

Vergleich der Einkopplung deterministischer und statistischer elektromagnetischer Felder in Leitungen

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades

Doktoringenieur

(Dr.-Ing.)

von **Dipl.-Ing. Mathias Magdowski**

geb. am 09.04.1984 in Wolmirstedt

genehmigt durch die Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik
der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg

Gutachter:

Univ.-Prof. Dr.-Ing. Ralf Vick

Univ.-Prof. Dr.-Ing. Günter Wollenberg

Univ.-Prof. Dr. rer. nat. habil. Hans Georg Krauthäuser

Promotionskolloquium am 04. September 2012

Res Electricae Magdeburgenses

Magdeburger Forum zur Elektrotechnik, Jg. 10, Band 46, 2012

IMPRESSUM

Herausgeber:

Prof. Dr. rer. nat. habil. Jürgen Nitsch

Institut für Grundlagen der Elektrotechnik und Elektromagnetische Verträglichkeit

Prof. Dr.-Ing. habil. Zbigniew Antoni Styczynski

Institut für Elektrische Energiesysteme

beide: Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, Postfach 4120, 39016 Magdeburg

V. i. S. d. P.:

Mathias Magdowski

Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, Postfach 4120, 39016 Magdeburg

1. Auflage, Magdeburg, Otto-von-Guericke-Universität, 2012

Redaktionsschluss: September 2012

ISSN: 1612-2526

ISBN: 978-3-940961-75-4

© Copyright 2012 Mathias Magdowski und Herausgeber

Bezug über die Herausgeber

„How can anyone seriously consider such a test procedure?“

Carl Edward Baum im Microwave Memo Nr. 3 „The Microwave-Oven Theorem: All Power to the Chicken“ bei der Diskussion einer Modenverwirbelungskammer als alternative Testumgebung der elektromagnetischen Verträglichkeit

Kurzfassung

Einfache Modelle für deterministische und intrinsisch statistische elektromagnetische Felder sowie ein einfaches Modell einer elektrischen Doppelleitung werden kombiniert, um analytisch geschlossene Lösungen für den Maximalwert des Betragsquadrats des durch diese Felder eingekoppelten Stromes zu bestimmen. Diese Lösungen sind unter den Annahmen der klassischen Leitungstheorie für eine gleichförmige und verlustlose Leitung mit beliebigen Abschlusswiderständen gültig. Die erhaltenen Ergebnisse werden auf die eingekoppelte Spannung sowie auf die Geometrie einer Einfachleitung über einer perfekt leitfähigen Ebene verallgemeinert und zum Teil durch experimentelle Daten verifiziert.

Die Lösungen werden genutzt, um die Richtwirkung der Einkopplung externer Felder in eine elektrische Leitung zu bestimmen. Wird die Leitung als Modell für einen einfachen Prüfling benutzt, so können gestrahlte Störfestigkeitstests in verschiedenen Messumgebungen wie Absorberhallen, Wellenleitern und Modenverwirbelungskammern auf theoretischer Basis statistisch miteinander verglichen werden.

Abstract

Simple models of deterministic and intrinsic statistic electromagnetic fields as well as a plain model of a double wire transmission line are combined to analytically derive closed-form expressions for the maximum value of the squared magnitude of the current that is coupled into the line by such fields. The results are valid under the assumptions of transmission line theory for a uniform and lossless line with general load resistances. The derived solutions are generalized for the coupled voltage as well as for the case of a single wire transmission line over a perfect conducting ground plane. Main results are compared with experimental data.

The solutions are used to determine the directivity of the coupling of external fields in transmission lines. If the line is assumed to be a simple device under test, the results can be used to compare radiated immunity tests in different test environments like semi-anechoic chambers, wave guides or reverberation chambers on a theoretical basis by statistical means.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	12
1.1	Problemstellung	12
1.2	Auftreten deterministischer elektromagnetischer Felder	13
1.3	Auftreten statistischer elektromagnetischer Felder	14
1.4	Leitungen als Einfallstore für Störungen	14
1.5	Zielstellung und Gliederung der Arbeit	15
2	Beschreibung deterministischer elektromagnetischer Felder	16
3	Beschreibung statistischer elektromagnetischer Felder	19
3.1	Ansatz ebener Wanderwellen	19
3.1.1	Analytische Beschreibung	20
3.1.2	Numerische Monte-Carlo-Simulation	24
3.1.3	Simulationsbeispiele	27
3.2	Ansatz ebener Stehwellen	28
3.3	Verteilungs- und Dichtefunktionen	31
3.3.1	Feldverteilung	31
3.3.2	Verteilung der Mittelwerte, Maxima und Minima	31
3.3.3	Verhältnisse von Maximum/Erwartungswert, Erwartungswert/Minimum und Maximum/Minimum	34
3.4	Räumliche Korrelation	36
4	Einkopplung deterministischer Felder in eine Leitung	38
4.1	Leitungsmodell	38
4.2	Lösung der Leitungsgleichungen	39
4.2.1	Doppelleitung im Freiraum	39
4.2.2	Einfachleitung über perfekt leitender Ebene	46
4.2.3	Darstellung der Einkopplung als Funktion der Einfallsrichtung	49
4.3	Maximalwert der Einkopplung	51
4.3.1	Maximalwert des Stromes am Anfang der Leitung	55
4.3.2	Übertragen der Ergebnisse auf die Spannung	63
4.3.3	Numerische Simulationen mit weniger Einfallsrichtungen	64

5	Einkopplung statistischer Felder in eine Leitung	72
5.1	Erwartungswert des Betragsquadrats des eingekoppelten Stromes	72
5.1.1	Lösung entlang der Leitung	73
5.1.2	Grenzwert am Anfang und am Ende der Leitung	83
5.1.3	Grenzwert für sehr kurze Leitungen bzw. sehr niedrige Frequenzen .	89
5.2	Übertragen der Ergebnisse auf die Spannung	89
5.3	Übertragen der Ergebnisse auf eine Einfachleitung über perfekt leitender Ebene	91
5.4	Verteilungs- und Dichtefunktionen	93
5.5	Maximalwert der Einkopplung	95
5.6	Vergleich mit Messergebnissen	96
5.6.1	Aufbau und Ablauf der Messung	96
5.6.2	Messergebnisse	99
6	Vergleich zwischen deterministischer und statistischer Einkopplung	106
6.1	Direktivität der Einkopplung in eine Leitung	106
6.1.1	Definition	106
6.1.2	Allgemeine Abschlusswiderstände	107
6.1.3	Sonderfall der beidseitig angepassten Leitung	110
6.1.4	Sonderfall der beidseitig kurzgeschlossenen/leerlaufenden Leitung .	111
6.2	Schlussfolgerungen für EMV-Tests	112
6.2.1	Tests in deterministischen Messumgebungen	112
6.2.2	Tests in statistischen Messumgebungen	113
6.2.3	Korrelation von Messumgebungen	114
7	Zusammenfassung	133
7.1	Ergebnisse	133
7.2	Ausblick	134
	Literaturverzeichnis	135
A	Anhang	141
A.1	Verteilungs- und Dichtefunktionen der elektrischen Feldgrößen	141
A.2	Verteilungs- und Dichtefunktionen der auf ihren Erwartungswert normierten elektrischen Feldgrößen	142
A.3	Verhältnisse von Maximum/Erwartungswert, Erwartungswert/Minimum und Maximum/Minimum	143
A.4	Quellentexte	145

Symbolverzeichnis

a, A	Skalar, auch komplexwertig
\mathbf{a}, \mathbf{A}	Vektor, auch komplexwertig
A	Matrix
$ \mathbf{A} , A $	Betrag eines Vektors, Betrag einer komplexen Größe
$\Re\{A\}$	Realteil einer komplexen Größe
$\Im\{A\}$	Imaginärteil einer komplexen Größe
A^*	komplexe Konjugation von A
$\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{A}}$	Einheitsvektor
A_x, A_y, A_z	Komponenten des Vektors \mathbf{A} in Richtung der Einheitsvektoren $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}$ und $\hat{\mathbf{z}}$
$\langle A \rangle$	Mittelwert einer statistischen Variable A
$\langle A \rangle_B$	empirischer Mittelwert einer statistischen Variable A über einer Stichprobe der Größe B
$\langle A \rangle_\infty$	Erwartungswert einer statistischen Variable A , entspricht dem empirischen Mittelwert einer statistischen Variable A im Fall einer unendlich großen Stichprobe
$[A]$	statistischer Minimalwert einer statistischen Variable A
$\lceil A \rceil$	statistischer Maximalwert einer statistischen Variable A
$\uparrow A \uparrow$	Supremum einer Variable A
σ_A	Standardabweichung einer statistischen Variable A
$\ddagger_B(A)$	Verhältnis vom Maximalwert zum Erwartungswert einer statistischen Variable A über einer Stichprobe der Größe B

$\downarrow_B(A)$	Verhältnis vom Erwartungswert zum Minimalwert einer statistischen Variable A über einer Stichprobe der Größe B
A_{I1}, A_{I2}	Stromreflexionsfaktor am Anfang und am Ende einer Leitung
A_{U1}, A_{U2}	Spannungsreflexionsfaktor am Anfang und am Ende einer Leitung
B	Anzahl der statistisch unabhängigen, elektromagnetischen Randbedingungen in einer Modenverwirbelungskammer, Größe einer Stichprobe
C_1, C_2	Hilfsvariable, ortsabhängige Faktoren für Cosinus-Anteile
D	Hilfsvariable, Nenner (engl. denominator)
D	Drehmatrix
D_{\max}	maximale Direktivität
E	Effektivwert der elektrischen Feldstärke einer ebenen Welle
$\mathbf{E}(\mathbf{r})$	elektrische Feldstärke am Ort \mathbf{r}
$\mathbf{E}_{\text{pw}}(\mathbf{r})$	elektrische Feldstärke einer ebenen Wanderwelle am Ort \mathbf{r}
$\mathbf{E}_{\text{sw}}(\mathbf{r})$	elektrische Feldstärke einer ebenen Stehwelle am Ort \mathbf{r}
E_0	kammerspezifische Konstante im Sinne einer elektrischen Feldstärke
E_R	kartesische Komponente der elektrischen Feldstärke
$E_{0,\text{MVK}}$	Definition der Feldstärke in einer Modenverwirbelungskammer
$E_{0,\text{TEM}}$	Definition der Feldstärke in einer herkömmlichen Testumgebung
G	Green'sche Funktion
$\mathbf{H}(\mathbf{r})$	magnetische Feldstärke am Ort \mathbf{r}
$\mathbf{H}_{\text{pw}}(\mathbf{r})$	magnetische Feldstärke einer ebenen Wanderwelle am Ort \mathbf{r}
$\mathbf{H}_{\text{sw}}(\mathbf{r})$	magnetische Feldstärke einer ebenen Stehwelle am Ort \mathbf{r}
H_0	kammerspezifische Konstante im Sinne einer magnetischen Feldstärke
I	Strom

I^+, I^-	Effektivwert einer vorwärts und rückwärts laufenden Stromwelle
I_{L1}, I_{L2}	Strom am Anfang und am Ende einer Leitung
I_s	Quellstrom einer konzentrierten Quelle entlang einer Leitung
L_{Ebene}	Einbußen der Einkopplung, die durch die Einstrahlung aus nur einer Ebene entstehen
N	Anzahl der überlagerten Wellen pro Randbedingung
O	Verschiebung
P	Leistung
Q	Güte
\mathbb{Q}	statistische Variable, Verhältnis des Mittelwerts und des Erwartungswerts einer exponentialverteilten Größe
Q_1, Q_2	Quellterm innerhalb der BLT-Formulierung der Leitungsgleichungen zur Berechnung von Strom und Spannung am Anfang und am Ende einer Leitung
R_1, R_2	Abschlusswiderstand am Anfang und am Ende einer Leitung
S_1, S_2	Hilfsvariable, ortsabhängige Faktoren für Sinus-Anteile
T	statistische Variable, Verhältnis des Maximalwerts und des Mittelwerts einer exponentialverteilten Größe
U	Spannung
U_{MVK}	statistische Unsicherheit der Messung in einer Modenverwirbelungskammer
U^+, U^-	Effektivwert einer vorwärts und rückwärts laufenden Spannungswelle
U_{L1}, U_{L2}	Spannung am Anfang und am Ende einer Leitung
U_s	Quellspannung einer konzentrierten Quelle entlang einer Leitung
U_{t1}, U_{t2}	transversale Spannung am Anfang und am Ende einer Leitung
V	Volumen
W	statistische Variable, Verhältnis zweier Maximalwerte von jeweils exponentialverteilten Größen

W_1, W_2	Hilfsvariable
Z	statistische Variable, Verhältnis des Maximalwerts und des Erwartungswerts einer exponentialverteilten Größe
Z_c	charakteristische Impedanz einer Leitung
Ω	Raumwinkel
α	Polarisationswinkel
β	Phasenwinkel (zeitlich)
δ	Phasenwinkel (räumlich)
ε	Permittivität eines Mediums
η	Wellenimpedanz eines Mediums
γ	Drehwinkel
λ	Wellenlänge
μ	Permeabilität eines Mediums
ω	Kreisfrequenz
ψ	Digammafunktion
ρ	Korrelationsfunktion
φ	Azimutwinkel
ϑ	Polarwinkel
ϑ_{\max}	Polarwinkel der effektivsten Einkoppelrichtung
c	Ausbreitungsgeschwindigkeit
cdf_A	Verteilungsfunktion einer statistischen Variable A
d	Differentialoperator
d_0	Durchmesser einer Leiters
e	Eulersche Zahl

erf	Fehlerfunktion
h	Abstand zwischen einer Einfachleitung und einer perfekt leitenden Ebene, halber Abstand zwischen dem Hin- und Rückleiter einer Doppelleitung
j	imaginäre Einheit
\mathbf{k}, k	Wellenvektor und Wellenzahl
l	Länge einer Leitung
l_c	Korrelationslänge
pdf_A	Dichtefunktion einer statistischen Variable A
r	Abstand
\mathbf{r}	Ortsvektor
r_0	Radius einer Leiters
t	Zeit
z	Position entlang einer Leitung
z_s	Position einer konzentrierten Quelle entlang einer Leitung
e	Größe, die sich auf das anregende Feld bezieht
i	Größe, die sich nur auf das einfallende Feld bezieht
s	Größe, die sich nur auf das Streufeld bezieht
t	Größe, die sich auf das gesamte Feld bezieht
R	beliebige Komponente x, y oder z einer Größe
match	Größe, die sich auf eine beidseitig angepasste Leitung bezieht
open	Größe, die sich auf eine beidseitig leerlaufende Leitung bezieht
short	Größe, die sich auf eine beidseitig kurzgeschlossene Leitung bezieht
scl	Größe, die sich auf eine Einfachleitung bezieht
tcl	Größe, die sich auf eine Doppelleitung bezieht

Abbildungsverzeichnis

3.1	Definition des Wellenvektors und der Polarisierung in Kugelkoordinaten . . .	20
3.2	Betragsquadrat der elektrischen Feldstärkekomponenten entlang einer Linie im Arbeitsvolumen	27
3.3	Dichte- und Verteilungsfunktionen des Mittelwerts der Kenngrößen der elektrischen Feldstärke	33
3.4	Dichte- und Verteilungsfunktionen des Maximalwerts der Kenngrößen der elektrischen Feldstärke	35
3.5	Verhältnisse zwischen den zu erwartenden Maximalwerten, Erwartungswerten und Minimalwerten der Kenngrößen der elektrischen Feldstärke	37
4.1	Geometrie der untersuchten Doppelleitung und einer einfallenden ebenen Welle im Freiraum	39
4.2	Ersatzschaltbild der Doppelleitung mit einer konzentrierten Spannungs- und Stromquelle	40
4.3	Geometrie der untersuchten Einfachleitung und einer einfallenden ebenen Welle über einer perfekt leitenden Ebene	47
4.4	Betragsquadrat des eingekoppelten Stromes am Anfang der Leitung als Funktion der Einfallsrichtung der ebenen Welle für $R_1 = Z_c$ und $R_2 = Z_c$.	50
4.5	Betragsquadrat des eingekoppelten Stromes am Anfang der Leitung als Funktion der Einfallsrichtung der ebenen Welle für $R_1 = Z_c$ und $R_2 = 2Z_c$	52
4.6	Betragsquadrat des eingekoppelten Stromes am Anfang der Leitung als Funktion der Einfallsrichtung der ebenen Welle für $R_1 = Z_c$ und $R_2 = 1/2Z_c$	53
4.7	Betragsquadrat des eingekoppelten Stromes am Anfang der Leitung als Funktion der Einfallsrichtung der ebenen Welle für $R_1 = 4Z_c$ und $R_2 = 1/4Z_c$	54
4.8	Maximalwert des Betragsquadrats des eingekoppelten Stromes an den En- den einer einseitig fehlangepassten Leitung als Funktion der Leitungslänge	59
4.9	Maximalwert des Betragsquadrats des eingekoppelten Stromes an den En- den einer beidseitig fehlangepassten Leitung als Funktion der Leitungslänge	61
4.10	Maximalwert des Betragsquadrats des eingekoppelten Stromes am Anfang der Leitung als Funktion der Leitungslänge für $R_1 = Z_c$ und $R_2 = Z_c$. . .	66
4.11	Maximalwert des Betragsquadrats des eingekoppelten Stromes am Anfang der Leitung als Funktion der Leitungslänge für $R_1 = Z_c$ und $R_2 = 2Z_c$. . .	67

4.12	Maximalwert des Betragsquadrats des eingekoppelten Stromes am Anfang der Leitung als Funktion der Leitungslänge für $R_1 = Z_c$ und $R_2 = 1/2Z_c$. . .	67
4.13	Maximalwert des Betragsquadrats des eingekoppelten Stromes am Anfang der Leitung als Funktion der Leitungslänge für $R_1 = 4Z_c$ und $R_2 = 1/4Z_c$. . .	68
4.14	Maximalwertverteilung des Betragsquadrats des eingekoppelten Stromes am Anfang der Leitung als Funktion der Leitungslänge für $R_1 = Z_c$ und $R_2 = Z_c$	69
4.15	Maximalwertverteilung des Betragsquadrats des eingekoppelten Stromes am Anfang der Leitung als Funktion der Leitungslänge für $R_1 = Z_c$ und $R_2 = 2Z_c$	69
4.16	Maximalwertverteilung des Betragsquadrats des eingekoppelten Stromes am Anfang der Leitung als Funktion der Leitungslänge für $R_1 = Z_c$ und $R_2 = 1/2Z_c$	70
4.17	Maximalwertverteilung des Betragsquadrats des eingekoppelten Stromes am Anfang der Leitung als Funktion der Leitungslänge für $R_1 = 4Z_c$ und $R_2 = 1/4Z_c$	71
5.1	Erwartungswert des Betragsquadrats des eingekoppelten Stromes entlang einer einseitig fehlangepassten Leitung	77
5.2	Erwartungswert des Betragsquadrats des eingekoppelten Stromes entlang einer beidseitig symmetrisch fehlangepassten Leitung	78
5.3	Erwartungswert des Betragsquadrats des eingekoppelten Stromes entlang einer beidseitig asymmetrisch fehlangepassten Leitung	79
5.4	Erwartungswert des Betragsquadrats des eingekoppelten Stromes entlang einer beidseitig angepassten, kurzgeschlossenen und leerlaufenden Leitung für verschiedene Leitungslängen	81
5.5	Erwartungswert des Betragsquadrats des eingekoppelten Stromes an den Enden einer einseitig fehlangepassten Leitung als Funktion der Leitungslänge	85
5.6	Erwartungswert des Betragsquadrats des eingekoppelten Stromes an den Enden einer beidseitig fehlangepassten Leitung als Funktion der Leitungslänge	86
5.7	Erwartungswert des Betragsquadrats der Einkopplung an den Enden einer beidseitig angepassten Doppel- bzw. Einfachleitung als Funktion der Leitungslänge	94
5.8	Schematischer Messaufbau zur Bestimmung der eingekoppelten Spannung in eine Einfachleitung	97
5.9	Messaufbau für die 150 cm lange Leitung	97
5.10	Gemessene kammerspezifische Konstante $E_0 = \sqrt{\langle E ^2 \rangle}$ als Funktion der Frequenz	100

