der Ableitung besteht. Dies würde zu einer Reduktion der Ordnung des Verfahrens führen. Um eine Formel ohne Ordnungsverlust zu erhalten, bietet sich die Verwendung des modifizierten Trapez-Verfahrens

<sup>†</sup>Die Verallgemeinerung der *Taylor*schen Formel stellt eine Beziehung zwischen den Ableitungen einer Funktion  $\bar{\mathbf{f}}(z)$  an den Stellen  $z = a$  und  $z = b$  dar. Die Funktion muss dabei  $(k+m)$ -mal stetig differenzierbar sein. Das Restglied ergibt sich als  $\bar{\mathbf{R}}_{k,m} = \frac{(-1)^{k+m}}{(k+m)!} \int_a^b (z-a)^k (z-b)^m \bar{\mathbf{f}}^{(k+m+1)}(z) dz$ . Für den Fall  $k = 0$  ergibt sich die *Taylor*sche Formel als Spezialfall.

an. Es ergibt sich damit

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}_{i+1} = & \left( \bar{\mathbf{E}} + \frac{\Delta z_i}{3} [2\bar{\mathbf{R}}_i^x + \bar{\mathbf{R}}_{i+1}^x] \right. \\ & \left. + \frac{\Delta z_i^2}{6} \left[ \bar{\mathbf{R}}_i^{x'} + (\bar{\mathbf{R}}_i^x)^2 + \bar{\mathbf{R}}_{i+1}^x (\bar{\mathbf{R}}_i^x + \bar{\mathbf{R}}_{i+1}^x) + \frac{\Delta z_i^3}{6} (\bar{\mathbf{R}}_{i+1}^x)^2 \bar{\mathbf{R}}_i^x \right] \right) \bar{\mathbf{x}}_i + \\ & \underbrace{\frac{\Delta z_i}{3} (2 \bar{\mathbf{x}}_i^s + \bar{\mathbf{x}}_{i+1}^s) + \frac{\Delta z_i^2}{6} (\bar{\mathbf{x}}_i^{s'} + \bar{\mathbf{R}}_i^x \bar{\mathbf{x}}_i^s + \bar{\mathbf{R}}_{i+1}^x \bar{\mathbf{x}}_{i+1}^s) + \frac{\Delta z_i^3}{6} (\bar{\mathbf{R}}_{i+1}^x)^2 \bar{\mathbf{x}}_i^s}_{\bar{\mathbf{x}}_{eq,i}^{s'}}. \end{aligned} \quad (3.139)$$

Unter der Annahme einer linearen Funktion für die Matrizenfunktion  $\bar{\mathbf{R}}^x(z)$  und den inhomogenen Term  $\bar{\mathbf{x}}^s(z)$  im aktuellen Segment vereinfacht sich die Gleichung (3.139) zu

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}_{i+1} = & \left( \bar{\mathbf{E}} + \frac{\Delta z_i}{2} [\bar{\mathbf{R}}_i^x + \bar{\mathbf{R}}_{i+1}^x] \right. \\ & \left. + \frac{\Delta z_i^2}{6} \left[ (\bar{\mathbf{R}}_i^x)^2 + \bar{\mathbf{R}}_{i+1}^x \bar{\mathbf{R}}_i^x + (\bar{\mathbf{R}}_{i+1}^x)^2 \right] + \frac{\Delta z_i^3}{6} (\bar{\mathbf{R}}_{i+1}^x)^2 \bar{\mathbf{R}}_i^x \right) \bar{\mathbf{x}}_i + \\ & \underbrace{\frac{\Delta z_i}{2} (\bar{\mathbf{x}}_i^s + \bar{\mathbf{x}}_{i+1}^s) + \frac{\Delta z_i^2}{6} (\bar{\mathbf{R}}_i^x \bar{\mathbf{x}}_i^s + \bar{\mathbf{R}}_{i+1}^x \bar{\mathbf{x}}_{i+1}^s) + \frac{\Delta z_i^3}{6} (\bar{\mathbf{R}}_{i+1}^x)^2 \bar{\mathbf{x}}_i^s}_{\bar{\mathbf{x}}_{eq,i}^s}. \end{aligned} \quad (3.140)$$

### 3.2.6.5 Die Romberg-Methode zur Verbesserung der Genauigkeit

Die Grundidee der Rombergschen Methode beruht auf der Tatsache, dass die Ordnung des Restfehlers einer bestimmten Methode bekannt ist. Es gilt dann für ein allgemeines Integrationsverfahren  $(p-1)$ -ter Konsistenzordnung

$$\mathcal{M}_{z_0}^z\{\bar{\mathbf{R}}^x\} = {}^{(n)}\mathcal{M}_{z_0}^z\{\bar{\mathbf{R}}^x\} + \bar{\mathbf{C}} \Delta z_i^p + O(\Delta z_i^{p+1}). \quad (3.141)$$

Der Term  ${}^{(n)}\mathcal{M}_{z_0}^z\{\bar{\mathbf{R}}^x\}$  bezeichnet dabei den Näherungswert für den Matrizenanten  $\mathcal{M}_{z_0}^z\{\bar{\mathbf{R}}^x\}$  berechnet auf der Basis von  $n$  Stützstellen im Intervall  $(z_0, z)$ . Verdoppelt man die Stützstellenanzahl, so ergibt sich

$$\mathcal{M}_{z_0}^z\{\bar{\mathbf{R}}^x\} = {}^{(2n)}\mathcal{M}_{z_0}^z\{\bar{\mathbf{R}}^x\} + \bar{\mathbf{C}} \frac{\Delta z_i^p}{2^p} + O(\Delta z_i^{p+1}). \quad (3.142)$$

Kombiniert man die Gleichungen (3.141) und (3.142), kann das Fehlerglied  $\bar{\mathbf{C}} \Delta z_i^p$  eliminiert werden. Man erhält eine genauere Approximation mit

$$\mathcal{M}_{z_0}^z\{\bar{\mathbf{R}}^x\} = \frac{2^p}{2^p - 1} {}^{(2n)}\mathcal{M}_{z_0}^z\{\bar{\mathbf{R}}^x\} - \frac{1}{2^p - 1} {}^{(n)}\mathcal{M}_{z_0}^z\{\bar{\mathbf{R}}^x\} + O(\Delta z_i^{p+1}). \quad (3.143)$$

Tabelle 3.3: Darstellung zur *Romberg*-Methode

---



---

$^{(n)}\mathcal{M}_{z_0}^z\{\bar{\mathbf{R}}^x\} + O(\Delta z_i^p)$	$^{(2n)}\mathcal{M}_{z_0}^z\{\bar{\mathbf{R}}^x\} + O(\Delta z_i^p)$	$^{(4n)}\mathcal{M}_{z_0}^z\{\bar{\mathbf{R}}^x\} + O(\Delta z_i^p)$	$\dots$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\dots$
$\mathcal{M}_{z_0}^z\{\bar{\mathbf{R}}^x\} + O(\Delta z_i^{p+1})$	$\mathcal{M}_{z_0}^z\{\bar{\mathbf{R}}^x\} + O(\Delta z_i^{p+1})$	$\dots$	
$\downarrow$			
$\ddot{\mathcal{M}}_{z_0}^z\{\bar{\mathbf{R}}^x\} + O(\Delta z_i^{p+2})$	$\dots$		
$\dots$			

---



---

So ist z.B. der Restfehler bei der Berechnung des Matrizen mit der numerischen Integration mittels *Runge-Kutta*-Verfahren 4. Ordnung von der Größenordnung  $O(\Delta z_i^5)$  und es ergibt sich somit folgende Korrektur für das *Runge-Kutta*-Verfahren

$$\mathcal{M}_{z_0}^z\{\bar{\mathbf{R}}^x\} = \frac{32}{31} {}^{(2n)}\mathcal{M}_{z_0}^z\{\bar{\mathbf{R}}^x\} - \frac{1}{31} {}^{(n)}\mathcal{M}_{z_0}^z\{\bar{\mathbf{R}}^x\} + O(\Delta z_i^{p+1}). \quad (3.144)$$

Prinzipiell kann das Verfahren auch wiederholt angewendet werden, um so die Terme höherer Ordnung sukzessive zu eliminieren. Dazu muss allerdings das Fehlerverhalten sehr genau bekannt sein. Des Weiteren sind immer mehr Rechnungen mit sich verdoppelnder Schrittzahl nötig, um die höheren Korrekturglieder zu bestimmen (siehe Tabelle 3.3).

Neben der Verbesserung der Genauigkeit einer konkreten Rechnung kann man mit Hilfe des *Romberg*-Verfahrens auch verbesserte Integrationsformeln herleiten. Wendet man die *Romberg*-Methode genau einmal auf das *Euler*-Verfahren im Segment  $[z_i, z_{i+1}]$  an, so erhält man ein Integrationsverfahren zweiter Ordnung. Für eine verdoppelte Schrittweite ergibt sich dann ein Zwischenschritt in der Segmentmitte

$$\bar{\mathbf{x}}_{i+\frac{1}{2}} = \bar{\mathbf{x}}_i + \frac{\Delta z_i}{2} \bar{\mathbf{R}}_i^x \bar{\mathbf{x}}_i \quad (3.145)$$

und für das Segmentende

$$\bar{\mathbf{x}}_{i+1} = \bar{\mathbf{x}}_{i+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta z_i}{2} \bar{\mathbf{R}}_{i+\frac{1}{2}}^x \bar{\mathbf{x}}_{i+\frac{1}{2}}. \quad (3.146)$$

Kombiniert man beide Ergebnisse, erhält man den Matrizen des Segmentes mit

$$\mathcal{M}_{z_i}^{z_{i+1}}\{\bar{\mathbf{R}}^x\} = \bar{\mathbf{E}} + \frac{\Delta z_i}{2} \left( \bar{\mathbf{R}}_i^x + \bar{\mathbf{R}}_{i+\frac{1}{2}}^x \right) + \frac{\Delta z_i^2}{4} \bar{\mathbf{R}}_{i+\frac{1}{2}}^x \bar{\mathbf{R}}_i^x. \quad (3.147)$$

Diese Verfahrensweise zur Konstruktion neuer Integrationsverfahren kann selbstverständlich auch mehrmals nacheinander angewendet werden. So lassen sich beliebig genaue (damit leider auch beliebig aufwendige) Integrationsverfahren erzeugen.

Dabei kann die Ordnung des Verfahrens auch dynamisch während der Integration angepasst werden. Diese Klasse von Berechnungsverfahren wird Extrapolationsverfahren genannt. Die Extrapolation bezieht sich hierbei auf den Fehler und nicht auf die Lösungsfunktion. Bei diesen Verfahren muss neben der globalen Schrittweite  $H$  auch noch die Ordnung der Extrapolation gesteuert werden. Das ermöglicht eine bessere Anpassung des Integrationsverfahrens an das konkrete Problem, stellt aber höhere Anforderungen an die Implementierung.

### 3.2.6.6 Schrittweitensteuerung und Fehlerkontrolle

Die Effizienz eines numerischen Integrationsverfahrens ist extrem von der notwendigen Schrittweite und deren Steuerung im Integrationsprozess abhängig. In Bereichen starker Änderung des Matrizen sind verhältnismäßig kleine Schrittweiten  $\Delta z$  nötig, um den Integrationsfehler klein zu halten. Bei schwacher Änderung sind dagegen größere Schritte möglich und sollten auch verwendet werden, um überflüssige Rechenschritte zu vermeiden. Optimalerweise ist die Schrittweite dem Verlauf des Matrizen anzupassen. Eine solche automatische Schrittweitensteuerung beruht oft auf der Schätzung des Integrationsfehlers. Sollte diese Schätzung die vorgegebenen Grenzwerte über- oder unterschreiten, wird die Schrittweite geändert.

**Fehlerschätzung nach Richardson** Im Abschnitt 3.2.6.5 wurde in der *Romberg*-Methode ein bekanntes Fehlerverhalten genutzt, um die Genauigkeit zu verbessern bzw. um genauere Integrationsverfahren zu erhalten. Man kann aber auch das bekannte Fehlerverhalten zur Schätzung des Integrationsfehlers nutzen und eine automatische Schrittweitensteuerung implementieren, wie es *Richardson* [53] vorgeschlagen hat. Zur Fehlerschätzung bzw. Schrittweitensteuerung aufgrund des geschätzten Fehlers wird dabei konkret folgendermaßen vorgegangen. Es werden zwei Rechnungen für das aktuelle Segment durchgeführt,

- mit der Schrittweite  $\Delta z_i$ , festgelegt durch den vorherigen Schritt oder die Startschrittweite,
- und mit der doppelten Schrittweite  $2 \Delta z_i$ .

Bei der Berechnung mit der doppelten Schrittweite hat der Fehler annähernd den  $2^p$ -fachen Wert des Fehlers mit normaler Schrittweite  $\Delta z_i^\ddagger$ . Beim *Runge-Kutta*-Verfahren aus Kapitel 3.2.6.3 wächst der Fehler also um das 32-fache. Da zum Durchlaufen der Distanz  $2\Delta z_i$  zwei Schritte mit normaler Schrittweite nötig sind, und der Fehler sich dabei ungefähr verdoppelt, ergibt sich ein Faktor von  $2^{p-1}$ , d.h. ein Faktor von 16 für das *Runge-Kutta*-Verfahren. Damit beträgt der Fehler angenähert

$$\bar{\sigma}(\mathcal{M}_{z_i}^{z_{i+1}}\{R^x\}) = \frac{1}{2^{p-1}} \left( (\Delta z_i) \mathcal{M}_{z_i}^{z_{i+1}}\{R^x\} - (2\Delta z_i) \mathcal{M}_{z_i}^{z_{i+1}}\{R^x\} \right), \quad (3.148)$$

was auch ergänzend zur Korrektur der Feinrechnung

$$\mathcal{M}_{z_i}^{z_{i+1}}\{R^x\} = \frac{2^{p-1} + 1}{2^{p-1}} (\Delta z_i) \mathcal{M}_{z_i}^{z_{i+1}}\{R^x\} - \frac{1}{2^{p-1}} (2\Delta z_i) \mathcal{M}_{z_i}^{z_{i+1}}\{R^x\} \quad (3.149)$$

benutzt werden kann. Aufgrund des berechneten Fehlers und einer vorgegebenen Fehlertoleranz wird dann die Schrittweite gesteuert. Für eine gewählte Toleranz  $\epsilon$  werden folgende Regeln angewendet

- $0.2 \epsilon < \|\bar{\sigma}(\mathcal{M}_{z_i}^{z_{i+1}}\{R^x\})\| < 10 \epsilon$  - Schrittweite  $\Delta z_i$  wird beibehalten und das aktuelle, nach (3.149) korrigierte Ergebnis akzeptiert,

---

<sup>‡</sup>Die Schrittweite  $2 \Delta z_i$  muss dabei noch so klein sein, dass die Fehlerglieder höherer Fehlerpotenzen gegenüber dem Fehlerterm der Größenordnung  $O(\Delta z_i^p)$  vernachlässigt werden können.

- $\|\overline{\sigma}(\mathcal{M}_{z_i}^{z_{i+1}}\{R^x\})\| \geq 10 \epsilon$  - Schrittweite  $\Delta z_i$  wird für den aktuellen Schritt halbiert und mit dieser halbierten Schrittweite der aktuelle Schritt wiederholt. Berechnete Ergebnisse für den aktuellen Schritt werden verworfen,
- $\|\overline{\sigma}(\mathcal{M}_{z_i}^{z_{i+1}}\{R^x\})\| \leq 0.2 \epsilon$  - Schrittweite  $\Delta z_i$  wird im nächsten Schritt verdoppelt und das aktuelle, nach (3.149) korrigierte Ergebnis, akzeptiert.

Dieses recht einfache Verfahren kann noch optimiert werden. Im Allgemeinen wird man eine absolute ( $\epsilon$ ) und eine relative Fehlertoleranz ( $\kappa$ ) vorgeben wollen, wobei beide eingehalten werden sollen. Ist der Fehler nach Formel (3.148) gegeben, kann die Norm nach

$$\|\overline{\sigma}(\mathcal{M}_{z_i}^{z_{i+1}}\{R^x\})\| \approx \alpha_p \Delta z_i^p \quad (3.150)$$

approximiert werden und daraus der Wert für  $\alpha_p$  bestimmt werden.

Ist nun  $\|\overline{\sigma}(\mathcal{M}_{z_i}^{z_{i+1}}\{R^x\})\| < \epsilon$  und  $\|\overline{\sigma}(\mathcal{M}_{z_i}^{z_{i+1}}\{R^x\})\| < \kappa \|\mathcal{M}_{z_i}^{z_{i+1}}\{R^x\}\|$ , dann wird das Ergebnis des aktuellen Schrittes angenommen, und die Schrittweite des nächsten Schrittes ergibt sich aus

$$\Delta z_{neu} = \Delta z_{i+1} = \Delta z_i \min \left( \sqrt[p]{\frac{\epsilon}{\|\overline{\sigma}(\mathcal{M}_{z_i}^{z_{i+1}}\{R^x\})\|}}, \sqrt[p]{\frac{\kappa}{\|\overline{\sigma}(\mathcal{M}_{z_i}^{z_{i+1}}\{R^x\})\|}} \|\mathcal{M}_{z_i}^{z_{i+1}}\{R^x\}\| \right). \quad (3.151)$$

Bei der praktischen Durchführung wird man den Wert  $\Delta z_{neu}$  noch mit einem Sicherheitsfaktor (z.B. 0.9) multiplizieren und die nächstgelegene Dualzahl wählen, um unnötige numerische Rundungsfehler zu vermeiden. Durch die Startvorgabe einer Dualzahl und die Verdopplung bzw. Halbierung der Schrittweite im vorherigen Verfahren war das automatisch gewährleistet. Die Verwendung einer konkreten Matrixnorm ist nicht vorgeschrieben. Vielmehr kann diese frei gewählt werden, und hierbei geht die Wichtung der Fehlermatrix  $\overline{\sigma}(\mathcal{M}_{z_i}^{z_{i+1}}\{R^x\})$  ein. Entscheidet man sich für die Zeilen-Summen-Norm  $\|\overline{\mathbf{A}}\|_{row} = \max_i(\sum_j |a_{i,j}|)$ , wird der Fehler bezüglich einer maximalen Abweichung eines Elementes des

Lösungsvektors bewertet. Benutzt man hingegen die 2-Norm  $\|\overline{\mathbf{A}}\|_2 = \sqrt{\sum_i \sum_j |a_{i,j}|^2}$ , wird der

Fehler im quadratischen Mittel bewertet. Zur Bedeutung und Berechnung der unterschiedlichen Normen sei auf [54, 55, 56] verwiesen.

**Eingebettete Verfahren** Im Unterschied zur Fehlerschätzung mittels *Richardson*-Extrapolation kann der Fehler auch durch ein eingebettetes Verfahren mit einem Paar s-stufiger *Runge-Kutta*-Verfahren erfolgen, wie es *Fehlberg* [57, 58] für das klassische *Runge-Kutta*-Verfahren und *Frey* [59] für entsprechende *Hermite* Verfahren vorschlugen. Dabei werden die beiden Verfahren mit gleichem Knotenvektor und der gleichen Verfahrensmatrix gebildet, jedoch die Gewichte so gewählt, dass das Paar unterschiedliche Konsistenzordnungen hat. Unter diesen Voraussetzungen läßt sich der Fehler mit einem geringeren Aufwand berechnen als mit Hilfe der *Richardson*-Extrapolation. Für eine detaillierte Darstellung der Zusammenhänge sei auch auf [49] verwiesen.

**Globaler Fehler** Erfolgt die Schrittweitensteuerung nach einem der vorhergehend vorgestellten Verfahren, ist sichergestellt, dass die Norm des lokalen Fehlers  $\|\bar{\sigma}(\mathcal{M}_{z_i}^{z_{i+1}}\{R^x\})\|$  im Segment  $i$  eine vorzugebende Toleranz nicht überschreitet. Ausgehend von dieser Überlegung ist es möglich, eine Abschätzung für den globalen Fehler abzuleiten, d.h. für den Fehler des Matrizen am Ende der Leitung  $\mathcal{M}_{z_0}^{z_N}\{R^x\}$ . Der globale oder Gesamt-Fehler des Matrizen  $\mathcal{M}_{z_0}^{z_k}\{R^x\}$  ergibt sich als

$$\bar{\sigma}(\mathcal{M}_{z_0}^{z_k}\{R^x\}) = \sum_{i=1}^k \mathcal{M}_{z_i}^{z_k}\{R^x\} \bar{\sigma}(\mathcal{M}_{z_{i-1}}^{z_i}\{R^x\}). \quad (3.152)$$

Schätzt man die Norm des globalen Fehlers ab, erhält man

$$\|\bar{\sigma}(\mathcal{M}_{z_0}^{z_k}\{R^x\})\| \leq \sum_{i=1}^k \|\mathcal{M}_{z_i}^{z_k}\{R^x\}\| \max\left(\epsilon, \kappa \|\mathcal{M}_{z_{i-1}}^{z_i}\{R^x\}\|\right) \quad (3.153)$$

$$< \sum_{i=1}^k e^{L(z_k - z_i)} \max\left(\epsilon, \kappa \|\mathcal{M}_{z_{i-1}}^{z_i}\{R^x\}\|\right), \quad (3.154)$$

mit der *Lipschitz*konstante  $L$ . Rekursiv ergibt sich der globale Fehler gemäß

$$\bar{\sigma}(\mathcal{M}_{z_0}^{z_k}\{R^x\}) = \mathcal{M}_{z_{k-1}}^{z_k}\{R^x\} \bar{\sigma}(\mathcal{M}_{z_0}^{z_{k-1}}\{R^x\}) + \bar{\sigma}(\mathcal{M}_{z_{k-1}}^{z_k}\{R^x\}) \quad (3.155)$$

bzw. die Norm

$$\|\bar{\sigma}(\mathcal{M}_{z_0}^{z_k}\{R^x\})\| \leq \|\mathcal{M}_{z_{k-1}}^{z_k}\{R^x\}\| \|\bar{\sigma}(\mathcal{M}_{z_0}^{z_{k-1}}\{R^x\})\| + \max\left(\epsilon, \kappa \|\mathcal{M}_{z_{k-1}}^{z_k}\{R^x\}\|\right) \quad (3.156)$$

aus den Werten des vorherigen Segmentes.

### 3.2.7 Vergleich der Effizienz und Auswahl eines geeigneten Verfahrens

Wie so oft ist es schwer, ein optimales Verfahren für alle denkbaren Probleme anzugeben. Zusammenfassend sollen in diesem Abschnitt jedoch Empfehlungen zur Anwendung gegeben werden.

Die *Picard*-Iteration ist sehr aufwendig und eignet sich kaum für eine numerische Umsetzung. Mit Hilfe der stückweisen konstanten Approximation nach dem Kalkül von *Volterra* lässt sich der Matrizen bei einer effizienten Implementierung der Matrixexponentialfunktion schnell bestimmen. Allerdings ist die Genauigkeit aufgrund der abschnittsweise konstanten Beschreibung der Parameterfunktion sehr begrenzt. Nachteilig wirkt sich dabei die künstliche Konzentration der kontinuierlichen Streuung entlang der Leitung an diskreten Punkten aus. Mit den konstanten Stufenfunktionen lässt sich die Matrizenfunktion  $\bar{\mathbf{R}}^x(z)$  nur begrenzt genau darstellen. Probleme treten besonders bei starken Änderungen in der Parametermatrix auf. Dieses Verfahren eignet sich demnach nur für schwach ungleichförmige Leitungsstrukturen.

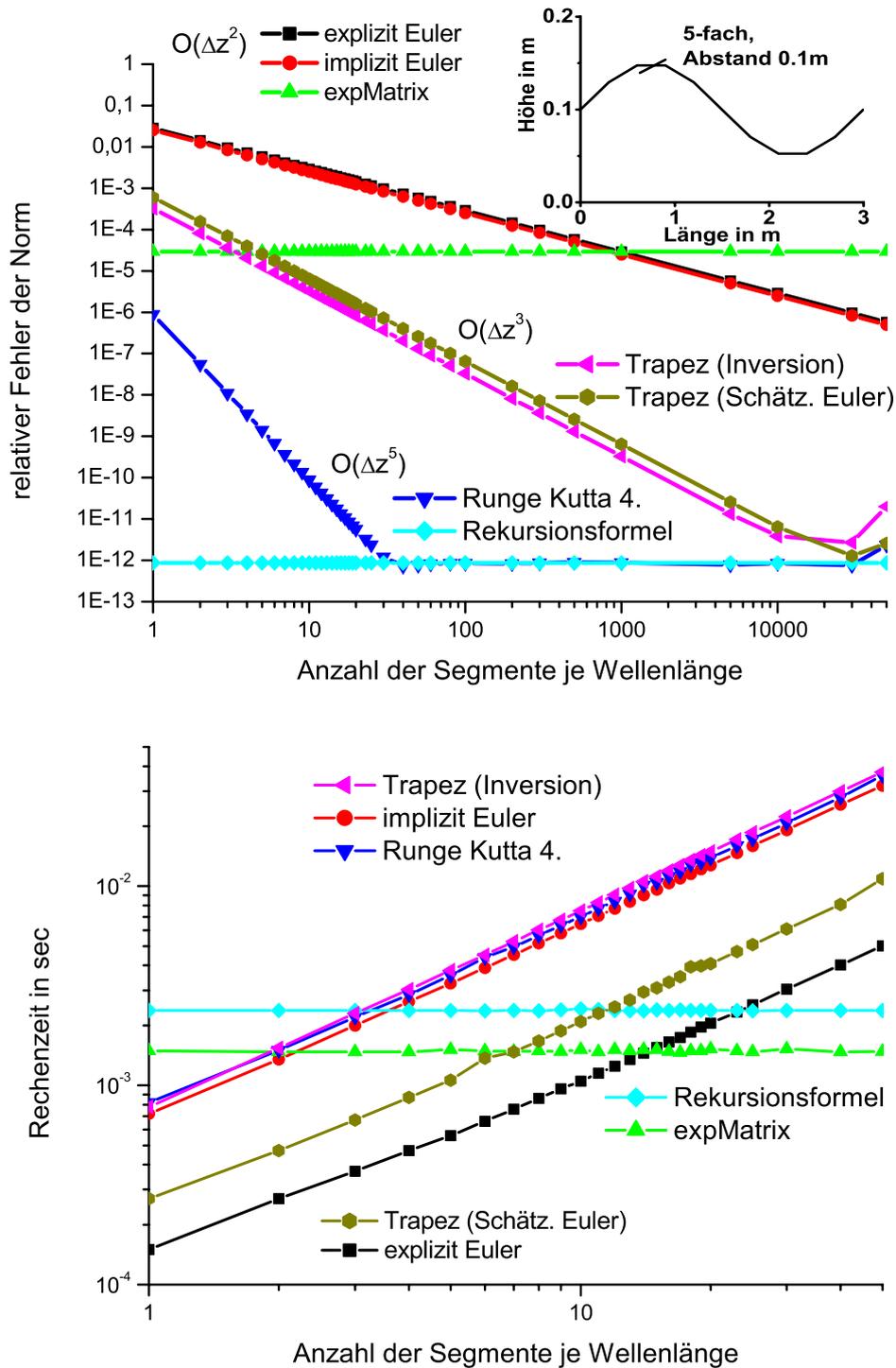


Abbildung 3.4: Norm der Abweichung der Kettenmatrix dividiert durch die Norm des Matrizen (relativer Fehler der Norm) sowie die Rechenzeit als Funktion der Segmentanzahl je Wellenlänge einer wellig verlegten Mehrfachleitung über leitender Ebene. Die untersuchte Leitungsanordnung besteht aus 5 Adern mit einem Radius von 0.5 mm und einem konstanten Abstand von 0.1 m der nebeneinander liegenden Adern.

Gute Ergebnisse lassen sich dadurch aber bei schwach ungleichförmigen, elektrisch langen Leitungen erreichen.

Das *Euler*-Verfahren eignet sich aufgrund des relativ großen Fehlers und der hohen notwendigen Segmentanzahl nur für elektrisch kurze Leitungen, für die die Näherung konzentrierter Elemente aber nicht mehr anwendbar ist. Für eine hinreichende Genauigkeit der Lösung sind mehrere tausend Segmente je Wellenlänge nötig. Trotzdem ist diese Methode von Interesse, z.B. bei der Untersuchung elektrisch kurzer Leitungen und damit geringer Anzahl notwendiger Segmente, bei statistischen Analysen und zur Abschätzung von Grenzwerten, da der numerische Aufwand und damit die Rechenzeit je Segment sehr gering sind.

Das Trapezverfahren und andere Verfahren 2. Ordnung sind für Probleme mit geringen bis mittleren Genauigkeitsanforderungen geeignet, wobei Verfahren mit Inversion aus Rechenzeitgründen möglichst vermieden werden sollten, da der Zeitaufwand für Verfahren mit Matrizeninversion sich in der Größenordnung des *Runge-Kutta*-Verfahrens 4. Ordnung bewegt. Sehr gute Ergebnisse in Hinblick auf die Genauigkeit des Ergebnisses und die Rechenzeiten können mit dem *Runge-Kutta*-Verfahren 4. Ordnung und der Rekursionsformel bei linearer Interpolation bzw. Potenzreihenentwicklung erreicht werden.

Sollen beliebige, ungleichförmig geführte, elektrisch lange Leitungen untersucht werden, stellen die Rekursionsformel (3.30) oder bei höherer Approximationsordnung der Matrizenfunktion die Potenzreihenentwicklung (3.58) ein Optimum dar. Ein Vorteil ist die hohe erreichbare Genauigkeit. Die Reihe konvergiert sicher, sofern die Segmente kleiner als die doppelte Wellenlänge bleiben. Ein weiterer Vorteil sind die Kenntnis des Fehlers und die entfallende Schrittweitensteuerung, da die Reihe bei erreichter Genauigkeit abgebrochen wird. Andererseits kann kein exakter numerischer Aufwand angegeben werden, da nicht feststeht, nach wie vielen Gliedern die Reihe für einen konkreten Fall abgebrochen werden kann. In allen untersuchten Fällen erwies sich das *Runge-Kutta*-Verfahren als numerisch aufwendiger und damit langsamer.

In Abbildung 3.4 sind beispielhaft die benötigte Rechenzeit und der relative Fehler des Matrizen einer Fünffachleitung dargestellt. Deutlich ist die Verringerung des Fehlers mit zunehmender Anzahl der Segmente gemäß der Fehlerordnung des jeweiligen Verfahrens zu sehen. Das Ansteigen des Fehlers für die Integrationsverfahren bei einer extrem großen Segmentanzahl je Wellenlänge ist mit der endlichen numerischen Genauigkeit der Fließkommazahlen zu erklären. Bei dem Verfahren der Rekursionsformel (3.30) wird die Segmentanzahl nicht vergrößert, da hierbei die Diskretisierung für die Darstellung der Matrizenfunktion  $\bar{\mathbf{R}}^x(z)$  ausreichend genau ist. Für dieses konkrete Beispiel ist die Rekursionsformel (3.30) die effizienteste und genaueste Methode. Die Abbruchschranke der Reihe war auf einen Wert von  $1e^{-12}$  gesetzt, bei größeren Werten beschleunigt sich die Berechnung. Das *Runge-Kutta*-Verfahren liefert im Beispiel auch den exakten Wert, benötigt aber eine längere Rechenzeit für identische Genauigkeiten, die in etwa eine Größenordnung über der Rechenzeit mit der Rekursionsformel liegen.