5.11	Vergleich der gemessenen und berechneten statistischen Kennwerte des Real- und Imaginärteils der eingekoppelten Spannung	101
5.12	Vergleich der gemessenen und berechneten statistischen Kennwerte des Betrags der eingekoppelten Spannung	102
5.13	Vergleich der gemessenen und berechneten statistischen Kennwerte des Betragsquadrats der eingekoppelten Spannung	104
5.14	Mittelwert des Betrags der eingekoppelten Spannung als Funktion der Leitungslänge	105
6.1	Direktivität der Einkopplung in den Anfang der Leitung in Abhängigkeit des Abschlusswiderstandes am Ende der Leitung als Funktion der Leitungslänge	109
6.2	Verhältnis des Betragsquadrats des maximal einkoppelnden Stromes in einer Modenverwirbelungskammer zum Betragsquadrat des maximal einkoppelnden Stromes in einem TEM-Feld. Für die Darstellung wurden gleiche Abschlusswiderstände am Ende der Leitung zusammengefasst.	118
6.3	Verhältnis des Betragsquadrats des maximal einkoppelnden Stromes in einer Modenverwirbelungskammer zum Betragsquadrat des maximal einkoppelnden Stromes in einem TEM-Feld. Für die Darstellung wurden gleiche Perzentile zusammengefasst.	119
6.4	Verhältnis des Betragsquadrats des maximal einkoppelnden Stromes in einer Modenverwirbelungskammer zum Betragsquadrat des maximal einkoppelnden Stromes in einem TEM-Feld. Im TEM-Feld wird das Supremum der Einkopplung erreicht.	121
6.5	Verteilungs- und Dichtefunktionen der Variable Z	122
6.6	Verteilungs- und Dichtefunktionen der Variable W	124
6.7	Verteilungs- und Dichtefunktionen der Variable Q	127
6.8	Verteilungs- und Dichtefunktionen der Variable T	130
6.9	Verteilungs- und Dichtefunktionen der Variable \hat{T}	131
6.10	Perzentile der Variablen \hat{T} und W	132

Tabellenverzeichnis

3.1	Verteilung der Winkel bei der Überlagerung von Wanderwellen	26
3.2	Verteilung der Winkel bei der Überlagerung von Stehwellen	30
5.1	Gegenüberstellung der physikalischen und elektrischen Leitungslängen . . .	100
6.1	Perzentile der Variable W	125
6.2	Perzentile der Variable \hat{T}	132

1 Einleitung

1.1 Problemstellung

Ein Mittel zum Nachweis der elektromagnetischen Verträglichkeit von Geräten und Systemen sind Prüfungen der Störabstrahlung (Emission) und der Störfestigkeit (Immunität). Solche Prüfungen werden leitungs- und strahlungsgebunden durchgeführt.

Die strahlungsgebundene Störbeaufschlagung eines Prüflings in einer realen elektromagnetischen Umgebung wird in vielen Fällen durch eine weit entfernte Quelle verursacht. Deshalb wird in den herkömmlich verwendeten Testumgebungen wie Freifeld und Absorberhalle versucht, diese Fernfeldbedingungen möglichst gut nachzubilden [MN04]. Die Störbeaufschlagung besteht in erster Näherung aus einer ebenen elektromagnetischen Welle, die aus einer bestimmten Richtung, mit einer bestimmten Polarisierung und einer festen Amplitude auf den Prüfling trifft. Diese Bedingungen führen zum Begriff der *deterministischen Felder*.

Andererseits gibt es auch viele Fälle, in denen diese Näherung nicht zutrifft, z. B. wenn die Störquelle und Störsenke sich in unmittelbarer Nähe zueinander befinden oder es aufgrund einer resonanten Umgebung mit zahlreichen Mehrfachreflexionen zu einer stärkeren Verkopplung des Prüflings mit seiner Umgebung kommt. Solche Bedingungen lassen sich in herkömmlichen Testumgebungen nur schwer nachbilden und erfordern alternative Verfahren, wie z. B. elektromagnetische Modenverwirbelungskammern [Kra07]. Mit Ausnahme von Nahfeldern lassen sich solche Feldbedingungen unter dem Begriff der *statistischen Felder* zusammenfassen.

Bei der Etablierung alternativer Verfahren und Testumgebungen stellt sich stets die grundlegende Frage des Vergleichs der Prüfergebnisse mit der herkömmlichen Methode.

Auftretende Fragestellungen wie:

Ein Störfestigkeitstest in einer herkömmlichen Testumgebung liefert ein bestimmtes Ergebnis (bestanden/durchgefallen). Welches Resultat ergibt sich in der alternativen Testumgebung?

lassen sich aufgrund der komplexen Fragestellung und der auftretenden Messunsicherheiten stets nur in einem statistischen Sinne beantworten. Jedes Testverfahren hat dabei

eine gewisse statistische Unsicherheit und liefert ein Ergebnis mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit.

Eine geeignetere Fragestellung lautet demnach:

Wie wahrscheinlich ist ein Bestehen/Durchfallen des Prüflings in einem Störfestigkeitstest in der alternativen Testumgebung?

Ein solcher Vergleich von Messumgebungen und Messverfahren kann auf praktische Art und Weise durch Messungen mit realen oder generischen Prüflingen durchgeführt werden. Problematisch ist dabei der große Zeitaufwand bei gleichzeitig geringer Aussagekraft der Messergebnisse. So gewonnene Resultate gelten immer nur für eine bestimmte Art von Prüfling und für einen bestimmten Frequenzbereich. Auch eine Abschätzung der statistischen Unsicherheit ist aus wenigen Messungen nur sehr ungenau möglich.

Ein weiterer möglicher Ansatz für einen Vergleich auf theoretischer Basis sind numerische Simulationen mit komplexen Prüflingsmodellen. Probleme bereiten hier die Verfügbarkeit von entsprechenden Modellen sowie der sehr hohe Simulationsaufwand für eine statistische Analyse.

1.2 Auftreten deterministischer elektromagnetischer Felder

Deterministische Felder, wie sie im Kontext dieser Arbeit betrachtet werden, treten in der Praxis in etablierten Testumgebungen wie Freifeld und Absorberhalle, aber auch in alternativen Testumgebungen wie Wellenleiter und GTEM-Zelle (engl. Gigahertz Transverse Electromagnetic) auf. Theoretische Entsprechungen zu diesen praktischen Umgebungen sind der elektromagnetische Halbraum und Freiraum. Das Feld entspricht dem Fernfeld einer weit entfernten Quelle und lässt sich als ebene Welle annähern, deren Ausbreitungsrichtung, Polarisation und Amplitude bekannt sind.

Aufgrund dieser Eigenschaften des deterministischen Feldes lässt sich die Einkopplung in elektrisch kleine Prüflinge messtechnisch einfach bestimmen. Die Abmessungen solcher Prüflinge sind kleiner als die Wellenlänge, was zu einem dipolartigen Abstrahl- und Einkoppelverhalten führt. Deshalb ist die Stärke der Einkopplung aus allen Richtungen sehr ähnlich und das für die Störfestigkeit entscheidende Maximum der Einkopplung kann aus nur wenigen Einfallrichtungen und Polarisationen gefunden werden.

Bei elektrisch großen Prüflingen, deren Abmessungen größer als die Wellenlänge sind, wird das Abstrahl- und Einkoppeldiagramm gerichteter [HBL03]. Die Direktivität hängt stärker von der Einfallrichtung ab und die maximale Direktivität steigt an. Deshalb wird die messtechnische Suche nach der effektivsten Einkoppelrichtung und der maximalen Einkopplung zeitaufwendiger, da mehr Einfallrichtungen untersucht werden müssen.

Die Stärke der maximalen Einkopplung wird trotz des deterministischen Feldes zu einer statistischen Größe, da die effektivste Einkoppelrichtung nur mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit gefunden wird.

1.3 Auftreten statistischer elektromagnetischer Felder

Statistische Felder sind dadurch gekennzeichnet, dass weder die Einfallrichtung, noch die Polarisation, noch die Amplitude des elektrischen und magnetischen Feldes exakt bekannt sind. Vielmehr wird das Feld durch eine gewisse statistische Verteilung beschrieben sowie durch Erwartungswerte und Varianzen von Feldstärkekennwerten charakterisiert.

In der Realität treten solche statistischen Felder in elektrisch großen und geometrisch komplexen Resonatoren, wie Schiffen, Automobilkarosserien, Flugzeugrümpfen, Satellitengehäusen oder in industriellen Umgebungen auf. Für eine bestimmte elektromagnetische Randbedingung und Frequenz ist das elektromagnetische Feld quasi-deterministisch. Trotzdem ist eine statistische Beschreibung sehr sinnvoll, denn nur kleine Änderungen an den geometrischen Abmessungen oder der Frequenz können zu einer sehr starken Änderung der Feldverteilung führen [HSJ99]. Gleichzeitig ändern sich die statistischen Kenngrößen, z. B. der Erwartungswert, aber nur sehr gering.

Statistische Felder treten auch in elektromagnetischen Modenverwirbelungskammern auf. Praktische Vorteile dieser alternativen Testumgebung sind die Möglichkeit der Erzeugung hoher Prüffeldstärken mit vergleichsweise geringen Verstärkerleistungen und die integrale Bewertung des Prüflings. So hat die Direktivität des Prüflings prinzipiell keinen Einfluss auf das Ergebnis eines Störfestigkeitstests [Höi06]. Das Verfahren lässt sich also auch für elektrisch große Prüflinge einsetzen, ohne dass die statistische Unsicherheit oder der Zeitaufwand ansteigen. Trotzdem gibt es aufgrund des statistischen Charakters der Messung eine statistische Unsicherheit, die aber nur von der Anzahl der gemessenen statistisch unabhängigen Randbedingungen abhängt.

1.4 Leitungen als Einfallstore für Störungen

Neben der direkten Einkopplung in einen Prüfling sind häufig die Einkoppelvorgänge in angeschlossene Verbindungsleitungen von großer Bedeutung für die Störfestigkeit. Die Leitung wirkt als parasitäre Empfangsantenne. Da solche Leitungen meist nicht hochfrequenztauglich konzipiert sind, treten praktisch immer Fehlanpassungen auf, die zu Mehrfachreflexionen und Leitungsresonanzen führen.

Die Einkopplung externer Felder in eine Leitung kann unter bestimmten Voraussetzungen durch vereinfachte Leitungsmodelle und geschlossene Gleichungen theoretisch bestimmt

werden. Vorteilhaft ist die einfache Auswertbarkeit der analytischen Lösungen, die schnelle Parameterstudien und eine zeitsparende statistische Analyse mit einer direkten Angabe der statistischen Verteilungen ermöglicht.

1.5 Zielstellung und Gliederung der Arbeit

Das erste Ziel dieser Arbeit ist die formale Beschreibung deterministischer und statistischer Felder. Hier werden hauptsächlich Erkenntnisse aus der Literatur wiederholt und zusammengefasst, die zum weiteren Verständnis notwendig sind.

Das zweite Ziel dieser Arbeit ist die analytische Beschreibung der Einkopplung deterministischer und statistischer Felder in eine Leitung. Aufbauend auf der bekannten Leitungstheorie werden geschlossene Lösungen für die maximale Einkopplung deterministischer Felder sowie für die mittlere und maximale Einkopplung statistischer Felder hergeleitet, die ein erstes Alleinstellungsmerkmal dieser Arbeit sind.

Interpretiert man die Leitung als ein einfaches Modell für einen Prüfling und den eingekoppelten Strom oder die eingekoppelte Spannung als Störgröße, so lässt sich das analytisch beschreibbare Modell der Leitung nutzen, um einen theoretischen Vergleich zwischen verschiedenen EMV-Messumgebungen wie Freifeld und Modenverwirbelungskammer herzustellen. Für dieses dritte Ziel der Arbeit wird erstmalig ein geschlossener Ausdruck für die Richtwirkung der Einkopplung in die Leitung hergeleitet. Weiterhin wird die statistische Unsicherheit von herkömmlichen und alternativen Messumgebungen theoretisch untersucht.

Die vorliegende Arbeit ist in sieben Kapitel untergliedert. Nach diesem einleitenden Kapitel befassen sich die Kapitel 2 und 3 mit der formalen Beschreibung deterministischer und statistischer elektromagnetischer Felder. In den Kapiteln 4 und 5 wird die Einkopplung von deterministischen und statistischen Feldern in elektrische Leitungen diskutiert. Die daraus folgenden Erkenntnisse werden in Kapitel 6 benutzt, um die Richtwirkung der Einkopplung in eine Leitung zu untersuchen und auf dieser Basis einen Vergleich von Störfestigkeitstests in unterschiedlichen Messumgebungen zu erlauben. Die wichtigsten Ergebnisse der Arbeit werden in Kapitel 7 zusammengefasst.

2 Beschreibung deterministischer elektromagnetischer Felder

Störfestigkeitstests werden häufig mit zeitlich harmonischen Signalen durchgeführt, da eine Untersuchung im Frequenzbereich einen besseren Einblick in das Resonanzverhalten eines Prüflings erlaubt, als eine Messung mit transienten Signalen im Zeitbereich. Aufgrund dessen wird auch die folgende theoretische Betrachtung im Frequenzbereich durchgeführt.

In der Theorie etablierter Störfestigkeitsmessverfahren wird von einer Kopplung über das Fernfeld ausgegangen. Die felderzeugende Quelle ist in einer reflexionsarmen Umgebung so weit entfernt, dass:

- die elektrische und magnetische Feldkomponente in Phase und senkrecht zueinander ausgerichtet sind,
- die elektrische und magnetische Feldkomponente senkrecht zur Ausbreitungsrichtung sind,
- sich eine kugelförmige Wellenfront ausbildet,
- sich für die Amplitude der Feldkomponenten eine $1/r$ -Abhängigkeit ergibt (r bezeichnet den Abstand zur Quelle),
- sich für die Leistungsflussdichte eine $1/r^2$ -Abhängigkeit ergibt und
- der Feldwellenwiderstand konstant ist.

Die abgestrahlte elektromagnetische Welle hat sich von der Quelle gelöst und wird auch als transversal-elektromagnetische Welle (kurz TEM-Welle) bezeichnet. Sie transportiert Strahlungsenergie von einer Störquelle zu einer Störsenke bzw. zu einem Prüfling.

In sehr großem Abstand von der Quelle können die Wellenfronten für die Ausdehnung des Prüflings als Ebenen angenähert werden. Ebenso kann für die Ausdehnung des Prüflings die $1/r$ -Abhängigkeit der Feldamplituden bzw. die $1/r^2$ -Abhängigkeit der Leistungsflussdichte vernachlässigt werden. Die so erhaltene Welle wird als *ebene Welle* bezeichnet.

Eine mathematische Beschreibung der ebenen Welle kann als Lösung der komplexen Wellengleichung im Frequenzbereich erhalten werden. Die Wellengleichung ergibt sich aus den Maxwell'schen Gleichungen in einem Ausbreitungsmedium, welches als quellenfrei, linear,

homogen und isotrop angenommen wird. Diese Annahmen sind für das Ausbreitungsmedium Luft zulässig.

Der komplexe elektrische Feldstärkevektor \mathbf{E} einer ebenen Welle (engl. plane wave) in Abhängigkeit des Ortes \mathbf{r} kann wie folgt formuliert werden [Har61]. Als Notation für Vektoren werden fettgedruckte, aufrechte Druckbuchstaben verwendet, skalare Größen werden kursiv gedruckt.

$$\mathbf{E}_{\text{pw}}(\mathbf{r}) = E (e_x \hat{\mathbf{x}} + e_y \hat{\mathbf{y}} + e_z \hat{\mathbf{z}}) e^{-j(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \quad (2.1)$$

Der Effektivwert der Welle wird mit E bezeichnet. Die Größen e_x , e_y und e_z bezeichnen die kartesischen Komponenten in Richtung der Einheitsvektoren $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$ und $\hat{\mathbf{z}}$. Die Richtung des Wellenvektors \mathbf{k} gibt die Ausbreitungsrichtung der Welle an. Der Betrag des Wellenvektors ist die Wellenzahl $k = \omega/c$, die sich aus der Kreisfrequenz ω und der Ausbreitungsgeschwindigkeit c der Welle ergibt.

Die zeitliche Abhängigkeit und der Augenblickswert des elektrischen Feldstärkevektors sind durch

$$\mathbf{E}_{\text{pw}}(\mathbf{r}, t) = \sqrt{2} \cdot \Re \left\{ \mathbf{E}_{\text{pw}}(\mathbf{r}) e^{j\omega t} \right\} \quad (2.2)$$

bestimmt, wobei $\Re \{ \}$ für den Realteil einer komplexen Größe und t für die Zeit steht.

Die zugehörige magnetische Feldstärke \mathbf{H} kann über ein Kreuzprodukt bestimmt werden.

$$\mathbf{H}_{\text{pw}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\eta} \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}_{\text{pw}}(\mathbf{r}) \quad (2.3)$$

Dabei bezeichnet $\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$ die Wellenimpedanz, die sich aus der Permeabilität μ und der Permittivität ε des Mediums ergibt. Auch die Ausbreitungsgeschwindigkeit $c = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$ der Welle wird durch diese Eigenschaften des Mediums bestimmt. Der normierte Wellenvektor $\hat{\mathbf{k}}$ besitzt eine Länge von Eins und ist einheitenlos.

Die so beschriebene ebene Welle ist außerdem eine *gleichförmige Welle*, da die Feldamplituden über dem Ort konstant sind. Die Welle ist weiterhin eine *Wanderwelle*, weil sich die Wellenfronten mit wachsender Zeit in Richtung des Wellenvektors \mathbf{k} bewegen. Je nach Phasenverschiebung der Komponenten e_x , e_y und e_z ergibt sich eine linear, zirkular oder beliebig elliptisch polarisierte Welle.

Zur Vereinfachung kann von reellen Anteilen e_x , e_y sowie e_z und einer daraus folgenden linearen Polarisation ausgegangen werden. Eine ebene Welle mit jeder beliebigen anderen Polarisation kann stets aus der Überlagerung von zwei linear polarisierten Wellen mit unterschiedlicher Richtung und einer gewissen Phasenverschiebung erzeugt werden [Har61].

Die Beschreibung eines deterministischen Feldes mit Hilfe einer ebener Welle bietet neben der einfachen mathematischen Form einen weiteren wichtigen Vorteil: Das Feld lässt sich allein durch die Angabe einer elektrischen Feldstärke fast vollständig und eindeutig charakterisieren [LK99]. Erzeugt man eine linear polarisierte, ebene Welle mit einer Feldstärkeamplitude E , so beträgt

- die Amplitude der parallel zur Polarisationssebene ausgerichteten kartesischen Feldkomponente ebenfalls E ,
- die gesamte elektrische Feldstärke ebenfalls E ,
- die minimale, mittlere und maximale Amplitude der Feldstärke (parallel zur Polarisationssebene ausgerichtete Komponente oder Gesamtbetrag) ebenfalls E ,
- das Betragsquadrat der elektrischen Feldstärke (parallel zur Polarisationssebene ausgerichtete Komponente oder Gesamtbetrag) E^2 . Das Gleiche gilt für das minimale, mittlere oder maximale Betragsquadrat der elektrischen Feldstärke.

Diese Eigenschaften gelten für die im nächsten Kapitel 3 beschriebenen statistischen Felder nicht mehr. Der komplizierte und umständliche Bezug auf eine *gleiche* Feldstärke ist ein Grund, warum Störfestigkeitsmessungen zwischen diesen intrinsisch verschiedenen Typen von Feldern nicht ohne weiteres verglichen werden können.

Eine weitere wichtige Eigenschaft von deterministischen Feldern ist deren hohe räumliche Korrelation mit einer sehr langen Korrelationslänge [Kra07]. Das Feld an unterschiedlichen Punkten im Raum ist von der Amplitude her sehr ähnlich und unterscheidet sich entsprechend der Wellenlänge $\lambda = 2\pi/k$ nur in der Phase. Aus einer Messung des Feldes an einer Stelle kann auf das Feld an anderen Stellen im Raum geschlossen werden. Für eine ebene Welle ist die Korrelationslänge unendlich lang.

3 Beschreibung statistischer elektromagnetischer Felder

Als statistische Felder im Rahmen dieser Arbeit sollen vorrangig Felder in Modenverwirbelungskammern (MVKn) sowie in elektrisch großen und geometrisch komplexen Resonatoren mit veränderlicher Geometrie verstanden werden. Zur Simulation solcher Felder sind die herkömmlichen numerischen Feldberechnungsverfahren wie die

- Momentenmethode,
- Finite-Elemente-Methode,
- Finite-Differenzen-Methode oder
- Transmission-Line-Matrix-Methode

im Allgemeinen zu zeitaufwendig, um alle Streukörper in einer Modenverwirbelungskammer wie den Rührer, die Antennen sowie den Prüfling zu erfassen und gleichzeitig die Statistik des Feldes hinreichend genau zu beschreiben [Mag08]. Eine in der Literatur ausführlich beschriebene Möglichkeit, diese Schwierigkeiten zu umgehen, ist der *Ansatz ebener Wellen*, der in diesem Kapitel detailliert erklärt wird.

3.1 Ansatz ebener Wanderwellen

Der Ansatz ebener Wellen (engl. plane wave integral representation) ist ein sehr einfaches und effizientes Verfahren zur Modellierung und Simulation statistischer Felder, sowohl analytisch als auch auf numerische Weise. Der Ansatz gilt primär für das Feld im *Arbeitsvolumen* einer *idealen*¹ Modenverwirbelungskammer. Eine reale Kammer muss eine ausreichend hohe Modendichte [Kra12] und eine ausreichend hohe Anzahl unabhängiger elektromagnetischer Randbedingungen aufweisen, um diesen Bedingungen zu entsprechen. Die Änderung der elektromagnetischen Randbedingungen geschieht in der Praxis häufig durch einen rotierenden *Modenrührer*, der eine entsprechend hohe *Rührereffizienz* [LB00] aufweisen muss.

Die Einfachheit des Wellenansatzes beruht auf der Vernachlässigung aller geometrisch komplexen Streukörper innerhalb der Modenverwirbelungskammer sowie der Kammer

¹In [Hil98b] wird eine Kammer als *ideal* bezeichnet, in der das Feld statistisch perfekt homogen und isotrop ist.

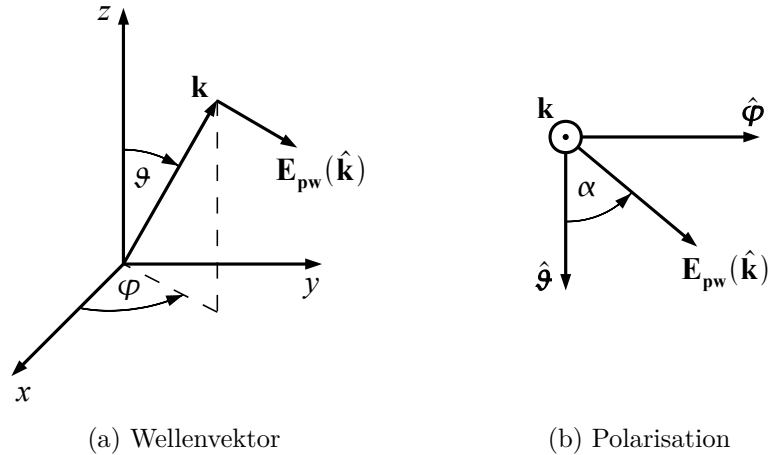


Abbildung 3.1: Definition des Wellenvektors und der Polarisation in Kugelkoordinaten mit dem Polarwinkel ϑ , dem Azimutwinkel φ und dem Polarisationswinkel α

selbst. Stattdessen wird nur das Feld fern der Kammerwände als eine Überlagerung ebener Wellen mit beliebiger Einfallsrichtung, Polarisation und Phasenlage dargestellt. Dabei darf keine Einfallsrichtung, Polarisation und Phasenlage bevorzugt werden. Werden die Reflexionen der ebenen Wellen an planaren Begrenzungen der Kammer wie ebenen Wänden, rechtwinkligen Kanten oder Ecken berücksichtigt, so ist der Wellenansatz auch für solche Bereiche gültig [Hil05, MH09].

Der Wellenansatz erfüllt die Maxwell'schen Gleichungen und führt gleichzeitig auf die zu erwartende Feldverteilung und räumliche Korrelation des Feldes innerhalb einer Modenverwirbelungskammer.

3.1.1 Analytische Beschreibung

Eine analytische Umsetzung des Ansatzes ebener Wellen ist erstmalig in [Dun90] und später in [Hil98b, Hil95, HL02] zu finden. Grundlegende Ergebnisse dieser Arbeiten werden im Folgenden zusammengefasst. Der analytische Wellenansatz geht von einer unendlichen Anzahl von überlagerten ebenen Wellen aus. Das elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ ergibt sich als Integral über alle ebenen Wellen. Die zweckmäßige Beschreibung zur gleichmäßigen Verteilung der Einfallsrichtungen und Polarisationen der ebenen Wellen erfolgt in Kugelkoordinaten.

Die zugrundeliegende Geometrie ist in Abbildung 3.1 dargestellt. Der Wellenvektor \mathbf{k} sowie die Einheitsvektoren $\hat{\vartheta}$ und $\hat{\varphi}$ in Richtung des Polarwinkels ϑ und des Azimutwinkels φ bilden ein orthogonales Dreibein. Die Polarisation der Welle wird durch den Polarisationswinkel α bestimmt. Die ebene Welle besitzt außerdem einen zeitlichen Phasenwinkel β , der hier nicht dargestellt ist.

Da die Überlagerung der Wellen zweckmäßig in kartesischen Koordinaten erfolgt², müssen alle zur Beschreibung des Feldes wichtigen Vektoren in kartesische Koordinaten umgerechnet werden.

Aus dem Polarwinkel ϑ und dem Azimutwinkel φ ergibt sich die Richtung des Wellenvektors \mathbf{k} .

$$k_x = k \sin \vartheta \cos \varphi \quad (3.1a)$$

$$k_y = k \sin \vartheta \sin \varphi \quad (3.1b)$$

$$k_z = k \cos \vartheta \quad (3.1c)$$

Der Vektor der elektrischen Feldstärke ist orthogonal zu \mathbf{k} und wird zusätzlich durch den Polarisationswinkel α bestimmt.

$$e_x = \cos \alpha \cos \vartheta \cos \varphi - \sin \alpha \sin \varphi \quad (3.2a)$$

$$e_y = \cos \alpha \cos \vartheta \sin \varphi + \sin \alpha \cos \varphi \quad (3.2b)$$

$$e_z = -\cos \alpha \sin \vartheta \quad (3.2c)$$

Der Vektor der magnetischen Feldstärke ist ebenfalls orthogonal zum Wellenvektor \mathbf{k} . Gleichzeitig steht er auch senkrecht zur Richtung des E -Feldes.

$$h_x = -\sin \alpha \cos \vartheta \cos \varphi - \cos \alpha \sin \varphi \quad (3.3a)$$

$$h_y = -\sin \alpha \cos \vartheta \sin \varphi + \cos \alpha \cos \varphi \quad (3.3b)$$

$$h_z = \sin \alpha \sin \vartheta \quad (3.3c)$$

Im Gegensatz zur Herleitung in [Hil98b], in der von beliebig polarisierten Wellen ausgegangen wird, sind die überlagerten ebenen Wellen bei der hier gewählten Darstellung stets linear polarisiert. Für das Ergebnis ist dieser etwas unterschiedliche Ansatz jedoch irrelevant, da sich eine beliebig polarisierte Welle stets aus der Überlagerung zweier linear polarisierter Wellen erzeugen lässt.

Die gesamte elektrische Feldstärke bzw. deren Erwartungswert über alle möglichen Einfallrichtungen, Polarisierungen und Phasenlagen der ebenen Wellen ergibt sich aus dem in Gleichung (3.4) folgenden Integral. Für die Feldstärke einer ebenen Welle wird die Darstellung aus Gleichung (2.1) verwendet. Diese wird zusätzlich mit der Phasenverschiebung $e^{j\beta}$ multipliziert. Die Integration erfolgt über den Raumwinkel $d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$, sowie den

²Zur Überlagerung der Wellen genügt allgemein ein Koordinatensystem mit ortsunabhängigen Einheitsvektoren.

Polarisationswinkel α und den Phasenwinkel β ³. Der Integrationsbereich für den Raumwinkel beträgt 4π , was dem gesamten Raumwinkel entspricht. Dabei wird der Polarwinkel ϑ in den Grenzen von 0 bis π variiert, der Azimutwinkel φ in den Grenzen von 0 bis 2π . Der Integrationsbereich für den Polarisationswinkel α entspricht einer halben Umdrehung und läuft von 0 bis π . Demzufolge liegen die Integrationsgrenzen des Phasenwinkels β im Bereich von 0 bis 2π und entsprechen einer vollen Phasendrehung. Das Integral wird auf die gewählten Integrationsgrenzen normiert⁴.

$$\langle \mathbf{E}(\mathbf{r}) \rangle_{\infty} = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{E}_{\text{pw}}(\mathbf{r}) \, d\beta \, d\alpha \, d\Omega = 0 \quad (3.4)$$

Die Erwartungswerte der Real- und Imaginärteile der elektrischen Feldstärkekomponenten sind Null, da $\int_0^{2\pi} e^{j\beta} \, d\beta = 0$ ist. Physikalisch begründen lässt sich dieses Ergebnis durch die Tatsache, dass die Polarisation und Phasenlage der überlagerten Wellen aufgrund der Vielfachreflexionen und der Mehrwegeausbreitung innerhalb eines gut verwirbelten Feldes beliebig oft hin und her gedreht wird.

Das Betragsquadrat der gesamten elektrischen Feldstärke ist eine interessante Größe, da es proportional zur Energiedichte des Feldes ist [Har61]. Der Erwartungswert des Betragsquadrats der gesamten elektrischen Feldstärke lässt sich erneut durch ein Integral über Ω , α und β bestimmen⁵.

$$\langle |\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2 \rangle_{\infty} = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{E}_{\text{pw}}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}_{\text{pw}}^*(\mathbf{r}) \, d\beta \, d\alpha \, d\Omega \quad (3.5a)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} E^2 \, d\beta \, d\alpha \, d\Omega = E^2 \equiv E_0^2 \quad (3.5b)$$

Das zu erwartende Betragsquadrat der gesamten E -Feldstärke ist unabhängig vom Ort \mathbf{r} . Damit ergibt sich eine erste zentrale Eigenschaft des statistischen Feldes innerhalb einer idealen Modenverwirbelungskammer, dessen *räumliche Homogenität*. Bei praktischen Messungen ist der genaue Ort eines Prüflings innerhalb einer Modenverwirbelungskammer irrelevant, solange sich der Prüfling im Arbeitsvolumen befindet.

Für eine klarere Definition der Feldstärke wird der Effektivwert E der überlagerten ebenen Wellen im Sinne der sogenannten *kammerspezifischen Konstanten* E_0 festgelegt. Diese

³In [Hil98b] wird die Integration nur über den Raumwinkel Ω durchgeführt. Das liegt an der Annahme eines beliebig polarisierten und phasenverschobenen Winkelspektrums der ebenen Wellen.

⁴In [Hil98b] erfolgt ebenfalls keine Normierung des Integrals auf den gewählten Integrationsbereich. Die Normierung erfolgt über die Festlegung der kammerspezifischen Konstante.

⁵Gegenüber der Herleitung in [Hil98b] ist bei dem hier gewählten Ansatz nur *eine* Integration über den Raumwinkel nötig.

Konstante kann auch aus dem Energieerhaltungssatz und der mittleren Energiedichte innerhalb einer Modenverwirbelungskammer bestimmt werden [HMO⁺94].

$$E_0^2 = \frac{QP}{\omega \varepsilon V} \quad (3.6)$$

Dabei ist Q die Güte, P die zugeführte bzw. dissipierte Leistung, ω die Kreisfrequenz der Anregung, ε die Permittivität des Mediums und V das Volumen der Kammer.

Auf ähnlichem Weg können die Erwartungswerte des Betragsquadrats der kartesischen E -Feldkomponenten bestimmt werden.

$$\langle |E_x(\mathbf{r})|^2 \rangle_\infty = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} E_x(\mathbf{r}) \cdot E_x^*(\mathbf{r}) \, d\beta \, d\alpha \, d\Omega \quad (3.7a)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} E^2 (\cos \alpha \cos \vartheta \cos \varphi - \sin \alpha \sin \varphi)^2 \, d\beta \, d\alpha \, d\Omega \quad (3.7b)$$

$$= \frac{E^2}{3} \equiv \frac{E_0^2}{3} = \langle |E_y(\mathbf{r})|^2 \rangle_\infty = \langle |E_z(\mathbf{r})|^2 \rangle_\infty = \langle |E_R(\mathbf{r})|^2 \rangle_\infty \quad (3.7c)$$

Die Erwartungswerte der Betragsquadrate der kartesischen elektrischen Feldkomponenten sind für jede Komponente E_R gleich. Dies ist eine zweite zentrale Eigenschaft von statistischen Feldern, die *Isotropie*. In praktischen Messungen ist also nicht nur der Ort, sondern auch die Ausrichtung eines Prüflings irrelevant.

Für die magnetische Feldstärke lassen sich ähnliche Ergebnisse herleiten.

$$\langle \mathbf{H}(\mathbf{r}) \rangle_\infty = 0 \quad (3.8)$$

$$\langle |\mathbf{H}(\mathbf{r})|^2 \rangle_\infty = \frac{E_0^2}{\eta^2} \quad (3.9)$$

$$\langle |H_x(\mathbf{r})|^2 \rangle_\infty = \langle |H_y(\mathbf{r})|^2 \rangle_\infty = \langle |H_z(\mathbf{r})|^2 \rangle_\infty = \frac{E_0^2}{3\eta^2} \quad (3.10)$$

Die mittlere magnetische Feldstärke (Real- und Imaginärteil der Komponenten) ist Null. Der zu erwartende Effektivwert der magnetischen Feldstärke ist ebenfalls homogen und isotrop. Er ist für beliebige Positionen innerhalb einer idealen Modenverwirbelungskammer über die Freiraumimpedanz η mit dem Erwartungswert des Effektivwerts der elektrischen Feldstärke verknüpft [Hil98b].

Die Größe E_0/η kann auch als eine neue kammerspezifische Konstante H_0 im Sinne einer

magnetischen Feldstärke formuliert werden. Dabei ist μ die Permeabilität des Mediums.

$$H_0^2 = \frac{E_0^2}{\eta^2} = \frac{QP}{\omega\mu V} \quad (3.11)$$

Eine dritte zentrale Eigenschaft von statistischen Feldern ist die *Ergodizität*, die sich aber nicht direkt aus dem gezeigten Ansatz ableiten lässt. Ergodizität meint die Austauschbarkeit von statistischen Stichproben [AW98]. So ist unter gleichen Bedingungen eine Stichprobe über unterschiedliche Rührerstellungen an einer Position im Raum austauschbar gegen eine Stichprobe über unterschiedliche Raumpositionen bei der gleichen Rührerstellung.

3.1.2 Numerische Monte-Carlo-Simulation

Die grundlegenden Prinzipien einer numerischen Umsetzung des Ansatzes ebener Wellen sind in [Lad99, MBCD02, Mus03] beschrieben. Im Allgemeinen werden die analytischen Integrale über eine unendliche Anzahl von ebenen Wellen durch eine numerische Summe über eine endliche Anzahl von Wellen ersetzt.

Die Einfallsrichtungen, Polarisierungen und Phasenlagen der ebenen Wellen werden durch einen Zufallsgenerator bestimmt. Aus der Überlagerung von N ebenen Wellen ergibt sich das Feld einer festen elektromagnetischen Randbedingung bzw. einer festen Rührerposition. Weitere N Wellen mit anderen zufälligen Einfallsrichtungen, Polarisierungen und Phasenlagen bilden eine weitere Randbedingung. Auf diese Weise können B unterschiedliche und statistisch unabhängige Randbedingungen (engl. boundary conditions) berechnet werden. Über diese B Randbedingungen erfolgt anschließend die statistische Auswertung.