### 3.3 Beispiel für ein Netzwerk aus ungleichförmigen Leitungen

In den vorhergehenden Abschnitten wurden verschiedenste Lösungsverfahren für verallgemeinerte Leitungsgleichungen mit ortsabhängigen Parametern, die zur Darstellung ungleichförmiger Leitungen nötig sind, vorgestellt. Ziel ist es nun, diese Lösung für eine ungleichförmige Leitung in einem Netzwerk aus solchen (und ggf. gleichförmigen) Leitungen zu integrieren, um die Ausbreitung von Nutz- und Störsignalen in diesem Netzwerk zu beschreiben.

Um die vorgestellte Verfahrensweise zu demonstrieren, wird ein einfaches Netzwerk bestehend aus drei ungleichförmigen Leitungen betrachtet. Der erste Leitungsabschnitt (*tube 1*) besteht aus einer im Uhrzeigersinn verdrehten Dreifachleitung, der zweite (*tube 2*) aus einer wellig verlegten Zweifachleitung und der Dritte (*tube 3*) aus einer um  $45^\circ$  abgelenkten Einfachleitung. Alle Leitungen sind über einer leitenden Ebene angeordnet, die auch die Referenz darstellt. Die Koordinaten der Leitungsadern als Funktion von  $z$  berechnen sich als

$$\begin{array}{l}
 \bullet \text{ tube 1 -} \\
 \left. \begin{array}{l}
 \text{Ader 1 : } \begin{array}{l} x_1(z) = [-5 - 5 \cdot \cos(3 \cdot 2\pi \frac{z}{1m})] \text{ mm} \\ h_1(z) = [10 + 8 \cdot \sin(3 \cdot 2\pi \frac{z}{1m})] \text{ mm} \end{array} \\
 \text{Ader 2 : } \begin{array}{l} x_2(z) = 0 \text{ mm} \\ h_2(z) = 10 \text{ mm} \end{array} \\
 \text{Ader 3 : } \begin{array}{l} x_3(z) = [5 + 5 \cdot \cos(3 \cdot 2\pi \frac{z}{1m})] \text{ mm} \\ h_3(z) = [10 - 8 \cdot \sin(3 \cdot 2\pi \frac{z}{1m})] \text{ mm} \end{array}
 \end{array} \right\} \\
 \\
 \bullet \text{ tube 2 -} \\
 \left. \begin{array}{l}
 \text{Ader 1 : } \begin{array}{l} x_1(z) = 0 \text{ mm} \\ h_1(z) = [10 + 8 \cdot \sin(4 \cdot 2\pi \frac{z}{3m})] \text{ mm} \end{array} \\
 \text{Ader 2 : } \begin{array}{l} x_2(z) = 10 \text{ mm} \\ h_2(z) = [10 + 8 \cdot \sin(4 \cdot 2\pi \frac{z}{3m})] \text{ mm} \end{array}
 \end{array} \right\} \\
 \\
 \bullet \text{ tube 3 - Höhe des Leiters über der Ebene } h_1(z) = 10 \text{ mm.}
 \end{array}$$

Alle Leitungen sind über einer ideal leitenden Ebene angeordnet und an den Enden mit 50 Ohm Widerständen gegen Masse abgeschlossen. Das Netzwerk wird durch eine 1 Volt Spannungsquelle an der ersten Ader am Anfang des ersten *tubes* gespeist. Die Geometrie und das zugehörige topologische Netzwerk sind in Abbildung 3.5 skizziert.

Zur Lösung des gesamten Netzwerkes werden die Parameter der ungleichförmigen Leitungen in den verschiedenen *tubes* in der statischen Näherung berechnet. D.h. die Methoden und Formeln der klassischen Leitungstheorie werden benutzt, um die ortsabhängigen Leitungsbeläge zu bestimmen, die aufgrund der variierenden Abstände und Höhen entstehen. Zur Lösung der Leitungsgleichungen wird dann für die ungleichförmigen Leitungen eine der vorgestellten Methoden aus den vorherigen Abschnitten verwendet. Die Ergebnisse für den Matrizen transformiert man im Anschluss zu Propagationparametern, äquivalenten Streuparametern oder Admittanzparametern mit den jeweiligen Quellgrößen, je nach im Anschluss verwendeter Netzwerkdarstellung. Dabei werden die Transformationsvorschriften aus den Abschnitten

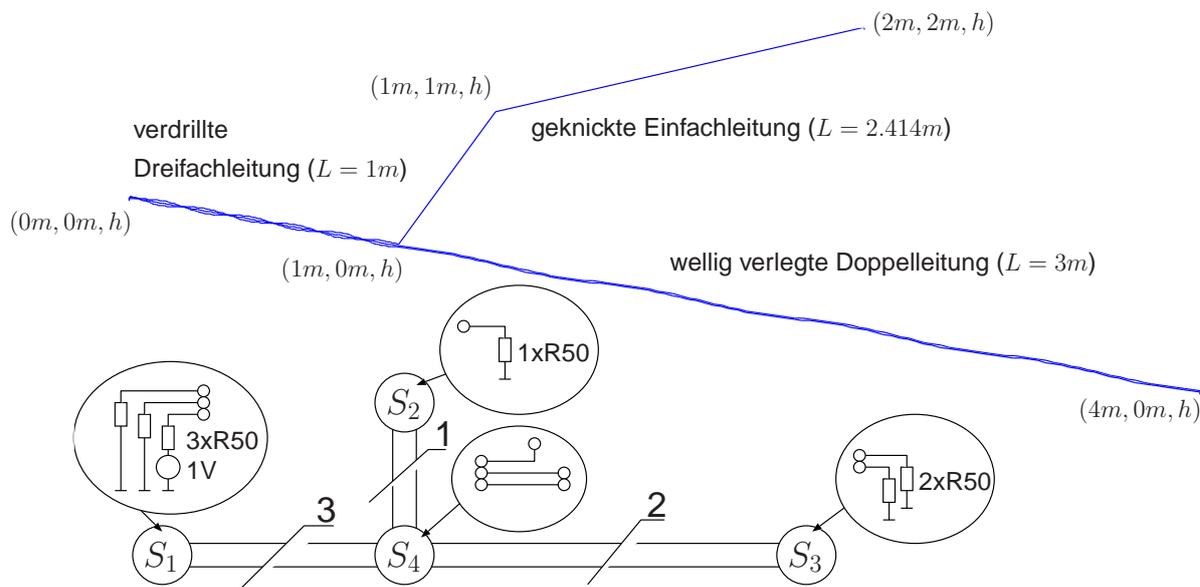


Abbildung 3.5: Ungleichförmiger Kabelbaum und korrespondierendes topologisches Netzwerk

2.3.1, 2.3.2 und 2.3.3 benutzt. Bei der Transformation des Matrizen in das Wellenbild muss auf die Verwendung der richtigen Transformationsmatrix geachtet werden

$$\overline{\mathbf{M}}^w = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{Z}_c(L) \\ \mathbf{E} & -\mathbf{Z}_c(L) \end{bmatrix} \overline{\mathbf{M}}^{vi} \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{Z}_c(0) \\ \mathbf{E} & -\mathbf{Z}_c(0) \end{bmatrix}^{-1}, \quad (3.157)$$

da bei ungleichförmigen Leitungen die Wellenwiderstände am Anfang der Leitung von denen am Ende der Leitung differieren können. Abschließend wird die BLT 1, BLT 2 oder die Gleichung in der Admittanzdarstellung aufgestellt und nach den unbekanntenen Größen gelöst. Für dieses Beispiel wurde die BLT Gleichung in der Admittanzdarstellung verwendet.

In Abbildung 3.6 und 3.7 sind einige Ergebnisse dieser Berechnung im Vergleich mit den Ergebnissen der Momentenmethode<sup>§</sup> als *full wave* Methode und den Ergebnissen der herkömmlichen Leitungstheorie für gleichförmige Leitungen zu sehen. Wichtig ist hier insbesondere die signifikante Erhöhung des Fernübersprechens im Vergleich zur Annahme gleichförmiger Leitungen auch bei verhältnismäßig tiefen Frequenzen (siehe Abbildung 3.7). Auch kann die Dämpfung des Signals im Frequenzbereich von 300 bis 600 MHz ein Problem für das Design des Kabelbaumes darstellen, wenn die Nutzfrequenz in diesem Bereich liegt, andererseits werden EMV-relevante Resonanzüberhöhungen, wie sie bei 200 MHz auftreten, stark unterschätzt (siehe Abbildung 3.6). Dieses Beispiel zeigt deutlich, dass die Ungleichförmigkeit der Leitungsführung in komplexen Verbindungsstrukturen berücksichtigt werden muss, um die relevanten Effekte in Bezug auf die Übertragungseigenschaften einzuschließen.

Die Übereinstimmung mit den Ergebnissen der Momentenmethode bei höheren Frequenzen kann noch verbessert werden, indem die Leitungsbeläge mit Hilfe der TLST [25, 23] bestimmt

<sup>§</sup>Hier wurde das Programmpaket CONCEPT des Arbeitsbereiches Theoretische Elektrotechnik der TU Hamburg-Harburg verwendet.

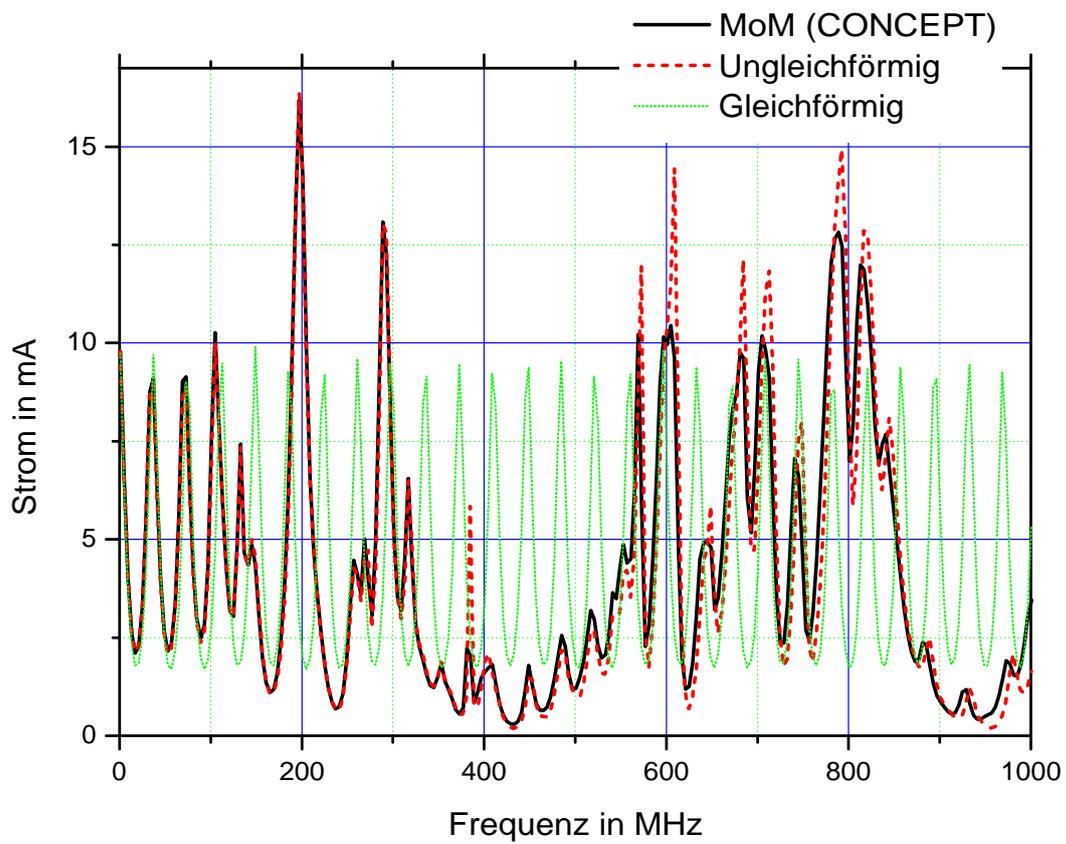


Abbildung 3.6: Betrag des Stromes am gespeisten Ende von *tube 3* (Signalübertragung)

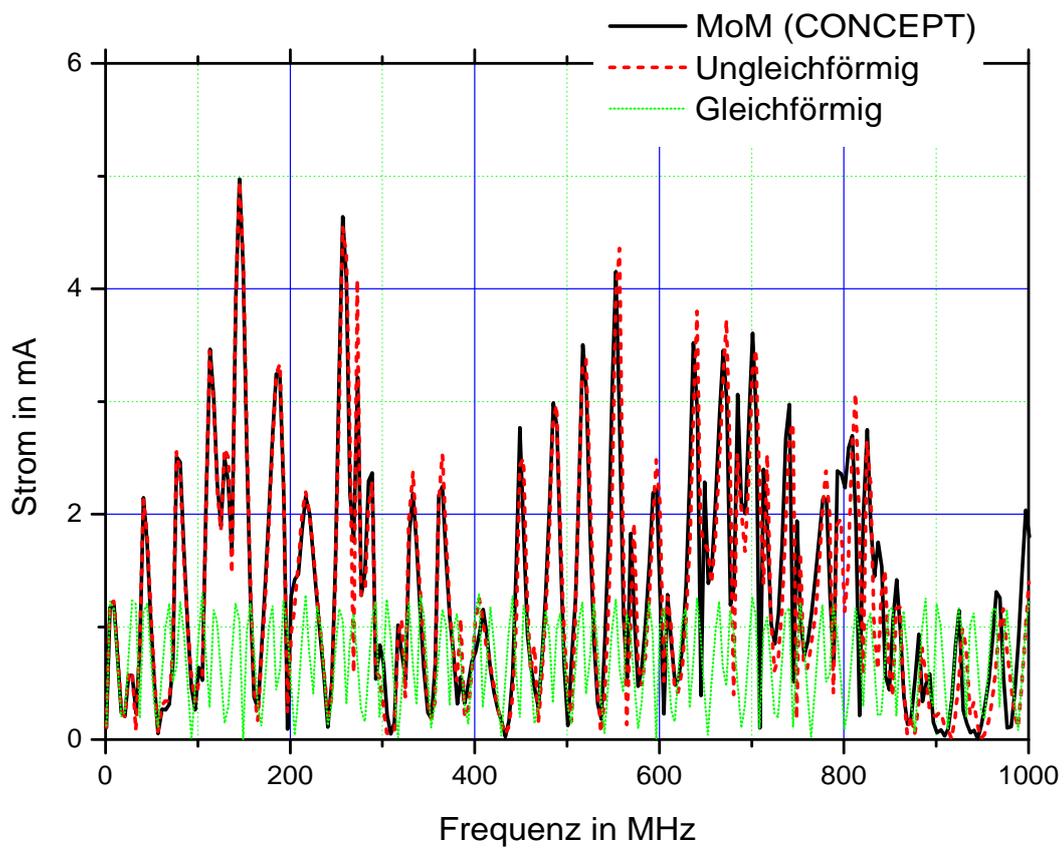


Abbildung 3.7: Betrag des übergekoppelten Stromes am fernen Ende von *tube 2* (Fernüber-sprechens)

werden. Die Berechnung der Ergebnisse für 501 Frequenzpunkte mittels der Momentenmethode dauerte ca. 40 Minuten. Der Zeitaufwand für die Berechnung der Admittanzmatrizen der einzelnen *tubes* und für das Lösen des topologischen Netzwerkes (Dimension des Systemmatrix  $n_S = 12$ ) betrug jeweils unter einer Minute.

An diesem Beispiel zeigt sich deutlich, dass mit der topologischen Methode nicht nur Ergebnisse erreicht werden können, die mit den Ergebnissen numerischer Feldberechnungsverfahren übereinstimmen. Bei der Verwendung des topologischen Ansatzes gewinnt man auch einige Vorteile:

- Zerlegung eines großen Problems in mehrere kleinere Teilprobleme. Diese können schneller und mit den für das jeweilige Teilproblem am besten geeigneten feldnumerischen Verfahren berechnet werden. So gesehen entsteht ein Hybridverfahren, mit dem verschiedene numerische Methoden und auch Messergebnisse im topologischen Netzwerk verknüpft werden können.
- Bei Veränderung eines Kabelbaumabschnittes müssen nur die Parameter für diesen *tube* neu berechnet, und das Netzwerk neu gelöst werden. Dies ist gerade bei komplexen Systemen deutlich schneller durchzuführen, als eine komplett neue feldnumerische Simulation des Problems, wie es beispielsweise bei der Momentenmethode notwendig wäre.
- Parameter von Teilsystemen können in Datenbanken gespeichert und später wiederverwendet werden.

Beachten muss man, dass die Kopplung im Netzwerk nur über die definierten Tore realisiert wird. Direkte Kopplungen zwischen den *tubes* und *junctions* – außer an den Toren – werden im Ansatz vernachlässigt. Dies ist aber im Sinne der EMT auch so gewollt. Soll hingegen eine Wechselwirkung berücksichtigt werden, muss sie in das Netzwerk eingebaut werden. Darin unterscheidet sich die EMT prinzipiell von feldnumerischen Methoden. Während in diesen grundsätzlich alle Wechselwirkungen zwischen den Diskretisierungselementen gemäss der *Maxwellschen* Gleichungen berücksichtigt sind, werden bei der EMT bewusst Wechselwirkungen im Netzwerk berücksichtigt oder eben auch vernachlässigt.

## Kapitel 4

# Zufällig geführte, ungleichförmige Mehrfachleitungen

In den vorangegangenen Kapiteln wurden deterministische Probleme untersucht. Dabei wird vorausgesetzt, dass die geometrische Anordnung der einzelnen Adern der Mehrfachleitung entlang des Parameters  $z$  bekannt ist. Untersucht man allerdings Leitungsstrukturen in komplexen Systemen über eine Reihe von Einzelobjekten, zum Beispiel aus der Massenfertigung, so stellt man fest, dass gerade die Anordnung der Einzeladern der Verkabelung starken Schwankungen unterliegt bzw. gänzlich unbekannt ist. Genauer betrachtet, ist die Lage nur an den Enden, zum Beispiel aufgrund von Steckverbindern, fixiert. Dazwischen ist die konkrete Anordnung der Adern der Mehrfachleitungen stark von Fertigungstoleranzen abhängig. Auch wenn in komplexen Systemen im zunehmenden Maße Flachbandkabel o.ä. Technologien, bei denen die Abstände der Einzeladern weitestgehend fixiert sind, als Verbindungsstrukturen zum Einsatz kommen, existieren Anwendungsfälle, bei denen Kabelbäume eingesetzt werden, die in die Klasse der zufällig assemblierten Leitungsführung fallen. Dies geschieht aus Kostengründen und immer dann, wenn unterschiedliche technische Anforderungen (z.B. Strombelastbarkeit, Übertragungsbandbreite) an die einzelnen Übertragungsleitungen gestellt werden. Man stelle sich hier beispielsweise ein Flugzeug oder KFZ vor, bei dem zum einen Energieversorgungsleitungen und zum anderen Steuer- und Datenleitungen in einem gemeinsamen Kabelweg verlegt sind. In diesen „klassischen“ Kabelbäumen werden die Einzeladern durch Kabelbinder oder -halter fixiert. Meist geschieht dies nur in bestimmten Abständen entlang des Kabelbaumes. Dazwischen kann und wird die relative Position der Adern untereinander zufällig variieren und ist zumeist eine unbekannte und unzugängliche Größe. Zwei gefertigte Kabelbäume aus einer Produktionsserie können so unterschiedliche Übertragungseigenschaften aufweisen, obwohl sie insbesondere bei der Beurteilung der EMV (z.B. auf der Grundlage von Messungen) als identisch angenommen wurden. Zwei Beispiele für industriell vorgefertigte Kabelbäume sind in Abbildung 4.1 zu sehen. Es wird dabei sicherlich deutlich, dass die Positionen der einzelnen Adern normalerweise nicht bekannt sind.

Die Vermutung ist nahe liegend, dass dies Ursache für Schwankungen von Mess- und Testergebnissen bei EMV-Untersuchungen (insbesondere bei hohen Frequenzen) an Produktserien sind. Daher stellt sich die Frage, welchen Einfluss hat die konkrete Verkabelung auf die EMV eines Untersuchungsobjektes und welchen Wert haben EMV-Untersuchungen an einem Ein-

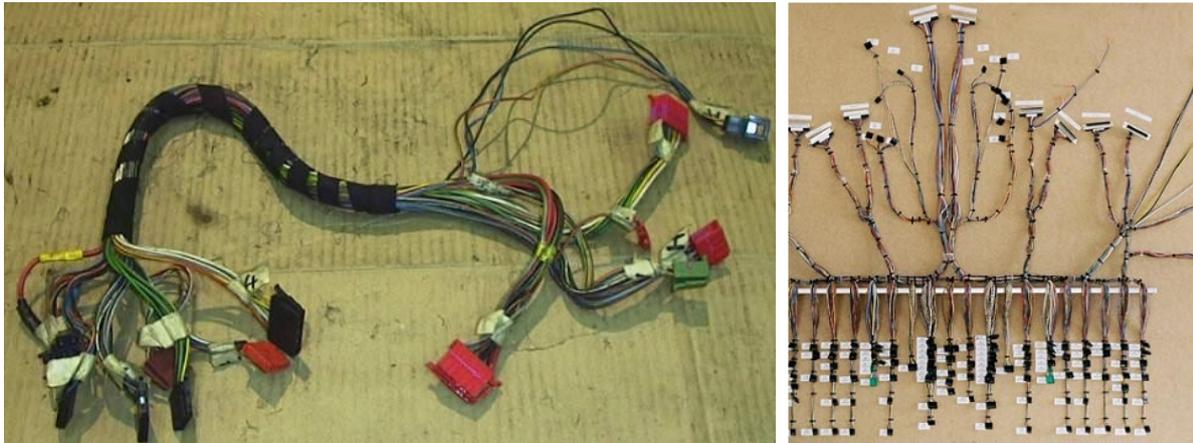


Abbildung 4.1: Zwei Beispiele für vorgefertigte Kabelbäume.

zelobjekt?

Berücksichtigt man diese Fragen, kommt man zwangsläufig zu einem statistischen Problem, welches an die Stelle des exakten, deterministischen Problems der ungleichförmigen Leitung tritt. In [60] werden die zufällig ungleichförmig verlegten Kabel als Ursache für die Abweichungen zwischen Messungen und Simulationsrechnungen vermutet. Erste Überlegungen zu Einflussparametern, wie Fertigungstoleranzen und zufällige Lage von Leitungen, auf die EMV-Simulation und EMV-Messung in der KFZ-Technik wurden auch in [61] unternommen, bleiben dabei allerdings auf gleichförmige Leitungsstrukturen beschränkt.

Die direkte Bestimmung der Verteilungsfunktionen der EMV-relevanten Größen würde die statistische Fragestellung erschöpfend beantworten. Aufgrund der komplexen mathematischen Zusammenhänge ist deren Ableitung meist nicht möglich.

Eine andere Möglichkeit wäre die Durchführung einer stochastischen Simulation, um auf der Basis einer großen Anzahl von Realisierungen statistische Ergebnisse zu erlangen. Die Idee der Methode basiert auf der deterministischen, numerischen Simulation von mehreren Realisierungen. Diese verschiedenen Realisierungen spiegeln die zufällige Verteilung der zugehörigen physikalischen Parameter wider. Die Ergebnisse der deterministischen Berechnungen über die Population werden dann benutzt, um statistische Aussagen wie z.B. Verteilungsfunktionen zu erlangen. Diese Methode ist eine sehr vielseitige Methode, welche auch dann zu Ergebnissen führt, wenn andere wahrscheinlichkeitstheoretische Berechnungsverfahren nicht erfolgreich angewendet werden können. Nachteil ist die durchaus langwierige Berechnung der deterministischen Lösungen über die Population. Weiterhin ermöglicht die stochastische Simulation nur die Untersuchung eines Auszuges aus dem gesamten Wahrscheinlichkeitsraum, wohingegen wahrscheinlichkeitstheoretische Methoden diesen stets komplett umfassen. Zwar können durch eine erweiterte statistische Analyse der Ergebnisse der stochastischen Simulation Fehlertoleranzen angegeben werden, allerdings nur auf Kosten mehrfacher Simulationen und damit auf Kosten der Rechenzeit.

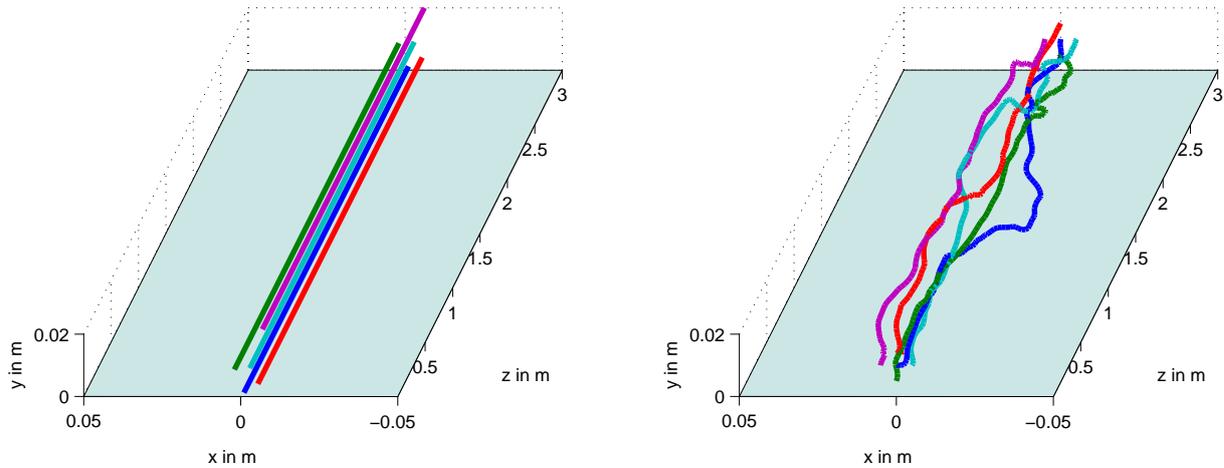


Abbildung 4.2: Vergleich von gleichförmiger und ungleichförmiger, zufälliger Leitung. Links eine gleichförmige Leitung mit zufälligem Querschnitt und rechts eine ungleichförmige, zufällige Leitung.

## 4.1 Zufällige Parameter bei gleichförmiger Leitungsführung

Zur Abgrenzung der folgenden Kapitel sei an dieser Stelle auf den Unterschied zwischen der zufälligen ungleichförmigen Leitungsführung von Kabeln und der gleichförmigen Leitungsführung mit zufälligen Querschnitten hingewiesen. Während im ersten Fall die Matrizenfunktion der Leitungsparameter eine zufällige Funktion des Ortes  $z$  ist, ist diese im zweiten Fall konstant über  $z$  (siehe Abbildung 4.2).

Mit einigen vereinfachenden Annahmen können für bestimmte gleichförmige Einfach- und Mehrfachleitungen analytische Berechnungsformeln für die Leitungsbeläge angegeben werden (beispielsweise Anhang in [32]). Es existiert damit ein funktionaler Zusammenhang

$$\{\mathbf{L}', \mathbf{C}'\} = g_1(p_1, \dots, p_n), \quad (4.1)$$

der die Leitungsbeläge in Abhängigkeit von den geometrischen Charakteristika  $p_1 \dots p_n$  beschreibt. Durch die existierende analytische Lösung der gleichförmigen Leitung kann dieser Zusammenhang auf die interessierenden Ergebnisgrößen ausgeweitet werden

$$x = g_2(\{\mathbf{L}', \mathbf{C}'\}) = g_2(g_1(p_1, \dots, p_n)). \quad (4.2)$$

Beispiele für die Größe  $x$  sind Wellenwiderstand, Eingangsimpedanz, Reflektionsfaktor, Spannungen und Ströme an den Enden der Leitung oder Überkoppel- und Übertragungsfaktoren. Dabei werden komplexe Größen getrennt nach Real- und Imaginärteil bzw. Betrag und Phase behandelt.

Entscheidend dabei ist eine analytische Beschreibung der gesuchten Größe als Funktion der zufälligen Parameter. Mit dieser und den stochastischen Eigenschaften der geometrischen Parameter  $p_1 \dots p_n$ , beschrieben durch die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion, kann daraus

die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der relevanten Ausgangsgröße ermittelt werden.

Dabei können zwei Fälle von Wahrscheinlichkeitstransformationen auftreten. Beim ersten ist ein funktioneller Zusammenhang

$$y(\gamma) = g(x(\gamma)) \quad (4.3)$$

zwischen den zwei zufälligen Variablen  $x(\gamma)$  und  $y(\gamma)$  gegeben. Um ausgehend von der Wahrscheinlichkeitsdichte der zufälligen Variablen  $x(\gamma)$  die der Variablen  $y(\gamma)$  zu berechnen, müssen alle Lösungen  $x_1 \dots x_n$  der Gleichung (4.3) bestimmt werden. Die Wahrscheinlichkeitsdichte der zufälligen Variablen  $y(\gamma)$  ergibt sich dann als

$$f_y(y) = \sum_{i=1}^n \frac{f_x(x_i)}{\left| \frac{dg}{dx}(x_i) \right|}. \quad (4.4)$$

Im zweiten Fall ist die gesuchte zufällige Größe eine Funktion von zwei zufälligen Größen

$$z(\gamma) = g(x(\gamma), y(\gamma)). \quad (4.5)$$

Die Wahrscheinlichkeitsdichte der zufälligen Variablen  $z(\gamma)$  berechnet sich dann aus

$$f_z(z) = \frac{d}{dz} \iint_{x,y \in D_z} f_{xy}(x, y) dx dy, \quad (4.6)$$

wobei  $D_z$  den Bereich der  $xy$ -Ebene darstellt, in dem  $g(x(\gamma), y(\gamma)) \leq z$  gilt. Einige Beispiele für verschiedene Verknüpfungsfunktionen sind in [62] zu finden. Ist die gesuchte zufällige Größe von mehr als zwei zufälligen Größen abhängig, muss das Verfahren mehrfach hintereinander angewendet werden, d.h. erst werden zwei Größen zusammengefasst, die Resultierende wiederum mit einer Weiteren und so fort.