3.1.2.1 Anzahl der Wellen und Randbedingungen

Die Anzahl der Wellen N entspricht in etwa der Anzahl der gleichzeitig angeregten Moden in einer realen Kammer. Mit wachsendem N wird das Feld bei einer Randbedingung komplexer und chaotischer. Mit wachsendem N steigt auch das mögliche Maximum eines Feldstärkebetrags an, da sich mehr Wellen konstruktiv überlagern können. Die Anzahl der Randbedingungen B entspricht der Anzahl der vermessenen unabhängigen Rührerpositionen in einer realen Messung. Mit wachsendem B sinkt die statistische Unsicherheit der Simulation. Für große N und B nähern sich die numerischen Ergebnisse an die analytischen Ergebnisse an, z. B. strebt der Mittelwert gegen den Erwartungswert. Trotz dieser Gemeinsamkeiten hat die numerische Monte-Carlo-Simulation gegenüber der analytischen Lösung einige Vorteile:

- Während die analytische Lösung nur für eine ideale Modenverwirbelungskammer gültig ist, kann die numerische Simulation auch dazu benutzt werden, eine unvollkommene Kammer zu beschreiben. Dazu werden relativ geringe Anzahlen für N und B benutzt, um die Bedingungen bei zu niedrigen Frequenzen, einer zu geringen Modendichte oder einem sehr ineffizienten Rührer zu simulieren.
- Die Anzahl B der elektromagnetischen Randbedingungen kann in einer Simulation äquivalent zur Anzahl der unabhängigen Rührerpositionen in einer Messung gewählt werden. Die statistische Unsicherheit der Simulation und der Messung sind damit direkt vergleichbar.
- Über die numerische Simulation können Kenngrößen berechnet werden, für die keine geschlossene analytische Lösung existiert.
- Bei der numerischen Analyse können nicht nur komplett unkorrelierte, sondern auch zueinander korrelierte Randbedingungen untersucht werden. Bei praktischen Messungen treten solche korrelierten Rührerpositionen auf, wenn der Rührer um weniger als den *unabhängigen Rührerwinkel* gedreht wird. Um solche Bedingungen in der Simulation nachzubilden, werden einige Wellen für mehrere Randbedingungen verwendet. Dieses Verfahren ist ausführlich in [MV10b] beschrieben.
- Mit $N = 1$ kann das Feld eines Störfestigkeitstests mit nur einer ebenen Welle aus vielen unterschiedlichen Einfallsrichtungen nachgebildet werden.

Interessant ist, dass schon kleine Werte für N und B genügen, um die Verhältnisse in realen Kammern hinreichend genau nachzubilden. Schon mit der sehr geringen Anzahl von $N = 12$ Wellen und $B = 12$ Randbedingungen können ausreichend genaue Ergebnisse erzielt werden. Die statistische Schwankungsbreite der Ergebnisse ist genau wie bei Messungen mit nur 12 Rührerpositionen sehr hoch, dafür ist die Simulation sehr zeiteffizient. Wie in vorherigen Arbeiten [MTV09, MTV11, Mag08] gezeigt wurde, sind Simulationen mit $N = 100$ Wellen und $B = 100$ Randbedingungen in den meisten Fällen auch für theoretische Betrachtungen hinreichend genau. Mit $N = 1000$ Wellen und $B = 1000$ Randbedingungen nähert sich die numerische Lösung sehr stark der analytischen Lösung an, welche ihrerseits eine asymptotische Lösung für ideale Modenverwirbelungskammern darstellt. Die Anzahlen N und B müssen nicht zwangsweise gleich groß sein, allerdings ist es zweckmäßig beide Werte stets in die gleiche Richtung zu verändern.

3.1.2.2 Verteilung der Winkel

Auch bei der numerischen Monte-Carlo-Simulation darf keine Einfallsrichtung, keine Polarisation und keine Phasenlage der ebenen Wellen bevorzugt werden. Zur Bestimmung

Tabelle 3.1: Verteilung der Winkel bei der Überlagerung von Wanderwellen

Name	Variable	Verteilung
Azimutwinkel	φ	$U(0, 2\pi)$
Polarwinkel	ϑ	$\arccos(U(-1, 1))$
Phasenwinkel	β	$U(0, 2\pi)$
Polarisationswinkel	α	$U(0, \pi)$

dieser Parameter ist erneut eine Beschreibung in Kugelkoordinaten sinnvoll. In der analytischen Lösung in Abschnitt 3.1.1 wurden die Winkel ϑ und φ in den Bereichen $[0, \pi]$ und $[0, 2\pi]$ gleichverteilt. Um eine Gleichverteilung über die Kugeloberfläche zu erhalten, enthält der differentielle Raumwinkel den Term $\sin \vartheta$. Der gleiche Ansatz könnte auch für die Monte-Carlo-Simulation gewählt werden.

Andererseits ist es auch möglich, den Term $\sin \vartheta$ zu vernachlässigen und dafür den Polarwinkel ϑ ungleichmäßig zu verteilen. Diese Methode ist etwa doppelt so effizient, da alle Wellen die gleiche Amplitude besitzen und nicht nachträglich durch den Term $\sin \vartheta$ abgewertet werden. Demnach muss der Polarwinkel entsprechend dem $\arccos(U(-1, 1))$ verteilt sein, wobei $U(-1, 1)$ einer Gleichverteilung zwischen $[-1, 1]$ entspricht.

Die Winkel α für die Polarisation und β für die Phasen müssen gleichverteilt sein. Typischerweise wird β im Bereich $[0, 2\pi]$ variiert, so dass es genügt, α in den Grenzen $[0, \pi]$ zu verändern. Im Allgemeinen ist es ausreichend, einen dieser Winkel im Bereich $[0, 2\pi]$ zu variieren, da ein Winkel größer als π die Richtung bzw. das Vorzeichen umkehrt. Die statistische Verteilung aller Winkel ist in Tabelle 3.1 zusammengefasst.

3.1.2.3 Normierung der Feldstärke

Um für unterschiedliche Anzahlen N von überlagerten Wellen vergleichbare Ergebnisse zu bekommen, ist eine Normierung der Feldstärke notwendig. Eine mögliche Herleitung nutzt die Erhaltung der Energie bzw. der Leistung. Die Leistung einer ebenen Welle ist proportional zum Quadrat der Amplitude. Für N ebene Wellen, von denen jede den Effektivwert E_N besitzt, ist die Leistung proportional zur Summe der Quadrate. Wenn die Leistung in beiden Fällen gleich sein soll, muss folgende Normierungsgleichung gelten.

$$E_N = \frac{E_0}{\sqrt{N}} \quad (3.12)$$

Das bedeutet: Je höher die Anzahl der überlagerten Wellen, desto geringer ist die Amplitude jeder einzelnen Welle. Die relative Abnahme entspricht dabei der Wurzel der Anzahl. Die kammer spezifische Konstante E_0 wurde in Gleichung (3.6) definiert.

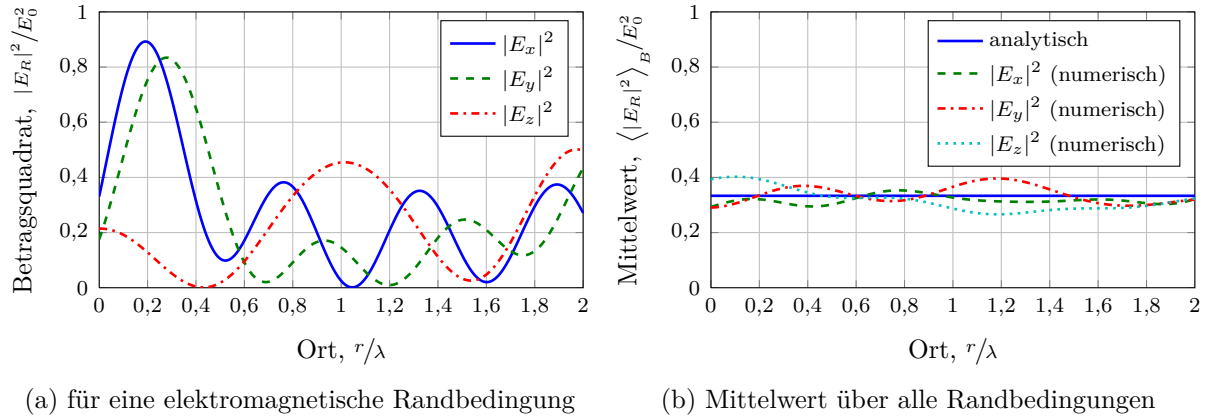


Abbildung 3.2: Betragsquadrat der elektrischen Feldstärkekomponenten entlang einer Linie im Arbeitsvolumen

3.1.3 Simulationsbeispiele

Als Simulationsbeispiel werden $B = 100$ Randbedingungen bestehend aus jeweils $N = 100$ Wellen numerisch bestimmt. Der räumliche Bereich der Auswertung ist eine Linie im Arbeitsvolumen mit einer Länge von 2 Wellenlängen, die in 500 Punkte diskretisiert ist. In Abbildung 3.2 ist das Betragsquadrat der elektrischen Feldstärkekomponenten entlang dieser Linie dargestellt. Die Abszisse ist auf die Wellenlänge λ , die Ordinate auf die kammer-spezifische Konstante bzw. deren Quadrat E_0^2 normiert. Damit sind die dargestellten Ergebnisse unabhängig von den Kenngrößen der Kammer und der Anregung, wie z. B. der Frequenz.

In Abbildung 3.2a ist das Feld *einer* elektromagnetischen Randbedingung dargestellt. Die Feldverteilung entspricht dem Zustand bei einer festen Rührerposition. Sie ist beliebig, aber fest. Man erkennt ein räumlich inhomogenes Feld mit einem komplizierten Stehwellenmuster, das einen chaotischen Verlauf der einzelnen Feldstärkekomponenten aufweist. Lokale Minima und Maxima einer Feldstärkekomponente liegen räumlich relativ dicht beieinander (siehe auch Abschnitt 3.4). Die Minima und Maxima können sich um mehr als eine Größenordnung unterscheiden. Weiterhin besteht kein Zusammenhang zwischen den einzelnen Feldkomponenten. Für nur eine elektromagnetische Randbedingung ist das Feld an einigen Orten stark anisotrop.

Abbildung 3.2b zeigt den Mittelwert des Betragsquadrats der elektrischen Feldstärkekomponenten über mehrere Randbedingungen. Die Mittelwerte ändern sich kaum über dem Ort und unterscheiden sich nur geringfügig zwischen den Komponenten. Hier ist die räumliche Homogenität und Isotropie zu erkennen, die erst durch die statistische Auswertung mehrerer Randbedingungen und Feldverteilungen entsteht. Die zufälligen Abweichungen zwischen der analytischen Lösung und den numerischen Ergebnissen sind sehr gering und

entsprechen der statistischen Unsicherheit bzw. dem *statistischen Rauschen* der Monte-Carlo-Simulation.

3.2 Ansatz ebener Stehwellen

Grundlegend für den Wellenansatz ist, dass er sowohl die Maxwell'schen Gleichungen erfüllt, als auch die korrekte statistische Verteilung und räumliche Korrelation des elektromagnetischen Feldes berücksichtigt. Im analytischen Ansatz ebener Wanderwellen existiert zu jeder einfallenden Welle eine exakt antiparallele Welle gleicher Amplitude, die beide gemeinsam eine stehende Welle bilden. Bei der numerischen Überlagerung endlich vieler Wanderwellen existiert nicht zwangsweise zu jeder Welle eine exakt antiparallele. Trotzdem ist es möglich, das statistische Feld innerhalb einer Modenverwirbelungskammer als Überlagerung vieler stehender Wellen darzustellen [MV10a].

Nach Gleichung (2.1) lässt sich eine linear polarisierte ebene Welle mit beliebiger Phasenverschiebung β^+ folgendermaßen beschreiben. Die hinlaufende Richtung der Wellen wird durch ein Superscript $+$ gekennzeichnet.

$$\mathbf{E}_{\text{pw}}^+(\mathbf{r}) = E (e_x \hat{\mathbf{x}} + e_y \hat{\mathbf{y}} + e_z \hat{\mathbf{z}}) e^{-j(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} e^{j\beta^+} \quad (3.13)$$

Eine zweite ebene Welle in entgegengesetzter, rücklaufender Richtung wird mit dem Superscript $-$ gekennzeichnet.

$$\mathbf{E}_{\text{pw}}^-(\mathbf{r}) = E (e_x \hat{\mathbf{x}} + e_y \hat{\mathbf{y}} + e_z \hat{\mathbf{z}}) e^{j(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} e^{j\beta^-} \quad (3.14)$$

Die rücklaufende Welle besitzt die gleiche Amplitude und gleiche Anteile e_x , e_y und e_z in Richtung der jeweiligen Einheitsvektoren. Sie besitzt aber eine andere Phasenlage β^- .

Bei der Überlagerung beider ebenen Wellen zu einer stehenden Welle

$$\mathbf{E}_{\text{sw}}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_{\text{pw}}^+(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_{\text{pw}}^-(\mathbf{r}) = E (e_x \hat{\mathbf{x}} + e_y \hat{\mathbf{y}} + e_z \hat{\mathbf{z}}) \left[e^{-j(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) + j\beta^+} + e^{j(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) + j\beta^-} \right] \quad (3.15)$$

kann der Phasenwinkel für eine kompaktere Darstellung in zwei Teile aufgeteilt werden.

$$\beta^+ = \beta + \delta \qquad \beta^- = \beta - \delta \quad (3.16)$$

Damit kann die stehende Welle entsprechend umgeformt werden.

$$\mathbf{E}_{\text{sw}}(\mathbf{r}) = 2E (e_x \hat{\mathbf{x}} + e_y \hat{\mathbf{y}} + e_z \hat{\mathbf{z}}) \cos(\delta - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) e^{j\beta} \quad (3.17)$$

Das dazugehörige magnetische Feld ergibt sich aus der zweiten Maxwell'schen Gleichung.

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{j\omega\mu} \nabla \times \mathbf{E} \quad (3.18)$$

$$\mathbf{H}_{\text{sw}}(\mathbf{r}) = j2 \frac{E}{\eta} \sin(\delta - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) e^{j\beta} \begin{pmatrix} e_z \hat{k}_y - e_y \hat{k}_z \\ e_x \hat{k}_z - e_z \hat{k}_x \\ e_y \hat{k}_x - e_x \hat{k}_y \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

$$= j2 \frac{E}{\eta} (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{e}) \sin(\delta - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) e^{j\beta} \quad (3.20)$$

Das Kreuzprodukt aus dem normierten Wellenvektor und der normierten Richtung des elektrischen Feldes kann als ein normierter Vektor \mathbf{h} , bestehend aus den Komponenten h_x , h_y und h_z in Richtung der jeweiligen Einheitsvektoren aufgefasst werden. Auf diese Weise lässt sich das magnetische Feld der stehenden Welle sehr kompakt schreiben.

$$\mathbf{H}_{\text{sw}}(\mathbf{r}) = j2 \frac{E}{\eta} (h_x \hat{\mathbf{x}} + h_y \hat{\mathbf{y}} + h_z \hat{\mathbf{z}}) \sin(\delta - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) e^{j\beta} \quad (3.21)$$

Damit sind die elektrische und magnetische Feldstärke der stehenden Welle an jedem Ort bekannt. Die Welle ist eine stehende Welle und keine Wanderwelle mehr, da die Phase unabhängig vom Ort ist. Die Welle ist trotzdem eine ebene Welle, da Flächen gleicher Phase Ebenen darstellen. Auch die lineare Polarisierung ist noch vorhanden, wobei E und H senkrecht aufeinander stehen. Gegenüber der Wanderwelle sind E und H zeitlich und räumlich um 90° phasenverschoben. Die Energie pendelt zwischen elektrischer und magnetischer Feldenergie und propagiert nicht durch den Raum. Dabei gibt es Flächen im Raum, an denen die Feldstärke jederzeit Null ist (Schwingungsknoten) und Flächen an denen die Feldstärke immer zwischen Minimal- und Maximalwert (Schwingungsbäuche) hin- und herschwingt [Har61].

Der Winkel β kann dabei als herkömmlicher zeitlicher Phasenwinkel angesehen werden. Bei seiner Änderung verschieben sich die Zeitpunkte, an denen die Amplitude z. B. einen Nulldurchgang erfährt. Der Winkel δ ist dagegen ein räumlicher Phasenwinkel (engl. spatial phase angle), bei dessen Änderung die Schwingungsknoten und Schwingungsbäuche im Raum verschoben werden.

Die Winkelverteilung ähnelt der des herkömmlichen Wellenansatzes. Der Azimutwinkel φ wird gleichmäßig zwischen $[0, 2\pi]$ verteilt. Der Polarwinkel ϑ muss entsprechend einer arccos-Funktion ungleich im Bereich $[0, \pi]$ verteilt werden, um eine Gleichverteilung aller möglichen Einfallsrichtungen auf einer Kugeloberfläche zu erreichen. Der Phasenwinkel β und der Polarisationswinkel α müssen auch gleichverteilt werden. Typischerweise wird der Phasenwinkel β im Bereich $[0, 2\pi]$ und der Polarisationswinkel α in den Grenzen von

Tabelle 3.2: Verteilung der Winkel bei der Überlagerung von Stehwellen

Name	Variable	Verteilung
Azimutwinkel	φ	$U(0, 2\pi)$
Polarwinkel	ϑ	$\arccos(U(-1, 1))$
Phasenwinkel (zeitlich)	β	$U(0, 2\pi)$
Phasenwinkel (räumlich)	δ	$U(0, \pi)$
Polarisationswinkel	α	$U(0, \pi)$

$[0, \pi]$ verteilt. Damit ist es ausreichend, den räumlichen Phasenwinkel δ im Bereich $[0, \pi]$ zu verteilen.

Allgemein genügt es, wenn einer der drei Winkel α , β und δ im Bereich $[0, 2\pi]$ variiert wird und die anderen beiden Winkel nur in den Grenzen von $[0, \pi]$ verändert werden. In jedem Fall wird durch einen Winkel größer als π die Richtung umgekehrt. Die Verteilung aller Winkel ist in Tabelle 3.2 zusammengefasst.

Die Normierung der Feldstärke ist nötig, um für unterschiedliche Anzahlen von überlagerten Wellen vergleichbare Ergebnisse zu erhalten. Zur Herleitung wird angenommen, dass die Gesamtleistung aller Wellen unabhängig von deren Anzahl ist. Um den Ansatz stehender Wellen mit dem Ansatz ebener Wanderwellen vergleichbar zu machen, müssen die Leistungen äquivalent sein. Die Leistung einer stehenden Welle setzt sich aus den Leistungen der beiden ursprünglichen Wanderwellen zusammen und entspricht der doppelten Leistung einer der Wanderwellen. Da die Leistung proportional zum Feldstärkequadrat ist, gilt bei gleichen Leistungen der Wander- und Stehwellen für deren Effektivwerte $E_{sw} = E_{pw}/\sqrt{2}$. Aus der bekannten kammer-spezifischen Konstante E_0 aus Gleichung (3.6) und der Normierungsregel in Gleichung (3.12) kann dann der Effektivwert jeder überlagerten Stehwelle berechnet werden.

$$E_{N,sw} = \frac{E_0}{\sqrt{2N}} \quad (3.22)$$

Alternativ kann der Faktor $1/\sqrt{2}$ auch in die Beschreibungsgleichungen der stehenden Welle eingebunden werden. Damit ergeben sich aus den Gleichungen (3.17) und (3.21)

$$\mathbf{E}_{sw}(\mathbf{r}) = \sqrt{2}E (e_x \hat{\mathbf{x}} + e_y \hat{\mathbf{y}} + e_z \hat{\mathbf{z}}) \cos(\delta - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) e^{j\beta}, \quad (3.23a)$$

$$\mathbf{H}_{sw}(\mathbf{r}) = j\sqrt{2} \frac{E}{\eta} (h_x \hat{\mathbf{x}} + h_y \hat{\mathbf{y}} + h_z \hat{\mathbf{z}}) \sin(\delta - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) e^{j\beta}, \quad (3.23b)$$

und es kann die herkömmliche Normierung nach Gleichung (3.12) benutzt werden.

Durch die Überlagerung von stehenden Wellen ergeben sich für die statistische Feldverteilung (siehe Abschnitt 3.3.1) und räumliche Korrelation (siehe Abschnitt 3.4) des Feldes

die gleichen Ergebnisse wie bei der Überlagerung von ebenen Wanderwellen. Dieses Resultat wurde in [MV10a] sowohl analytisch als auch numerisch verifiziert. Aufgrund der direkten Überlagerung von stehenden Wellen ergibt sich eine Annäherung an die modale Theorie zur Darstellung des Feldes innerhalb eines Resonators oder einer Modenverwirbelungskammer.

3.3 Verteilungs- und Dichtefunktionen

Bisher wurden in diesem Kapitel nur die Darstellung des Feldes beschrieben und Erwartungswerte für einige Kenngrößen des Feldes hergeleitet. Für weitere statistische Untersuchungen sind aber Verteilungs- und Dichtefunktionen notwendig, die in diesem Abschnitt angegeben werden.

3.3.1 Feldverteilung

Aus dem zentralen Grenzwertsatz der Statistik [Hil98b] bzw. der Maximum-Entropiemethode [Hil98a] folgt, dass die Real- und Imaginärteile der Feldkomponenten in einer idealen Modenverwirbelungskammer normalverteilt und zueinander unkorreliert sind. Ihr Erwartungswert beträgt Null. Die Varianz beträgt jeweils $E_0^2/6$.

Daraus folgen unwillkürlich die statistischen Verteilungen der anderen Kenngrößen des Feldes. Die Beträge der Feldkomponenten sind χ -verteilt mit zwei Freiheitsgraden. Diese Verteilung ist auch als Rayleigh-Verteilung bekannt. Die Betragsquadrate der Feldkomponenten sind χ^2 -verteilt mit ebenfalls zwei Freiheitsgraden. Eine solche Verteilung ist auch als Exponentialverteilung bekannt. Der Betrag und das Betragsquadrat der gesamten Feldstärke sind χ - bzw. χ^2 -verteilt mit jeweils sechs Freiheitsgraden. Diese Eigenschaften gelten sowohl für die elektrische, als auch für die magnetische Feldstärke.

Für eine formale Definition aller genannten Verteilungen sowie die Herleitung der dazugehörigen Erwartungswerte und Standardabweichungen wird auf [Kra07] bzw. den Anhang A.1 verwiesen. Eine grafische Darstellung der Dichte- und Verteilungsfunktionen ist in den Abbildungen 3.3 und 3.4 als Kurve mit $B = 1$ gezeigt.

3.3.2 Verteilung der Mittelwerte, Maxima und Minima

In realen Messungen in einer Modenverwirbelungskammer wird aus Zeitgründen häufig nur eine geringe Anzahl B von Rührerpositionen untersucht. Im statistischen Sinne wird nur eine kleine Stichprobe der Größe B betrachtet. Für kleine B ist auch der empirische

Mittelwert $\langle \rangle_B$ einer Größe eine Zufallsvariable, die statistischen Schwankungen unterworfen ist und nur eine Näherung des Erwartungswerts $\langle \rangle_\infty$ darstellt. Nach [BS85] ergibt sich die Dichtefunktion $\text{pdf}_{\langle \rangle_B}$ (engl. probability density function) des empirischen Mittelwerts einer statistischen Variable für eine Stichprobe der Größe B als B -fache Faltung der Dichtefunktion der Zufallsvariable mit sich selbst.

$$\text{pdf}_{\langle |E_R| \rangle_B}(e) = \left(\underbrace{\text{pdf}_{|E_R|} * \text{pdf}_{|E_R|} * \dots * \text{pdf}_{|E_R|}}_{B\text{-fache Faltung}} \right) \left(\frac{e}{B} \right) \quad (3.24)$$

Zur formalen Veranschaulichung wird in Gleichung (3.24) der Betrag einer kartesischen elektrischen Feldkomponente benutzt. Prinzipiell gilt diese Gleichung allgemein für jede Verteilung mit endlicher Varianz und damit auch für die anderen Kenngrößen der elektrischen sowie der magnetischen Feldstärke. Die Verteilungsfunktion $\text{cdf}_{\langle \rangle_B}$ (engl. cumulative distribution function) des Mittelwerts ergibt sich als Integral über die Dichtefunktion.

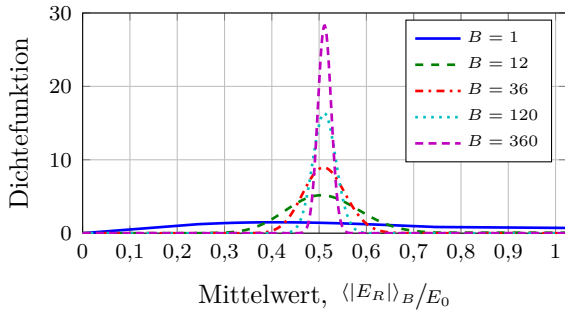
$$\text{cdf}_{\langle |E_R| \rangle_B}(e) = \int_{-\infty}^e \text{pdf}_{\langle |E_R| \rangle_B}(x) \, dx \quad (3.25)$$

Die Dichte- und Verteilungsfunktionen des Betrags und des Betragsquadrats einer E -Feldkomponente sowie des Betrags und des Betragsquadrats der gesamten E -Feldstärke sind in Abbildung 3.3 für unterschiedliche Stichprobengrößen B dargestellt. Für $B = 1$ ist der Mittelwert gleich dem einzelnen Element der Stichprobe. In diesem Fall sind in Abbildung 3.3 die ursprünglichen Verteilungen der Feldgrößen zu erkennen, wie sie in Abschnitt 3.3.1 eingeführt wurden. Mit steigender Stichprobengröße sinkt die Varianz der Verteilung des Mittelwerts ab und der Mittelwert nähert sich dem Erwartungswert an. Gleichzeitig nähert sich die Verteilung des Mittelwerts immer stärker einer Normalverteilung mit einer Standardabweichung proportional zu $1/\sqrt{B}$ an.

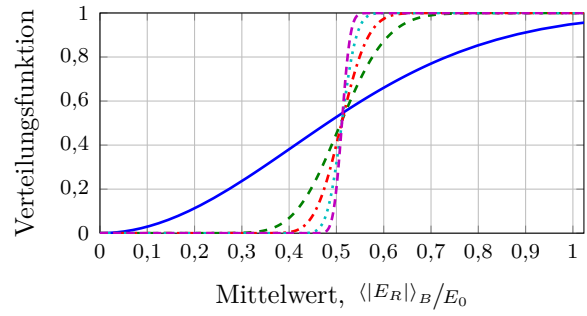
Für die praktische Anwendung ergeben sich zwei Schlussfolgerungen:

- Beim Bezug auf den Mittelwert kann die absolute statistische Unsicherheit verringert werden, indem die Stichprobengröße erhöht wird, z. B. indem mehr unabhängige Rührerpositionen vermessen werden oder die Messung an mehreren statistisch unkorrelierten Raumpositionen (siehe Abschnitt 3.4) wiederholt wird.
- Für nicht zu kleine Stichprobengrößen kann zur Bestimmung der Mittelwertverteilung auf die aufwendige Faltung in Gleichung (3.24) verzichtet werden. Stattdessen kann die Mittelwertverteilung durch eine Normalverteilung angenähert werden.

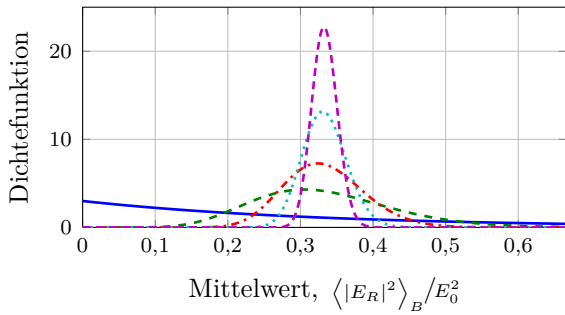
Neben der Verteilung des Mittelwerts der Feldgrößen sind auch die Verteilungen der Extremwerte für Stichproben mit einer bestimmten Größe B von Interesse. So ist bei Stör-



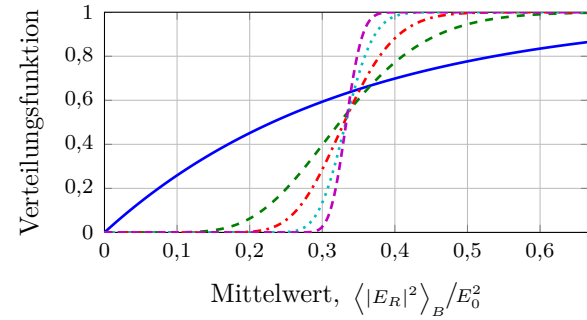
(a) Dichtefunktion des Mittelwerts des Betrags einer E -Feldkomponente



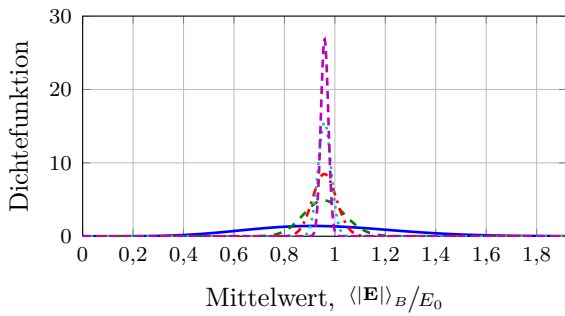
(b) Verteilungsfunktion des Mittelwerts des Betrags einer E -Feldkomponente



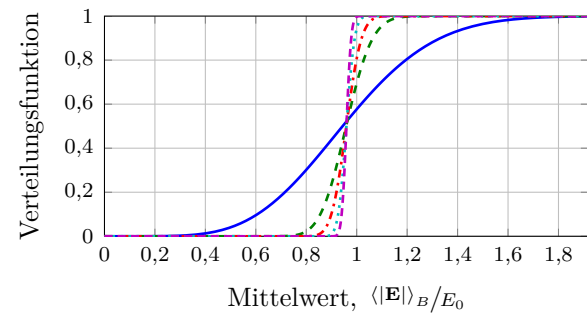
(c) Dichtefunktion des Mittelwerts des Betragsquadrats einer E -Feldkomponente



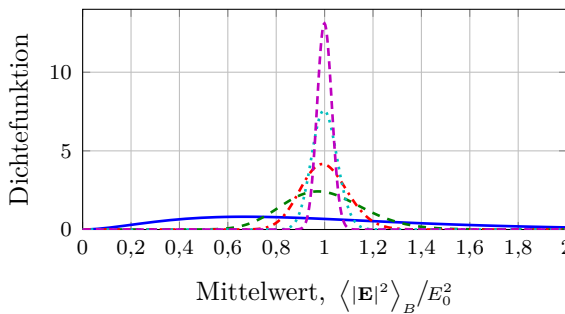
(d) Verteilungsfunktion des Mittelwerts des Betragsquadrats einer E -Feldkomponente



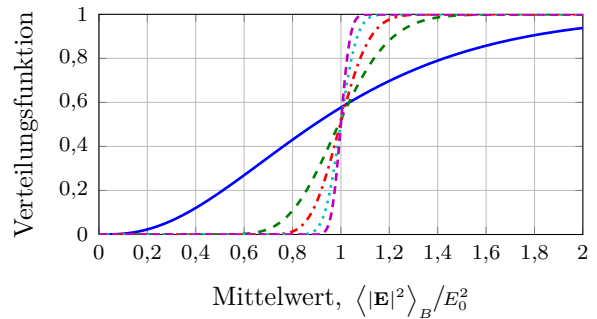
(e) Dichtefunktion des Mittelwerts des Betrags der gesamten E -Feldstärke



(f) Verteilungsfunktion des Mittelwerts des Betrags der gesamten E -Feldstärke



(g) Dichtefunktion des Mittelwerts des Betragsquadrats der gesamten E -Feldstärke



(h) Verteilungsfunktion des Mittelwerts des Betragsquadrats der gesamten E -Feldstärke

Abbildung 3.3: Dichte- und Verteilungsfunktionen des Mittelwerts der Kenngrößen der elektrischen Feldstärke für unterschiedliche Anzahlen von statistisch unabhängigen Randbedingungen B in der Modenverwirbelungskammer

festigkeitstests häufig die maximal erreichte Feldstärke am Ort des Prüflings von großer Bedeutung. Die Verteilung des Maximalwerts einer statistischen Variable kann für eine bestimmte Stichprobengröße B direkt angegeben werden [Kra07].

$$\text{pdf}_{\lceil|E_R|\rceil}(e) = B \cdot \left(\text{cdf}_{|E_R|}(e)\right)^{B-1} \cdot \text{pdf}_{|E_R|}(e) \quad (3.26a)$$

$$\text{cdf}_{\lceil|E_R|\rceil}(e) = \left(\text{cdf}_{|E_R|}(e)\right)^B \quad (3.26b)$$

Das Gleiche gilt für die Verteilung des Minimalwerts.

$$\text{pdf}_{\lfloor|E_R|\rfloor}(e) = B \cdot \left(1 - \text{cdf}_{|E_R|}(e)\right)^{B-1} \cdot \text{pdf}_{|E_R|}(e) \quad (3.27a)$$

$$\text{cdf}_{\lfloor|E_R|\rfloor}(e) = 1 - \left(1 - \text{cdf}_{|E_R|}(e)\right)^B \quad (3.27b)$$

Zur formalen Veranschaulichung wird in den Gleichungen (3.26) und (3.27) der Betrag einer kartesischen elektrischen Feldkomponente benutzt. Erneut gelten diese Gleichungen auch für die anderen Kenngrößen der elektrischen sowie der magnetischen Feldstärke.

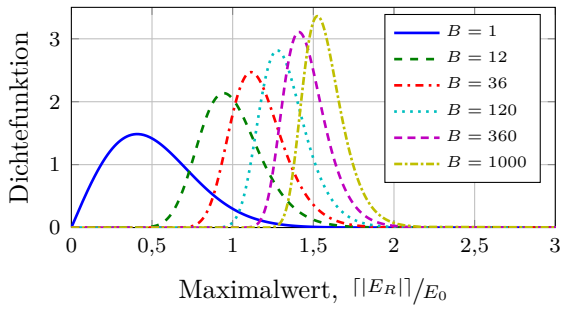
Die Dichte- und Verteilungsfunktionen der Maximalwerte der Kenngrößen der elektrischen Feldstärke sind in Abbildung 3.4 für unterschiedliche Stichprobengrößen dargestellt. Für den Fall $B = 1$ sind erneut die ursprünglichen Verteilungen des Betrags und des Betragsquadrats einer E -Feldkomponente sowie des Betrags und des Betragsquadrats der gesamten E -Feldstärke erkennbar. Mit steigender Stichprobengröße wächst auch der zu erwartende Maximalwert an. Gleichzeitig nimmt die Varianz der Verteilung des Maximalwerts aber kaum ab.

Für die praktische Anwendung ergeben sich folgende Schlussfolgerungen:

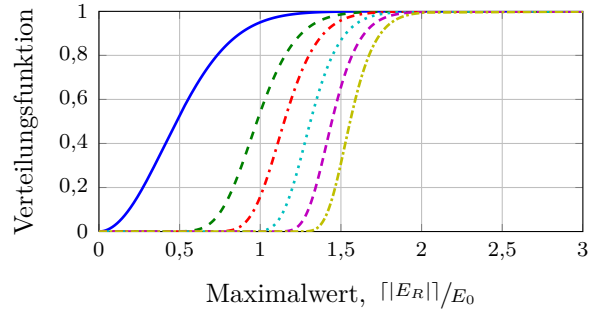
- Beim Bezug auf den Maximalwert wird die absolute statistische Unsicherheit bei einer Erhöhung der Stichprobengröße (z. B. Messung von mehr unabhängigen Rührerpositionen) kaum verringert.
- Durch eine größere Stichprobe, z. B. durch die Benutzung von mehr unabhängigen Rührerpositionen, kann trotz des gleichen Mittel- bzw. Erwartungswerts ein größeres Maximum erreicht werden.

3.3.3 Verhältnisse von Maximum/Erwartungswert, Erwartungswert/Minimum und Maximum/Minimum

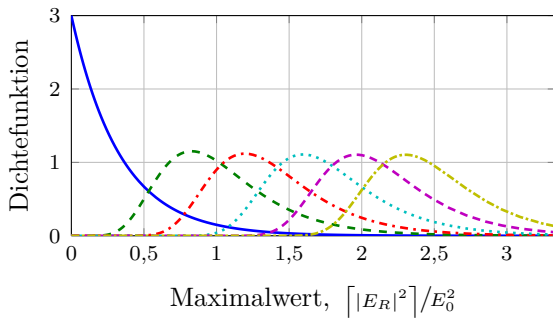
Zur Herleitung der Verhältnisse zwischen Maximum und Erwartungswert sowie Erwartungswert und Minimum der Kenngrößen der Feldstärke werden die Verteilungs- und Dichtefunktion der jeweiligen Größe auf ihren Erwartungswert bezogen und in Gleichung (3.26) bzw. (3.27) eingesetzt. Anschließend wird der Erwartungswert dieser Verteilung bestimmt.