Die Vorgehensweise soll an einem einfachem Beispiel verdeutlicht werden. Betrachtet wird eine Einfachleitung in Luft über einer leitenden Ebene. Für diese berechnet sich der Wellenwiderstand  $Z_c$  und der Reflektionsfaktor  $r$  an einer angeschlossenen Last  $Z_L$  wie folgt

$$Z_c = \sqrt{\frac{L'}{C'}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{2\pi} \operatorname{arccosh} \left( \frac{2h}{d} \right) \quad (4.7)$$

$$r = \frac{Z_L - Z_c}{Z_L + Z_c}. \quad (4.8)$$

Bestimmt werden sollen die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilungen von  $Z_c$  und  $r$  bei einer gegebenen Verteilung der zufälligen Höhe  $h$ , d.h. der Einfluss einer zufälligen Veränderung der Höhe. Unter Verwendung der Gleichung(4.4) ergibt sich

$$f_{Z_c} = f_h \left( \frac{d}{2} \cosh \left( \frac{Z_c}{60 \Omega} \right) \right) \frac{d \sqrt{\left( \cosh \left( \frac{Z_c}{60 \Omega} \right) \right)^2 - 1}}{120 \Omega} \quad (4.9)$$

$$f_r = f_h \left( \frac{d}{2} \cosh \left( \frac{Z_L \frac{1-r}{1+r}}{60 \Omega} \right) \right) \frac{d \sqrt{\left( \cosh \left( \frac{Z_L \frac{1-r}{1+r}}{60 \Omega} \right) \right)^2 - 1}}{120 \Omega} \frac{Z_L \left( 1 + \frac{1-r}{1+r} \right)^2}{2} \quad (4.10)$$

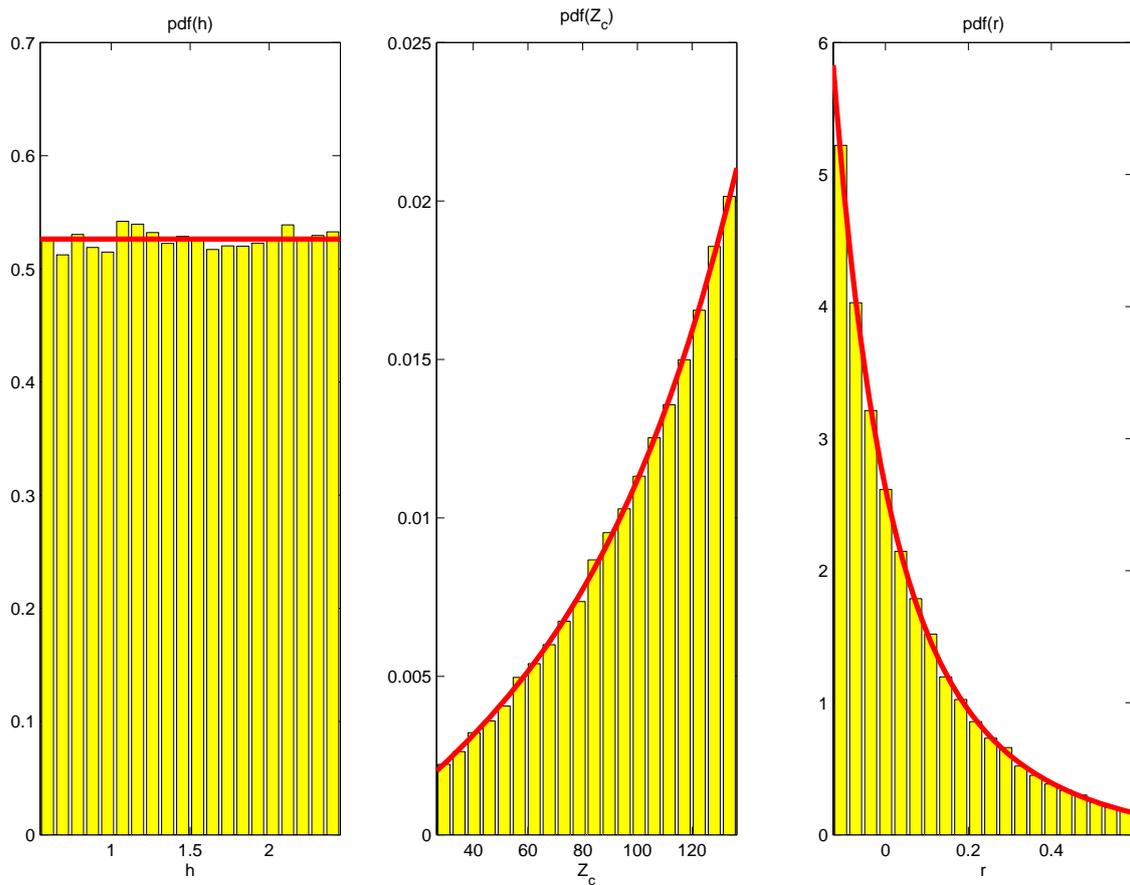


Abbildung 4.3: Die berechneten Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen (Linie) im Vergleich zu den Werten der stochastischen Simulation (Histogramm) mit 100000 Werten. Angenommen wurde eine Gleichverteilung von  $h$  mit  $f_h = U[h_1, h_2]$  mit  $h_1 = 0.55$  mm und  $h_2 = 2.45$  mm. Weitere Parameter sind  $d = 1$  mm und  $Z_L = Z_c(\frac{h_1+h_2}{2})$ .

Für ein Beispiel sind die Wahrscheinlichkeitsdichten in Abbildung 4.3 im Vergleich zu einer stochastischen Simulation dargestellt. Deutlich ist die Veränderung der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion zu sehen.

Ist nicht nur die Höhe über der leitenden Ebene eine Zufallsgröße, sondern auch der Drahtdurchmesser, so muss die Beziehung (4.6) angewendet werden. Dazu substituiert man  $v = \frac{h}{d}$  und berechnet die Wahrscheinlichkeitsdichte nach [62] als

$$f_v = \int_{d=0}^{\infty} d f_h(vd) f_d(d) dd. \quad (4.11)$$

Unter der Annahme einer Gleichverteilung für beide Zufallsgrößen  $h$  mit  $f_h = U[h_1, h_2]$  und  $d$  mit  $f_d = U[d_1, d_2]$  erhält man

$$f_v = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & : v < \frac{h_1}{d_2} \\ \frac{1}{2} \frac{1}{h_2 - h_1} \frac{1}{d_2 - d_1} \left[ \min(d_2, \frac{h_2}{v})^2 - \max(d_1, \frac{h_1}{v})^2 \right] & : \frac{h_1}{d_2} \leq v \leq \frac{h_2}{d_1} \\ 0 & : v > \frac{h_2}{d_1} \end{array} \right\}, \quad (4.12)$$

und daraus resultierend

$$f_{Z_c} = f_v \left( v = \frac{1}{2} \cosh \left( \frac{Z_c}{60 \Omega} \right) \right) \frac{\sqrt{4 \left( \frac{1}{2} \cosh \left( \frac{Z_c}{60 \Omega} \right) \right)^2 - 1}}{120 \Omega} \quad (4.13)$$

$$f_r = f_{Z_c} \left( Z_c = Z_L \frac{1-r}{1+r} \right) \frac{Z_L \left( 1 + \frac{1-r}{1+r} \right)^2}{2}. \quad (4.14)$$

In Abbildung 4.4 ist ein Beispiel unter der Annahme von Gleichverteilungen für  $d$  und  $h$  dargestellt.

Die für dieses einfache Beispiel doch recht umfangreichen Formeln lassen erahnen, wie komplex die Ausdrücke für anspruchsvollere Probleme werden. Hinzu kommt das Problem der Bestimmung der Integrale, welche oft nicht geschlossen gelöst werden können.

## 4.2 Stochastische Simulation

Das Modell für eine gleichförmige Leitung mit zufälligem Querschnitt ist nicht ausreichend, um die statistischen Eigenschaften einer zufällig verlegten Leitung zu bestimmen. Eine reale zufällige Leitungsstruktur wird eine verteilte Streuung entlang des Ausbreitungsweges aufweisen, wobei dieser Effekt zwangsläufig bei der gleichförmigen Leitung nicht auftritt. Somit müssen die Matrizen der Leitungsbeläge als eine *zufällige* Funktion des Ausbreitungsweges  $z$  betrachtet werden.

Eine mögliche Herangehensweise ist die Durchführung einer stochastischen Simulation der Leitungsstruktur. Diese beruht auf der wiederholten Berechnung eines deterministischen Problems, welches zufälligen Änderungen unterworfen wird. Der Begriff *Stochastische Simulation* wird bewusst zur Abgrenzung zur *Monte-Carlo-Methode* verwendet. Während bei der

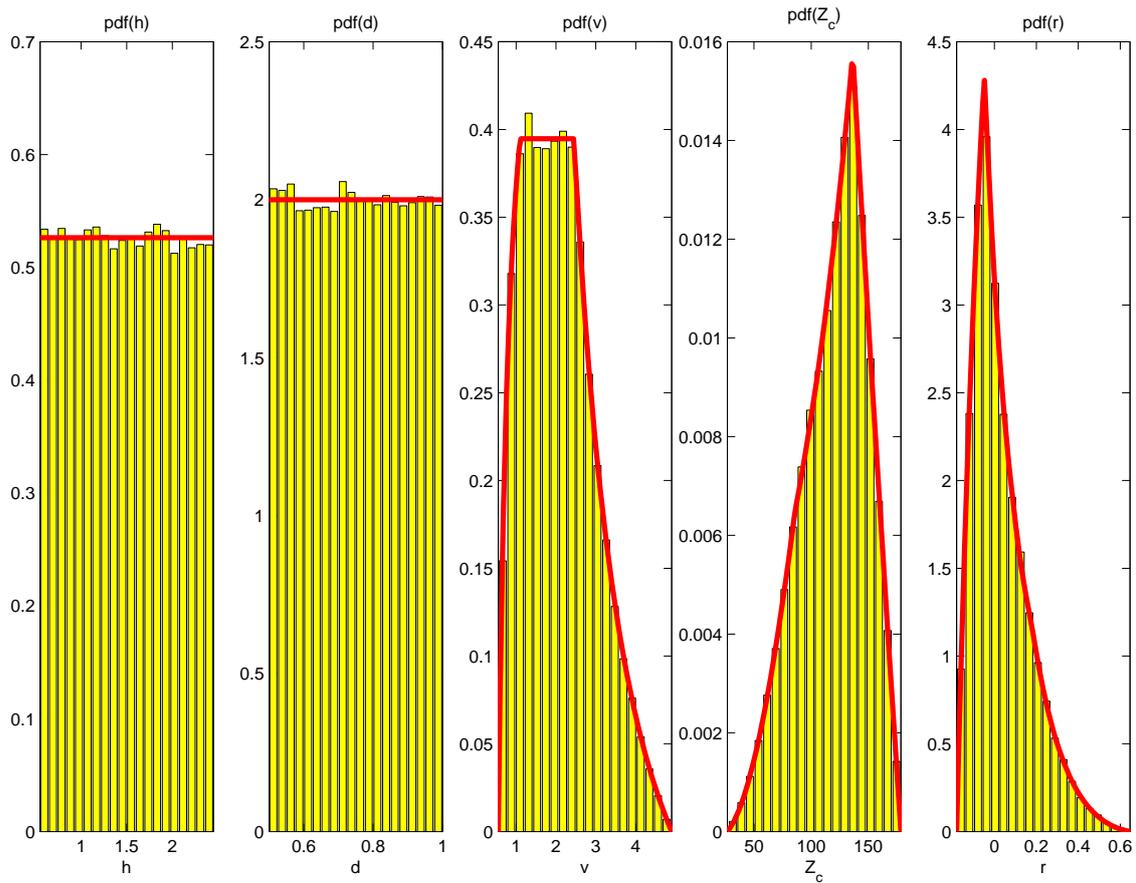


Abbildung 4.4: Die berechneten Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen (Linie) im Vergleich zu den Werten der stochastischen Simulation (Histogramm) mit 100000 Werten. Angenommen wurde eine Gleichverteilung von  $h$  und  $d$  mit  $h_1 = 0.55$  mm,  $h_2 = 2.45$  mm,  $d_1 = 0.5$  mm und  $d_2 = 1.0$  mm, sowie  $Z_L = Z_c(\frac{h_1+h_2}{2})$ .

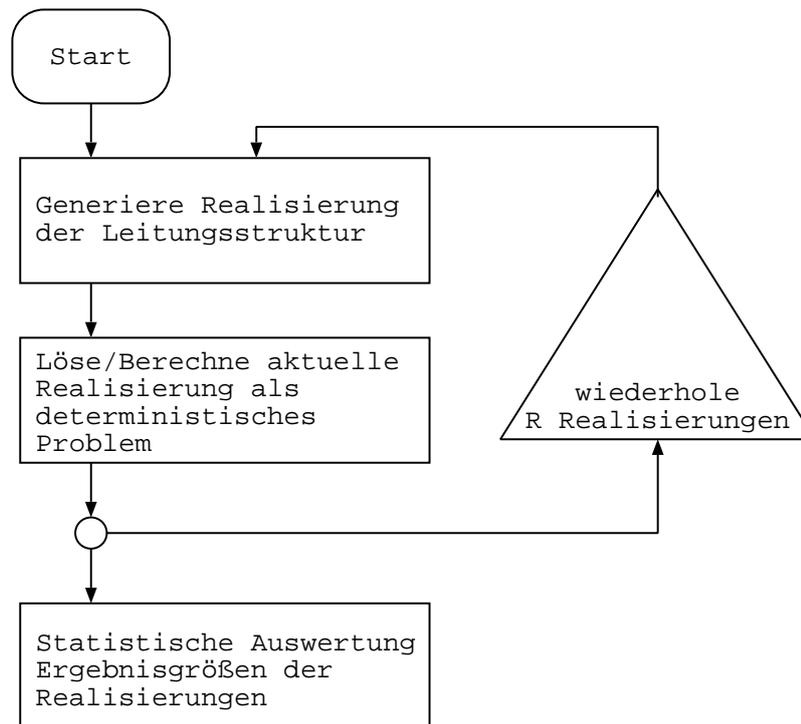


Abbildung 4.5: Ablaufdiagramm zur stochastischen Simulation

*Monte-Carlo*-Methode ein deterministisches System durch ein stochastisches Modell dargestellt und untersucht wird (siehe beispielsweise *Monte-Carlo*-Integration oder Bestimmung der Kreiszahl  $\pi$  mittels der *Monte-Carlo*-Methode), wird bei der stochastischen Simulation ein deterministisches Modell eines Systems – hier der Leitungen – mit einer stochastischen Komponente analysiert. Die stochastische Komponente entsteht dabei durch die „Unwissenheit“ über die genaue Lage der einzelnen Adern.

Durch geeignete Methoden wird eine konkrete Ausgestaltung einer ungleichförmigen Mehrfachleitung erzeugt. Man spricht von einer (möglichen) Realisierung der Leitungsstruktur. Eine Menge von  $R$  Realisierungen bezeichnet man als Population. Über eine Population können mit statistischen Mitteln Aussagen über stochastische Eigenschaften einer Leitungsstruktur getroffen werden, beispielsweise Mittelwerte, Standardabweichungen oder Approximationen der Verteilungsfunktionen. Die prinzipielle Vorgehensweise ist in Abbildung 4.5 gezeigt. Die erzeugten ungleichförmigen Leitungsstrukturen werden beispielsweise mit den im Kapitel 3.2 aufgezeigten Lösungsmethoden möglichst effizient behandelt.

Die Erzeugung von einer geeigneten Population ungleichförmiger Leitungen stellt dabei den wichtigsten Schritt für die stochastische Simulation dar. Es wird dabei nicht möglich sein, den kompletten Wahrscheinlichkeitsraum aller möglichen realen Leitungsgeometrien abzudecken und in die Populationen einzubeziehen. Entscheidend ist dabei, dass ein repräsentativer Auszug abgebildet wird, der eine statistische Auswertung ermöglicht. Die Frage, wie

Tabelle 4.1: einige Beispiele zur Berechnung der aktuellen Segmentlänge gemäß einer Verteilungsfunktionen

Verteilung	Wahrscheinlichkeitsdichte	aktuelle Segmentlänge	Mittelwert
Gleich	$f_{\Delta z} = \begin{cases} 0 & : a < \Delta z \\ \frac{1}{b-a} & : a \leq \Delta z \leq b \\ 0 & : \Delta z > b \end{cases}$	$\Delta z_i = U[0, 1] (b - a) + a$	$\frac{a+b}{2}$
Exponential	$f_{\Delta z} = \lambda e^{-\lambda \Delta z}$	$\Delta z_i = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - U[0, 1])$	$\frac{1}{\lambda}$
Rayleigh	$f_{\Delta z} = \frac{\Delta z}{\sigma^2} e^{-\frac{\Delta z^2}{2\sigma^2}}$	$\Delta z_i = \sqrt{-2\sigma \ln(1 - U[0, 1])}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma$
Weibull	$f_{\Delta z} = \alpha \Delta z^{\beta-1} e^{-\alpha \frac{\Delta z^\beta}{\beta}}$	$\Delta z_i = \sqrt[\beta]{-\frac{\beta}{\alpha} \ln(1 - U[0, 1])}$	$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$

dieser beschaffen sein muss, und welche Algorithmen zu einem solchen führen, ist schwer zu beantworten, und die Antwort hängt auch von der konkreten zu untersuchenden Verbindungsstruktur ab.

### 4.2.1 Verfahren zur Populationsgewinnung

Im Folgenden werden Verfahren vorgestellt, mit denen Populationen gewonnen werden können. Dabei wird angenommen, dass die erzeugten Sets von Kabelgeometrien einen für die statistische Auswertung gültigen Auszug aus dem gesamten Wahrscheinlichkeitsraum darstellen.

Zwei grundsätzliche Methoden werden dabei im Folgenden beschrieben. Bei der abschnittsweise gleichförmigen Approximation einer zufälligen Mehrfachleitung wird diese in gleichförmige Abschnitte unterteilt, in denen die Adern parallel geführt sind. Verschiedene Methoden zur Anordnung der Adern in einem solchen Abschnitt werden dargelegt.

Bei der zweiten Methode werden zufällige Kurven im Raum für die Adermittelpunkte der Leitungsstruktur erzeugt. Hierfür werden für jede Ader zwei Koordinaten,  $x$  und  $y$ , als eine zufällige Funktion über dem Ausbreitungsweg  $z$  generiert. Die Position einer Ader im Raum ist damit eindeutig beschrieben. Die untersuchten Methoden konzentrieren sich daher auf die Erzeugung von Realisierungen eindimensionaler zufälliger Funktionen.

#### 4.2.1.1 Abschnittsweise gleichförmige Approximation

Eine Möglichkeit der Erzeugung ungleichförmiger Leitungsführungen ist die Zerlegung der Leitung in gleichförmige Segmente mit zufälliger Querschnittsanordnung der Adern. Dabei unterscheidet man zwischen Methoden mit konstanter und mit zufällig variierender Segmentlänge. Bei konstanter Segmentlänge wird diese vorgegeben, während bei variierender Segmentlänge für diese Verteilungsfunktionen vorgegeben werden, z.B. eine Gleich- oder Exponentialverteilung. Einige Berechnungsvorschriften für die Segmentlänge sind in Tabelle 4.1 angegeben. Dabei sollten nur Verteilungsfunktionen eingesetzt werden, die sicherstellen, dass ausschließlich positive Werte für die aktuelle Segmentlänge als Ergebnis geliefert werden.

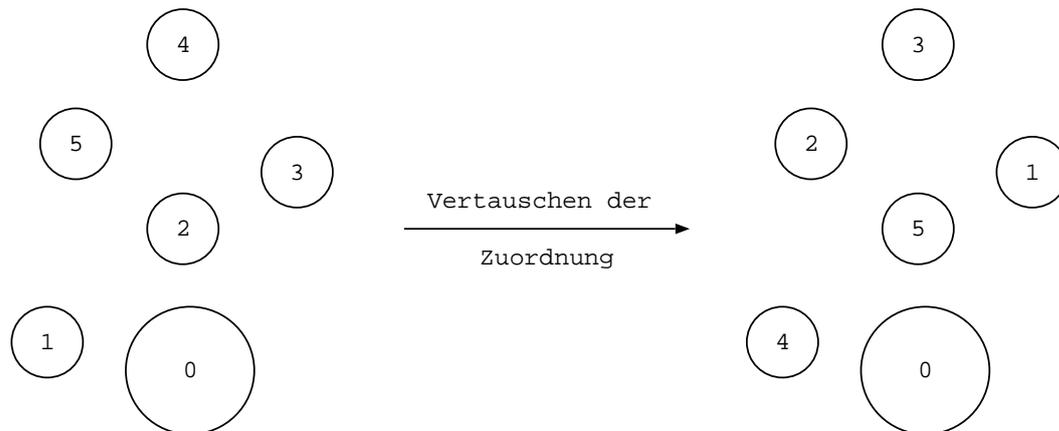


Abbildung 4.6: Vertauschen der Leiterzuordnung bei der Permutationsmethode

Ist die aktuelle Länge ermittelt, wird mit Packungsalgorithmen ein Leitungsquerschnitt generiert. An den Segmentenden werden die entsprechenden Leitungsadern elektrisch, aber nicht geometrisch, miteinander verbunden. Es entstehen dabei Stoßstellen an den Segmentgrenzen. Der Matrizenwert für ein Segment wird wie für eine gleichförmige Leitungsstruktur berechnet. Durch die Matrizenmultiplikation dieser Ergebnisse in der richtigen Reihenfolge ergibt sich dann die Lösung für die gesamte Leitung.

Neben der Bestimmung der aktuellen Segmentlänge sind die Packungsalgorithmen von entscheidender Bedeutung für die stochastische Beschreibung der Leitungsstruktur. Im folgenden sollen einige Verfahren vorgestellt werden. Ausgangspunkt für die Generierung der zufälligen Querschnittsanordnung der einzelnen Adern sind dabei die Mittelpunktslagen der Adern der gleichförmigen Leitung. Auf deren Basis werden neue Mittelpunktslagen berechnet bzw. die alten modifiziert.

Dabei beschränken sich die Erläuterungen auf runde Aderquerschnitte. Die Methoden lassen sich jedoch leicht auf Begrenzungspolynome ausweiten und somit auch für komplexere Aderquerschnitte und Adergruppierungen verwenden.

**Permutationsmethode** Bei der Permutationsmethode wird der vorgegebene Querschnitt immer beibehalten. Lediglich die Zuordnung der Adern zu einer Leiternummerierung wird vertauscht. Die Methode eignet sich folglich nur für Leitungsstrukturen mit einer Vielzahl identischer oder zumindest ähnlicher Adern, z.B. Adern mit gleichem Leiter- und Isolationsradius. Ein neuer, zufälliger Querschnitt entsteht durch Vertauschen (Permutieren) der Zuordnung von zwei Adern und deren Leiternummern. Dieser Vorgang kann auch mehrfach auf einen Querschnitt angewendet werden, so dass mehr als zwei Adern vertauscht werden. Das Verfahren ist in Abbildung 4.6 dargestellt. Ein ggf. vorhandener Referenzleiter (Nummer 0) wird dabei nicht getauscht. Beschreiben lässt sich dieser Vorgang mit Hilfe von Permutationsmatrizen. Sind die zugehörige Permutationsmatrix einer Vertauschung und die Leitungsbeläge

\ neu	1	...	$k$	...	$l$	...	$n$
alt			↑		↑		
1	1	...	0	...	0	...	0
⋮	⋮	...	⋮	...	↑	...	⋮
$k \rightarrow$	0	...	0	...	1	...	0
⋮	⋮	...	↑	...	⋮	...	⋮
$l \rightarrow$	0	...	1	...	0	...	0
⋮	⋮	...	⋮	...	⋮	...	⋮
$n$	0	...	0	...	0	...	1

Tabelle 4.2: Ermitteln der Permutationsmatrix – Hier werden der Index  $k$  und  $l$  vertauscht.

des Ausgangsquerschnittes bekannt, können die Leitungsbeläge der Permutation direkt mit

$$\mathbf{Z}'_{perm} = \mathbf{P}^T \mathbf{Z}' \mathbf{P} \quad (4.15)$$

$$\mathbf{Y}'_{perm} = \mathbf{P}^T \mathbf{Y}' \mathbf{P} \quad (4.16)$$

berechnet werden, ohne diese numerisch bestimmen zu müssen. Hierin liegt auch der Hauptvorteil der Permutationsmethode. Es müssen nur die Leitungsbeläge von einem Querschnitt numerisch bestimmt werden, alle anderen können daraus abgeleitet werden. Arbeitet man mit konstanter Segmentlänge  $\Delta z$ , ergibt sich der Matrizant für ein Segment auch mit Hilfe der Permutationsmatrix

$$\mathcal{M}_z^{z+\Delta z_i} \left\{ \overline{\mathbf{R}}^{vi} \right\} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}^T \end{bmatrix} e^{\overline{\mathbf{R}}^{vi} \Delta z} \begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P} \end{bmatrix}. \quad (4.17)$$

Damit entfällt das mehrfache Berechnen der Matrixexponentialfunktion. Bei variabler Segmentlänge entfällt dieser Vorteil, und für jedes Segment muss die Matrixexponentialfunktion berechnet werden.

Insgesamt lassen sich für eine Leitungsstruktur mit  $n_L$  Adern (ohne Referenz)  $\binom{n_L}{2} = \frac{n_L(n_L-1)}{2}$  Permutationen angeben. Daraus folgt, dass die Permutationsmethode nur für eine ausreichend große Anzahl von Adern im Kabelbaum geeignet ist. Für zwei Signaladern ( $n_L = 2$ ) ergibt sich beispielsweise nur eine Vertauschungsmöglichkeit, wodurch keine ausreichende Zufälligkeit der ungleichförmigen Leitung möglich wird.

Die Permutationsmatrix für das Vertauschen der Zuordnungen  $k$  und  $l$  ergibt sich aus einer Einheitsmatrix der Dimension  $n_L$ , bei der die  $k$ -te und  $l$ -te Zeile bzw. Spalte vertauscht wurden. Dies ist in Tabelle 4.2 dargestellt.

**Methode der dichten Packung** Bei der Permutationsmethode wird die Querschnittsanordnung der Adern immer beibehalten. Dies entspricht natürlich nicht der Realität. Die relativen Lagen der Adern sowohl untereinander als auch zur Referenz variieren. Zur Erzeugung eines dicht gepackten Querschnittes aus  $n$  Adern wurde daher der folgende Algorithmus implementiert:

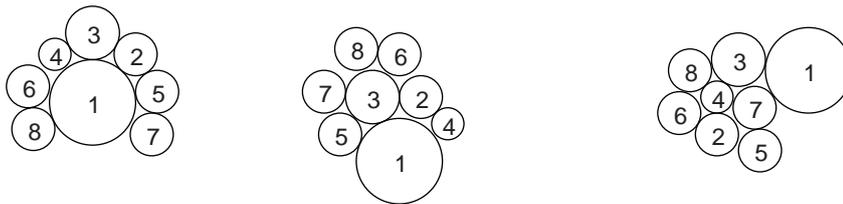
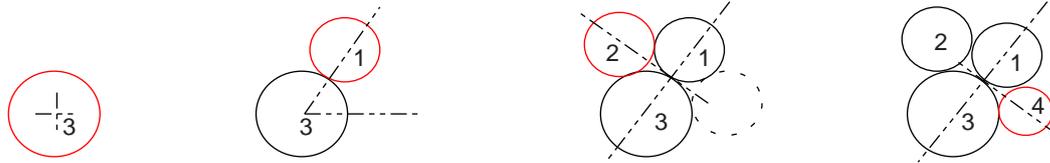


Abbildung 4.7: Vorgehen bei der dichten Packung von Drahtadern. Im unteren Teil der Darstellung sind generierte Querschnittsanordnungen mit 8 Adern zu sehen.

1. Eine erste, zufällig aus den  $n$  möglichen ausgewählte Ader wird im Ursprung positioniert.
2. Eine zweite, zufällig aus dem verbleibenden Rest  $n - 1$  ausgewählte Ader wird in einem zufälligen Winkel  $\alpha$  aus  $U[0, 2\pi]$  tangential an der ersten Ader platziert.
3. Die dritte, zufällig ausgewählte Ader wird tangential an den beiden schon platzierten Adern angeordnet. Eine der beiden möglichen Lagen wird zufällig ausgewählt.
4. Eine weitere der verbleibenden Adern wird zufällig ausgewählt. Für alle Kombinationen von zwei schon platzierten Adern wird die Positioniermöglichkeit der ausgewählten Ader getestet. Schneidet die neue Ader keine der schon Platzierten, wird sie dort angeordnet. Dieser Punkt wird solange wiederholt, bis alle Adern platziert worden sind.

In Abbildung 4.7 ist das Verfahrensprinzip dargestellt und einige generierte Beispielquerschnitte sind zu sehen.

Geeignet ist dieses Positionierverfahren vor allen Dingen für Kabelbäume in engen Kabelwegen mit einem hohen Füllfaktor der Kabelbaumquerschnittsfläche. Beispiel hierfür sind eng gepackte, häufig mit Kabelbindern fixierte Kabelbäume oder Leitungsstrukturen, die in Kabelkanäle gepresst werden.

**Methode der zufälligen Flächenfüllung** Sollen hingegen keine eng gepackten Querschnitte erstellt werden, eignet sich das folgende einfach zu implementierende Verfahren. Dabei werden in einer vorzugebenden Begrenzungsfläche die Adern zufällig positioniert. Tritt dabei ein Überlapp der zu positionierenden Ader mit schon positionierten Adern auf, wird

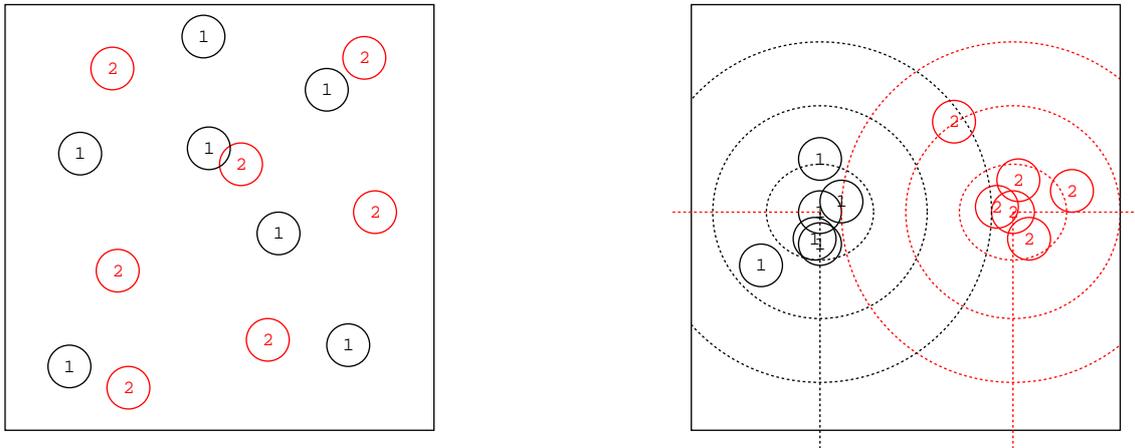


Abbildung 4.8: Mehrere Realisierungen vom Querschnitt einer Doppelleitung übereinander gezeichnet. Links sind die Leiteradern mit gleichverteilter Wahrscheinlichkeit in der gesamten Begrenzungsfläche angeordnet worden. Rechts wurde eine Normalverteilung um eine Mittelwertlage angenommen.

die aktuelle Ader neu zufällig platziert, bis eine Anordnung ohne Überlapp gefunden ist.

Die Auswahl des Positionierungsortes der Adern kann dabei gleichverteilt in der Begrenzungsfläche erfolgen oder aber auch mit vorgegebener Positionierungswahrscheinlichkeit bzw. -dichte. Siehe dazu die Abbildung 4.8. Dadurch können Lagewahrscheinlichkeiten für die Adern berücksichtigt werden.