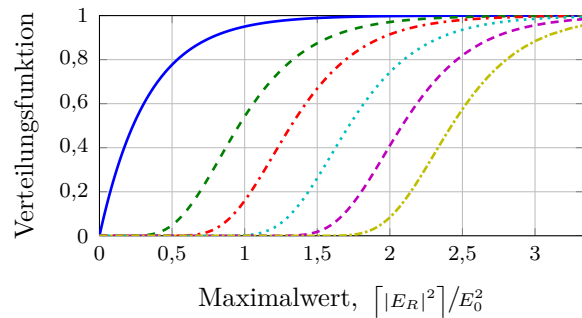
(a) Dichtefunktion des Maximalwerts des Betrags einer E -Feldkomponente



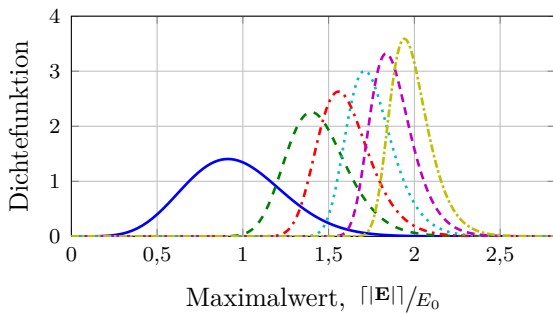
(b) Verteilungsfunktion des Maximalwerts des Betrags einer E -Feldkomponente



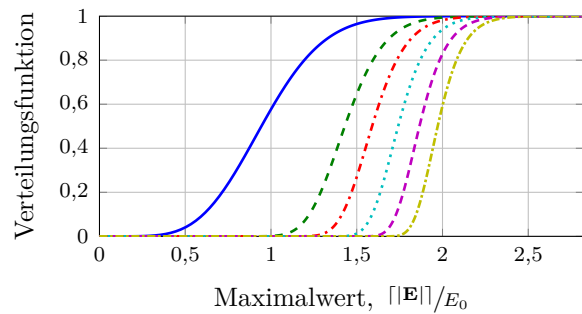
(c) Dichtefunktion des Maximalwerts des Betragsquadrats einer E -Feldkomponente



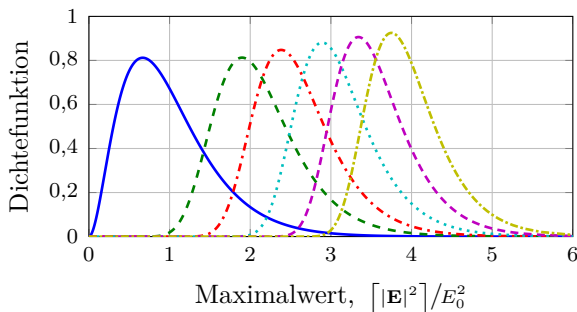
(d) Verteilungsfunktion des Maximalwerts des Betragsquadrats einer E -Feldkomponente



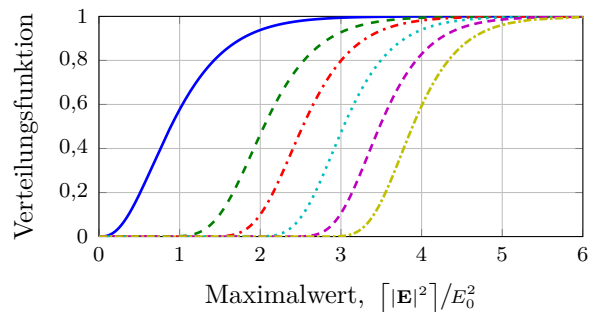
(e) Dichtefunktion des Maximalwerts des Betrags der gesamten E -Feldstärke



(f) Verteilungsfunktion des Maximalwerts des Betrags der gesamten E -Feldstärke



(g) Dichtefunktion des Maximalwerts des Betragsquadrats der gesamten E -Feldstärke



(h) Verteilungsfunktion des Maximalwerts des Betragsquadrats der gesamten E -Feldstärke

Abbildung 3.4: Dichte- und Verteilungsfunktionen des Maximalwerts der Kenngrößen der elektrischen Feldstärke für unterschiedliche Anzahlen von statistisch unabhängigen Randbedingungen B in der Modenverwirbelungskammer

Die Herleitung ist detailliert im Anhang A.2 und A.3 gezeigt. Wie in [LK99] wird das Verhältnis zwischen dem Maximum und dem Erwartungswert einer Stichprobe von $|E_R|$ der Größe B mit $\uparrow_B(|E_R|)$ bezeichnet. Das entsprechende Verhältnis zwischen dem Erwartungswert und dem Minimum wird mit $\downarrow_B(|E_R|)$ gekennzeichnet. Das Verhältnis zwischen dem Maximum und dem Minimum, das auch als *Stirring Ratio* bezeichnet wird, ergibt sich dann aus $\uparrow_B(|E_R|) \cdot \downarrow_B(|E_R|)$. Äquivalente Formeln gelten für die anderen Kenngrößen der elektrischen und magnetischen Feldstärke.

Diese Verhältnisse sind für den Betrag und das Betragsquadrat der E -Feldkomponenten sowie für den Betrag und das Betragsquadrat der gesamten E -Feldstärke in Abbildung 3.5 dargestellt. Die Diagramme sind ebenso für die magnetische Feldstärke gültig. Die Verhältnisse $\uparrow_B()$ und $\downarrow_B()$ in Abbildung 3.5a und 3.5b sind nützlich, um den zu erwartenden Maximal- bzw. Minimalwert aus dem Erwartungs- bzw. Mittelwert abzuschätzen. Das Verhältnis zwischen Maximum und Minimum bestimmt die nötige Mindestdynamik eines Messgeräts für eine praktische Messung. Alle Verhältnisse hängen ausschließlich von der Größe B der Stichprobe (bzw. der Anzahl gemessener unabhängiger Rührerpositionen) ab. Die sonstigen Eigenschaften einer Modenverwirbelungskammer wie z. B. die Güte oder die Eingangsleistung beeinflussen nur den Mittel- bzw. den Erwartungswert.

3.4 Räumliche Korrelation

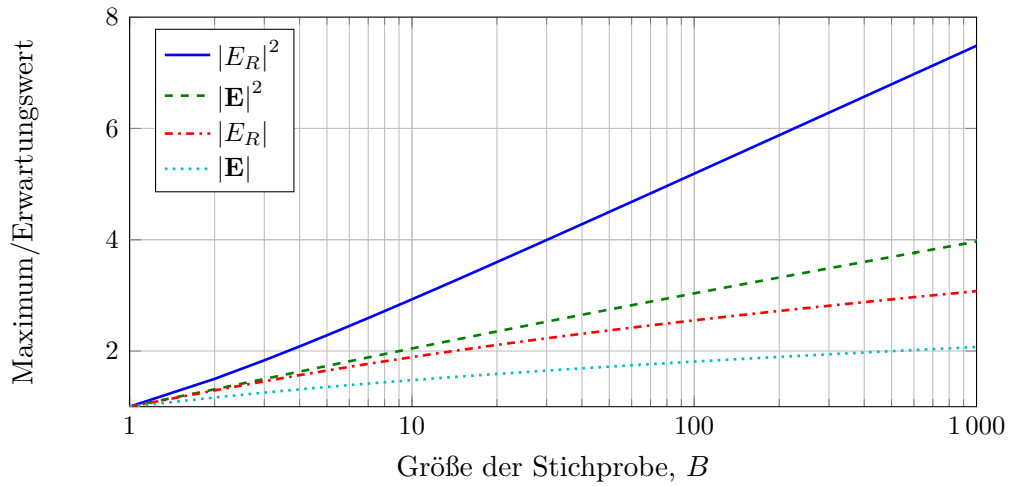
Die bisher dargestellten statistischen Verteilungen bezogen sich immer nur auf einen räumlichen Punkt. Reale Testobjekte wie z. B. Leitungen und Antennen besitzen aber stets eine räumliche Ausdehnung, weshalb auch die *räumliche Korrelation* des Feldes wichtig ist. Grundlegende Arbeiten zu diesem Thema sind [Hil95, Hil99], in denen die räumliche Korrelationsfunktion ρ des elektrischen Feldvektors zwischen zwei Punkten \mathbf{r}_1 und \mathbf{r}_2 wie folgt definiert ist.

$$\rho(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{\langle \mathbf{E}(\mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{E}^*(\mathbf{r}_2) \rangle}{\sqrt{\langle |\mathbf{E}(\mathbf{r}_1)|^2 \rangle_\infty \langle |\mathbf{E}(\mathbf{r}_2)|^2 \rangle_\infty}} \quad (3.28)$$

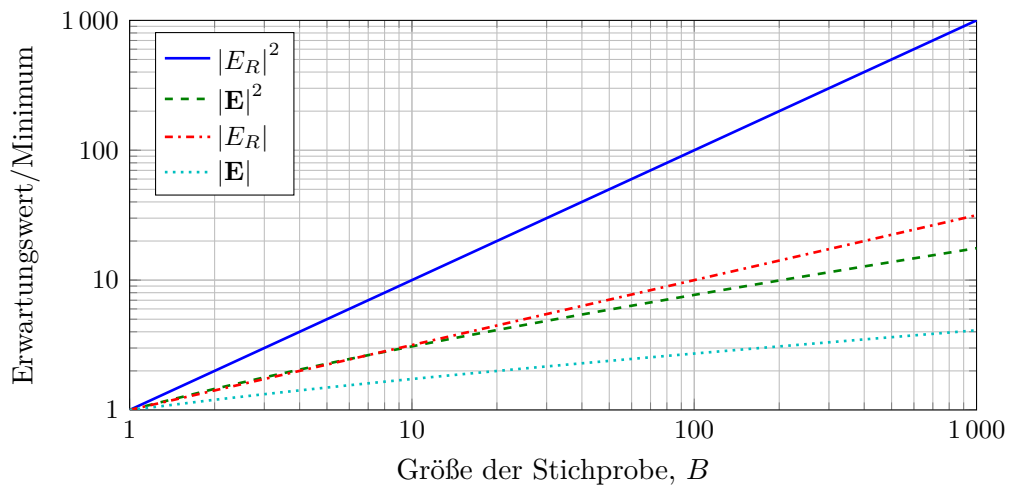
Mit $r = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ als Abstand zwischen beiden Punkten ergibt sich:

$$\rho(r) = \frac{\sin(kr)}{kr}. \quad (3.29)$$

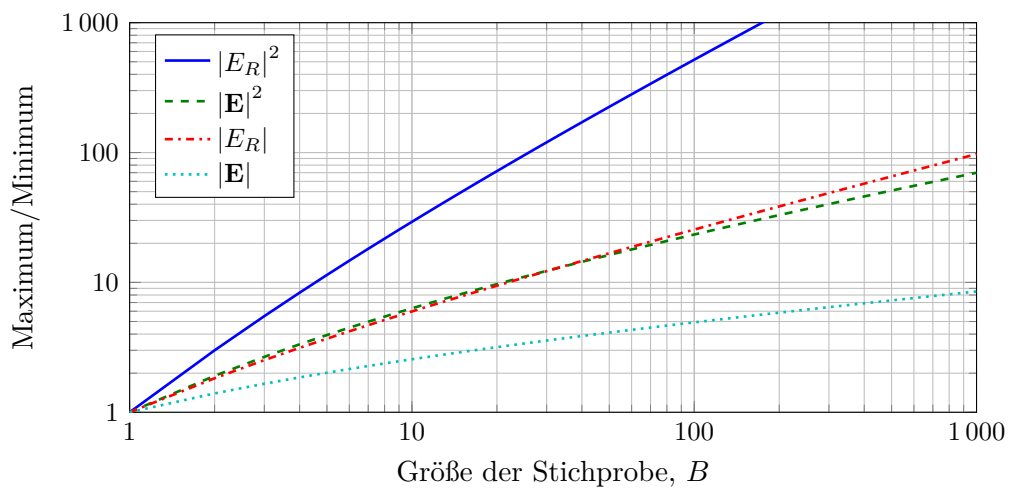
Die erste Nullstelle dieser Funktion wird als *Korrelationslänge* $l_c = \pi/k = \lambda/2$ definiert. In diesem Abstand ist das statistische Feld unkorreliert. Auch für größere Abstände ist die Korrelation nahezu Null. Gegenüber den in Kapitel 2 beschriebenen deterministischen Feldern besitzt die Korrelation statistischer Felder nur eine geringe Reichweite in der Größenordnung einer Wellenlänge.



(a) Verhältnis Maximum/Erwartungswert



(b) Verhältnis Erwartungswert/Minimum



(c) Verhältnis Maximum/Minimum

Abbildung 3.5: Verhältnisse zwischen den zu erwartenden Maximalwerten, Erwartungswerten und Minimalwerten der Kenngrößen der elektrischen Feldstärke für unterschiedliche Anzahlen von statistisch unabhängigen Randbedingungen B in der Modenverwirbelungskammer

4 Einkopplung deterministischer Felder in eine Leitung

In diesem Kapitel wird die Einkopplung deterministischer Felder, dargestellt durch eine ebene Welle mit einer bestimmten Einfallrichtung und Polarisierung, in eine Leitung näher untersucht.

4.1 Leitungsmodell

Zur Modellierung der Leitung wird die klassische Leitungstheorie [Kin55] mit allen bekannten Vereinfachungen und Einschränkungen genutzt. Die wichtigsten Voraussetzungen zur Anwendung der Leitungstheorie sind:

1. die Querabmessungen der Leitung sind klein gegenüber der Wellenlänge,
2. es breiten sich nur transversal-elektromagnetische Strom- und Spannungswellen entlang der Leitung aus,
3. die Stromsumme an jeder Stelle der Leitung ist Null.

Als beispielhafte Leitung wird zuerst eine Doppelleitung untersucht. In Abschnitt 4.2.2 werden die Ergebnisse dann auf eine Einfachleitung über einer perfekt leitenden Ebene verallgemeinert.

Die Geometrie der Doppelleitung ist in Abbildung 4.1 zusammen mit einer einfallenden ebenen Welle dargestellt. Die gleichförmige Leitung zeigt in Richtung der z -Achse, beginnt bei $z = 0$ endet bei $z = l$. Der Hinleiter befindet sich bei $x = h$, der Rückleiter bei $x = -h$. Damit beträgt der Abstand zwischen Hin- und Rückleiter $2h$. Der Durchmesser der Leiter wird mit $d_0 = 2r_0$ bezeichnet. Die Leitung wird als verlustlos angenommen.

Nicht in Abbildung 4.1 dargestellt sind die Abschlüsse der Leitung. Diese Arbeit beschränkt sich auf reelle, lineare Abschlusswiderstände, die mit R_1 am Anfang der Leitung und R_2 am Ende der Leitung bezeichnet werden.

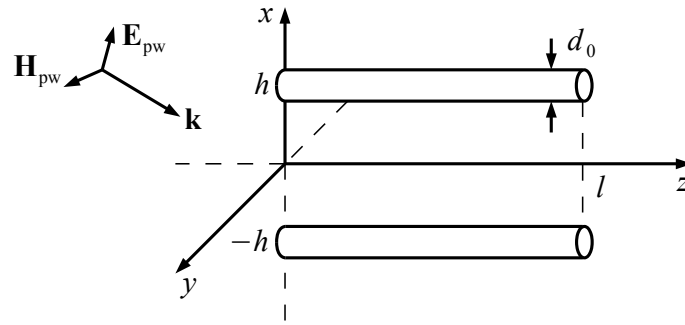


Abbildung 4.1: Geometrie der untersuchten Doppelleitung und einer einfallenden ebenen Welle im Freiraum

4.2 Lösung der Leitungsgleichungen

Die Leitungsgleichungen werden zunächst für eine Doppelleitung im Freiraum formuliert und gelöst. Anschließend werden die Ergebnisse auf eine Einfachleitung über einer perfekt leitenden Ebene übertragen.

4.2.1 Doppelleitung im Freiraum

Die Lösung der Leitungsgleichungen erfolgt dabei zuerst für beliebige Punkte entlang der Leitung und wird danach auf die beiden Leitungsenden spezialisiert.

4.2.1.1 Lösung entlang der Leitung

Der folgende Lösungsweg orientiert sich an [Per95]. Da diese Quelle jedoch einige Unstimmigkeiten¹ aufweist, werden grundlegende Schritte der Lösung wiederholt.

Eine einfallende ebene Welle wirkt wie eine verteilte Quelle entlang der Leitung. Trotzdem ist es sinnvoll, zur Berechnung der Einkopplung einer solchen Welle zunächst die Anregung der Leitung durch konzentrierte Quellen zu beschreiben. Anschließend kann diese Lösung sehr einfach auf verteilte Quellen verallgemeinert werden. Zur Berechnung der Leitungsanregung durch eine konzentrierte Strom- und Spannungsquelle wird das in Abbildung 4.2 dargestellte Ersatzschaltbild benutzt.

An der Stelle z_s befindet sich eine konzentrierte Quelle (engl. source) mit einer Quellspannung U_s und einem Quellstrom I_s . Von der Quelle gehen Stromwellen I und Spannungswellen U aus, die an den Abschlusswiderständen reflektiert werden können. Somit

¹Dazu zählen eine Inkonsistenz in der Definition von k_y und k_z zwischen Gleichung (10) und Abbildung 16, ein überflüssiges Auftreten von Z_c im Nenner der Spannung in den Gleichungen (33) und (34), ein Vorzeichenfehler vor dem ersten L in der zweiten Klammer der Green'schen Funktion $G_V^{(I)}$ auf Seite 86, eine Inkonsistenz der Bezeichnung von h in Gleichung (45) und d in Abbildung 20 sowie ein Vorzeichenfehler vor dem Term $e^{-\beta_+ L} (1 - \rho_2)$ im letzten Klammersausdruck von Gleichung (50).

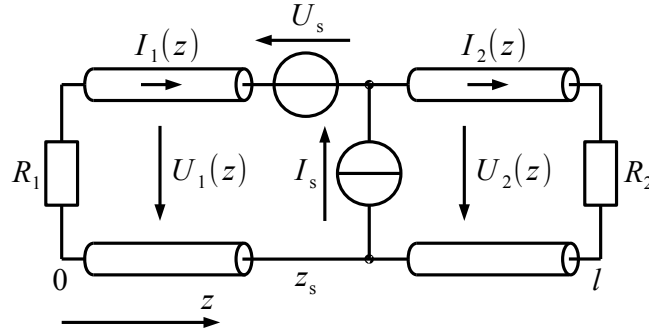


Abbildung 4.2: Ersatzschaltbild der Doppelleitung mit einer konzentrierten Spannungs- und Stromquelle

kann es an jedem Punkt der Leitung in positive z -Richtung vorlaufende Wellen mit den Effektivwerten U^+ und I^+ sowie in negative z -Richtung rücklaufende Wellen mit den Effektivwerten U^- und I^- geben. Die Augenblickswerte der Strom- und Spannungswellen können analog zu Gleichung (2.2) auf Seite 17 bestimmt werden.

Die Strom- und Spannungswellen sind über die charakteristische Impedanz Z_c der Leitung miteinander verknüpft.

$$Z_c = \frac{U^+}{I^+} = -\frac{U^-}{I^-} \quad (4.1)$$

Die Wellen breiten sich mit der Wellenzahl k aus. Links der Quelle gilt somit:

$$\left. \begin{aligned} U_1(z) &= U_1^+ e^{-jkz} + U_1^- e^{jkz} \\ I_1(z) &= \frac{U_1^+}{Z_c} e^{-jkz} - \frac{U_1^-}{Z_c} e^{jkz} \end{aligned} \right\} \text{für } z < z_s. \quad (4.2a)$$

Rechts der Quelle gilt entsprechend:

$$\left. \begin{aligned} U_2(z) &= U_2^+ e^{-jkz} + U_2^- e^{jkz} \\ I_2(z) &= \frac{U_2^+}{Z_c} e^{-jkz} - \frac{U_2^-}{Z_c} e^{jkz} \end{aligned} \right\} \text{für } z > z_s. \quad (4.2b)$$

Weiterhin sind Randbedingungen an den Abschlüssen und Übergangsbedingungen an der konzentrierten Quelle zu beachten. Die Randbedingungen werden durch die Abschlusswiderstände bestimmt.

$$U_1(0) = -R_1 \cdot I_1(0) \quad U_2(l) = R_2 \cdot I_2(l) \quad (4.3)$$

Die Übergangsbedingungen werden durch die konzentrierten Quellen bestimmt. Der Strom

und die Spannung springen jeweils um den Wert der Quelle.

$$I_1(z_s) + I_s = I_2(z_s) \qquad U_1(z_s) + U_s = U_2(z_s) \qquad (4.4)$$

Aus den Gleichungen (4.3) und (4.4) lassen sich die vier unbekanntenen Effektivwerte der vor- und rücklaufenden Spannungswellen bestimmen. Diese Effektivwerte hängen nicht von der Position z entlang der Leitung ab, weshalb in den Gleichungen (4.5b) und (4.5d) aufgrund der Leitungslänge eine Transformation mittels e^{-jkl} bzw. e^{-j2kl} notwendig ist.

$$U_1^+ = A_{U1} \cdot U_1^- \qquad (4.5a)$$

$$U_1^- = \frac{e^{-jkl}}{2} \cdot \frac{A_{U2} e^{-jk(l-z_s)}(U_s + I_s Z_c) - e^{jk(l-z_s)}(U_s - I_s Z_c)}{1 - A_{U1} A_{U2} e^{-2jkl}} \qquad (4.5b)$$

$$U_2^+ = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{jkz_s}(U_s + Z_c I_s) - A_{U1} e^{-jkz_s}(U_s - Z_c I_s)}{1 - A_{U1} A_{U2} e^{-2jkl}} \qquad (4.5c)$$

$$U_2^- = U_2^+ \cdot A_{U2} e^{-j2kl} \qquad (4.5d)$$

Die zur Verkürzung der Schreibweise eingeführten Größen A_{U1} und A_{U2} entsprechen den Reflexionsfaktoren für Spannungswellen an den Lasten R_1 und R_2 . Sie ergeben sich aus den Gleichungen (4.5a) und (4.5d).

$$A_{U1} = \frac{U_1^+}{U_1^-} = \frac{R_1 - Z_c}{R_1 + Z_c} \qquad A_{U2} = \frac{U_2^-}{U_2^+} e^{j2kl} = \frac{R_2 - Z_c}{R_2 + Z_c} \qquad (4.6)$$

Die vier unbekanntenen Effektivwerte der vor- und rücklaufenden Stromwellen lassen sich dann über die charakteristische Impedanz Z_c der Leitung ermitteln.

$$I_1^+ = \frac{U_1^+}{Z_c} \qquad I_1^- = -\frac{U_1^-}{Z_c} \qquad (4.7a)$$

$$I_2^+ = \frac{U_2^+}{Z_c} \qquad I_2^- = -\frac{U_2^-}{Z_c} \qquad (4.7b)$$

Damit ist die Anregung der Leitung durch *eine* konzentrierte Quelle exakt beschrieben. Zur Erweiterung der Lösung auf verteilte Quellen ist es sinnvoll, die Gleichung (4.2) im Sinne von Green'schen Funktionen umzuformulieren. Für den Strom soll

$$I(z) = G_I^U(z, z_s) \cdot U_s + G_I^I(z, z_s) \cdot I_s, \qquad (4.8a)$$

und für die Spannung

$$U(z) = G_U^U(z, z_s) \cdot U_s + G_U^I(z, z_s) \cdot I_s \quad (4.8b)$$

gelten.

Entsprechend ausformuliert lauten die Green'schen Funktionen für den Strom

$$G_I^U(z, z_s) = \frac{e^{-jkl}}{2Z_c(1 - A_{U1}A_{U2}e^{-j2kl})} \cdot \left(e^{jkz_<} - A_{U1}e^{-jkz_<} \right) \cdot \left(e^{-jk(z_>-l)} - A_{U2}e^{jk(z_>-l)} \right), \quad (4.9a)$$

$$G_I^I(z, z_s) = \frac{\delta e^{-jkl}}{2(1 - A_{U1}A_{U2}e^{-j2kl})} \cdot \left(e^{jkz_<} - \delta A_{U1}e^{-jkz_<} \right) \cdot \left(e^{-jk(z_>-l)} - \delta A_{U2}e^{jk(z_>-l)} \right), \quad (4.9b)$$

und für die Spannung

$$G_U^U(z, z_s) = \frac{\delta e^{-jkl}}{2(1 - A_{U1}A_{U2}e^{-j2kl})} \cdot \left(e^{jkz_<} - \delta A_{U1}e^{-jkz_<} \right) \cdot \left(e^{-jk(z_>-l)} + \delta A_{U2}e^{jk(z_>-l)} \right), \quad (4.9c)$$

$$G_U^I(z, z_s) = \frac{Z_c e^{-jkl}}{2(1 - A_{U1}A_{U2}e^{-j2kl})} \cdot \left(e^{jkz_<} + A_{U1}e^{-jkz_<} \right) \cdot \left(e^{-jk(z_>-l)} + A_{U2}e^{jk(z_>-l)} \right). \quad (4.9d)$$

Dabei werden folgende Vereinfachungen benutzt:

- $z_>$ ist das Größere von z und z_s ,
- $z_<$ ist das Kleinere von z und z_s und
- δ ist eine Hilfsfunktion mit $\delta = 2 \cdot H(z - z_s) - 1$, wobei $H(z - z_s)$ der Heaviside-Sprung ist. Demnach ist $\delta = 1$ für $z > z_s$ und $\delta = -1$ für $z < z_s$.

4.2.1.2 Lösung an den Leitungsenden

Die bisherige Lösung gilt allgemein für den Strom und die Spannung entlang der Leitung. Da ein möglicher Prüfling aber immer am Leitungsende angeschlossen wird, ist es zur Vereinfachung sinnvoll, sich auf die Lösung an den Abschlüssen der Leitung zu beschränken. Dazu werden folgende Abkürzungen eingeführt:

- Strom am Anfang: $I_{L1} = -I(0)$
- Spannung am Anfang: $U_{L1} = U(0)$

- Strom am Ende: $I_{L2} = I(l)$
- Spannung am Ende: $U_{L2} = U(l)$

Der Vorzeichenwechsel beim Strom vereinheitlicht die Formulierung der Randbedingungen (siehe Gleichung (4.3)), da somit Strom und Spannung an beiden Abschlusswiderständen R_1 und R_2 in die gleiche Richtung zeigen. Die Anregung ist noch immer eine konzentrierte Strom- und Spannungsquelle an der Stelle z_s .

Entsprechend der vorherigen Gleichung (4.8) kann die Lösung am Anfang der Leitung geschlossen formuliert werden.

$$I_{L1} = \frac{1}{2Z_c} \frac{(1 - A_{U1}) e^{-jkl}}{(1 - A_{U1}A_{U2} e^{-j2kl})} \cdot \left[- \left(e^{jk(l-z_s)} - A_{U2} e^{-jk(l-z_s)} \right) U_s + \left(e^{jk(l-z_s)} + A_{U2} e^{-jk(l-z_s)} \right) Z_c I_s \right] \quad (4.10a)$$

$$U_{L1} = \frac{1}{2} \frac{(1 + A_{U1}) e^{-jkl}}{(1 - A_{U1}A_{U2} e^{-j2kl})} \cdot \left[- \left(e^{jk(l-z_s)} - A_{U2} e^{-jk(l-z_s)} \right) U_s + \left(e^{jk(l-z_s)} + A_{U2} e^{-jk(l-z_s)} \right) Z_c I_s \right] \quad (4.10b)$$

Das Gleiche gilt für die Lösung am Ende der Leitung.

$$I_{L2} = \frac{1}{2Z_c} \frac{(1 - A_{U2}) e^{-jkl}}{(1 - A_{U1}A_{U2} e^{-j2kl})} \cdot \left[\left(e^{jkz_s} - A_{U1} e^{-jkz_s} \right) U_s + \left(e^{jkz_s} + A_{U1} e^{-jkz_s} \right) Z_c I_s \right] \quad (4.10c)$$

$$U_{L2} = \frac{1}{2} \frac{(1 + A_{U2}) e^{-jkl}}{(1 - A_{U1}A_{U2} e^{-j2kl})} \cdot \left[\left(e^{jkz_s} - A_{U1} e^{-jkz_s} \right) U_s + \left(e^{jkz_s} + A_{U1} e^{-jkz_s} \right) Z_c I_s \right] \quad (4.10d)$$

Der Nachteil dieser Art der Formulierung besteht in der Unübersichtlichkeit der Gleichungen und einer daraus resultierenden Fehleranfälligkeit bei der Berechnung. Eine Umformulierung in Form der BLT-Gleichungen (nach Baum, Liu und Tesche, [BLT78]) umgeht diese Nachteile.

Für eine konzentrierte Quelle lauten diese BLT-Gleichungen:

$$\begin{bmatrix} I_{L1} \\ I_{L2} \end{bmatrix} = \frac{1}{Z_c} \cdot \begin{bmatrix} (1 - A_{U1}) & 0 \\ 0 & (1 - A_{U2}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -A_{U1} & e^{jkl} \\ e^{jkl} & -A_{U2} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \frac{e^{jkz_s}}{2} (U_s + Z_c I_s) \\ -\frac{e^{jk(l-z_s)}}{2} (U_s - Z_c I_s) \end{bmatrix}, \quad (4.11a)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} U_{L1} \\ U_{L2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} (1 + A_{U1}) & 0 \\ 0 & (1 + A_{U2}) \end{bmatrix} \\ &\cdot \begin{bmatrix} -A_{U1} & e^{jkl} \\ e^{jkl} & -A_{U2} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \frac{e^{jkz_s}}{2}(U_s + Z_c I_s) \\ -\frac{e^{jk(l-z_s)}}{2}(U_s - Z_c I_s) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.11b)$$

Obwohl die mathematische Aussage vollkommen identisch ist, liegt der Vorteil ganz klar in der einfachen und kompakten Darstellung und der großen Ähnlichkeit beider Gleichungen für Strom und Spannung. Die Gleichung wird regelrecht modularisiert, wobei jede der drei Matrizen eine bestimmte Bedeutung besitzt. Die erste Matrix mit den Reflexionsfaktoren A_{U1} und A_{U2} gibt an, ob ein Strom (negatives Vorzeichen der Reflexionsfaktoren) oder eine Spannung (positives Vorzeichen der Reflexionsfaktoren) berechnet werden soll. Die zweite Matrix enthält die Leitungsresonanzen. Die dritte Matrix enthält die Quellen zur Anregung der Leitung, in diesem Fall eine konzentrierte Quelle bei $z = z_s$.

Die Green'schen Funktionen (4.9) können ebenfalls benutzt werden, um eine allgemeine Lösung für verteilte Quellen U'_s und I'_s entlang der Leitung herzuleiten. Für den Strom gilt

$$I(z) = \int_0^l G_I^U(z, z_s) U'_s dz_s + \int_0^l G_I^I(z, z_s) I'_s dz_s, \quad (4.12a)$$

und für die Spannung entsprechend

$$U(z) = \int_0^l G_U^U(z, z_s) U'_s dz_s + \int_0^l G_U^I(z, z_s) I'_s dz_s. \quad (4.12b)$$

Mit Hilfe der Formulierung nach Agrawal [APG80] ist es möglich, nur verteilte Spannungsquellen entlang der Leitung sowie zwei konzentrierte Quellen U_{t1} und U_{t2} an den Enden zu berücksichtigen und die Stromquellen zu vernachlässigen. Durch die Agrawal-Formulierung wird aber nur die sogenannte *Streuspannung* U^s (engl. scattered voltage) berechnet, die nachträglich noch zur messbaren Gesamtspannung vervollständigt werden muss. Die allgemeine Lösung nach Agrawal lautet für den Gesamtstrom I^t (engl. total current)

$$I^t(z) = \int_0^l G_I^U(z, z_s) E_z^e(h, z_s) dz_s + G_I^U(z, 0) U_{t1} - G_I^U(z, l) U_{t2}, \quad (4.13a)$$

und für die Streuspannung

$$U^s(z) = \int_0^l G_U^U(z, z_s) E_z^e(h, z_s) dz_s + G_U^U(z, 0) U_{t1} - G_U^U(z, l) U_{t2}. \quad (4.13b)$$

Das anregende (engl. exciting) elektrische Feld E_z^e ist die Differenz des einfallenden (engl. incident) tangentialen E -Feldes E_z^i am Hin- und Rückleiter.

$$E_z^e(h, z) = E_z^i(h, z) - E_z^i(-h, z) \quad (4.14)$$

Wird als Anregung eine beliebige ebene Welle nach Gleichung (2.1) eingesetzt, kann folgende Formulierung hergeleitet werden:

$$E_z^e(h, z) = E e_z e^{-jk_x h} e^{-jk_z z} - E e_z e^{jk_x h} e^{-jk_z z}, \quad (4.15a)$$

$$= E e_z \left(e^{-jk_x h} - e^{jk_x h} \right) e^{-jk_z z}, \quad (4.15b)$$

$$= \underbrace{-j2E e_z \sin(k_x h)}_{E_z^e(h)} e^{-jk_z z}. \quad (4.15c)$$

Die konzentrierten Quellen U_{t1} und U_{t2} werden als *transversale Spannungen* bezeichnet. Das Minuszeichen vor U_{t2} in Gleichung (4.13) resultiert aus der Richtung der Quelle. Diese Spannungen können direkt aus dem einfallenden elektrischen Feld bestimmt werden.

$$U_{t1} = \int_{-h}^h E_x^i(0) dx = 2E \frac{e_x}{k_x} \sin(k_x h) \quad (4.16a)$$

$$U_{t2} = \int_{-h}^h E_x^i(l) dx = 2E \frac{e_x}{k_x} \sin(k_x h) e^{-jk_z l} \quad (4.16b)$$

Zur Streuspannung muss noch die einfallende Spannung addiert werden, um die messbare Gesamtspannung zu erhalten.

$$U^t(z) = U^s(z) + U^i(z) = U^s(z) - \int_{-h}^h E_x^i(z) dx = U^s(z) - U_{t1} e^{-jk_z z} \quad (4.17)$$

Fasst man die Lösung entsprechend zusammen, erhält man die BLT-Gleichungen für verteilte Quellen:

$$\begin{bmatrix} I_{L1} \\ I_{L2} \end{bmatrix} = \frac{1}{Z_c} \begin{bmatrix} (1 - A_{U1}) & 0 \\ 0 & (1 - A_{U2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -A_{U1} & e^{jkl} \\ e^{jkl} & -A_{U2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}, \quad (4.18a)$$

$$\begin{bmatrix} U_{L1} \\ U_{L2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 + A_{U1}) & 0 \\ 0 & (1 + A_{U2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -A_{U1} & e^{jkl} \\ e^{jkl} & -A_{U2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}, \quad (4.18b)$$

$$\text{mit } \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \left(\frac{E_z^e(h)}{j(k-k_z)} - U_{t1} \right) (1 - e^{j(k-k_z)l}) \\ e^{jkl} \left(\frac{E_z^e(h)}{j(k+k_z)} + U_{t1} \right) (1 - e^{-j(k+k_z)l}) \end{bmatrix}. \quad (4.18c)$$

Man erkennt, dass die Lösung bis auf den Quellterm (die letzte der drei Matrizen) äquivalent zu Gleichung (4.11) ist.

Es ist außerdem zu erkennen, dass die Gleichungen für Strom und Spannung sehr ähnlich sind und sich nur in der ersten Matrix sowie dem entsprechenden Vorfaktor $1/Z_c$ unterscheiden. Die zweite Matrix mit den Leitungsresonanzen und die dritte Matrix mit den Quellen sind für Strom und Spannung gleich.

Alternativ könnten die Gleichungen (4.18a) und (4.18b) auch mit der gleichen ersten Matrix geschrieben werden. Dafür müsste jeweils die Definition des Reflexionsfaktors geändert werden, je nachdem ob ein Strom oder eine Spannung berechnet wird. Für Stromwellen würden die Reflexionsfaktoren dann

$$A_{I1} = \frac{I_1^+}{I_1^-} = \frac{Z_c - R_1}{Z_c + R_1} \quad \text{und} \quad A_{I2} = \frac{I_2^-}{I_2^+} e^{j2kl} = \frac{Z_c - R_2}{Z_c + R_2} \quad (4.19)$$

lauten. Entsprechend lässt sich Gleichung (4.18a) für den Strom demzufolge vollkommen analog zur Gleichung (4.18b) für die Spannung in der Form

$$\begin{bmatrix} I_{L1} \\ I_{L2} \end{bmatrix} = \frac{1}{Z_c} \begin{bmatrix} (1 + A_{I1}) & 0 \\ 0 & (1 + A_{I2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -A_{U1} & e^{jkl} \\ e^{jkl} & -A_{U2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}, \quad (4.20)$$

schreiben.

Diese Eigenschaft der Leitungsgleichungen ist für weitere Untersuchungen sehr nützlich, weil dadurch Ergebnisse für den Strom sehr einfach auf die Spannung übertragen werden können.

Ein andere Möglichkeit zur Lösung der Leitungsgleichungen und zur Berechnung der Einkopplung einer ebenen Welle in eine Doppelleitung ist in [Mag08] gezeigt.

4.2.2 Einfachleitung über perfekt leitender Ebene

Die bisher vorgestellte Vorgehensweise zur Berechnung der Einkopplung einer ebenen Welle in eine Doppelleitung im Freiraum lässt sich auch auf eine Einfachleitung über einer perfekt leitenden Ebene übertragen. Eine solche Einfachleitung ist schematisch in

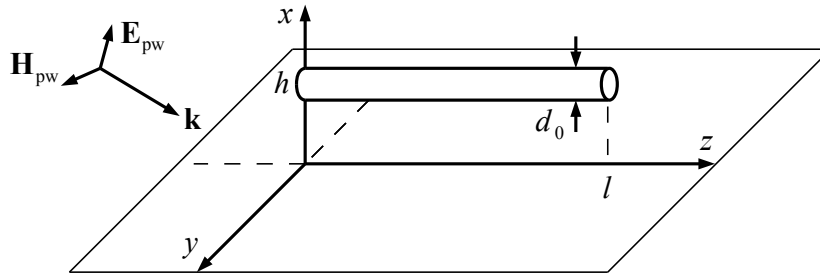


Abbildung 4.3: Geometrie der untersuchten Einfachleitung und einer einfallenden ebenen Welle über einer perfekt leitenden Ebene

Abbildung 4.3 dargestellt. Die Leitung zeigt in z -Richtung. Die leitende Ebene ist eine y - z -Ebene.