Da der Algorithmus solange weiterläuft, bis alle Adern erfolgreich positioniert sind, kann keine maximale Laufzeit garantiert werden. Vielmehr muss die Begrenzungsfläche ausreichend groß sein, um eine Platzierung aller Adern ohne Überlapp zu ermöglichen. Ansonsten versucht die Implementierung, endlos eine Anordnung der Adern zu finden. Bewährt hat sich der Algorithmus für einen Füllfaktor  $\mathcal{F} = \frac{\sum A_{Ader}}{A_{Begrenzung}} \leq 0.4$ . Mit steigendem Füllfaktor nimmt die Anzahl der misslungenen Positionierungsversuche und damit die Rechenzeit bis zu einem Punkt zu, an dem eine Positionierung unmöglich wird.

#### 4.2.1.2 Zufällige Mittelpunktsverschiebung

Mit der Methode der zufälligen Mittelpunktsverschiebung werden Geometrien von ungleichförmigen Verbindungsstrukturen erzeugt, die keine diskreten Stoßstellen aufweisen. Die Realisierungen kommen damit realen Leitungsstrukturen näher als abschnittsweise gleichförmige Näherungsformen. Die Methode wurde erstmals von *Wiener* für die Beschreibung der *Brownschen Bewegung* verwendet und ergibt sich als Erweiterung der *Kochschen Schneeflocke* [63]. In [64] wurde sie auch schon zur Beschreibung von Leitungsgeometrien angewendet.

Zur Beschreibung der Leitergeometrie werden für jede Ader zwei fraktale Kurven generiert, eine für die  $x$ - und eine für die  $y$ -Mittelpunktlagen entlang des Ausbreitungsweges  $z$ . Um diese

Methode für die Generierung von Leitungsgeometrien zu benutzen, wird der eindimensionale Algorithmus, wie er in [65] vorgestellt wird, in zwei Dimensionen verwendet. Dazu werden die Mittelpunktslagen der Einzeladern  $1 \dots i$  des Kabelbaumes am Anfang  $[x_i(0), y_i(0)]$  und am Ende des *tubes*  $[x_i(L), y_i(L)]$  als feste Lagen betrachtet. Zwischen diesen beiden festen Mittelpunktslagen kann die Position als normalverteilte zufällige Größe mit dem Mittelwert 0 und den Standardabweichungen  $\sigma_{x_i}$  bzw.  $\sigma_{y_i}$  variieren. Ohne Verlust der Allgemeinheit kann man  $L = 1$  annehmen.

Im ersten Schritt  $n = 1$  ermittelt man die Mittelpunktslage der Adern im Punkt  $z = \frac{1}{2}$  als Summe aus dem Mittelwert der Lagen bei  $z = 0$  sowie  $z = 1$  und einer mittelwertsfreien, normalverteilten zufälligen Abweichung  $D_{x_i}$  bzw.  $D_{y_i}$  mit der vorzugebenden Standardabweichung  $\sigma_{x_i}$  bzw.  $\sigma_{y_i}$ . So ergibt sich die neue Lage aus

$$x_i \left( \frac{1}{2} \right) = \frac{x_i(1) + x_i(0)}{2} + D_{x_i,0} \text{ mit } D_{x_i,0} \sim N \left[ 0, \frac{(1 - 2^{2\mathcal{H}-2})}{2^{2\mathcal{H}}} \sigma_{x_i}^2 \right] \text{ und} \quad (4.18)$$

$$y_i \left( \frac{1}{2} \right) = \frac{y_i(1) + y_i(0)}{2} + D_{y_i,0} \text{ mit } D_{y_i,0} \sim N \left[ 0, \frac{(1 - 2^{2\mathcal{H}-2})}{2^{2\mathcal{H}}} \sigma_{y_i}^2 \right]. \quad (4.19)$$

Dadurch entstehen zwei neue Segmente  $[0, \frac{1}{2}]$  und  $[\frac{1}{2}, 1]$ . In diesen Segmenten wird der Vorgang mit kleineren Varianzen wiederholt. So setzt sich der Algorithmus rekursiv bis zu einer gewählten Tiefe  $n_{max}$  fort. Dabei wird bei jedem rekursiven Schritt die Varianz verkleinert, so dass für die zufällige Abweichung im  $k$ -ten Schritt gilt

$$D_{x_i,k} \sim N \left[ 0, \frac{(1 - 2^{2\mathcal{H}-2})}{(2^k)^{2\mathcal{H}}} \sigma_{x_i}^2 \right] \text{ und } D_{y_i,k} \sim N \left[ 0, \frac{(1 - 2^{2\mathcal{H}-2})}{(2^k)^{2\mathcal{H}}} \sigma_{y_i}^2 \right]. \quad (4.20)$$

Diese Vorgehensweise ist in Abbildung 4.9 dargestellt. Der Parameter  $\mathcal{H}$  ist ein Maß für die Zufälligkeit bzw. Rauigkeit der Raumkurve. Er berechnet sich auch aus der fraktalen Dimension  $\mathcal{D}$  der Kurve mit  $\mathcal{H} = 2 - \mathcal{D}$ . Dabei entspricht eine fraktale Dimension von  $\mathcal{D} \rightarrow 1$  bzw.  $\mathcal{H} \rightarrow 1$  einer nahezu geraden Linie. Die Varianz der zufälligen Verschiebung nimmt im Zuge des Algorithmus stark ab. Bei einer fraktalen Dimension nahe zwei bzw.  $\mathcal{H} \rightarrow 0$  entsteht eine stark zufällig variierende Raumkurve, da die Varianz fast unverändert bleibt. Somit lässt sich mit einem Parameter die Zufälligkeit der Leitungsstruktur steuern. Die vorzugebenden Anfangsvarianzen  $\sigma_{x_i}^2$  und  $\sigma_{y_i}^2$  definieren das Zylindervolumen, in dem sich die Adern des *tubes* in etwa befinden sollen. Für eine ausführlichere Diskussion fraktaler Algorithmen und der Bedeutung der auftauchenden Parameter siehe [65].

Durch die Implementierung des Algorithmus muss sichergestellt werden, dass sich die einzelnen Leiteradern entlang der Segmente nicht schneiden oder berühren. Dies kann zwischen den Algorithmusschritten oder nach der Generierung der kompletten Leitungsstruktur durch kleine Korrekturverschiebungen der Adern erfolgen.

#### 4.2.1.3 Zufallsfolgen und stochastische Prozesse

Zum Abschluss soll noch eine Methode vorgestellt werden, mit deren Hilfe aus beliebigen Folgen von Zufallszahlen Realisierungen von Mehrfachleitungen erzeugt werden können. Aus-

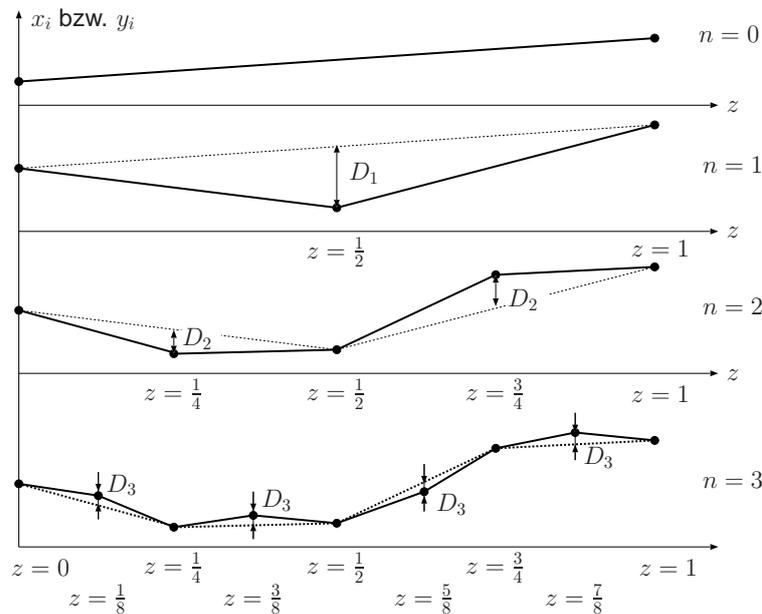


Abbildung 4.9: Verfahrensweise bei der zufälligen Mittelpunktsverschiebung für eine Koordinatenachse

gangspunkt ist dabei die Überlegung, dass die Änderung der Lage einer Ader – d.h. der  $x$ - bzw.  $y$ -Koordinate – entlang des Ausbreitungsweges  $z$

$$\frac{dx}{dz} = r(z, \gamma) \tag{4.21}$$

zufällig erfolgen soll. Der Ausdruck  $r(z, \gamma)$  kennzeichnet die Realisierung einer zufälligen Funktion, beispielsweise eines Rauschprozesses. Dabei müssen aber die Randbedingungen der Steckerbelegung am Anfang und am Ende der Leitung eingehalten werden. Ohne Verlust der Allgemeinheit lassen sich diese als  $x(0) = x(L) = 0$  annehmen.

Diese Randbedingungen lassen sich aber nur einhalten, wenn die realisierte zufällige Funktion  $r(z, \gamma)$  mittelwertfrei ist. Somit ergibt sich die neue Position aus

$$\frac{dx}{dz} = r(z, \gamma) - \langle r(z, \gamma) \rangle \tag{4.22}$$

als

$$x(z) = \int_0^z r(\zeta, \gamma) d\zeta - z \langle r(z, \gamma) \rangle, \tag{4.23}$$

oder diskret für eine Folge von Zufallszahlen  $r$  als

$$x(z_i) = \sum_{k=1}^i r_k - i \langle r \rangle, \tag{4.24}$$

Da zu Beginn keinerlei Annahmen über die Zufallsfolge  $r(z, \gamma)$  gemacht wurden, können hier beliebige, ggf. an das Problem angepasste Folgen zum Einsatz kommen. Dabei hat man die Wahl zwischen unkorrelierten oder korrelierten stochastischen Prozessen. Einige Möglichkeiten sollen im folgenden vorgestellt werden.

**Weißes Rauschen:** Weißes Rauschen stellt einen mittelwertsfreien, unkorrelierten stochastischen Prozess dar. Prinzipiell legt der Begriff keine Wahrscheinlichkeitsdichte fest, hier ist jedoch *Gaußsches* weißes Rauschen gemeint, d.h. die Zufallsfolge gehorcht einer Normalverteilung  $r(z_i, \gamma) = r_i \sim N[0, \sigma^2]$ .

**Gauß-Markov-Prozess:** Beim *Gauß-Markov*-Prozess berechnet sich die Folge als

$$r_i = \rho r_{i-1} + w_i \quad \text{mit} \quad w_i \sim N[0, \sigma^2], \quad (4.25)$$

mit dem Korrelationsgrad  $0 < \rho < 1$ . Die Autokorrelationsfunktion  $R_r(k) = \rho^k$  nimmt mit zunehmendem Abstand  $k$  ab. Bei  $\rho = 0$  erhält man weißes Rauschen und bei  $\rho = 1$  einen *Wiener*-Prozess. Bei der Erstellung einer Zufallsfolge wird als erster Schritt eine Folge mit weißem Rauschen  $w$  erzeugt. Aus dieser wird dann nach obiger Formel die *Gauß-Markov*-Folge generiert.

**Wiener-Prozess:** Der *Wiener*-Prozess dient als Basis für die *Brownsche* Bewegung und wird häufig zur Beschreibung von zufälligen Bewegungen im Raum benutzt. Daher ist es nahe liegend, ihn auch für die Generierung von zufälligen Leitungsstrukturen zu benutzen. Eine Folge auf der Basis eines *Wiener*-Prozesses ergibt sich als

$$r_i = \sqrt{\Delta z} \sum_{k=1}^i w_k \quad \text{mit} \quad w_k \sim N[0, 1]. \quad (4.26)$$

Der Wert  $\Delta z$  ist dabei die Schrittweite der äquidistanten Unterteilung der Leitungsstruktur entlang des Ausbreitungsweges.

**Gleitender Mittelwert:** Bildet man über einer Folge mit weißem Rauschen einen gleitenden Mittelwert nach der Formel

$$r_i = \beta_k w_{i-k} + \beta_{k-1} w_{i-k+1} + \dots + \beta_0 w_i + \dots + \beta_{k-1} w_{i+k-1} + \beta_k w_{i+k} \quad (4.27)$$

mit  $w_i \sim N[0, \sigma^2]$ ,

erhält man eine neue Folge, bei der die Elemente eine Korrelation gegen die Nachbarelemente aufweisen. Die Breite der Korrelationsfunktion hängt von der Tiefe  $k$  des Mittelwertfilters ab.

**Zufällige *Fouriersynthese*:** Realisierungen, die auf Rauschprozessen basieren, zeigen häufig abrupte Richtungsänderungen. Dies ist bei Leitungsstrukturen meist unerwünscht, da sich aufgrund der mechanischen Kräfte im Kabelbaum doch mehr oder weniger kontinuierlich zufällige Verläufe der Adern ergeben. Abrupte Richtungsänderungen sind in der Praxis eher selten. Die Rauschprozesse könnten durch Glättungsmethoden oder Interpolationen in dieser Hinsicht deutlich verbessert werden. Eine andere Methode wäre die Erzeugung von Realisierungen mit kontinuierlichem Verlauf der Richtungsänderung. Das wird erreicht, wenn die Zufallsfolge  $r$  auf der Basis von einer Funktionensumme mit zufälligen Parametern erstellt wird, z.B. auf der Basis einer *Fourier*-Reihe

$$r_i = \sum_{k=1}^M w_k \cos \left( 2\pi \frac{\Delta z i}{L} + \varphi_k \right) \quad (4.28)$$

mit  $w_k \sim N[0, \sigma^2]$   
und  $\varphi_k \sim U[0, 2\pi]$

Durch die Wahl der oberen Grenze  $M$  wird die maximale Oszillationsfrequenz der Aderkoordinate begrenzt. Ein Gleichanteil kann entfallen, da dieser gemäß Gleichung (4.22) ohnehin wieder entfernt werden würde.

Einige Beispiele für aus verschiedenen Folgen berechneten Realisierungen von Variationen einer Aderkoordinate ( $x$  oder  $y$ ) entlang des Ausbreitungsweges  $z$  sind in Abbildung 4.10 zu sehen.

Das erste Beispiel erzeugt eine eindimensionale Realisierung aufgrund von weißem Rauschen. Dieses ist unkorreliert, was deutlich auch an der zugehörigen Korrelationsfunktion zu erkennen ist. Die erzeugte Realisierung weist deshalb auch abrupte Richtungsänderungen auf, was bei einer Leitungsstruktur meist nicht gewollt ist. Mit deutlich weniger Punkten entlang der Leitung und der Anwendung von Interpolationsverfahren können aber durchaus brauchbare Realisierungen erzeugt werden.

Im zweiten Beispiel wurde für den *Gauß-Markov*-Prozess ein Korrelationsgrad von  $q = 0.9$  gewählt. Zwar verringern sich die abrupten Variationen, aber grundsätzlich gilt das vorher gesagte.

Sehr realistische, kontinuierliche Verläufe lassen sich mit dem gleitenden Mittelwert (im Beispiel mit der Filtertiefe  $k$  von 5% der Leitungslänge), dem *Wiener*-Prozess und der zufälligen *Fouriersynthese* ( $M = 10$ ) erreichen.

### 4.2.2 Vergleich stochastischer Simulationen

Nachdem im vorherigen Abschnitt eine Vielzahl von unterschiedlichen Methoden zur Erzeugung von Realisierungen zufälliger, ungleichförmiger Leitungsstrukturen aufgezeigt worden ist, ist es von Interesse, inwiefern die statistischen Eigenschaften von Ergebnisgrößen der generierten Populationen differieren oder übereinstimmen. Insbesondere ist es wichtig zu wissen, welcher Aufwand bei der Erzeugung von Realisierungen und deren numerischer Lösung notwendig ist, um relevante statistische Aussagen zu gewinnen. Diese Frage lässt sich

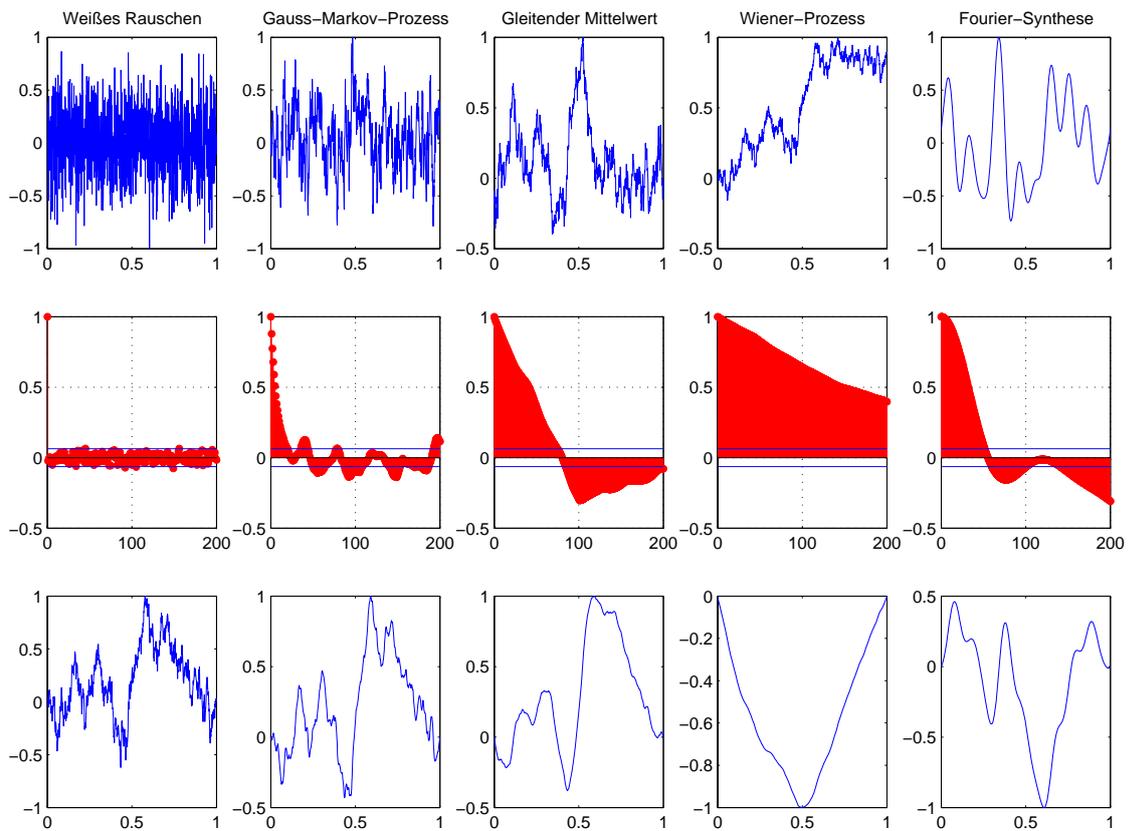


Abbildung 4.10: Beispielrealisierungen für verschiedene diskrete Prozesse. In der ersten Reihe sind die verwendeten Zufallsfolgen dargestellt, in der zweiten die zugehörige Autokorrelationsfunktion und schließlich in der dritten die nach Gleichung (4.24) berechnete Variation einer Mittelpunktskoordinate der Ader. (Alle Darstellungen wurden normiert.)

allerdings nur anhand von Beispielen diskutieren.

Dazu wurde als ein numerisches Experiment eine zufällig geführte Fünffachleitung über einer leitenden Ebene mit den verschiedenen Methoden berechnet und die statistischen Kenngrößen verglichen. Eine Fünffachleitung wurde gewählt, um bei der Permutationsmethode eine ausreichende Anzahl von Vertauschungen zu ermöglichen. Bei  $n_L = 5$  sind zehn Permutationen möglich. Für einen Vergleich der Methoden wird diese Anzahl als ausreichend betrachtet. Folgende Methoden kamen zum Einsatz

- Methode A: stückweise Approximation mit Permutation der Adern bei zufälliger Segmentlänge
- Methode B: stückweise Approximation mit zufälliger Flächenfüllung bei konstanter Segmentlänge
- Methode C: stückweise Approximation mit zufälliger Flächenfüllung bei zufälliger Segmentlänge bei Exponentialverteilung der Segmentlänge
- Methode D: stückweise Approximation mit zufälliger Flächenfüllung bei zufälliger Segmentlänge bei *Rayleigh*-verteilung der Segmentlänge
- Methode E: Realisierungen generiert durch zufällige Mittelpunktsverschiebung

Dabei wird die Methode E als Referenz betrachtet, da sie realen Strukturen am nächsten kommt.

Ausgangspunkt für die erzeugten Realisierungen ist ein Grundquerschnitt aus 5 Leitungsadern über einer ideal leitenden Ebene, wie er in Abbildung 4.11 dargestellt ist. Der Radius aller Leiterdrähte soll  $r_D = 0.5$  mm betragen. Dieser Querschnitt wird am Anfang und Ende der Leitungsstruktur durch die Steckerbelegung fixiert.

Nutzt man die Permutationsmethode (Methode A), verändert sich der Leitungsquerschnitt entlang der Struktur nicht. Lediglich die Zuordnung der Adernnummer wird getauscht. Die Segmentlänge wird als eine exponential verteilte Zufallsgröße festgelegt.

Bei der stückweisen Approximation mit zufälliger Flächenfüllung (Methode B,C und D) werden die Leitungsadern innerhalb einer Kreisfläche mit einem maximalen Radius  $R_{max} = 10$  mm um den Mittelpunkt des *tubes* ( $x = 0$  mm,  $y = 10$  mm) zufällig platziert.

Dem entsprechend wird für die zufällige Mittelpunktsverschiebung eine Standardabweichung  $\sigma_{x_i} = \sigma_{y_i} = 11$  mm gewählt, was dazu führt, dass die Geometrie der Leitungen in einem Zylindervolumen mit dem festgelegten maximalen Radius verbleibt.

Durch eine mittlere Segmentlänge werden die Parameter der Verteilungen für die Segmentlänge bei den Methoden A-D, sowie die fraktale Dimension bei Methode E bestimmt. Diese mittlere Segmentlänge soll bei den Beispielberechnungen 0.3 m betragen. Daraus folgt für

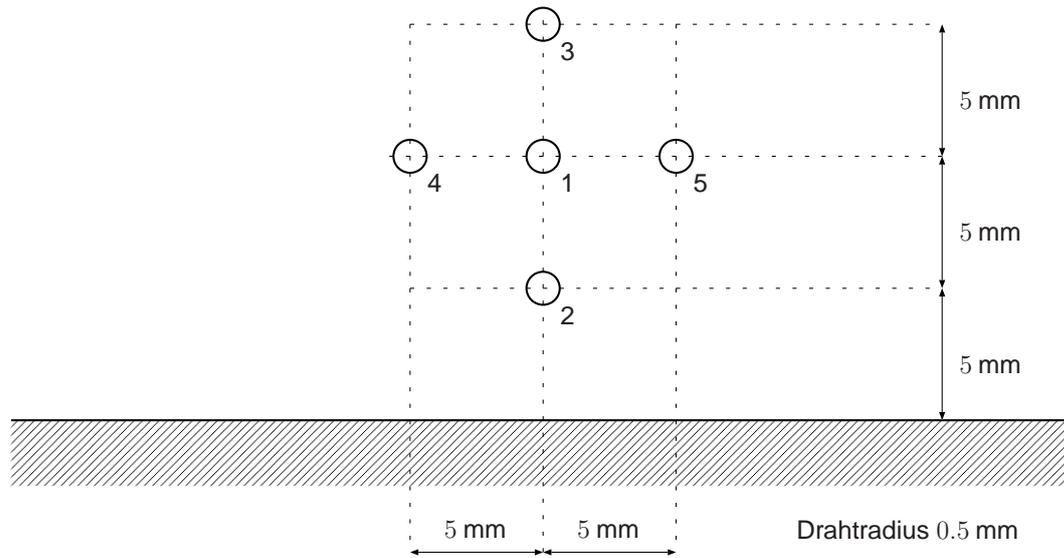


Abbildung 4.11: Ausgangsquerschnitt zur Generierung der Realisierungen einer zufällig geführten 5-fach Leitung.

die Exponentialverteilung  $\lambda = \frac{10}{3}$  und für die *Rayleigh*-Verteilung  $\sigma = \sqrt{\frac{2}{\pi} \frac{10}{3}}$ . Durch eine fraktale Dimension von 1.75 wird im statistischen Mittel eine Leitungsgeometrie erzeugt, die einem Wechsel von 10 Leitungsquerschnitten entspricht und somit äquivalent zur vorher festgelegten mittleren Segmentlänge ist.

In der Abbildung 4.12 ist jeweils eine Beispielrealisierung der Leitungsstruktur für die verschiedenen Methoden zu sehen. Als Ergebnisgrößen sollen die topologischen S-Parameter der Leitungsstruktur betrachtet werden. Da diese auf die Wellenwiderstandsmatrix der Struktur am Leitungsende und -anfang bezogen sind, sind diese Größen nicht von Resonanzen der Struktur gekennzeichnet und erlauben so eine bessere Beurteilung der Übertragungseigenschaften.

Zwei Elemente der topologischen S-Matrix sollen näher untersucht werden

- $|S_{61}|$  - als Maß für die Signalübertragung und
- $|S_{71}|$  - als Maß für das Fernübersprechen.

Der Betrag  $|S_{61}|$  einer idealen, gleichförmigen Leitung ist für alle Frequenzen gleich eins und der Betrag  $|S_{71}|$  ist null. Somit ist eine resultierende Verringerung von  $|S_{61}|$  und die Erhöhung von  $|S_{71}|$  auf die Ungleichförmigkeit der Leitung zurückzuführen. Als stochastische Eigenschaften dieser elektrischen Größe sind in der Abbildung 4.13 der Mittelwert und die Standardabweichung als Funktion der Frequenz dargestellt. Durch die Streuung entlang der Leitungsstruktur nimmt der Anteil des übertragenen Signales mit zunehmender Frequenz ab und das Fernübersprechen zu. Dies ist deutlich in den Mittelwerten zu sehen. Auch die

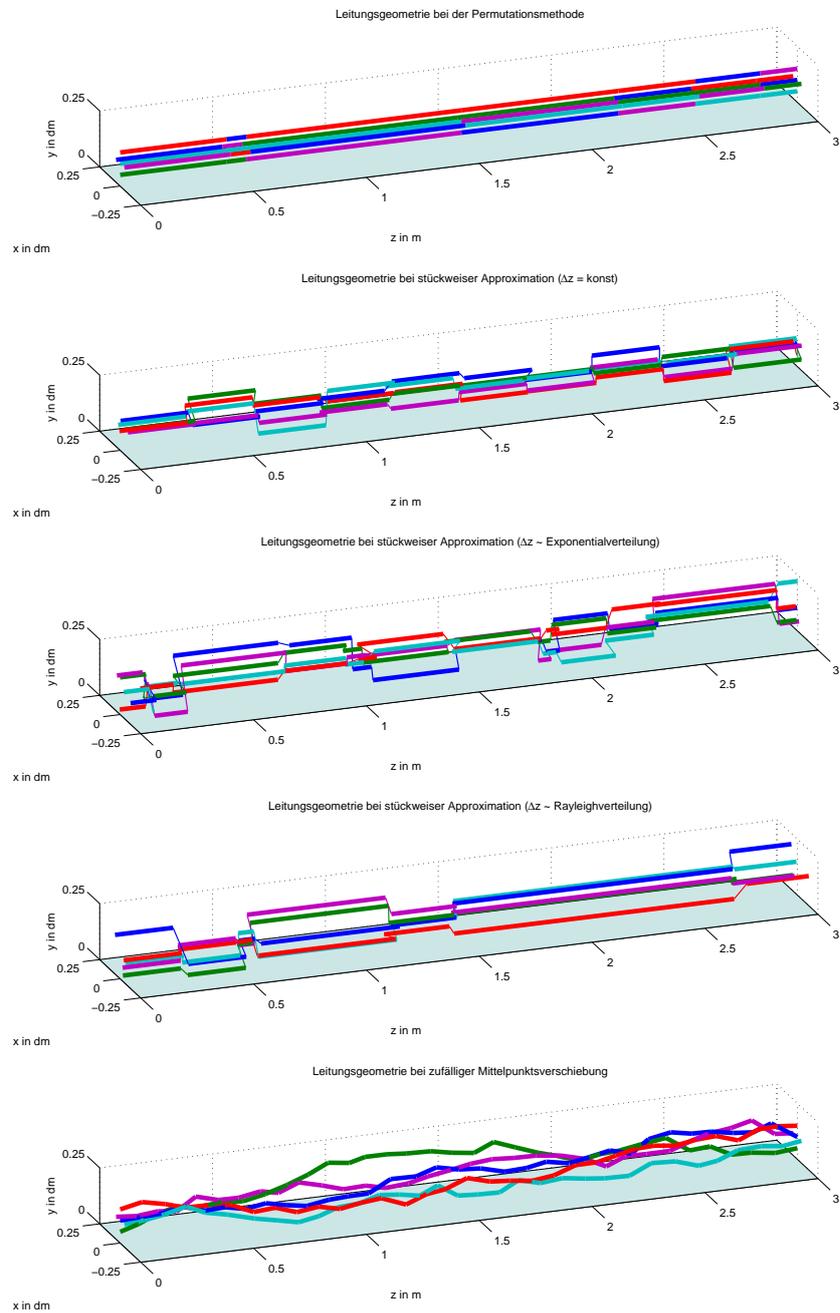


Abbildung 4.12: Realisierungen der 5-fach Leitung über leitender Ebene für die Methoden A-E. Dicke Linien kennzeichnen eine Ader im Leitungsabschnitt und ggf. vorhandene dünne Linien stellen die idealen elektrischen Verbindungen der Leiter in  $x$ - $y$ -Ebene an den Segmentstoßstellen bei der stückweisen Approximation dar.

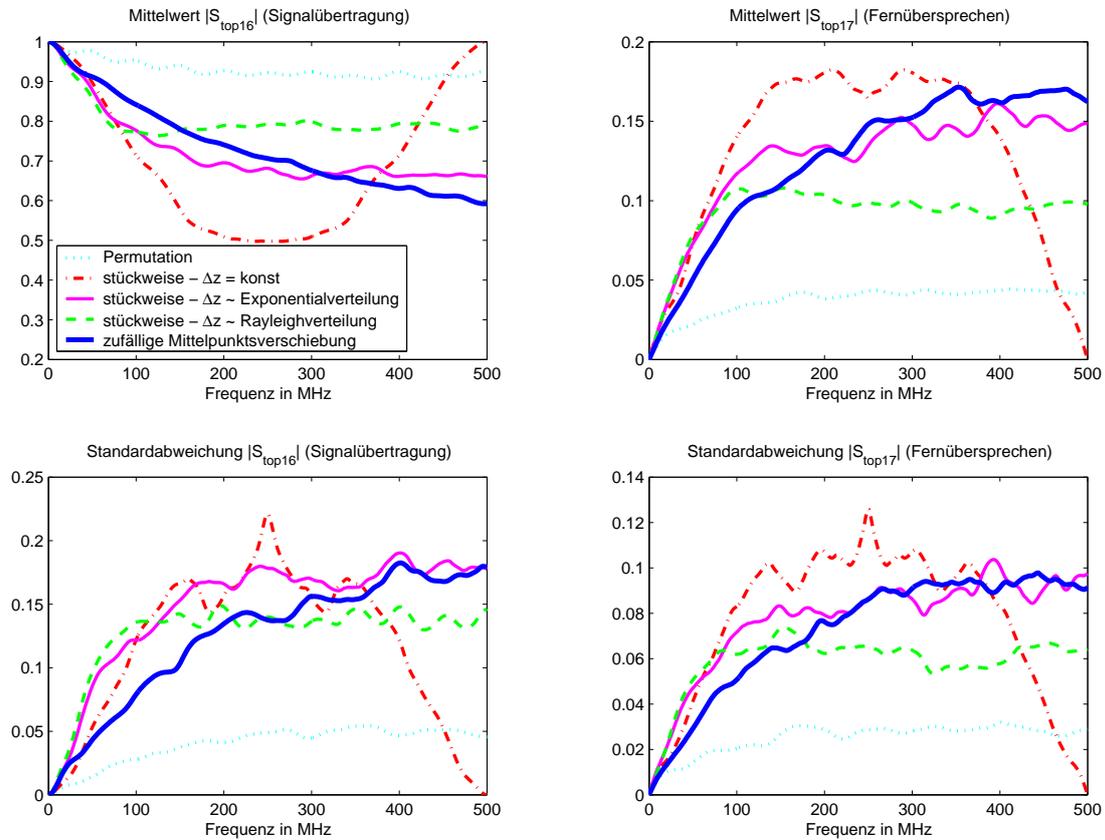


Abbildung 4.13: Mittelwert und Standardabweichung des Betrages von Elementen der topologischen S-Matrix für die verschiedenen Methoden als Funktion der Frequenz. Links das Element  $S_{61}$  - ein Maß für die Signalübertragung auf der gespeisten Ader, rechts das Element  $S_{71}$  - ein Maß für das Fernübersprechen von der gespeisten Ader auf eine weitere.

Streuung der Werte (Standardabweichung) steigt an.

Die mit Hilfe der Permutationsmethode (Methode A) ermittelten Werte bilden das Verhalten nicht korrekt ab. Die Abweichungen fallen zu gering aus und somit würden die stochastischen Schwankungen unterschätzt. Nur durch das Vertauschen der Leiterzuordnung kann eine zufällig geführte Leitung demnach nicht approximiert werden.

Verwendet man eine konstante Segmentlänge wie bei der Methode B, so erzeugt man eine künstliche Periodizität, die dazu führt, dass der Verlauf bezüglich der  $\frac{\lambda}{4}$ -Frequenz für diese konstante Segmentlänge gespiegelt wird. Anwendbar ist die Methode also nur unter der Bedingung, dass die konstante Segmentlänge klein zur Wellenlänge ist. Leider kann die Segmentlänge in diesem Fall nicht an die Wellenlänge angepasst werden, da sie eine stochastische Eigenschaft der Leitung ist. Soll beispielsweise eine Leitungsstruktur mit einer großen mittleren Segmentlänge (schwach ungleichförmige Leitung) untersucht werden, ist auch die

obere Frequenzgrenze dadurch festgelegt.

Nahezu identische Ergebnisse und damit die beste Übereinstimmung wird durch eine stückweise Approximation bei exponentialverteilter Segmentlänge erzielt.

Es zeigt sich also, dass mit der stückweisen Approximation das Streuverhalten einer zufällig geführten, ungleichförmigen Leitungsstruktur sehr gut abgebildet werden kann. Voraussetzung ist es aber, dass die Segmentlänge als eine zufällige Größe betrachtet wird. Dabei zeigt sich, dass die Annahme einer Exponentialverteilung die beste Übereinstimmung mit realen Leitungsführungen liefert. Die Verwendung einer konstanten Segmentlänge ist nur sehr begrenzt möglich, solange die Segmente sehr klein bezüglich der Wellenlänge sind.

Diese Ergebnisse motivieren zur Verwendung der stückweisen Approximation (Methode C) bei der stochastischen Simulation, da die Rechenzeit dadurch im Vergleich zur Methode der zufälligen Mittelpunktverschiebung stark reduziert wird. Des Weiteren sollte auf der Basis dieses relativ einfachen Modells eine wahrscheinlichkeitstheoretische Beschreibung des Problems möglich sein. Dies soll im folgenden Abschnitt untersucht werden.

### 4.3 Wahrscheinlichkeitstheoretische Beschreibung

Mit Hilfe einer stochastischen Simulation lassen sich brauchbare Ergebnisse erzielen. Allerdings ist der numerische Aufwand sehr groß, da die Ergebnisse über eine Population berechnet werden müssen. Zudem können Aussagen auch nur an konkreten Beispielen angegeben werden, und der Einfluß von Parametervariationen nur sehr aufwendig untersucht werden. Hier wäre ein wahrscheinlichkeitstheoretisches Modell für die ungleichförmige, zufällige Leitungsstruktur von Vorteil. Diesbezüglich ist in der Fachliteratur bisher kein Ansatz zu finden oder zumindest dem Autor nicht bekannt. Aus diesem Grunde muss hier ein neuer Ansatz erarbeitet werden.

Allgemein lässt sich das Problem der zufällig geführten ungleichförmigen Mehrfachleitung mathematisch ausdrücken als

$$\frac{d\bar{\mathbf{x}}(z, \gamma)}{dz} = \bar{\mathbf{R}}^x(z, \gamma)\bar{\mathbf{x}}(z, \gamma) + \bar{\mathbf{x}}^s(z, \gamma). \quad (4.29)$$

Dabei kennzeichnet  $\gamma$  eine zufällige Größe. Um mit wahrscheinlichkeitstheoretischen Methoden weitergehende Aussagen gewinnen zu können, muss die komplexe Gleichung (4.29) in den reellen Zahlenraum überführt werden. Dies gelingt mit der Darstellung

$$\underbrace{\frac{d}{dz} \begin{bmatrix} \Re \{\bar{\mathbf{x}}\} \\ \Im \{\bar{\mathbf{x}}\} \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{x}}^*} = \underbrace{\begin{bmatrix} \Re \{\bar{\mathbf{R}}^x\} & -\Im \{\bar{\mathbf{R}}^x\} \\ \Im \{\bar{\mathbf{R}}^x\} & \Re \{\bar{\mathbf{R}}^x\} \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{R}}^*} \underbrace{\begin{bmatrix} \Re \{\bar{\mathbf{x}}\} \\ \Im \{\bar{\mathbf{x}}\} \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{x}}^*} + \begin{bmatrix} \Re \{\bar{\mathbf{x}}^s\} \\ \Im \{\bar{\mathbf{x}}^s\} \end{bmatrix}, \quad (4.30)$$

wodurch jedoch die Dimension des Problems verdoppelt wird (die Kennzeichnung als zufällige Größe und die Abhängigkeit von  $z$  wurde unterdrückt). Die Dimension  $N$  des Systems (4.30)

ist dann  $N = 2 \cdot 2 \cdot n_L$ , wobei  $n_L$  die Anzahl der Leiter im *tube* ohne den Referenzleiter zählt. Dabei bleiben die weiteren Ausführungen auf den homogenen Teil der Gleichung (4.29) beschränkt. Beispielsweise würde sich in der  $v$ - $i$ -Darstellung bei statischer Näherung der Leitungsbeläge folgende reelle Gleichung ergeben

$$\frac{d}{dz} \underbrace{\begin{bmatrix} \Re \{ \mathbf{v} \} \\ \Re \{ \mathbf{i} \} \\ \Im \{ \mathbf{v} \} \\ \Im \{ \mathbf{i} \} \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{x}}^*(z,\gamma)} = - \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \Re \{ \mathbf{Z}' \} & \mathbf{0} & -\Im \{ \mathbf{Z}' \} \\ \Re \{ \mathbf{Y}' \} & \mathbf{0} & -\Im \{ \mathbf{Y}' \} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Im \{ \mathbf{Z}' \} & \mathbf{0} & \Re \{ \mathbf{Z}' \} \\ \Im \{ \mathbf{Y}' \} & \mathbf{0} & \Re \{ \mathbf{Y}' \} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{R}}^*(z,\gamma)} \underbrace{\begin{bmatrix} \Re \{ \mathbf{v} \} \\ \Re \{ \mathbf{i} \} \\ \Im \{ \mathbf{v} \} \\ \Im \{ \mathbf{i} \} \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{x}}^*(z,\gamma)}, \quad (4.31)$$

die auch im nächsten Abschnitt zugrunde gelegt wird.

Für eine allgemeine, zufällig geführte Mehrfachleitung stellt schon allein die Beschreibung der statistischen Variation der Matrixfunktion  $\bar{\mathbf{R}}^*$  eine Herausforderung dar. Eine Möglichkeit wäre eine Darstellung mit Hilfe von stochastischen Vektorprozessen (siehe [62]). Leider sind deren Eigenschaften, wie beispielsweise Art des Prozesses, Autokorrelation und Kreuzkorrelation, weitgehend unbekannt. Diese müssten experimentell an konkreten Aufgabenstellungen ermittelt oder abgeschätzt werden.

Um eine analytische Betrachtung zu ermöglichen, wird im Folgenden die Matrixfunktion  $\bar{\mathbf{R}}^*$  als eine Funktion eines skalaren stochastischen Prozesses angenommen und für diesen die speziellen Eigenschaften des *Markov*-Prozesses festgelegt. Damit ist eine eindeutige wahrscheinlichkeitstheoretische Lagebeschreibung der Adern entlang der Leitungsstruktur gewährleistet. Aufbauend auf dieser Beschreibung können stochastische Eigenschaften der Lösung bzw. des Matrizenbestimmten bestimmt werden. Dies ist Gegenstand des folgenden Abschnittes.

## 4.4 Die *Markov*-Leitung

Die einfachste Möglichkeit, die Variation der Matrixfunktion  $\bar{\mathbf{R}}^*$  über dem Ausbreitungsweg  $z$  zu berücksichtigen, ist eine abschnittsweise gleichförmige Approximation der Leitungsstruktur. Dabei motiviert die gute Übereinstimmung der Ergebnisse der stückweisen Modelle im Abschnitt 4.2.2 zur Verwendung eines solchen Modells.

Limitiert man weiterhin die Anzahl der möglichen auftretenden Querschnitte auf eine endliche Menge und geht davon aus, dass die Auswahl des Querschnittes an einer Stelle  $z$  unabhängig von den Querschnitten an anderen Orten ist, kann das Problem wahrscheinlichkeitstheoretisch mit Hilfe der *Markov*-Theorie bearbeitet werden.

Die *Markov*-Theorie ist eine in der Wahrscheinlichkeitsrechnung häufig eingesetzte Methode zur Behandlung von stochastischen Systemen. Sie scheint ein geeigneter Ausgangspunkt für die Betrachtung zufälliger ungleichförmiger Leitungen zu sein. Der skalare *Markov*-Prozess ist in der Literatur ausführlich behandelt [62]. Mit den *Kolmogorov*-Gleichungen lassen sich die Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten der verschiedenen Zustände an einem beliebigen Ort  $z$  angeben. Die grundlegenden Begriffe des *Markov*-Prozesses sind dabei die möglichen Zustände des Systems und der Übergang von einem Zustand in den nächsten, beschrieben durch Übergangswahrscheinlichkeiten bzw. Übergangsraten.

Hier soll jetzt versucht werden, dies dahingehend zu erweitern, dass Wahrscheinlichkeitsdichten für den Lösungsvektor der Leitungsgleichungen, d.h. für die gesuchten Größen wie Ströme und Spannungen, angegeben werden können. Dabei treten zwei Probleme auf. Erstens muss der Übergang von diskreten Wahrscheinlichkeiten für die endliche Anzahl von  $Q$  Zuständen zu der kontinuierlichen Wahrscheinlichkeitsdichte für die Werte des Lösungsvektors in einem kontinuierlichen Raum vollzogen werden. Zum zweiten spannt der Lösungsvektor einen mehrdimensionalen Raum auf.

Die Eigenschaft, dass die Wahrscheinlichkeit für den Zustand am Ort  $z$  nur von den vorhergehenden Zuständen abhängt, bezeichnet man als Gedächtnislosigkeit oder auch *Markov*-Eigenschaft. Im Folgenden interessieren nur *Markov*-Prozesse erster Ordnung, d.h. die Wahrscheinlichkeit hängt nur vom unmittelbar vorhergehenden Zustand ab und nicht von weiteren vorhergehenden Zuständen.

Die zufällige Matrixfunktion  $\bar{\mathbf{R}}^*(z, \gamma) = \bar{\mathbf{R}}^*(z, m(z))$  soll sich demnach als Funktion eines skalaren kontinuierlichen *Markov*-Prozesses  $m(z)$  mit endlicher Anzahl  $Q$  von möglichen Zuständen darstellen lassen (als Begriff: kontinuierlicher, endlicher *Markov*-Prozess). Damit wird mit der Realisierung des *Markov*-Prozesses  $m(z)$  auch die komplette Matrizenfunktion  $\bar{\mathbf{R}}^*(z, m(z))$  festgelegt. Dies bedeutet aber auch, dass in den Realisierungen des Prozesses  $m(z)$  nur die Werte  $e_q$ ,  $q = 1 \dots Q$ , auftreten können. Jedem möglichen Wert  $e_q$  wird dabei eine Querschnittsgeometrie der Leitungsanordnung mit der Parametermatrix  $\bar{\mathbf{R}}^*(e_q)$  zugeordnet. Siehe dazu die Abbildung 4.14, in der eine Einfachleitung gemäß der *Markov*-schen Annahme konstruiert ist.

Es entsteht also eine segmentweise konstante Leiteranordnung, bei der die Segmentlänge zufällig nach den Eigenschaften des *Markov*-Prozesses variiert und nur Leitungsquerschnitte aus einer vorher definierten, endlichen Menge auftreten können.

Die Segmentlänge, d.h. die Länge des Bereiches  $\Delta z$  in dem kein Wechsel des diskreten *Markov*-Prozesses  $m(z)$  auftritt, ist eine exponential verteilte Zufallsgröße [62]. Dies folgt aus den Eigenschaften des *Markov*-Prozesses. Damit ergibt sich die Wahrscheinlichkeit eines Wechsels in einem Intervall  $\Delta z$  aus dem aktuellen Zustand  $m(z) = e_q$  heraus als

$$\mathcal{P} \{ \Delta z_q < \zeta \} = 1 - e^{-\lambda_q \zeta} \approx \lambda_q \zeta \quad \lambda_q > 0, \quad (4.32)$$

und für das Beibehalten des aktuellen Zustandes

$$\mathcal{P} \{ \Delta z_q > \zeta \} = e^{-\lambda_q \zeta} \approx 1 - \lambda_q \zeta. \quad (4.33)$$

Die Wahrscheinlichkeit für einen einfachen Wechsel vom Zustand  $e_q$  bei  $z$  zum Zustand  $e_r$  innerhalb eines Intervall  $\Delta z$  soll

$$\mathcal{P} \{ m(z + \Delta z) = r \mid m(z) = q \} \approx \lambda_{r,q} \Delta z \quad (4.34)$$

$$(4.35)$$

betragen und für die Beibehaltung des Zustandes  $e_q$

$$\mathcal{P} \{ m(z + \Delta z) = q \mid m(z) = q \} \approx 1 + \lambda_{q,q} \Delta z. \quad (4.36)$$

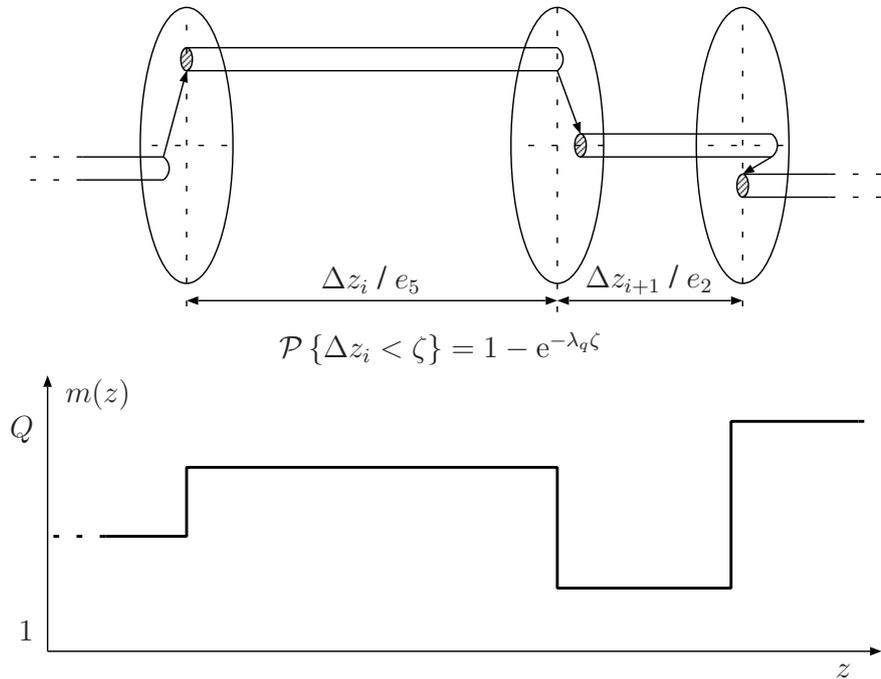


Abbildung 4.14: Einfachleitung mit *Markoveigenschaften* und der zugehörige skalare *Markov*-Prozess. An den Segmentenden, deren Länge zufällig verteilt ist, erfolgt ein Wechsel auf einen anderen Querschnitt  $e_q$ .

Diese Näherung gilt zwar nur für kleine  $\Delta z$ , da aber später der Grenzübergang  $\Delta z \rightarrow 0$  vollzogen wird, ist sie ohne Einschränkung zulässig.

Da entweder ein Wechsel erfolgt, oder der Zustand beibehalten wird, ergeben sich die folgenden Bedingungen

$$\lambda_{q,q} = - \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq q}}^Q \lambda_{r,q} \quad (4.37)$$

und daraus folgt

$$\lambda_{q,q} = -\lambda_q. \quad (4.38)$$

Eine Leitung, die diese aufgezeigten Eigenschaften aufweist, soll als *Markov*-Leitung bezeichnet werden. Sie ist durch eine mittlere Segmentlänge  $\frac{1}{\lambda_q}$  und die Anzahl der möglichen Leitungsquerschnitte  $Q$  gekennzeichnet. Der Koeffizient  $\lambda_q$  ist somit ein Maß für die „Zufälligkeit“ der entstehenden Leitung.

Meist werden die Übergangsraten  $\lambda_{r,q}$  gleich groß und konstant über  $z$  sein. Dies ist allerdings nicht zwingend. Es ist durchaus vorstellbar, dass das Auftreten gewisser Querschnitte wahrscheinlicher ist, als das der anderen Querschnitte. Auch sich über  $z$  ändernde Übergangsraten, beispielsweise hervorgerufen durch das Fixieren mittels Kabelbindern, sind denkbar.

Betrachtet man den Lösungsvektor  $\bar{\mathbf{x}}^*$  an der Stelle  $z + \Delta z$ , so nimmt er mit einer Wahrscheinlichkeit von

$$p_q(\bar{\mathbf{x}}^*, z + \Delta z) = (1 + \lambda_{q,q} \Delta z) p_q(\mathcal{M}_{z+\Delta z}^z \{ \bar{\mathbf{R}}^*(e_q) \} \bar{\mathbf{x}}^*, z) + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq q}}^Q \lambda_{q,r} \Delta z p_r(\mathcal{M}_{z+\Delta z}^z \{ \bar{\mathbf{R}}^*(e_r) \} \bar{\mathbf{x}}^*, z) \quad (4.39)$$

den Wert  $\bar{\mathbf{x}}^*(z + \Delta z)$  an. Der Ausdruck  $p_q(\bar{\mathbf{x}}^*, z) = \mathcal{P} \{ \bar{\mathbf{x}}^*(z) \mid m(z) = e_q \}$  steht für die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass der Lösungsvektor  $\bar{\mathbf{x}}^*$  an der Stelle  $z$  den Wert  $\bar{\mathbf{x}}^*(z)$  annimmt, unter der Bedingung, dass der *Markov*-Prozess an der Stelle  $z$  den Wert  $e_q$  annimmt.

Während zur Beschreibung des diskreten *Markov*-Prozesses noch diskrete Übergangswahrscheinlichkeiten ausreichend sind, ist nun der Übergang zu Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen notwendig, da  $\bar{\mathbf{x}}^*$  kontinuierlich über dem Vektorraum verteilt ist.

Drückt man die Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion aus und betrachtet ein kleines Volumenelement in der Umgebung des Vektors  $\bar{\mathbf{x}}^*$

$$p_q(\bar{\mathbf{x}}^*, z) = \lim_{\Delta \bar{\mathbf{x}}^* \rightarrow \mathbf{0}} \mathcal{P} \{ \bar{\mathbf{x}}^*(z) - \Delta \bar{\mathbf{x}}^* \leq \bar{\mathbf{x}}^*(z) \leq \bar{\mathbf{x}}^*(z) + \Delta \bar{\mathbf{x}}^* \mid m(z) = e_q \} \quad (4.40)$$

$$= \lim_{\Delta \bar{\mathbf{x}}^* \rightarrow \mathbf{0}} \int_{x_1^* - \Delta x_1^*}^{x_1^* + \Delta x_1^*} \dots \int_{x_N^* - \Delta x_N^*}^{x_N^* + \Delta x_N^*} f_q(\bar{\mathbf{x}}^*, z) dx_1^* \dots dx_N^* \quad (4.41)$$

$$\approx f_q(\bar{\mathbf{x}}^*, z) \Delta V_{q, \bar{\mathbf{x}}^*(z)}, \quad (4.42)$$

so erhält man mit Hilfe der Gleichung (4.39)

$$f_q(\bar{\mathbf{x}}^*, z + \Delta z) \Delta V_{q, \bar{\mathbf{x}}^*(z + \Delta z)} = (1 + \lambda_{q,q} \Delta z) f_q(\bar{\mathbf{x}}^*, z) \Delta V_{q, \bar{\mathbf{x}}^*(z)} + \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq q}}^Q \lambda_{q,p} \Delta z f_p(\bar{\mathbf{x}}^*, z) \Delta V_{p, \bar{\mathbf{x}}^*(z)}. \quad (4.43)$$

Diese Gleichung stellt eine Wahrscheinlichkeitsbilanz dar. Die Wahrscheinlichkeit, dass sich der Vektor  $\bar{\mathbf{x}}^*$  in einem Volumenelement  $\Delta V_{q, \bar{\mathbf{x}}^*(z + \Delta z)}$  bei  $z + \Delta z$  befindet, ist danach gleich der Summe aller  $Q$  Wahrscheinlichkeiten, dass der Vektor  $\bar{\mathbf{x}}^*(z)$  in der Nähe von  $z$  sich in einem Volumenelement  $\Delta V_{q', \bar{\mathbf{x}}^*(z)}$  befand, multipliziert mit der zugehörigen Übergangswahrscheinlichkeit von Zustand  $q'$  nach  $q$ . Dabei liegt das Volumen  $\Delta V_{q', \bar{\mathbf{x}}^*(z)}$  um einen Punkt  $\bar{\mathbf{x}}^*(z)$ , der mit Hilfe des Matrizanten zum Punkt  $\bar{\mathbf{x}}^*(z + \Delta z)$  führt. Dies ist in Abbildung 4.15 dargestellt.

Die Volumenelemente ergeben sich als Produkt der Abweichungen  $\Delta x_i^*$  um den Punkt  $\bar{\mathbf{x}}^*$  als

$$\Delta V_{q, \bar{\mathbf{x}}^*(z + \Delta z)} = \prod_{i=1}^N \Delta x_i^*(z + \Delta z) \quad (4.44)$$

$$\Delta V_{q, \bar{\mathbf{x}}^*(z)} = \prod_{i=1}^N \Delta x_i^*(z). \quad (4.45)$$

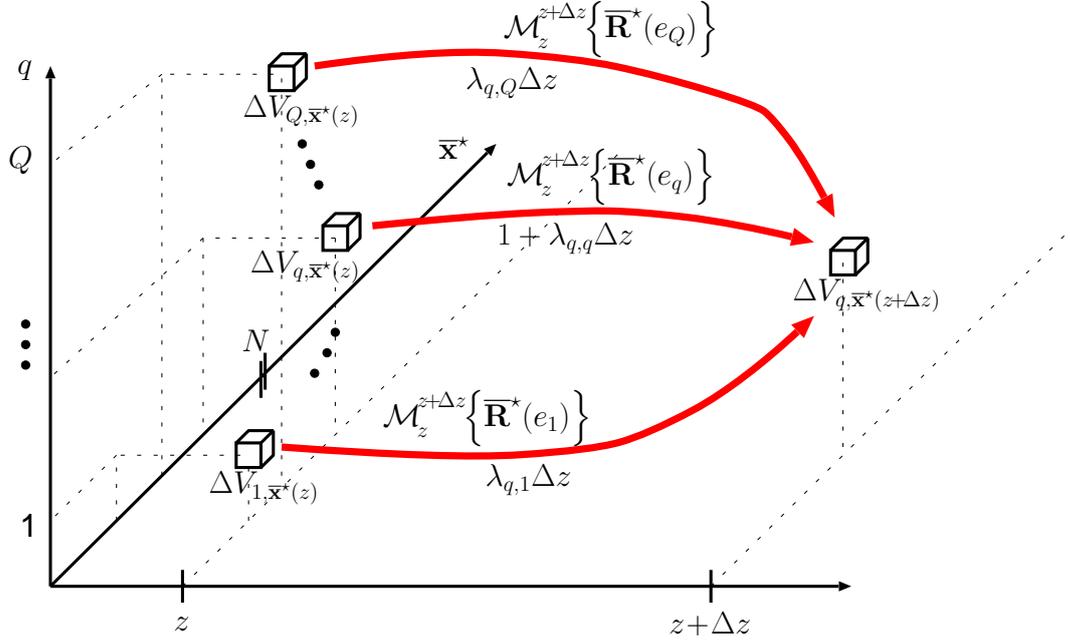


Abbildung 4.15: Darstellung zum Übergang der Wahrscheinlichkeiten von kleinen Volumenelementen des Vektors  $\bar{\mathbf{x}}^*$  an unterschiedlichen Orten

Für kleine  $\Delta z$  und  $m(z) = e_q$  gilt

$$\Delta \bar{\mathbf{x}}^*(z) = \left( \bar{\mathbf{E}} - \bar{\mathbf{R}}^*(e_q) \Delta z \right) \Delta \bar{\mathbf{x}}^*(z + \Delta z), \quad (4.46)$$

und für eine Komponente des Vektors  $\Delta \bar{\mathbf{x}}^*$  folgt

$$\Delta x_i^*(z) = \Delta x_i^*(z + \Delta z) - \Delta z \sum_{j=1}^N R_{i,j}^*(e_q). \quad (4.47)$$

Damit lässt sich das Volumenelement an der Stelle  $z$  durch das an der Stelle  $z + \Delta z$  ausdrücken

$$\begin{aligned} \Delta V_{q, \bar{\mathbf{x}}^*(z)} &= \prod_{i=1}^N \left( \Delta x_i^*(z + \Delta z) - \Delta z \sum_{j=1}^N R_{i,j}^*(e_q) \right) \\ &= \underbrace{\prod_{i=1}^N \Delta x_i^*(z + \Delta z)}_{\Delta V_{q, \bar{\mathbf{x}}^*(z + \Delta z)}} + \Delta z \sum_{k=1}^N \left( \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N \Delta x_l^*(z + \Delta z) \right) \sum_{j=1}^N R_{l,j}^*(e_q) \Delta x_j^*(z + \Delta z) + O(\Delta z^2). \end{aligned} \quad (4.48)$$

Bildet man die Verhältnisse mittels Division durch  $\Delta V_{q, \bar{\mathbf{x}}^*(z + \Delta z)}$ , erhält man

$$\frac{\Delta V_{q, \bar{\mathbf{x}}^*(z)}}{\Delta V_{q, \bar{\mathbf{x}}^*(z + \Delta z)}} = 1 - \Delta z \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N R_{k,j}^*(e_q) \frac{\Delta x_j^*(z + \Delta z)}{\Delta x_k^*(z + \Delta z)} + O(\Delta z^2) \quad (4.49)$$

und

$$\frac{\Delta V_{p,\bar{\mathbf{x}}^*}(z)}{\Delta V_{q,\bar{\mathbf{x}}^*(z+\Delta z)} = 1 - \Delta z \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N R_{k,j}^*(e_p) \frac{\Delta x_j^*(z+\Delta z)}{\Delta x_k^*(z+\Delta z)} + O(\Delta z^2). \quad (4.50)$$

Teilt man Gleichung (4.43) durch das Volumenelement  $\Delta V_{q,\bar{\mathbf{x}}^*(z+\Delta z)}$ , ergibt sich unter Verwendung von (4.49) und (4.50)

$$\begin{aligned} f_q(\bar{\mathbf{x}}^*, z+\Delta z) &= (1 + \lambda_{q,q}\Delta z) f_q(\bar{\mathbf{x}}^*, z) \left( 1 - \Delta z \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N R_{k,j}^*(e_q) \frac{\Delta x_j^*}{\Delta x_k^*} + O(\Delta z^2) \right) \\ &+ \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq q}}^Q \lambda_{q,p}\Delta z f_p(\bar{\mathbf{x}}^*, z) \left( 1 - \Delta z \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N R_{k,j}^*(e_p) \frac{\Delta x_j^*}{\Delta x_k^*} + O(\Delta z^2) \right). \end{aligned} \quad (4.51)$$

Subtrahiert man weiterhin  $f_q(\bar{\mathbf{x}}^*, z)$  von beiden Seiten der Gleichung, teilt durch  $\Delta z$  und bildet schließlich den Grenzwert  $\Delta z \rightarrow 0$ , so erhält man eine Differentialgleichung für die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung

$$\frac{d}{dz} f_q(\bar{\mathbf{x}}^*, z) = \sum_{p=1}^Q \lambda_{q,p} f_p(\bar{\mathbf{x}}^*, z) - \text{tr} \left( \bar{\mathbf{R}}^*(e_q) \right) f_q(\bar{\mathbf{x}}^*, z). \quad (4.52)$$

Für alle Darstellungen einer gleichförmigen Leitung verschwindet grundsätzlich die Spur der Parametermatrix  $\bar{\mathbf{R}}^*(e_q)$ . Da beim Ansatz der *Markov*-Leitung von einer abschnittsweise konstanten Parametermatrix  $\bar{\mathbf{R}}^*(e_q)$  ausgegangen wird, kann der Spur-Term in der Gleichung entfallen.

Es ist aber eine kontinuierliche Matrizenfunktion\* über den ganzen Ausbreitungsweg  $z$  notwendig. Dies ist nur in der  $\mathbf{v}$ - $\mathbf{i}$ -Darstellung und der  $\mathbf{v}$ - $\mathbf{v}_0$ -Darstellung nach Anhang B gewährleistet, da in der  $\mathbf{v}_1$ - $\mathbf{v}_2$ -Darstellung und  $\mathbf{w}_1$ - $\mathbf{w}_2$ -Darstellung aufgrund der Sprünge des Wellenwiderstandes an den Segmentenden der Term  $\mathbf{G}(z)$  nicht verschwindet. D.h. die  $\mathbf{v}_1$ - $\mathbf{v}_2$ -Darstellung und die  $\mathbf{w}_1$ - $\mathbf{w}_2$ -Darstellung verletzen die Annahmen, die gemacht wurden und dürfen hier zur Darstellung der *Markov*-Leitung nicht verwendet werden.

Die Gleichung (4.52) vereinfacht sich dann zu

$$\frac{d}{dz} f_q(\bar{\mathbf{x}}^*, z) = \sum_{p=1}^Q \lambda_{q,p} f_p(\bar{\mathbf{x}}^*, z). \quad (4.53)$$

Die erhaltene Gleichung entspricht von der Struktur her der *Kolmogorow*-Gleichung für den Fall des skalaren kontinuierlichen *Markov*-Prozesses. Hier werden jedoch keine diskreten Wahrscheinlichkeiten, sondern Wahrscheinlichkeitsdichten des Zustandsvektors  $\bar{\mathbf{x}}^*$  untersucht. Leider lässt sich die Gleichung (4.53) nicht direkt auswerten. Zwar muss die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion diese Gleichung erfüllen, sie kann aber nicht auf der Basis dieser

\*Endliche Sprungstellen sind dabei erlaubt, aber die Funktion muss endlich sein, da sonst die *Lipschitz*-Bedingung verletzt wird.

Gleichung direkt bestimmt werden. Allerdings kann sie zur Bestimmung von Momenten des Lösungsvektors  $\bar{\mathbf{x}}^*(z)$  genutzt werden. In den folgenden Abschnitten werden Methoden zur Bestimmung der Mittelwerte und der Varianzen und Kovarianzen für jeden möglichen Zustand angegeben.

Bisher wurden nur bedingte Wahrscheinlichkeiten und Wahrscheinlichkeitsdichten betrachtet. Bedingung war immer, dass der *Markov*-Prozess an der betrachteten Stelle  $z$  den Wert  $e_q$  annimmt. Da er aber einen beliebigen Wert aus den vorgegebenen Zuständen  $1 \dots Q$  annehmen kann und auch muss, ergibt sich die Wahrscheinlichkeit für einen bestimmten Wert des Lösungsvektors  $\bar{\mathbf{x}}^*$  an der Stelle  $z$  als die Summe über alle möglichen Zustände des *Markov*-Prozesses

$$p(\bar{\mathbf{x}}^*, z) = \mathcal{P} \{ \bar{\mathbf{x}}^*(z) \} = \sum_{q=1}^Q p_q(\bar{\mathbf{x}}^*, z). \quad (4.54)$$

Was für die Wahrscheinlichkeiten gilt, muss auch für die Wahrscheinlichkeitsdichten gelten

$$f_{\bar{\mathbf{x}}^*}(\bar{\mathbf{x}}^*, z) = \sum_{q=1}^Q f_q(\bar{\mathbf{x}}^*, z). \quad (4.55)$$

Unter der Berücksichtigung von (4.55) ergibt sich der stochastische Mittelwert (1. Moment) des Lösungsvektors  $\bar{\mathbf{x}}^*(z)$  als Summe über alle Mittelwerte der  $Q$  möglichen Zustände an einem Ort  $z$

$$\langle \bar{\mathbf{x}}^*(z) \rangle = \sum_{q=1}^Q \int_{V_{\bar{\mathbf{x}}^*}} \bar{\mathbf{x}}^*(z) f_q(\bar{\mathbf{x}}^*, z) dV_{\bar{\mathbf{x}}^*} = \sum_{q=1}^Q \langle \bar{\mathbf{x}}^*(z) \rangle_q. \quad (4.56)$$

Desweiteren gilt für die zweiten Momente<sup>†</sup>

$$\langle \bar{\mathbf{x}}^*(z) \bar{\mathbf{x}}^{*\top}(z) \rangle = \sum_{q=1}^Q \int_{V_{\bar{\mathbf{x}}^*}} \bar{\mathbf{x}}^*(z) \bar{\mathbf{x}}^{*\top}(z) f_q(\bar{\mathbf{x}}^*, z) dV_{\bar{\mathbf{x}}^*} = \sum_{q=1}^Q \langle \bar{\mathbf{x}}^*(z) \bar{\mathbf{x}}^{*\top}(z) \rangle_q. \quad (4.57)$$

Damit lassen sich die statistischen Kenngrößen auch für den interessierenden Lösungsvektor angeben.

#### 4.4.1 Mittelwerte

Eine Bestimmungsgleichung für Mittelwerte in jedem möglichen Zustand  $\langle \bar{\mathbf{x}}^*(z) \rangle_q$  kann man mit Hilfe der Gleichung (4.53) erhalten, indem man sie mit  $\bar{\mathbf{x}}^*(z)$  multipliziert und über den gesamten Vektorraum von  $\bar{\mathbf{x}}^*(z)$  integriert.

<sup>†</sup>Identische Beziehungen gelten auch für alle höheren Momente, welche aber im weiteren Verlauf nicht benötigt werden.

Durch Anwendung der Produktregel und nachfolgender Integration erhält man dann

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \int_{V_{\bar{\mathbf{x}}^*}} \underbrace{\bar{\mathbf{x}}^*(z) f_q(\bar{\mathbf{x}}^*, z)}_{\langle \bar{\mathbf{x}}^*(z) \rangle_q} dV_{\bar{\mathbf{x}}^*} - \int_{V_{\bar{\mathbf{x}}^*}} \frac{d}{dz} [\bar{\mathbf{x}}^*(z)] f_q(\bar{\mathbf{x}}^*, z) dV_{\bar{\mathbf{x}}^*} \\ = \int_{V_{\bar{\mathbf{x}}^*}} \sum_{p=1}^Q \lambda_{q,p} \bar{\mathbf{x}}^*(z) f_p(\bar{\mathbf{x}}^*, z) dV_{\bar{\mathbf{x}}^*}, \end{aligned} \quad (4.58)$$

und weiterhin durch Einsetzen der Ausgangsdifferentialgleichung

$$\frac{d}{dz} \langle \bar{\mathbf{x}}^*(z) \rangle_q = \bar{\mathbf{R}}^*(e_q) \langle \bar{\mathbf{x}}^*(z) \rangle_q + \sum_{p=1}^Q \lambda_{q,p} \langle \bar{\mathbf{x}}^*(z) \rangle_p. \quad (4.59)$$

Fasst man alle  $Q$  Gleichungen (4.59) zusammen, erhält man folgende Supermatrizengleichung

$$\frac{d}{dz} \begin{bmatrix} \langle \bar{\mathbf{x}}^*(z) \rangle_1 \\ \vdots \\ \langle \bar{\mathbf{x}}^*(z) \rangle_Q \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{R}}^*(e_1) + \lambda_{1,1} \bar{\mathbf{E}} & \dots & \lambda_{1,Q} \bar{\mathbf{E}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{Q,1} \bar{\mathbf{E}} & \dots & \bar{\mathbf{R}}^*(e_Q) + \lambda_{Q,Q} \bar{\mathbf{E}} \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{P}}_{(QN,QN)} = \oplus \bar{\mathbf{R}}^*(e_q) + \lambda \otimes \bar{\mathbf{E}}_{(N,N)}} \underbrace{\begin{bmatrix} \langle \bar{\mathbf{x}}^*(z) \rangle_1 \\ \vdots \\ \langle \bar{\mathbf{x}}^*(z) \rangle_Q \end{bmatrix}}_{\overline{\langle \bar{\mathbf{x}}^*(z) \rangle}}. \quad (4.60)$$

Prinzipiell können die Übergangsraten  $\lambda_{p,q}$  vom Ort  $z$  abhängig sein. Dann ergibt sich die Differentialgleichung (4.60) mit variablen Koeffizienten und es müssen Lösungsmethoden aus dem Kapitel 3.2 zum Einsatz kommen.

Geht man jedoch davon aus, dass die Wechselwahrscheinlichkeiten – und damit die Übergangsraten – entlang des Kabelweges gleich bleiben, so lässt sich leicht die Lösung der Gleichung (4.60) und damit der Mittelwert an beliebigen Stellen  $z$  angeben

$$\overline{\langle \bar{\mathbf{x}}^*(z) \rangle} = e^{\bar{\mathbf{P}}(z-z_0)} \overline{\langle \bar{\mathbf{x}}^*(z_0) \rangle}. \quad (4.61)$$

Als Anfangswert ist anzusetzen

$$\overline{\langle \bar{\mathbf{x}}^*(z_0) \rangle} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \bar{\mathbf{x}}^*(z_0, e_1) \\ \vdots \\ \alpha_Q \bar{\mathbf{x}}^*(z_0, e_Q) \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \alpha_q = \mathcal{P} \{m(z_0) = e_q\}; \quad \sum_{q=1}^Q \alpha_q = 1. \quad (4.62)$$

Dabei stellen  $\bar{\mathbf{x}}^*(z_0, e_q)$  die Anfangswerte an der Stelle  $z_0$  für den Fall dar, dass das erste Segment die Realisierung  $q$  des *Markov*-Prozesses annimmt. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist  $\alpha_q$ . Für die Bestimmung der Mittelwerte des Matrizenanteils nimmt der Vektor  $\bar{\mathbf{x}}^*(z_0, e_q)$  für alle  $q = 1 \dots Q$  nacheinander die Werte einer Spalte einer Einheitsmatrix der Dimension  $N$  an. Es gilt also

$$\overline{\langle \mathcal{M}_{z_0}^{z_0} \{ \bar{\mathbf{R}}^* \} \rangle} = [\bar{\mathbf{x}}_1^*(z_0) \quad \dots \quad \bar{\mathbf{x}}_N^*(z_0)] = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{E}} & \bar{\mathbf{0}} \\ \bar{\mathbf{0}} & \bar{\mathbf{E}} \end{bmatrix}. \quad (4.63)$$

Durch Summieren über die Mittelwertanteile der einzelnen Möglichkeiten  $1 \dots Q$  gemäß Gleichung (4.56) ergibt sich der zu erwartende Mittelwert für den Matrizenanteil an der Stelle  $z$ .

### 4.4.2 Varianzen und Kovarianzen

Um die zweiten Momente zu erhalten, wird – ähnlich wie beim Mittelwert – die Gleichung (4.53) mit  $\bar{\mathbf{x}}^*(z) \bar{\mathbf{x}}^{*\top}(z)$  multipliziert und über den Vektorraum von  $\bar{\mathbf{x}}^*(z)$  integriert. Man erhält dann

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \underbrace{\int_{V_{\bar{\mathbf{x}}^*}} \bar{\mathbf{x}}^*(z) \bar{\mathbf{x}}^{*\top}(z) f_q(\bar{\mathbf{x}}^*, z) dV_{\bar{\mathbf{x}}^*}}_{\langle \bar{\mathbf{x}}^*(z) \bar{\mathbf{x}}^{*\top}(z) \rangle_q} - \int_{V_{\bar{\mathbf{x}}^*}} \frac{d}{dz} \left[ \bar{\mathbf{x}}^*(z) \bar{\mathbf{x}}^{*\top}(z) \right] f_q(\bar{\mathbf{x}}^*, z) dV_{\bar{\mathbf{x}}^*} \\ = \int_{V_x} \sum_{p=1}^Q \lambda_{q,p} \bar{\mathbf{x}}^*(z) \bar{\mathbf{x}}^{*\top}(z) f_p(\bar{\mathbf{x}}^*, z), \end{aligned} \quad (4.64)$$

und durch Einsetzen des Ausgangssystems und des transponierten Systems

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \langle \bar{\mathbf{x}}^*(z) \bar{\mathbf{x}}^{*\top}(z) \rangle_q = \bar{\mathbf{R}}^*(e_q) \langle \bar{\mathbf{x}}^*(z) \bar{\mathbf{x}}^{*\top}(z) \rangle_q + \langle \bar{\mathbf{x}}^*(z) \bar{\mathbf{x}}^{*\top}(z) \rangle_q \bar{\mathbf{R}}^{*\top}(e_q) \\ + \sum_{p=1}^Q \lambda_{q,p} \langle \bar{\mathbf{x}}^*(z) \bar{\mathbf{x}}^{*\top}(z) \rangle_p. \end{aligned} \quad (4.65)$$

Durch Anwendung einer Gleichungsidentität für das Kronecker-Produkt<sup>‡</sup> folgt wieder ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \text{colvec} \left( \langle \bar{\mathbf{x}}^*(z) \bar{\mathbf{x}}^{*\top}(z) \rangle_q \right) = \left( \bar{\mathbf{E}} \otimes \bar{\mathbf{R}}^*(e_q) + \bar{\mathbf{R}}^*(e_q) \otimes \bar{\mathbf{E}} \right) \text{colvec} \left( \langle \bar{\mathbf{x}}^*(z) \bar{\mathbf{x}}^{*\top}(z) \rangle_q \right) \\ + \sum_{p=1}^Q \lambda_{q,p} \text{colvec} \left( \langle \bar{\mathbf{x}}^*(z) \bar{\mathbf{x}}^{*\top}(z) \rangle_p \right). \end{aligned} \quad (4.66)$$

Wie im vorhergehenden Abschnitt werden diese Gleichungen für die  $Q$  verschiedenen Möglichkeiten zu einer Supermatrizengleichung zusammengefasst. Die Lösung ergibt sich wie in Gleichung (4.61) mit Hilfe der Matrixexponentialfunktion

$$\overline{\text{colvec} \left( \langle \bar{\mathbf{x}}^*(\mathbf{z}) \bar{\mathbf{x}}^{*\top}(\mathbf{z}) \rangle \right)} = e^{\bar{\mathbf{P}}(z-z_0)} \overline{\text{colvec} \left( \langle \bar{\mathbf{x}}^*(\mathbf{z}_0) \bar{\mathbf{x}}^{*\top}(\mathbf{z}_0) \rangle \right)}, \quad (4.67)$$

allerdings mit

$$\bar{\mathbf{P}}_{(QN^2, QN^2)} = \bigoplus \left[ \bar{\mathbf{E}}_{(N, N)} \otimes \bar{\mathbf{R}}^*(e_q) + \bar{\mathbf{R}}^*(e_q) \otimes \bar{\mathbf{E}}_{(N, N)} \right] + \lambda \bigotimes \bar{\mathbf{E}}_{(N^2, N^2)}. \quad (4.68)$$

Man beachte hier, dass zur Bestimmung der zweiten Momente die Dimension der Supermatrizengleichung quadratisch mit  $N$  und linear mit  $Q$  wächst. Bei der Berechnung noch

<sup>‡</sup>Wenn gilt  $\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{B} + \mathbf{C} = \mathbf{D}$ , dann gilt auch  $(\mathbf{E} \otimes \mathbf{A} + \mathbf{B}^\top \otimes \mathbf{E}) \text{colvec}(\mathbf{X}) + \text{colvec}(\mathbf{C}) = \text{colvec}(\mathbf{D})$  [66].

höherer Momente wächst die Dimension mit Potenzen von  $N$ , die der Ordnung der Momente entsprechen.

Auch hier ergibt sich der Anfangswert in der Gleichung (4.67) als Supervektor aus den Anfangswerten  $\langle \bar{\mathbf{x}}^*(z_0, e_q) \bar{\mathbf{x}}^*(z_0, e_q)^\top \rangle$  der jeweiligen Realisierung  $q$  multipliziert mit der entsprechenden Wahrscheinlichkeit  $\alpha_q$ .

Zur Bestimmung der zweiten Momente des Matrizenanteils wird wieder eine Spalte  $\bar{\mathbf{x}}_n^*(z_0)$  aus Gleichung (4.63) entnommen, mit der Transponierten multipliziert und als Anfangswert verwendet.

Durch Summieren über die einzelnen Anteile der möglichen Zustände ergeben sich die an der Stelle  $z$  zu erwartenden zweiten Momente. Mit Hilfe dieser zweiten Momente können die Varianzen und Kovarianzen angegeben werden. Es ergibt sich

$$\text{Var} \{x_i^*\} = \sigma_{x_i^*}^2 = \langle x_i^* x_i^* \rangle - \langle x_i^* \rangle^2 \quad (4.69)$$

und

$$\text{Cov} \{x_i^*, x_k^*\} = C_{x_i^* x_k^*} = \langle x_i^* x_k^* \rangle - \langle x_i^* \rangle \langle x_k^* \rangle. \quad (4.70)$$

Die Werte  $\langle x_i^* x_i^* \rangle$  sind die Diagonalelemente der Matrix der zweiten Momente und  $\langle x_i^* x_k^* \rangle$  die nicht diagonalen Einträge.

### 4.4.3 Stochastische Eigenschaften abgeleiteter Größen

Sind die Mittelwerte und die Varianzen sowie die Kovarianzen für den Matrizenanteil bekannt, können mit Hilfe der Fehlerfortpflanzung auch die Mittelwerte und Varianzen abgeleiteter Größen bestimmt werden. Da die einzelnen Elemente der Matrix des Matrizenanteils, jeweils der Real- und Imaginärteil, nicht stochastisch unabhängig voneinander sind, müssen hierbei die Kovarianzen mit berücksichtigt werden und eine Fehlerfortpflanzung mit der vollen Fehlermatrix muss durchgeführt werden.

Soll als abgeleitete Größe die Streumatrix untersucht werden, ergibt sich deren komplette Fehlermatrix als

$$\mathbf{v}(\bar{\mathbf{S}}) = \mathbf{J} \mathbf{v}(\bar{\mathbf{M}}^{vi}) \mathbf{J}^\top. \quad (4.71)$$

Diese Näherung resultiert aus der Entwicklung der Transformation  $\bar{\mathbf{M}}^{vi} \rightarrow \bar{\mathbf{S}}$  um den Mittelwert  $\langle \bar{\mathbf{M}}^{vi} \rangle$  und wäre nur bei einer linearen Transformation exakt. Die Fehlermatrix des Matrizenanteils  $\mathbf{v}(\bar{\mathbf{M}}^{vi})$  beinhaltet die Varianzen und Kovarianzen

$$\mathbf{v}(\bar{\mathbf{M}}^{vi}) = \begin{bmatrix} \sigma_{\Re\{M_{1,1}^{vi}\}}^2 & \cdots & C_{\Re\{M_{1,1}^{vi}\}, \Im\{M_{N,N}^{vi}\}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{\Im\{M_{N,N}^{vi}\}, \Re\{M_{1,1}^{vi}\}} & \cdots & \sigma_{\Im\{M_{N,N}^{vi}\}}^2 \end{bmatrix}, \quad (4.72)$$

und die *Jacobi*-Matrix die partiellen Ableitungen an der Stelle der Mittelwerte

$$\mathbf{J} = \left[ \begin{array}{ccc} \frac{\partial \Re\{S_{1,1}\}}{\partial \Re\{M_{1,1}^{vi}\}} & \cdots & \frac{\partial \Re\{S_{1,1}\}}{\partial \Re\{M_{N,N}^{vi}\}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \Im\{S_{N,N}\}}{\partial \Re\{M_{1,1}^{vi}\}} & \cdots & \frac{\partial \Im\{S_{N,N}\}}{\partial \Re\{M_{N,N}^{vi}\}} \end{array} \right] \bigg|_{\langle \bar{\mathbf{M}}^{vi} \rangle}. \quad (4.73)$$

Die Elemente der *Jacobi*-Matrix können entweder für eine feste Dimension aus den Transformationsvorschriften analytisch bestimmt oder numerisch mit

$$\frac{\partial y}{\partial x} \bigg|_{x=\langle x \rangle} \approx \frac{y(\langle x \rangle + \sigma_x) - y(\langle x \rangle - \sigma_x)}{2\sigma_x} \quad (4.74)$$

approximiert werden, wobei  $x$  für die Real- und Imaginärteile der Elemente des Matrizenanten und  $y$  für die Real- und Imaginärteile der Streumatrix stehen.

#### 4.4.4 Beispiel einer *Markov*-Leitung

Die vorgestellte Vorgehensweise soll an einem Beispiel verdeutlicht werden. Hierbei sollen für eine zufällig geführte Leitung die Mittelwerte und (Ko-)Varianzen für die Elemente des Matrizenanten berechnet werden. Vergleichend werden, in Anlehnung an das Kapitel 4.2, die Ergebnisse der stochastischen Simulation einer *Markov*-Leitung verwendet.

Betrachtet wird eine Leitung mit zwei Adern über einer leitenden Ebene bei  $y = 0$  mit folgenden geometrischen Kenndaten

- Länge  $l = 2.22$  m
- Radius des Drahtes  $r = 0.1575$  mm
- minimale Höhe über der Ebene  $h_{\min} = 5$  mm
- maximale Höhe über der Ebene  $h_{\max} = 93$  mm
- minimaler Abstand der Adern  $d_{\min} = 2$  mm
- maximaler Abstand der Adern  $d_{\max} = 118$  mm.

Das Umgebungsmedium ist Luft und das Material der Leiter und der leitenden Ebene ist Kupfer.

Zur Konstruktion der *Markov*-Leitung werden  $Q = 13$  verschiedene Querschnittsgeometrien verwendet. Die Position der Adern bewegt sich dabei im festgelegten Bereich von  $h_{\min}$  bis  $h_{\max}$  und  $d_{\min}$  bis  $d_{\max}$ . Alle möglichen Positionen sind grundsätzlich gleich wahrscheinlich. Allerdings werden aus dieser unendlichen Menge möglicher Leitungsquerschnitte 13

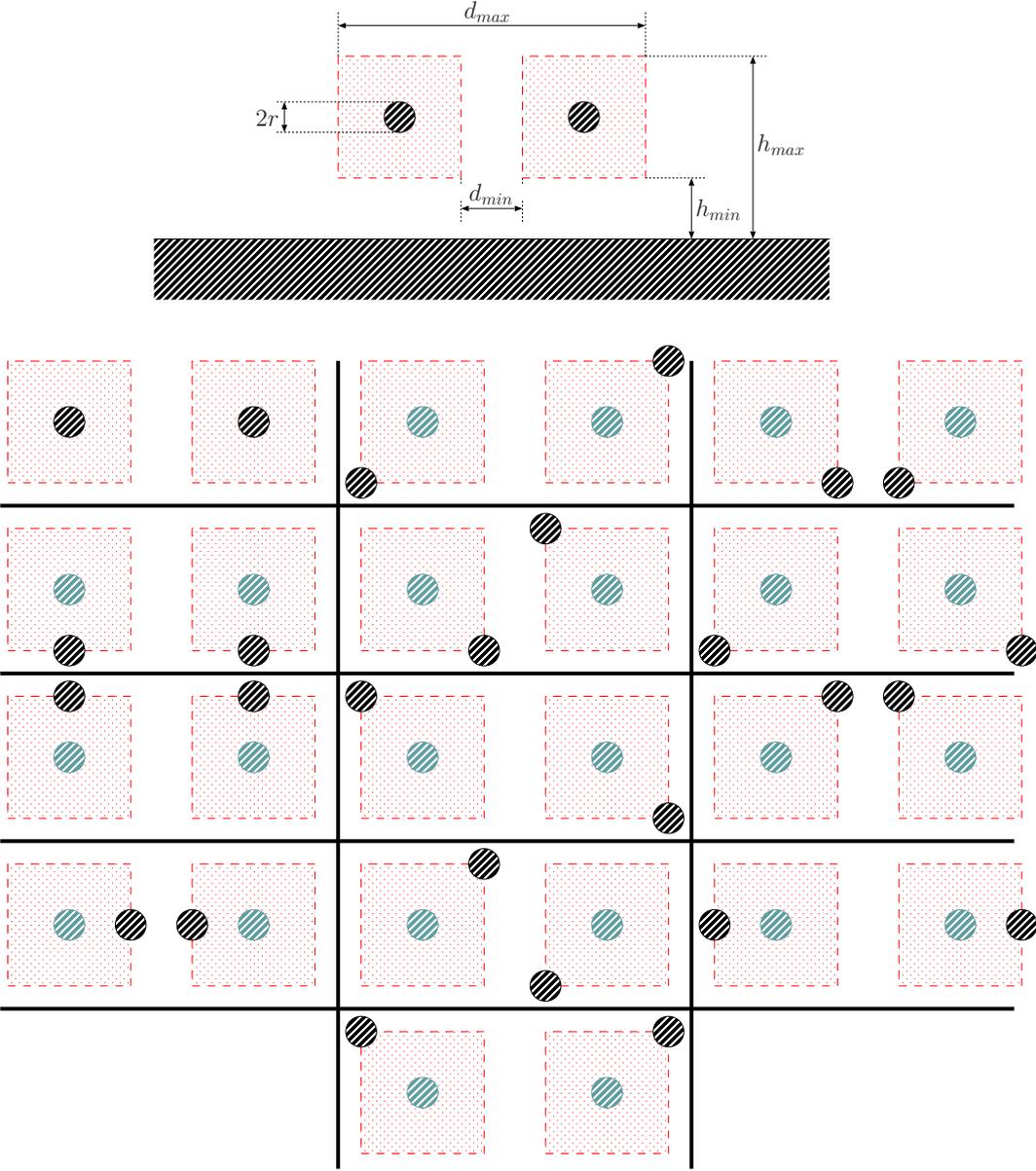


Abbildung 4.16: Verwendete Leiteranordnung und die 13 verschiedenen Querschnitte für das Markov-Modell

Extremanordnungen ausgewählt und zur Konstruktion der Leitung verwendet. Ein Darstellung der Querschnittsparameter und der verwendeten Anordnungen ist in Abbildung 4.16 gezeigt.

Bei der stochastischen Simulation muss sichergestellt sein, dass die entstehenden Realisierungen der Annahme des *Markov*-Prozesses genügen. So muss die Auswahl des jeweils nächsten Segmentquerschnittes gemäß der Übergangsraten  $\lambda_{p,q}$  erfolgen, und die Segmentlänge  $\Delta z_i$  muss eine exponentiell verteilte Zufallsgröße sein. Dies wird beispielsweise durch Transformation einer Gleichverteilung erreicht. Die stochastische Simulation erfolgt nach folgendem Schema

- wiederhole für alle Realisierungen
  1. setze  $z = 0$
  2. wähle mit gleichverteilter Wahrscheinlichkeit eine ganze Zahl  $q$  aus dem Intervall  $[1, Q]$  außer der aktuellen Querschnittsnummer, d.h. wähle einen der verbleibenden 12 Querschnitte
  3. bestimme die aktuelle Segmentlänge  $\Delta z_i = \ln[1 - U(0, 1)] \frac{1}{\lambda_{q,q}}$ <sup>§</sup>
  4. wenn  $z + \Delta z_i > L$ , dann setze  $\Delta z_i = L - z$
  5. berechne  $\mathcal{M}_z^{z+\Delta z_i}\{\bar{\mathbf{R}}^x\} = e^{\bar{\mathbf{R}}^x(e_q) \Delta z_i}$
  6. berechne  $\mathcal{M}_0^{z+\Delta z_i}\{\bar{\mathbf{R}}^x\} = \mathcal{M}_z^{z+\Delta z_i}\{\bar{\mathbf{R}}^x\} \mathcal{M}_0^z\{\bar{\mathbf{R}}^x\}$
  7. setze  $z = z + \Delta z_i$
  8. wiederhole Schleife solange  $z < L$  und gehe zu Punkt 2.
- statistische Auswertung über die Realisierungen, Darstellung als Histogramme

In Abbildung 4.17 sind beispielhaft drei Realisierungen der Leitungsanordnung aus der stochastischen Simulation zu sehen.

Die Wechselwahrscheinlichkeiten zwischen den  $Q = 13$  verschiedenen Möglichkeiten sollen gleich groß und konstant über  $z$  sein, daraus folgt eine konstante Matrix der Übergangsraten  $\lambda$  mit identischen nichtdiagonalen Einträgen

$$\lambda_{q,q} = -10 m^{-1} \quad (4.75)$$

$$\lambda_{q,p} = \frac{10}{12} m^{-1} \quad p \neq q. \quad (4.76)$$

Dies wurde im zweiten Schritt der stochastischen Simulation durch eine gleichwahrscheinliche Auswahl des aktuellen Leitungsquerschnittes erreicht. Bei diesen Werten ergibt sich eine mittlere Segmentlänge von  $0.1m$ , und damit besteht die Leitung im statistischen Mittel aus 22 Segmenten.

<sup>§</sup>  $U(0, 1)$  ist eine gleichverteilte Zufallszahl aus dem Intervall  $[0, 1]$ . Die meisten Programmiersprachen stellen eine entsprechende Funktion zur Verfügung.

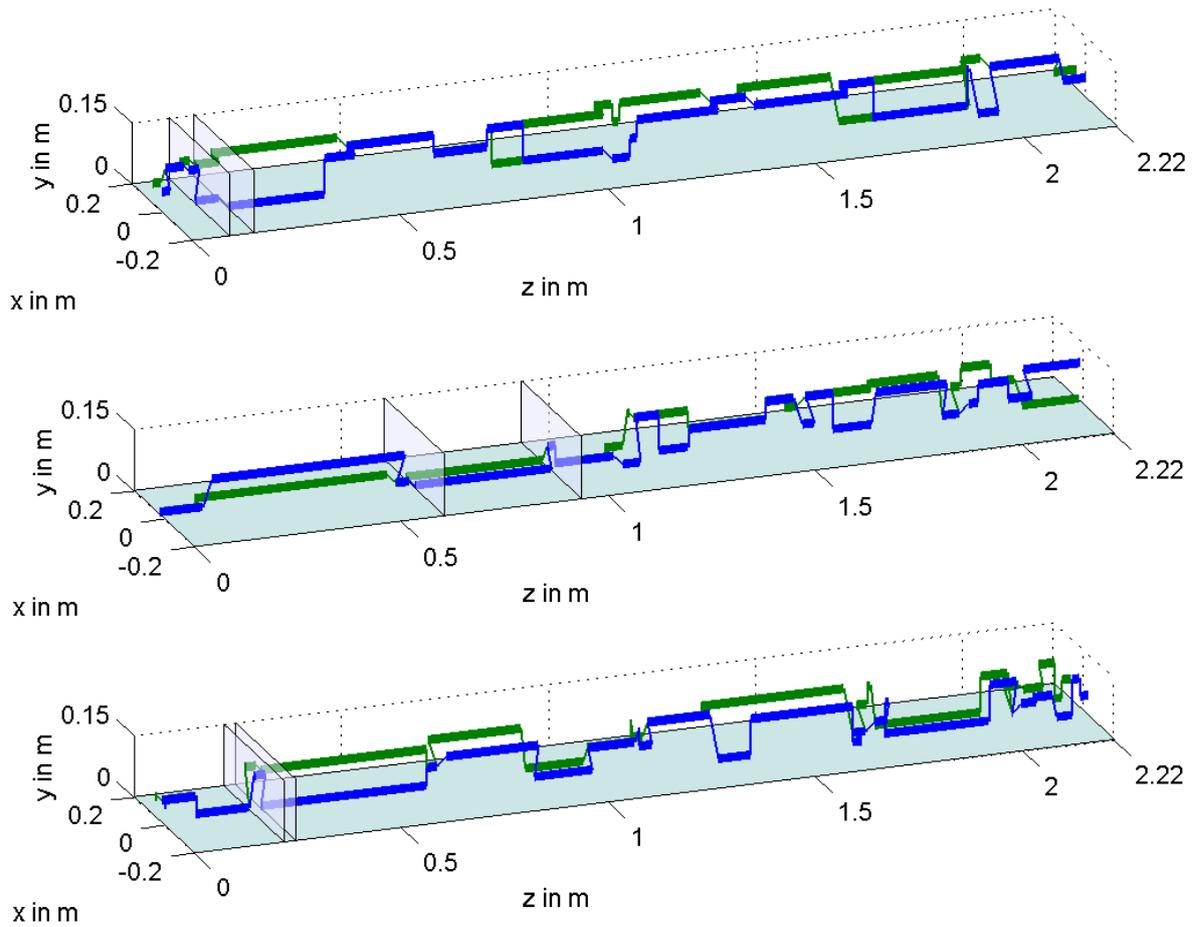


Abbildung 4.17: Drei Realisierungen der *Markov*-Leitung aus der stochastischen Simulation. Dicke Linien kennzeichnen einen segmentweise konstanten Leitungsabschnitt und dünne Linien stellen die idealen elektrischen Verbindungen der Leiter in  $x$ - $y$ -Ebene an den Segmentstoßstellen dar.

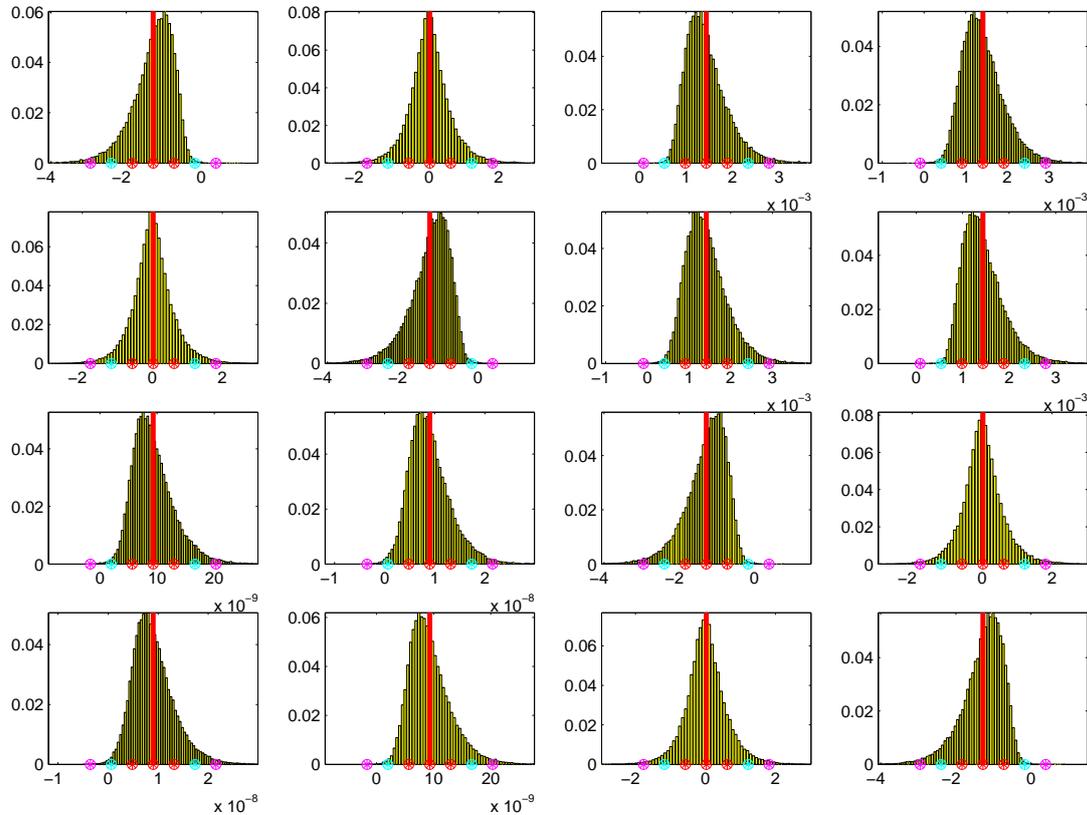


Abbildung 4.18: Normalisierte Histogramme des Realteils vom Matrizen  $\mathcal{M}_0^L\{\bar{\mathbf{R}}^x\}$  bei einer Frequenz von 200 MHz, ermittelt mittels stochastischer Simulation über 50000 Realisierungen. Eingezeichnet sind als roter Balken die Mittelwerte, ermittelt mit der Gleichung (4.61) und als Kreise jeweils  $\pm 1\sigma$ ,  $\pm 2\sigma$  und  $\pm 3\sigma$ , berechnet aus der Varianz nach Gleichung (4.69) bzw. (4.67).

Mit Hilfe der Gleichungen (4.61) und (4.56) bzw. (4.67) und (4.57) können die Mittelwerte und 2. Momente des Matrizen für dieses Beispiel berechnet werden. Aus den 2. Momenten können wiederum Daten wie die Standardabweichung und Kovarianzen bestimmt werden.

Für die Anfangswerte betrug  $\alpha_q = \frac{1}{Q}$ ,  $q = 1 \dots Q$ , da alle Möglichkeiten am Anfang der Leitung mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auftreten können.

In den Abbildungen 4.18 und 4.19 sind die Ergebnisse für die Matrixelemente des Matrizen für die gesamte Leitung im Vergleich zu den normalisierten Histogrammen aus der stochastischen Simulation zu sehen. Der relative Unterschied in der  $\infty$ -Norm des Matrizen bezüglich des Mittelwertes und des 2. Momentes zwischen der analytischen Berechnung nach Abschnitt 4.4 und den statistischen Ergebnissen für 50000 Realisierungen betragen ca. 1 Prozent. Diese hervorragende Übereinstimmung lässt sich auch an den Ergebnissen in den Abbildungen erkennen.

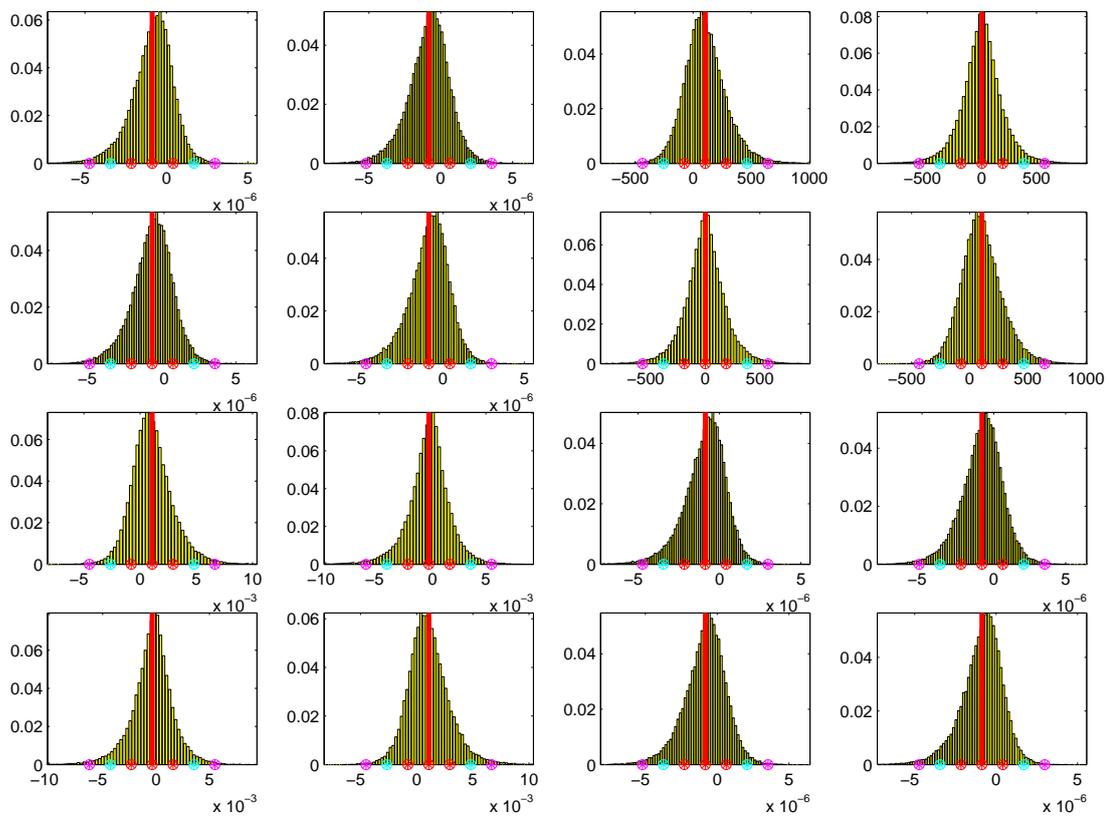


Abbildung 4.19: Normalisierte Histogramme des Imaginärteils vom Matrixanten  $\mathcal{M}_0^L\{\overline{\mathbf{R}}^x\}$  bei einer Frequenz von 200 MHz, zugehörig zur Darstellung des Realteils in Abbildung 4.18.

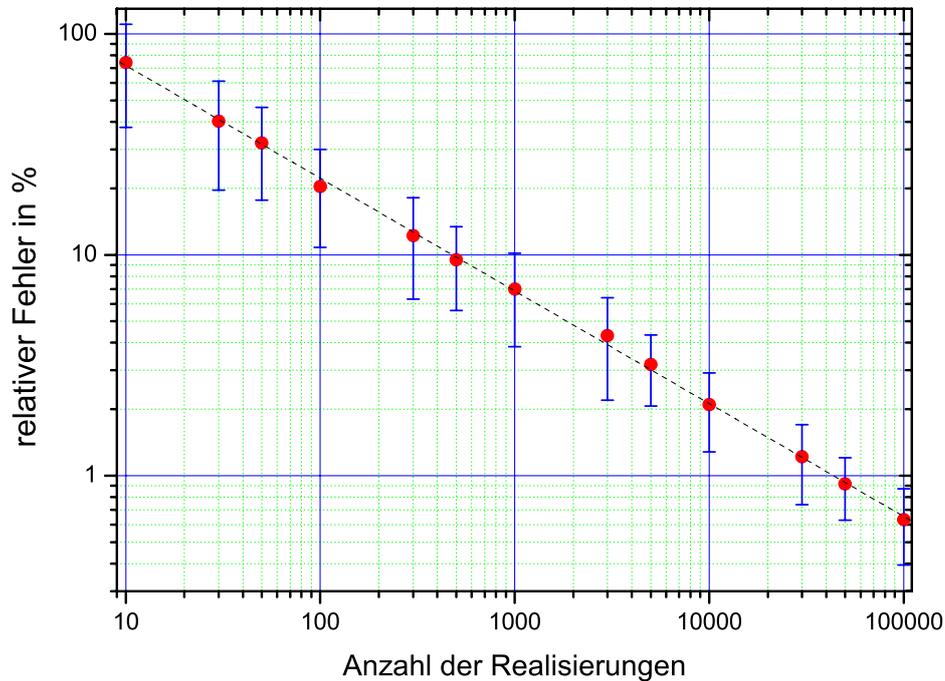


Abbildung 4.20: Maß für den relativen Fehler des Mittelwertes des Matrizen in Prozent  $\frac{\|\langle \mathcal{M}_0^L\{\bar{\mathbf{R}}^x\} \rangle_{Stoch} - \langle \mathcal{M}_0^L\{\bar{\mathbf{R}}^x\} \rangle_{Markov}\|_\infty}{\|\langle \mathcal{M}_0^L\{\bar{\mathbf{R}}^x\} \rangle_{Markov}\|_\infty}$  als Funktion der Anzahl von Realisierungen in der Stochastischen Simulation.

Interessant ist in diesem Zusammenhang auch das Konvergenzverhalten der Mittelwerte der Lösung, ermittelt mit der stochastischen Simulation, gegen die Mittelwerte des *Markov*-Modells. In Abbildung 4.20 ist die Annäherung der Lösung mittels stochastischer Simulation an die Lösung des *Markov*-Modells mit zunehmender Anzahl der Realisierungen deutlich zu erkennen. Ab einer Anzahl von 50000 Realisierungen ist der relative Fehler der Norm kleiner als 1 Prozent. Die eingezeichneten Fehlerbalken sind die Werte der Standardabweichung, ermittelt aus einer mehrfachen stochastischen Simulation mit der jeweiligen Anzahl von Realisierungen. Dies ist eine Möglichkeit, um bei einer stochastischen Simulation eine Aussage über die Genauigkeit des Ergebnisses zu erhalten.

Es sei noch darauf verwiesen, dass die Lösung einer gleichförmigen Leitung mit den gemittelten Parametern  $\langle \bar{\mathbf{R}}^x(\gamma) \rangle$  völlig andere Ergebnisse für den Matrizen liefert, als der Mittelwert nach der *Markov*-Theorie. Dieser Sachverhalt ist bei näherer Betrachtung auch sofort einleuchtend. Bei einer gleichförmigen Leitung mit den gemittelten Parametern treten entlang der Leitung keinerlei Reflexionen und Streuungen auf. Ganz im Gegensatz zur

*Markov*-Leitung, bei der darüber hinaus diese Streuung auch noch an stochastisch verteilten Orten auftritt. Obwohl in der Praxis noch oft angewendet, ist der Weg einer Modellbildung mit gleichförmigen Leitungen *nicht* geeignet, um *zufällig geführte, ungleichförmige* Leitungsstrukturen zu untersuchen. Hier ist zwingend ein Modell notwendig, das verteilte Reflexion und Streuung mit einschließt, wie beispielsweise *Markov*-Leitungen oder stochastische Simulationen ungleichförmiger Strukturen es ermöglichen.

#### 4.4.5 Messung an realer Leitungsanordnung

Nachdem das *Markov*-Modell für die konkrete zufällige ungleichförmige Leitung mit Hilfe der stochastischen Simulation validiert wurde und eine hervorragende Übereinstimmung zeigte, stellt sich die Frage, inwiefern das *Markov*-Modell auch für reale Leitungsanordnungen geeignet ist.

Aus diesem Grunde wurde die Leitungsstruktur aus dem Beispiel in Abschnitt 4.4.4 experimentell aufgebaut. Die Leitung wurde über einem Kupfertisch (2.4 m x 4.2 m) zwischen zwei Aluminiumwinkeln verlegt (siehe Skizze und Foto des Aufbaus in Abbildung 4.21). Zwischen den Winkeln wurden zwei lackisolierte Drähte mit einer Länge von 2.1 m locker verlegt, um eine zufällige Variation der Adernanordnung zu ermöglichen.

An SMA-Buchsen in den Aluminiumwinkeln wurde mit Hilfe eines komplexen 4-Port-Netzwerkanalysators der komplette Satz von S50-Parametern bestimmt.

Die S50-Parametermatrix wurde für 21 verschiedene Leitungsverlegungen gemessen. Dabei wurde die Anordnung zufällig variiert. Einige Ergebnisse sind im Vergleich zu den vorhergesagten Werten des *Markov*-Modells in den Abbildungen 4.22 und 4.23 zu sehen.

Obwohl das *Markov*-Modell ein einfaches stochastisches Modell für eine zufällig ungleichförmige Mehrfachleitung ist, stimmen die vorhergesagten Werte für den Mittelwert über der Frequenz mit den Messungen gut überein. So ist deutlich die Aufweitung der Resonanzbereiche mit steigender Frequenz aufgrund der Verschiebung der Resonanzen der einzelnen Realisierungen zu erkennen. Die berechneten Varianzen erlauben eine Abschätzung der Streuung der Ergebnisse, die durch die Messung bestätigt wird. In Abbildung 4.23 sind beispielsweise Messungen von Realisierungen zu sehen, die im Frequenzbereich zwischen 100 bis 150 MHz sehr nah an die  $3\sigma$ -Grenze heran reichen.

In der Abbildung 4.24 sind der vorhergesagte Mittelwert und die Standardabweichung als Funktion der Frequenz im Vergleich zu den statistischen Ergebnissen aus den Messungen für den Betrag von  $S_{31}$  (Signalübertragung) zu sehen. Obwohl nicht identisch, überrascht doch die gute prinzipielle Übereinstimmung der Kurven. Man beachte auch die relativ geringe Anzahl von 21 Messungen zur Bestimmung der statistischen Kenngrößen. Die Ergebnisse des *Markov*-Modells erlauben eine sehr gute Abschätzung des Einflusses der stochastischen Variationen der realen Leitungsstruktur auf das Übertragungsverhalten.

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass das entwickelte mathematische Modell der *Markov*-Leitung die stochastischen Eigenschaften elektromagnetischer Größen einer Leitung

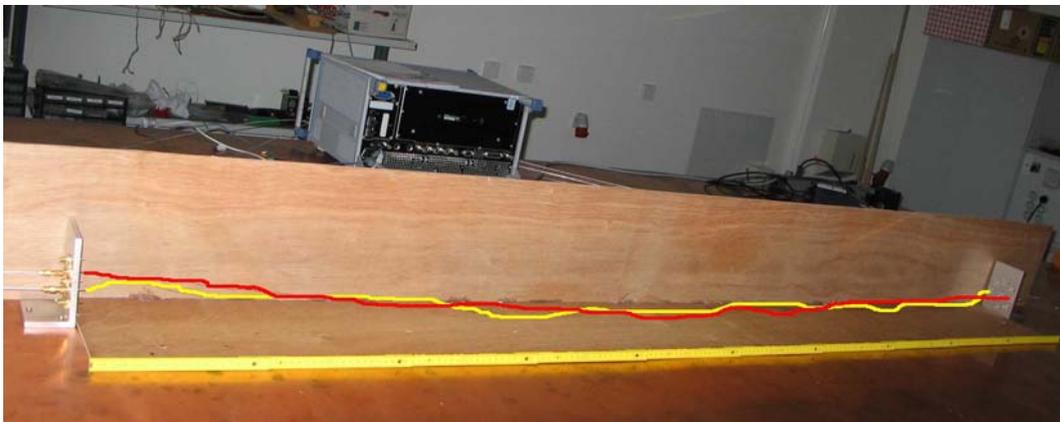
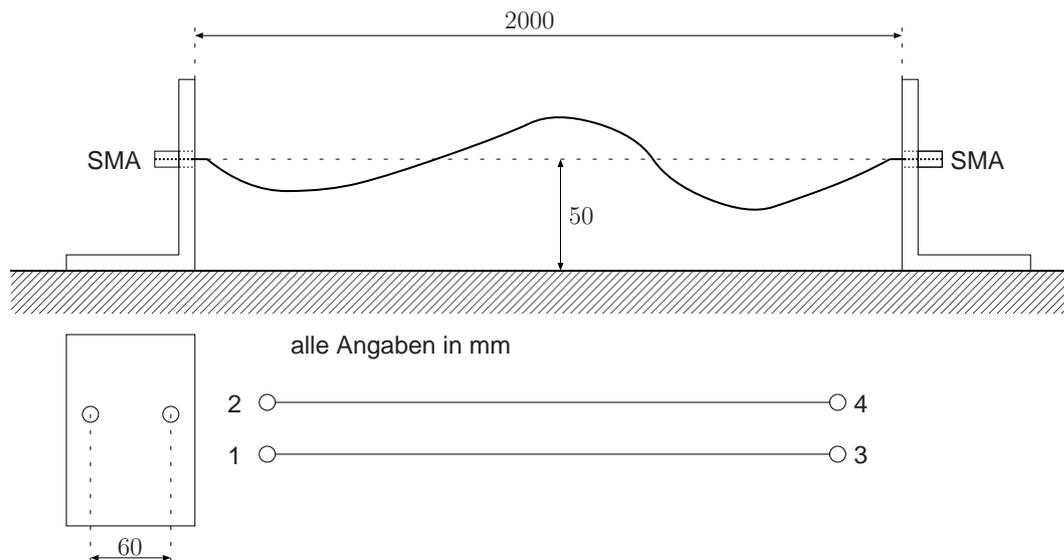


Abbildung 4.21: Versuchsaufbau zur *Markov*leitung über leitender Ebene. Zur Einhaltung der Mindesthöhe wurde eine Sperrholzplatte mit 5 mm Dicke angebracht. Die ungefähre Lage der zwei Adern ist farblich markiert.

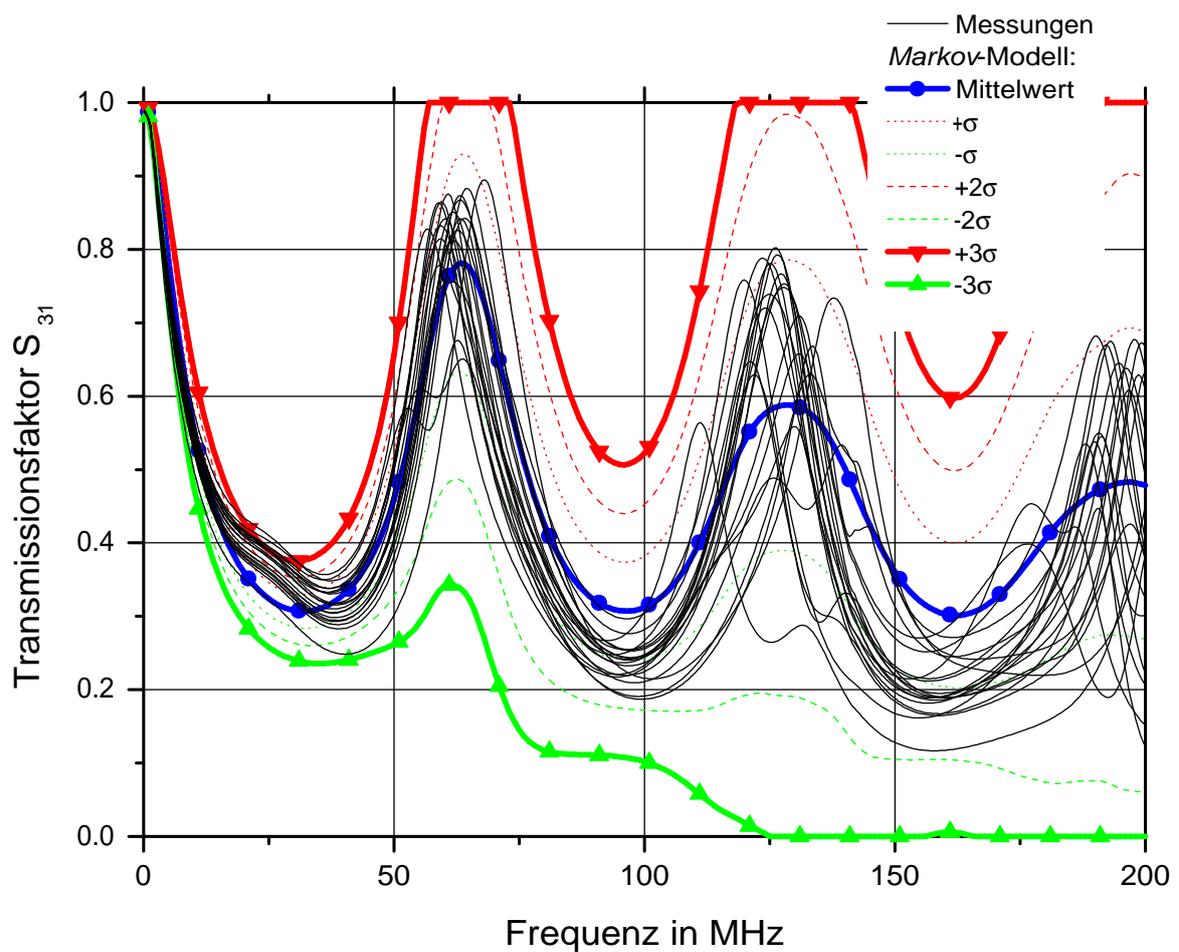


Abbildung 4.22: Signalübertragung (Betrag des Transmissionsfaktor  $S_{31}$ ) über die zufällige Leitungsstruktur als Funktion der Frequenz.

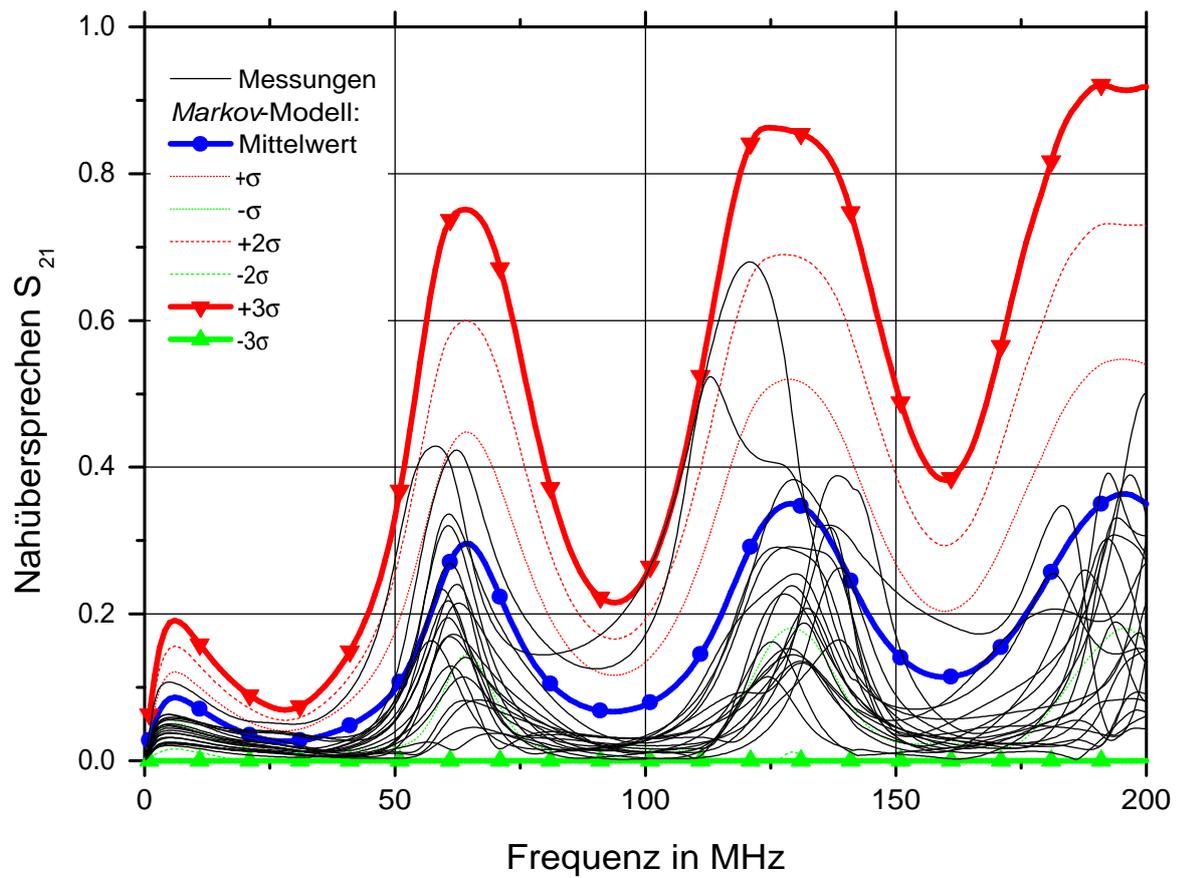


Abbildung 4.23: Nahüberkopplung (Betrag des Transmissionsfaktor  $S_{21}$ ) auf der zufälligen Leitungsstruktur als Funktion der Frequenz.

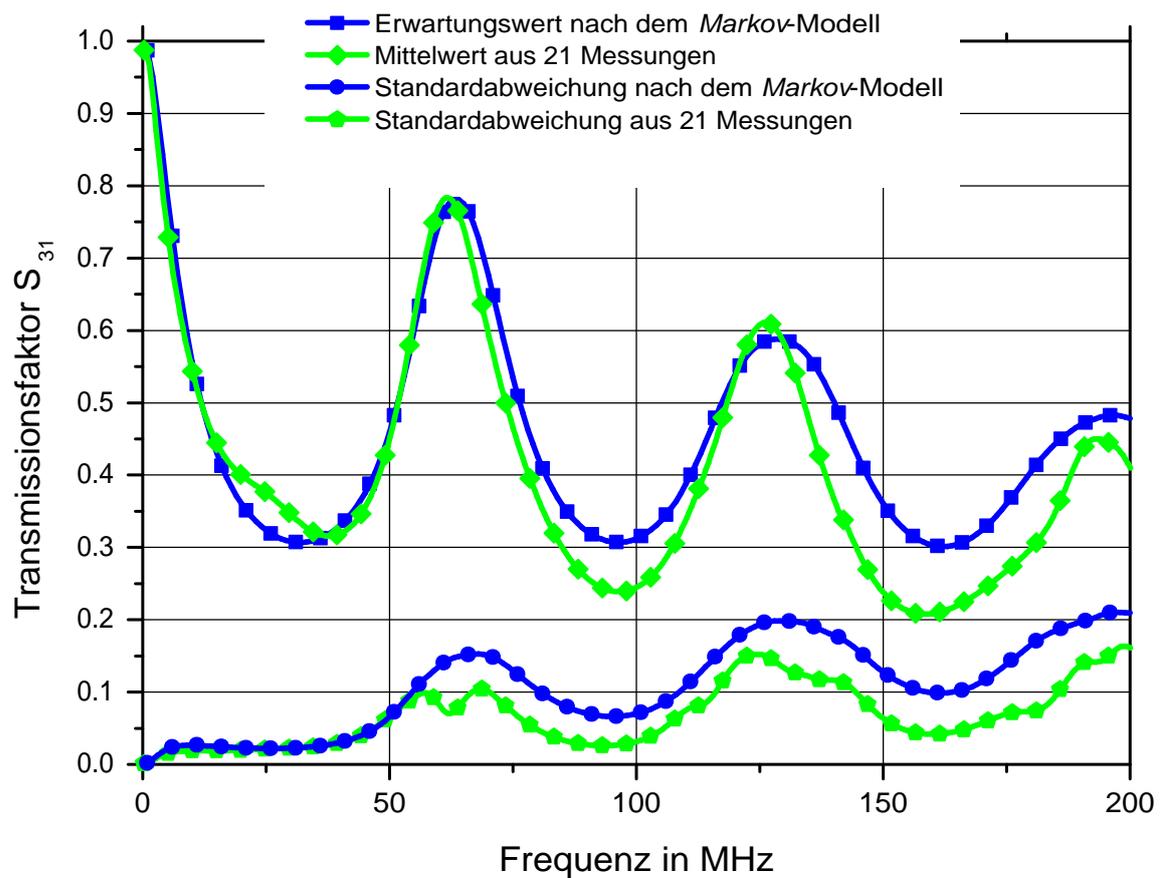


Abbildung 4.24: Mittelwert und Standardabweichung für den Betrag von  $S_{31}$  ermittelt mittels *Markov*-Modell im Vergleich zu der statistischen Auswertung über 21 Messungen der Leitungsstruktur - dargestellt als Funktion der Frequenz.

mit *Markov*-Eigenschaften sehr gut beschreibt. Dies zeigt sowohl das Konvergenzverhalten bezüglich der stochastischen Simulation als auch der Vergleich mit den Messergebnissen. Die real vorhandene kontinuierliche Streuung entlang einer ungleichförmigen Leitung wird dabei durch diskrete Streuung an den Stoßstellen der Segmente approximiert. Der Ort des Auftretens und die Größe der Streuung sind hingegen zufällige Größen im *Markov*-Modell, was letztlich zu einer sehr realistischen Abbildung des stochastischen Streuverhaltens einer zufällig geführten, ungleichförmigen Leitungsstruktur führt. Dabei ist das *Markov*-Modell für Leitungen mit beliebiger Dimension bzw. Anzahl von Adern anwendbar. Es bleibt allerdings auf die Streueffekte begrenzt, da bisher nur Parameter in der statischen Näherung eingesetzt wurden.

## Kapitel 5

# Zusammenfassung

Das Hauptaugenmerk dieser Arbeit liegt auf der Behandlung ungleichförmiger Mehrfachleitungen. Dabei wird davon ausgegangen, dass die Leitungsbeläge gegeben sind. Es werden verschiedene semi-analytische und numerische Verfahren zur Lösung der Leitungsgleichungen für Mehrfachleitungen mit veränderlichen Leitungsbelägen konstruiert und diskutiert.

Ausgehend von der elektromagnetischen Topologie als Beschreibungs- und Analysemethode komplexer technischer Systeme wird gezeigt, in welcher Art und Weise ungleichförmige Mehrfachleitungen in verschiedenste Netzwerkbeschreibungen der BLT-Gleichungen eingefügt werden können. Somit ist es möglich, Netzwerke von ungleichförmigen Leitungen – auch gemischt mit gleichförmigen – zu berechnen.

Zur Bestimmung der Lösung für eine ungleichförmige Mehrfachleitung werden in dieser Arbeit verschiedene Verfahren vorgeschlagen, in ihrer Effizienz sowie im Fehlerverhalten verglichen und auf Beispielstrukturen angewendet. Dabei werden geschlossene Formeln für die numerische Berechnung des Matrizanten und der äquivalenten Quellen angegeben. Die Potenzreihenapproximation ermöglicht es dabei, Formeln mit beliebiger Approximationsgenauigkeit und damit Genauigkeit in der Abbildung der variablen Leitungsbeläge zu entwickeln. Dabei besitzen die entstehenden rekursiven Reihenformeln gegenüber den numerischen Integrationsverfahren den Vorteil einer entfallenden Schrittweitensteuerung, einfachen Implementation und vorgebbaren Genauigkeit. Ein Interpolationsansatz mit Diagonalisierung der Parametermatrix liefert eine Approximation als Summe vom Matrizanten einer gleichförmigen Leitung mit den Eigenschaften einer gemittelten Parametermatrix und eines Korrekturtermes. Des Weiteren wurden verschiedene numerische Integrationsverfahren wie beispielsweise das Runge-Kutta-Verfahren diskutiert und bezüglich Genauigkeit und Schrittweitensteuerung dargestellt.

Sind der Matrizant und die äquivalenten Quellen bekannt, kann diese Lösung in Netzwerkdarstellungen verwendet werden. Die dafür notwendigen Transformationen zu Propagations-, Streu- oder Y-Matrizen wurden angegeben und die Methodik an einem Beispiel demonstriert.

Einen zweiten Schwerpunkt der Arbeit stellen zufällig geführte, ungleichförmige Leitungen dar. Dabei wird angenommen, dass die Parameter der Leitungen nicht nur eine Funktion

des Ortes  $z$  entlang der Leitung sind, sondern zusätzlich zufällig variieren, beispielsweise aufgrund zufälliger Lageänderungen der einzelnen Adern. Für diesen Fall wird eine *Markov*-Darstellung als ein Modell einer zufälligen ungleichförmigen Mehrfachleitung formuliert und eine Differentialgleichung für die Wahrscheinlichkeitsdichte abgeleitet. Auf deren Basis können entsprechende Differentialgleichungen für die ersten und zweiten Momente der Elemente des Lösungsvektors aufgestellt und gelöst werden. Mit diesen Ergebnissen werden die Mittelwerte, Varianzen und Kovarianzen angegeben. Dies ermöglicht die Bestimmung der vollen Fehlermatrix und damit können die Auswirkungen der zufälligen Variationen auf abgeleitete Größen wie Störströme, Fern- und Nahüberkoppeln, oder Streuparameter mit Hilfe der Fehlerfortpflanzung untersucht werden. Die Anwendbarkeit des *Markov*-Modells wird im Vergleich zu stochastischen Simulationen validiert und anhand eines Beispiels mit Messungen untermauert.

Mit Hilfe von stochastischen Simulationen wurde anhand von Beispielen gezeigt, dass die abschnittsweise gleichförmige Approximation zur Berechnung statistischer Kenngrößen in einem weiten Frequenzbereich geeignet ist. Beachtet werden muss dabei, dass die Segmentlänge als zufällige Größe betrachtet und die Mehrfachleitung nicht äquidistant approximiert wird.

Die dargestellte Theorie der *Markov*-Leitungen ist im Rahmen dieser Arbeit auf das homogene Problem beschränkt. Dabei sollte die Berücksichtigung verteilter Quellen aufgrund von Feldeinkopplung in die Leitungsstrukturen möglich sein und ist ein Ausgangspunkt für weitere, fortführende Arbeiten.

Auch wurden die Differentialgleichungen für die Mittelwerte und 2. Momente der Lösung der *Markov*-Leitungen mit Standardmethoden gelöst. Durch Berücksichtigung der speziellen Struktur der Matrixgleichung – *sparse* Struktur und viele Blockmatrizen sind skalierte Einheitsmatrizen – oder den Versuch der Diagonalisierung kann sicherlich eine Optimierung und Beschleunigung der Berechnung der Lösung erreicht werden.

## Anhang A

### Matrizant

#### A.1 Wichtige Eigenschaften des Matrizants

$$\mathcal{M}_{z_0}^{\tilde{z}}\{\mathbf{A}(\sigma)\} = \mathcal{M}_{z_1}^{\tilde{z}}\{\mathbf{A}(\sigma)\} \mathcal{M}_{z_0}^{\tilde{z}_1}\{\mathbf{A}(\sigma)\} \quad (\text{A.1})$$

$$\mathcal{M}_z^{\tilde{z}_0}\{\mathbf{A}(\sigma)\} = \left(\mathcal{M}_{z_0}^{\tilde{z}}\{\mathbf{A}(\sigma)\}\right)^{-1} \quad (\text{A.2})$$

$$\mathcal{M}_{z_0}^{\tilde{z}}\{\mathbf{A}(\sigma) + \mathbf{B}(\sigma)\} = \mathcal{M}_{z_0}^{\tilde{z}}\{\mathbf{A}(\sigma)\} \mathcal{M}_{z_0}^{\tilde{z}}\{\mathbf{C}(\sigma)\} \quad (\text{A.3})$$

$$\text{mit } \mathbf{C}(\xi) = \left(\mathcal{M}_{z_0}^{\xi}\{\mathbf{A}(\sigma)\}\right)^{-1} \mathbf{B}(\sigma) \mathcal{M}_{z_0}^{\xi}\{\mathbf{A}(\sigma)\}$$

$$\mathcal{M}_{z_0}^{\tilde{z}}\{\mathbf{A}(\sigma) + \mathcal{D}_\sigma \mathbf{B}(\sigma)\} = \mathbf{B}(z) \mathcal{M}_{z_0}^{\tilde{z}}\{\mathbf{B}(\sigma)^{-1} \mathbf{A}(\sigma) \mathbf{B}(\sigma)\} \mathbf{B}(z_0)^{-1} \quad (\text{A.4})$$

$$\text{mit } \mathcal{D}_\sigma \mathbf{B}(\sigma) = \frac{d}{dz} \mathbf{B}(z) \mathbf{B}(z)^{-1}$$

$$\mathcal{M}_{z_0}^{\tilde{z}}\{\mathbf{C} \mathbf{A}(\sigma) \mathbf{C}^{-1}\} = \mathbf{C} \mathcal{M}_{z_0}^{\tilde{z}}\{\mathbf{A}(\sigma)\} \mathbf{C}^{-1} \quad (\text{A.5})$$

$$\text{mit } \mathbf{C} \neq f(\sigma) = \text{const}$$

$$\left[\mathcal{M}_{z_0}^{\tilde{z}}\{\mathbf{A}(\sigma)\}\right]^T = \left[\mathcal{M}_{z_0}^{\tilde{z}}\{-\mathbf{A}^T(\sigma)\}\right]^{-1} \quad (\text{A.6})$$

$$\mathcal{M}_{z_0}^{\tilde{z}}\{-\mathbf{A}(\sigma)\} = \left(\left[\mathcal{M}_{z_0}^{\tilde{z}}\{\mathbf{A}^T(\sigma)\}\right]^{-1}\right)^T \quad (\text{A.7})$$



## Anhang B

# Darstellungsformen der Leitungsgleichung

Im Rahmen der Arbeit wurde die Leitungsdifferentialgleichung immer in der allgemeinen Schreibweise

$$\frac{d\bar{\mathbf{x}}(z)}{dz} = \bar{\mathbf{R}}^x(z)\bar{\mathbf{x}}(z) + \bar{\mathbf{x}}^s(z). \quad (\text{B.1})$$

angegeben.

In der Literatur sind verschiedene Schreibweisen gebräuchlich. Um die Wichtigsten aufzuführen, sowie zur Erläuterung der konkreten Inhalte des Vektors  $\bar{\mathbf{x}}$  und der Matrix  $\bar{\mathbf{R}}^x(z)$ , sind im Folgenden einige der verschiedenen Darstellungsformen der Leitungsdifferentialgleichung aufgezeigt.

### B.1 v-i-Darstellung

Diese Darstellung basiert auf der klassischen Formulierung der beiden Leitungsgleichungen für die Leiterströme  $\mathbf{i}$  und Leiterspannungen  $\mathbf{v}$  im Frequenzbereich. Dabei werden die beiden separaten Leitungsgleichungen zu einer Supermatrizengleichung zusammengefasst.

$$\frac{d}{dz} \begin{bmatrix} \mathbf{v}(z) \\ \mathbf{i}(z) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{R}'(z) + j\omega\mathbf{L}'(z) \\ \mathbf{G}'(z) + j\omega\mathbf{C}'(z) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}(z) \\ \mathbf{i}(z) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{v}^{(s)'}(z) \\ \mathbf{i}^{(s)'}(z) \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

$$= - \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{Z}'(z) \\ \mathbf{Y}'(z) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}(z) \\ \mathbf{i}(z) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{v}^{(s)'}(z) \\ \mathbf{i}^{(s)'}(z) \end{bmatrix} \quad (\text{B.3})$$

Die Belagsmatrizen  $\mathbf{R}'$  und  $\mathbf{L}'$  sind der Widerstandsbelag und der Induktivitätsbelag der Mehrfachleitung. Zusammen bilden sie die Impedanzbelagsmatrix  $\mathbf{Z}'$ . Die Admittanzbelagsmatrix  $\mathbf{Y}'$  beinhaltet dagegen die Matrizen des Leitwertbelages  $\mathbf{G}'$  und des Kapazitätsbelages  $\mathbf{C}'$ . Die Matrizen  $\mathbf{R}'$  und  $\mathbf{G}'$  können ggf. noch Funktionen der Frequenz sein.

### B.2 v-v<sub>0</sub>-Darstellung

Multipliziert man den Stromvektor  $\mathbf{i}$  mit einer festen Normierungsimpedanz

$$\mathbf{v}_0(z) = \mathbf{Z}_{n0}\mathbf{i}(z), \quad (\text{B.4})$$

so erhält man eine neue Größe anstelle des Stromes, von der Einheit her eine dem Strom äquivalente Spannung.

Dadurch können die verschiedenen Einheiten in der Supermatrizengleichung eliminiert werden. Alle Matrizen- und Vektorelemente haben gleiche Einheiten, welche als skalare Faktoren außerhalb der Matrizen stehen. Es ergibt sich die Leitungsgleichung der Form

$$\frac{d}{dz} \begin{bmatrix} \mathbf{v}(z) \\ \mathbf{v}_0(z) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{Z}'(z)\mathbf{Z}_{n0}^{-1} \\ \mathbf{Z}_{n0}\mathbf{Y}'(z) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}(z) \\ \mathbf{v}_0(z) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{v}^{(s)'}(z) \\ \mathbf{v}_0^{(s)'}(z) \end{bmatrix}. \quad (\text{B.5})$$

### B.3 $\mathbf{v}_1$ - $\mathbf{v}_2$ -Darstellung

Wählt man anstelle der konstanten Normierungsimpedanz eine Funktion von  $z$  unter der Bedingung

$$\mathbf{Z}_c^2(z) = \mathbf{Z}'(z) [\mathbf{Y}'(z)]^{-1} = [\mathbf{Y}'(z)]^{-1} \mathbf{Z}'(z), \quad (\text{B.6})$$

so ergibt sich mit

$$\mathbf{v}_1(z) = \mathbf{v}(z) \quad (\text{B.7})$$

$$\mathbf{v}_2(z) = \mathbf{Z}_c(z)\mathbf{i}(z) \quad (\text{B.8})$$

die Darstellung

$$\frac{d}{dz} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1(z) \\ \mathbf{v}_2(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{P}(z) \\ -\mathbf{P}(z) & \mathbf{G}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1(z) \\ \mathbf{v}_2(z) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^{(s)'}(z) \\ \mathbf{v}_2^{(s)'}(z) \end{bmatrix}, \quad (\text{B.9})$$

mit den Größen

$$[\mathbf{P}(z)]^2 = \mathbf{Z}'(z)\mathbf{Y}'(z) = \mathbf{Y}'(z)\mathbf{Z}'(z) \quad (\text{B.10})$$

$$\mathbf{G}(z) = \mathcal{D}_z \mathbf{Z}_c(z) = \frac{d}{dz} \mathbf{Z}_c(z) [\mathbf{Z}_c(z)]^{-1} \quad (\text{B.11})$$

### B.4 $\mathbf{w}_+$ - $\mathbf{w}_-$ -Darstellung

Eine weitere Darstellung gelingt mit Hilfe von Wellengrößen

$$\mathbf{w}_+(z) = \mathbf{v}(z) + \mathbf{Z}_c(z)\mathbf{i}(z) \quad (\text{B.12})$$

$$\mathbf{w}_-(z) = \mathbf{v}(z) - \mathbf{Z}_c(z)\mathbf{i}(z). \quad (\text{B.13})$$

Dabei entsteht folgendes Differentialgleichungssystem

$$\frac{d}{dz} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_+(z) \\ \mathbf{w}_-(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{P}(z) + \frac{1}{2}\mathbf{G}(z) & -\frac{1}{2}\mathbf{G}(z) \\ -\frac{1}{2}\mathbf{G}(z) & \mathbf{P}(z) + \frac{1}{2}\mathbf{G}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_+(z) \\ \mathbf{w}_-(z) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{w}_+^{(s)'}(z) \\ \mathbf{w}_-^{(s)'}(z) \end{bmatrix}. \quad (\text{B.14})$$

Im Falle von gleichförmigen Leitungen ergibt sich dabei eine Entkopplung der beiden Teilgleichungen (Blockdiagonalstruktur), da  $\mathbf{G}(z) = 0$  wenn  $\mathbf{Z}_c = \text{const.}$  Bei ungleichförmigen Leitungen verschwindet die Produktableitung der Wellenwiderstandsmatrix in den wenigsten Fällen, so dass dieser Vorteil entfällt.

## B.5 $\varphi$ -i-Darstellung

Diese Darstellung beruht auf der „Transmission-Line Super Theory“ [43, 21, 23, 24, 25] und benutzt das mittlere Potential bzw. die Quasi-Spannung  $\varphi$ , da die Spannung innerhalb dieser Theorie nicht mehr eindeutig definiert werden kann. Man beachte, dass die Quasi-Spannung nur eine mathematische Hilfsgröße ist, keine physikalische Bedeutung besitzt und eichabhängig ist. Nur für den TEM-Mode ist die Quasi-Spannung identisch mit der Spannung im klassischen Sinne. Für eine ausführliche Diskussion sei auf [25] verwiesen. Des weiteren wird der Vektor  $\mathbf{i}$  der Leiterströme verwendet.

$$\frac{d}{dz} \begin{bmatrix} \varphi(z) \\ \mathbf{i}(z) \end{bmatrix} = -j\omega \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11}^*(z) & \mathbf{P}_{12}^*(z) \\ \mathbf{P}_{21}^*(z) & \mathbf{P}_{22}^*(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi(z) \\ \mathbf{i}(z) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varphi^{(s)'}(z) \\ \mathbf{i}^{(s)'}(z) \end{bmatrix}. \quad (\text{B.15})$$

Die Parametermatrix ist für den allgemeinen Fall einer ungleichförmigen Leitung voll besetzt, die Elemente sind komplexe Zahlen und abhängig von der Frequenz.



## Literaturverzeichnis

- [1] **Vasek**, Thomas: Wird das Auto zu komplex? – Rechner auf Rädern. In: *Technology Review 07/2004*
- [2] **Goerisch**, A.: *Netzwerkorientierte Modellierung und Simulation elektrischer Verbindungsstrukturen mit der Methode der partiellen Elemente*, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, Dissertation, Mai 2002
- [3] **Kost**, A.: *Numerische Methoden in der Berechnung elektromagnetischer Felder*. Berlin - Heidelberg : Springer-Verlag, 1994
- [4] **Mittra**, Raj: *Numerical and asymptotic techniques in electromagnetics*. Springer Verlag, 1975
- [5] **Mittra**, Raj (Hrsg.): *Computer techniques for electromagnetics*. Hemisphere Publishing Corporation, Springer Verlag, 1987
- [6] **Singer**, H. ; **Brüns**, H.-D. ; **Mader**, T. ; **Freiberg**, A. ; **Bürger**, G.: *CONCEPT - Manual of the program system*. TU Hamburg-Harburg, 2000
- [7] **Miller**, Edmund K. (Hrsg.) ; **Medgyesi-Mitschang**, Louis N. (Hrsg.) ; **Newman**, Edward H. (Hrsg.): *Computational electromagnetics*. IEEE Press, 1992
- [8] **Harrington**, Roger F.: *Field computation by moment method*. IEEE Press, 1993
- [9] **Cristopoulos**, Christos: *The Transmission-Line Modeling Method TLM*. IEEE Press, 1995
- [10] **Sabath**, F.: *Ein hybrides Verfahren zur Berechnung des abgestrahlten Feldes von Leiterplatten*, Universität Hannover, Dissertation, Oktober 1998
- [11] **Baum**, C.E. ; **Liu**, T.K. ; **Tesche**, F.M.: *On the Analysis of General Multiconductor Transmission-line Networks*. November 1978. – Interaction Note 350
- [12] **Baum**, C.E. ; **Nitsch**, J.B. ; **Sturm**, R.J.: *Analytical Solution for Uniform and Non-uniform Multiconductor Transmission Lines with Sources, in Review of Radio Science 1993-19996, ch. 18*. Oxford University Press, 1996
- [13] **Nitsch**, J. ; **Gronwald**, F.: Analytical Solutions in Nonuniform Multiconductor Transmission Line Theory. In: *IEEE Trans. on EMC* 41 (1999), Nr. 4, S. 469–479
- [14] **Tkatchenko**, S. ; **Rachidi**, F. ; **Ianoz**, M.: On the theory of high-frequency wave propagation along nonuniform transmission lines. In: *International Symposium on Electromagnetic Compatibility*. Magdeburg, Oktober 1999
- [15] **Getsinger**, W.J.: End-Effects in Quasi-TEM Transmission Lines. In: *IEEE Transactions on MTT* 41 (1993), April, Nr. 4, S. 666
- [16] **Lam**, J.: *Equivalent Lumped Parameter for a Bend in a Two-Wire Transmission Line: Part I. Inductance*. Dezember 1976. – Interaction Note 303, <http://www.uni-magdeburg.de/notes>

- [17] **Lam, J.:** *Equivalent Lumped Parameter for a Bend in a Two-Wire Transmission Line: Part II. Capacitance.* Januar 1977. – Interaction Note 304, <http://www.uni-magdeburg.de/notes>
- [18] **Lu, K.:** An Efficient Method for Analysis of Arbitrary Nonuniform Transmission Lines. In: *IEEE Transactions on MTT* 45 (1997), Januar, Nr. 1, S. 9
- [19] **Omid, M. ; Kami, M.:** Field Coupling to Nonuniform and Uniform Transmission Lines. In: *IEEE Transactions on EMC* 39 (1997), August, Nr. 3, S. 201–211
- [20] **Tkachenko, S. ; Rachidi, F. ; Ianoz, M. ; Steinmetz, T. ; Nitsch, J.:** On the Theory of High Frequency Electromagnetic Field Coupling to Nonuniform Terminated Lines. In: *PIERS 2002, Cambridge, 01.07.–05.07.2002.* Cambridge, USA, Juli 2002, S. 738
- [21] **Haase, H. ; Nitsch, J.:** Generalized transmission-line theory for the treatment of nonuniform multiconductor transmission lines. In: *Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics* 17 (2003), Nr. 1-3, S. 149–156
- [22] **Haase, H. ; Steinmetz, T. ; Nitsch, J.:** Wirkung ungleichförmiger Leitungsführung auf die Ausbreitungs- und Kopplungsvorgänge in komplexen ausgedehnten Leitungszwecken bei hohen Frequenzen. In: *Tagungsbeitrag 10. Internationale Fachmesse und Kongreß für EMV, Düsseldorf, 09.–11. April 2002,* 2002
- [23] **Haase, H. ; Nitsch, J. ; Steinmetz, T.:** Transmission-Line Super Theory: A new Approach to an Effective Calculation of Electromagnetic Interactions. In: *URSI Radio Science Bulletin (Review of Radio Science)* (2003), Dezember, Nr. 307, S. 33–60
- [24] **Haase, H. ; Steinmetz, T. ; Nitsch, J.:** New propagation models for electromagnetic waves along uniform and nonuniform cables. In: *Electromagnetic Compatibility, IEEE Transactions on* 46 (2004), August, Nr. 3, S. 345–352
- [25] **Haase, H.:** *Full-Wave Field Interactions of Nonuniform Transmission Lines,* Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, Dissertation, März 2005
- [26] **Leininger, M.:** *Wege zur Berechnung der Übertragungseigenschaften inhomogener Mehrfachleitungen,* Universität der Bundeswehr München, Dissertation, August 1990
- [27] **Baum, C. E.:** *Electromagnetic Topology: A Formal Approach to the Analysis and Design of Complex Electronic Systems.* Sep 1980. – Interaction Note 400
- [28] **Lee, K.S.H. (Hrsg.):** *EMP Interaction: Principles, Techniques and Reference Data.* Washington, New York, London : Hemisphere Publishing Corporation (A Summa Book), 1986
- [29] **Karlsson, T.:** *The Topological Concept of a Generalized Shield.* Jan 1988. – Interaction Note 461
- [30] **Parmantier, J.P.:** Application of EM Topology on Complex Wiring Systems. In: *International Symposium on Electromagnetic Compatibility.* Magdeburg : ISBN 3-929757-25-7, Oktober 1999, S. 1–8
- [31] **Paul, C.R.:** *Analysis of Multiconductor Transmission Lines.* New York : John Wiley & Sons, 1994
- [32] **Tesche, F.M. ; Ianoz, M. V. ; Karlsson, T.:** *EMC Analysis Methods and Computational Modells.* NY: John Wiley & Sons, Inc., 1997
- [33] **Granzow, K.D.:** *Digital Transmission Lines.* New York, Oxford : Oxford University Press, 1998

- [34] **Dworsky**, L.N.: *Modern Transmission Line Theory And Application*. Malabar, Florida : Robert E. Krieger Publishing Company, 1988
- [35] **Faria**, J. A. B.: *Multiconductor Transmission-Line Structures - Modal Analysis Techniques*. John Wiley and Sons, Inc., 1993
- [36] **Faché**, Niels ; **Olyslager**, Frank ; **De Zutter**, Daniël: *Electromagnetic and Circuit Modelling of Multiconductor Transmission Lines*. Clarendon Press, 1993
- [37] **King**, Ronald W. P.: *Transmission-line Theory*. McGraw-Hill Book Company, Inc., 1955
- [38] **Frankel**, Sidney: *Multiconductor Transmission Line Analysis*. Artech House, Inc., 1977
- [39] **Styczynski**, Z. ; **Feser**, K. ; **Köhler**, K. ; **Schärli**, U. ; **Standfest**, J.: Systematische Vorgehensweise zur Sicherstellung der EMV von Kraftwerken. In: *Tagungsbeitrag 7. Internationale Fachmesse und Kongreß für EMV, Düsseldorf, 22.-24. Februar 2000*. EMV 2000, ISBN 3-8007-2522-3, VDE-Verlag, Februar 2000, S. 319–326
- [40] **Parmantier**, Jean-Phillipe: *An Efficient Technique to Calculate Ideal Junction Scattering Parameters in Multiconductor Transmission Line Networks*. February 1998. – Interaction Note 0536
- [41] **Ramo**, Simon ; **Whinnery**, John ; **Van Duzer**, Theodore: *Fields and Waves in Communication Electronics*. New York : J. Wiley and Sons, Inc., 1993
- [42] **Baum**, C.E.: *Generalization of the BLT Equation*. 11 Apr 1995. – Interaction Note 511
- [43] **Haase**, H. ; **Nitsch**, J.: Investigation of nonuniform transmission line structures by a generalized transmission–line theory. In: *15th International Zurich Symposium and Technical Exhibition on Electromagnetic Compatibility*. Zurich, Februar 2003, S. 597–602
- [44] **Schelkunoff**, S.A.: *Electromagnetic Waves*. Princeton, New Jersey : D. Van Nostrand Company, Inc., 1945
- [45] **Gebele**, O.: *EMV-Analyse beliebiger Leitungen über oberflächendiskretisierten metallischen Strukturen*, TU Hamburg-Harburg, Dissertation, Juli 2002
- [46] **Gantmacher**, F. R.: *Matrizentheorie*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1986
- [47] **Volterra**, V. ; **Hostinsky**, B.: *Operations infinitesimales lineaires*. Paris, 1938
- [48] **Baum**, Carl E.: *Approximation of Nonuniform Multiconductor Transmission Lines by Analytically Solvable Sections*. Oktober 1992. – Interaction Note 490
- [49] **Strehmel**, K. ; **Weiner**, R.: *Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen*. Berlin - Heidelberg : Springer-Verlag, 1994
- [50] **Shampine**, L.F.: *Numerical Solution of Ordinary Differential Equations*. New York : Champman & Hall, Inc., 1993
- [51] **Zurmühl**, Rudolf: *Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York Tokyo, 1984
- [52] **Duffing**, G.: Zur numerischen Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen 1. und 2. Ordnung. In: *Forsch.-Arb. Ing.-Wes.* (1920), Nr. 224, S. 29–50
- [53] **Richardson**, L.F.: The Deferred Approach to the Limit, I - Single Lattice. In: *Trans. Roy. Soc., London* (1927), Nr. 226, S. 299–349
- [54] **Baum**, C. E.: *Norms and Eigenvector Norms*. Nov 79. – Mathematics Notes 63
- [55] **Baum**, C. E.: *Energy Norms and 2-Norms*. Apr 88. – Mathematics Notes 89

- [56] **Lüttkepohl**, H.: *Handbook of Matrices*. John Wiley & Sons, Inc., 1996
- [57] **Fehlberg**, E.: New high-order Runge-Kutta formulas with step size control for systems of first- and second order differential equations. In: *ZAMM* (1964), Nr. 44, S. T17–T29
- [58] **Fehlberg**, E.: Klassische Runge-Kutta-Formeln vierter und niedrigerer Ordnung mit Schrittweiten-Kontrolle und ihre Anwendung auf Wärmeleitprobleme. In: *Computing* (1970), Nr. 6, S. 61–71
- [59] **Frey**, E.: *Explizite Hermite Runge-Kutta-Formeln mit automatischer Schrittweitenkontrolle zur Lösung von Anfangswertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen*, Universität Gießen, Dissertation, Januar 1980
- [60] **Parmantier**, J.P. ; **Gobin**, V. ; **Issac**, F. ; **Paletta**, L. ; **Junqua**, I. ; **Daudy**, Y. ; **Lagarde**, J.M.: *ETE III: Application of the Electromagnetic Topology Theory on the EMPTAC*. May 1997. – Interaction Note 527
- [61] **Scholl**, B. ; **Englmaier**, A. ; **Weigel**, R.: Vergleich von EMV-Simulationen und EMV-Messungen in der KFZ-Technik. In: *Tagungsbeitrag 6. Internationale Fachmesse und Kongreß für EMV, Düsseldorf, 10.–12. Februar 1998*. EMV 1998, ISBN 3-8007-2324-7, VDE-Verlag, Februar 1998, S. 861–868
- [62] **Papoulis**, Athanasios ; **Pillai**, S. U.: *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*. McGraw-Hill Higher Education, 2002
- [63] **Mandelbrot**, B. B.: *The Fractal Geometry of Nature*. W.H. Freeman and Co., 1982
- [64] **Salio**, S. ; **Canavero**, F. ; **Levebvre**, J. ; **Tabbara**, W.: Statistical Description of Signal Propagation on Random Bundles of Wires. (1999), Februar, S. 499 – 504
- [65] **Pleitgen**, Heinz-Otto (Hrsg.): *The Science of Fractal Images*. Springer - Verlag, 1988
- [66] **Horn**, Roger A. ; **Johnson**, Charles R.: *Topics in Matrix Analysis*. Cambridge University Press, 1991

# Lebenslauf

Torsten Steinmetz  
Am Reiherberg 19  
39175 Biederitz  
verheiratet, zwei Kinder



---

24. Sep. 1970	geboren in Zwickau / Sachsen
1977 – 1987	Lenin-Oberschule in Magdeburg allgemeine Schulausbildung
1987 – 1990	VEB Schwermaschinenbau „Georgi Dimitroff“ in Magdeburg Berufsausbildung mit Abitur zum Maschinen- und Anlagenmonteur
1990 – 1991	Grundwehrdienst in der Kaserne Stern-Buchholz Schwerin 1. Feldersatzbataillon 61 7./II./MSR-27
1991 – 1997	Studium der Elektrotechnik an der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg Thema der Diplomarbeit: „Flächenmeßsystem für die funkenerosive Senkbearbeitung“ Die Diplomarbeit wurde mit dem Preis des VDE-Bezirksvereins Sachsen-Anhalt für herausragende Diplomarbeiten 1998 ausgezeichnet.
Dez. 1995 – Feb. 1996	Praktikum am Het Oogziekenhuis Rotterdam (Niederlande)
März 1996 – Mai 1996	Praktikum an der PTB Braunschweig im Labor 2.21 „Elektromagnetische Felder“
seit Sep. 1997	Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Grundlagen der Elektrotechnik und EMV der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Feb. 2000	Best Paper Award auf der EMV 2000 in Düsseldorf für den Beitrag „Die Analyse komplexer Systeme mit Hilfe der erweiterten EM Topologie“
Mitgliedschaften	Applied Computational Electromagnetics Society (ACES) Steering Committee – EUROEM 2004

---