Der für die Doppelleitung in Gleichung (4.14) gezeigte Quellterm entspricht der Differenz des tangentialen einfallenden E -Feldes zwischen dem Hinleiter und dem Rückleiter. Für eine Einfachleitung lautet der Quellterm in der Agrawal-Formulierung der Leitungsgleichungen:

$$E_z^e(h, z) = E_z^i(h, z) + E_z^r(h, z) \quad (4.21)$$

Der Quellterm entspricht hier der Summe des tangentialen einfallenden und reflektierten (engl. reflected) E -Feldes in Höhe des Leiters bei $x = h$. Die z -Komponente der reflektierten Welle ergibt sich nach der Spiegelungsmethode zu:

$$E_z^r(h, z) = -E_z^i(-h, z). \quad (4.22)$$

Damit erhält man den gleichen Quellterm wie bei der Doppelleitung im Freiraum. Die gleiche Untersuchung lässt sich für die zur Leitung transversalen Spannungen, die als Anregung in den Randbedingungen der Leitungsgleichungen nach Agrawal auftreten, wiederholen. Für die Doppelleitung sind diese transversalen Spannungen in Gleichung (4.16) gezeigt. Sie entsprechen dem Linienintegral der zur Leitung einfallenden transversalen Feldstärkekomponente E_x^i vom Rückleiter zum Hinleiter.

Für die Einfachleitung in der Nähe der perfekt leitenden y - z -Ebene muss dementsprechend von der Ebene bei $x = 0$, die als Rückleiter dient, bis zur Leitung bei $x = h$ integriert werden. Die Integration erfolgt dabei über die zur Leitung transversalen x -Komponenten

der einfallenden und der reflektierten Welle:

$$U_{t1} = \int_0^h E_x^i(x, 0) + E_x^r(x, 0) dx \quad (4.23a)$$

$$U_{t2} = \int_0^h E_x^i(x, l) + E_x^r(x, l) dx \quad (4.23b)$$

Die x -Komponente der reflektierten Welle kann ebenfalls mit der Spiegelungsmethode bestimmt werden.

$$E_x^r(x, z) = E_x^i(-x, z) \quad (4.24)$$

Setzt man dies in das Integral ein und formt entsprechend um,

$$U_{t1} = \int_0^h E_x^i(x, 0) + E_x^i(-x, z) dx, \quad (4.25a)$$

$$= \int_0^h E_x^i(x, 0) dx + \int_0^h E_x^i(-x, z) dx, \quad (4.25b)$$

$$= \int_0^h E_x^i(x, 0) dx - \int_{-0}^{-h} E_x^i(x, z) dx, \quad (4.25c)$$

$$= \int_0^h E_x^i(x, 0) dx + \int_{-h}^0 E_x^i(x, z) dx = \int_{-h}^h E_x^i(x, 0) dx, \quad (4.25d)$$

so erhält man für U_{t1} den gleichen Ausdruck wie in Gleichung (4.16a) für die Doppelleitung im Freiraum. Das Gleiche lässt sich für die transversale Spannung U_{t2} wiederholen. Beide Leitungsanordnungen sind also vom theoretischen Standpunkt her vollkommen äquivalent.

Ein nicht unbedeutender Unterschied besteht allerdings zwischen der Doppelleitung im Freiraum und der Einfachleitung über einer perfekt leitenden Ebene: In der Doppelleitung ist auch ein Gleichtaktmode des Stromes entlang der Leitung zu erwarten. Dieser hebt sich aber an den Abschlüssen der Leitung auf und spielt so bei der Untersuchung des Stromes oder der Spannung an den Enden der Leitung keine Rolle. In der Einfachleitung über einer perfekt leitenden Ebene wird aufgrund der Symmetrie der Anordnung und der Art der Anregung kein Gleichtaktmode des Stromes hervorgerufen [Per95].

4.2.3 Darstellung der Einkopplung als Funktion der Einfallsrichtung

Der in eine Leitung eingekoppelte Strom bzw. die in eine Leitung eingekoppelte Spannung ist abhängig von den Leitungsabmessungen, den Abschlusswiderständen, der Frequenz bzw. Wellenlänge der Anregung und der Einfallsrichtung. Bei Störfestigkeitsuntersuchungen im Rahmen der elektromagnetischen Verträglichkeit sind oft der maximal eingekoppelte Strom bzw. die maximal eingekoppelte Spannung von Interesse, weil sich daraus das größte Störpotenzial ergibt. Fasst man die Leitung als Modell für einen einfachen Prüfling auf, so sucht man nun in Abhängigkeit der Frequenz die effektivste Einfallsrichtung und Polarisation einer einzelnen ebenen Welle.

Zur einfachen Beschreibung ist eine Definition in Kugelkoordinaten sinnvoll, wie sie schon in Kapitel 3 benutzt wurde. Der Wellenvektor \mathbf{k} und die Polarisationsrichtung der ebenen Welle sind in Abbildung 3.1 auf Seite 20 dargestellt. Die Einfallsrichtung der ebenen Welle wird durch den Polarwinkel ϑ , den Azimutwinkel φ und den Polarisationswinkel α bestimmt.

In den Abbildungen 4.4 bis 4.7 ist das Betragsquadrat $|I(0)|^2$ des Stromes am Anfang der Leitung als Funktion der Einfallsrichtung dargestellt. Das Betragsquadrat ist eine interessante Größe, da es sich analytisch einfach aus $I(0) \cdot I(0)^*$ bestimmen lässt und proportional zur eingekoppelten Leistung ist. Zur einfacheren Darstellung wird das Betragsquadrat mit $(E^h/z_c)^2$ normiert, so dass sich eine dimensionslose Größe ergibt.

Jede Abbildung zeigt acht Diagramme für Leitungslängen von $l = \lambda/4, \lambda/2, 3/4\lambda, \lambda, 5/4\lambda, 3/2\lambda, 7/4\lambda$ und 2λ . Für jedes dieser Diagramme wird die gleiche Skalierung der Amplitudenachse verwendet. Da diese Art von Richtdiagramm nur eine zweidimensionale Darstellung erlaubt, der Strom aber von drei Winkeln abhängt, wird der Polarisationswinkel α gleich dem negativen Azimutwinkel $-\varphi$ gesetzt (siehe dazu auch Abschnitt 4.3.1.1 a)).

Neben dem eigentlichen Richtdiagramm der Einkopplung ist auch die Lage der Leitung durch zwei senkrechte Linien schematisch gekennzeichnet. Der Hinleiter ist die rechte der beiden Linien, der Rückleiter die linke. Der Anfang der Leitung mit R_1 als Abschluss befindet sich im Diagramm unten, das Ende mit R_2 oben.

In Abbildung 4.4 ist das Einkoppeldiagramm einer beidseitig angepassten Leitung dargestellt. Man erkennt, dass die Einkopplung unabhängig vom Azimutwinkel φ ist und sich ein zur z -Achse rotationssymmetrisches Einkoppeldiagramm ergibt. Für eine kurze Leitung bzw. bei niedrigen Frequenzen besitzt das Einkoppeldiagramm nur eine Hauptkeule, die bei einem Polarwinkel von $\vartheta = 0$ ihr Maximum aufweist. Bei einer Leitungslänge von $l = \lambda/4$ erreicht die Einkopplung erstmalig ein Maximum von $|I(0)|^2 = 4(E^h/z_c)^2$. Für längere Leitungen bzw. bei höheren Frequenzen ergeben sich mehrere Nebenkeulen im Einkoppeldiagramm, die aber alle den gleichen Maximalwert besitzen.

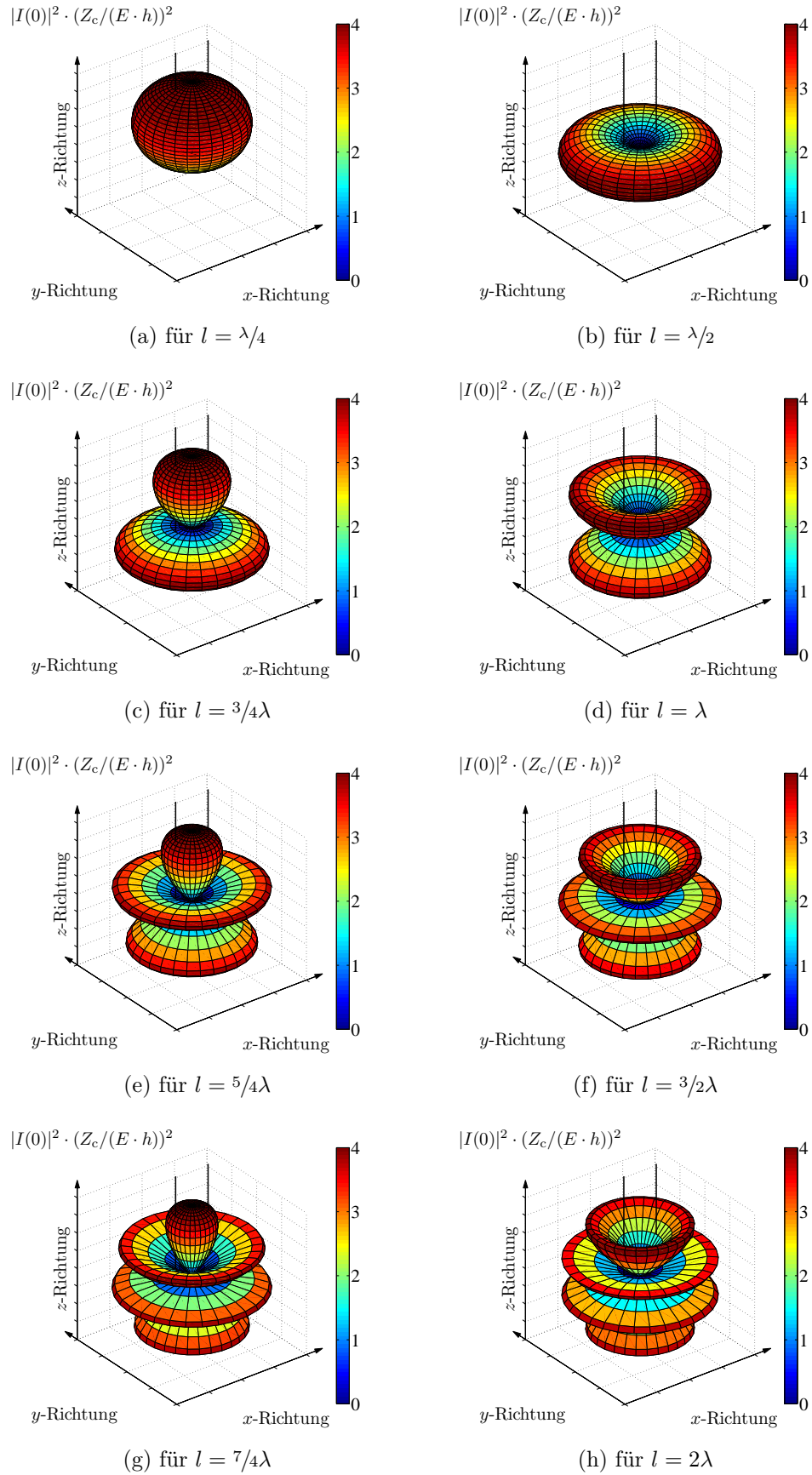


Abbildung 4.4: Betragsquadrat des eingekoppelten Stromes am Anfang der Leitung als Funktion der Einfallsrichtung der ebenen Welle für $R_1 = Z_c$ und $R_2 = Z_c$

Für Abbildung 4.5 wurde der Abschlusswiderstand am Ende der Leitung auf $R_2 = 2Z_c$ erhöht. Durch die Fehlanpassung ergeben sich Reflexionen und Leitungsresonanzen, die zu einer höheren Einkopplung führen. Diese Resonanzen treten bei $l = \lambda/2, \lambda, 3/2\lambda$ und 2λ auf. Dort ergeben sich jeweils zwei, vier, sechs oder acht Keulen im Einkoppeldiagramm, die alle die gleiche Amplitude aufweisen. Man erkennt auch, dass das Einkoppeldiagramm dann seine Rotationssymmetrie verliert. Stattdessen tritt die maximale Einkopplung bei einem Azimutwinkel von $\varphi = 0$ auf. Es besteht aber weiterhin eine Spiegelsymmetrie in x - und y -Richtung. Für die nicht resonanten Leitungslängen bzw. Frequenzen ist das Einkoppeldiagramm dagegen nahezu rotationssymmetrisch. In die kurze Leitung bzw. bei niedrigen Frequenzen wird erneut bei einem Polarwinkel von $\vartheta = 0$ ein Maximum der Einkopplung erreicht.

In Abbildung 4.6 beträgt der Abschlusswiderstand am Ende der Leitung $R_2 = 1/2Z_c$. Auch hier ergeben sich aufgrund der Fehlanpassung sichtbare Leitungsresonanzen bei $l = \lambda/2, \lambda, 3/2\lambda$ und 2λ . Allerdings tritt die maximale Einkopplung bei einem Azimutwinkel von $\varphi = \pi/2 = 90^\circ$ auf. Das Einkoppeldiagramm ist trotzdem spiegelsymmetrisch in x - und y -Richtung. Ansonsten gilt das Gleiche wie für die vorherige Abbildung 4.5.

Für Abbildung 4.7 wurden Abschlusswiderstände von $R_1 = 4Z_c$ und $R_2 = 1/4Z_c$ benutzt. Es ergeben sich ebenfalls starke Leitungsresonanzen, die aufgrund der asymmetrischen Fehlanpassung aber bei $l = \lambda/4, 3/4\lambda, 5/4\lambda$ und $7/4\lambda$ auftreten. Bei diesen Leitungslängen bzw. Frequenzen ist das Einkoppeldiagramm auch nahezu rotationssymmetrisch, zumindest für die Polarwinkel, an denen die Einkopplung maximal wird. Bei den nichtresonanten Leitungslängen bzw. Frequenzen tritt die maximale Einkopplung bei einem Azimutwinkel von $\varphi = \pi/2 = 90^\circ$ auf. Hier ist das Einkoppeldiagramm erneut spiegelsymmetrisch in x - und y -Richtung.

Aus den Abbildungen 4.4 bis 4.7 ist zu entnehmen, dass selbst eine gerade, gleichförmige Leitung, beschrieben durch ein einfaches Leitungsmodell, ein komplexes Einkoppeldiagramm aufweist, das je nach Frequenz und den betrachteten Leitungsabschlüssen stark variiert. Die betrachteten Kombinationen der Abschlusswiderstände an den Leitungsenden decken dabei nur einen Bruchteil aller Möglichkeiten ab. Eine Vorhersage der effektivsten Einkoppelrichtung ist somit nicht ohne weiteres möglich und bedarf genauerer Untersuchungen.

4.3 Maximalwert der Einkopplung

Nach den einführenden numerischen Simulationen wird in diesem Abschnitt eine Herleitung für den deterministischen Maximalwert des eingekoppelten Stromes gezeigt. Für

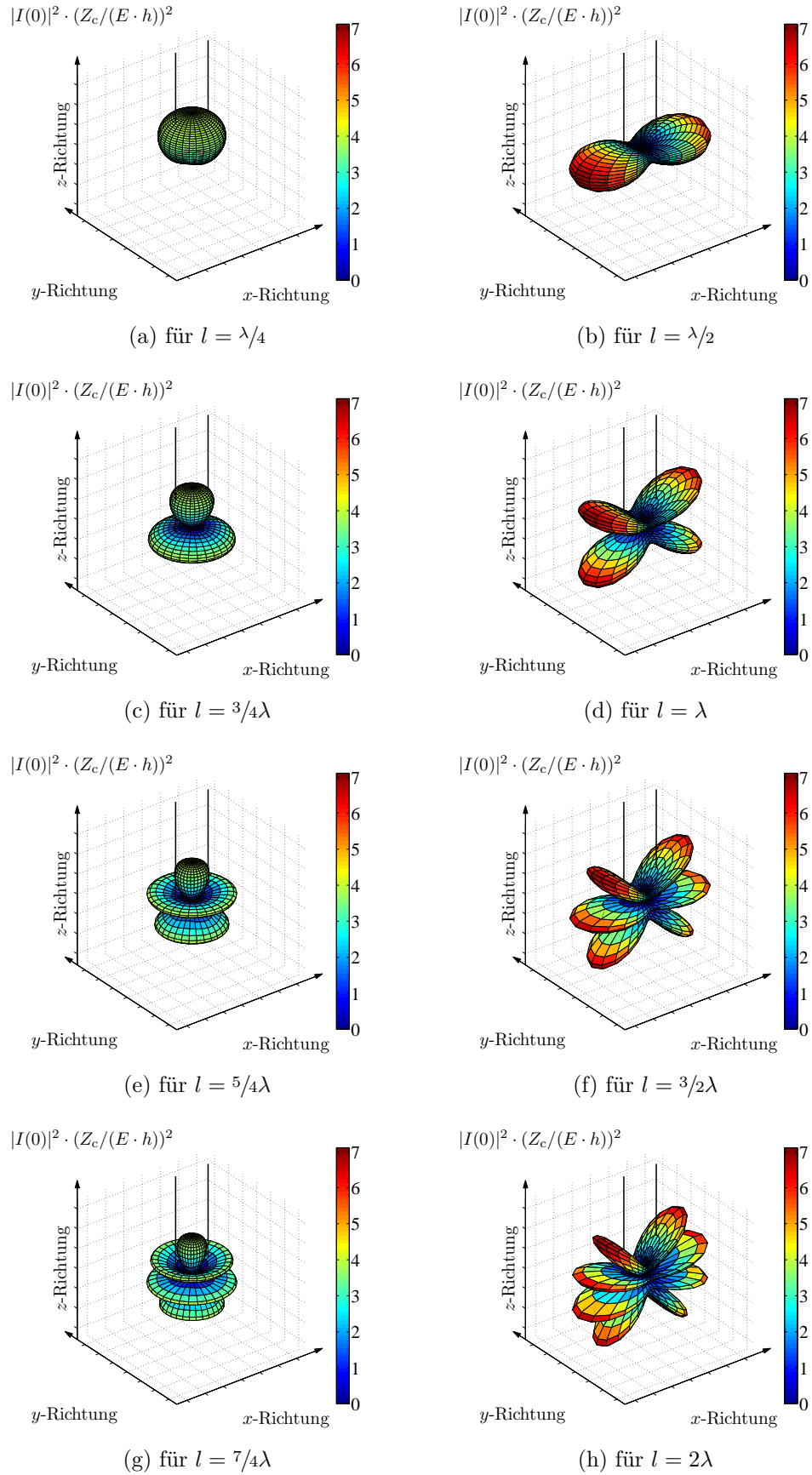


Abbildung 4.5: Betragsquadrat des eingekoppelten Stromes am Anfang der Leitung als Funktion der Einfallsrichtung der ebenen Welle für $R_1 = Z_c$ und $R_2 = 2Z_c$

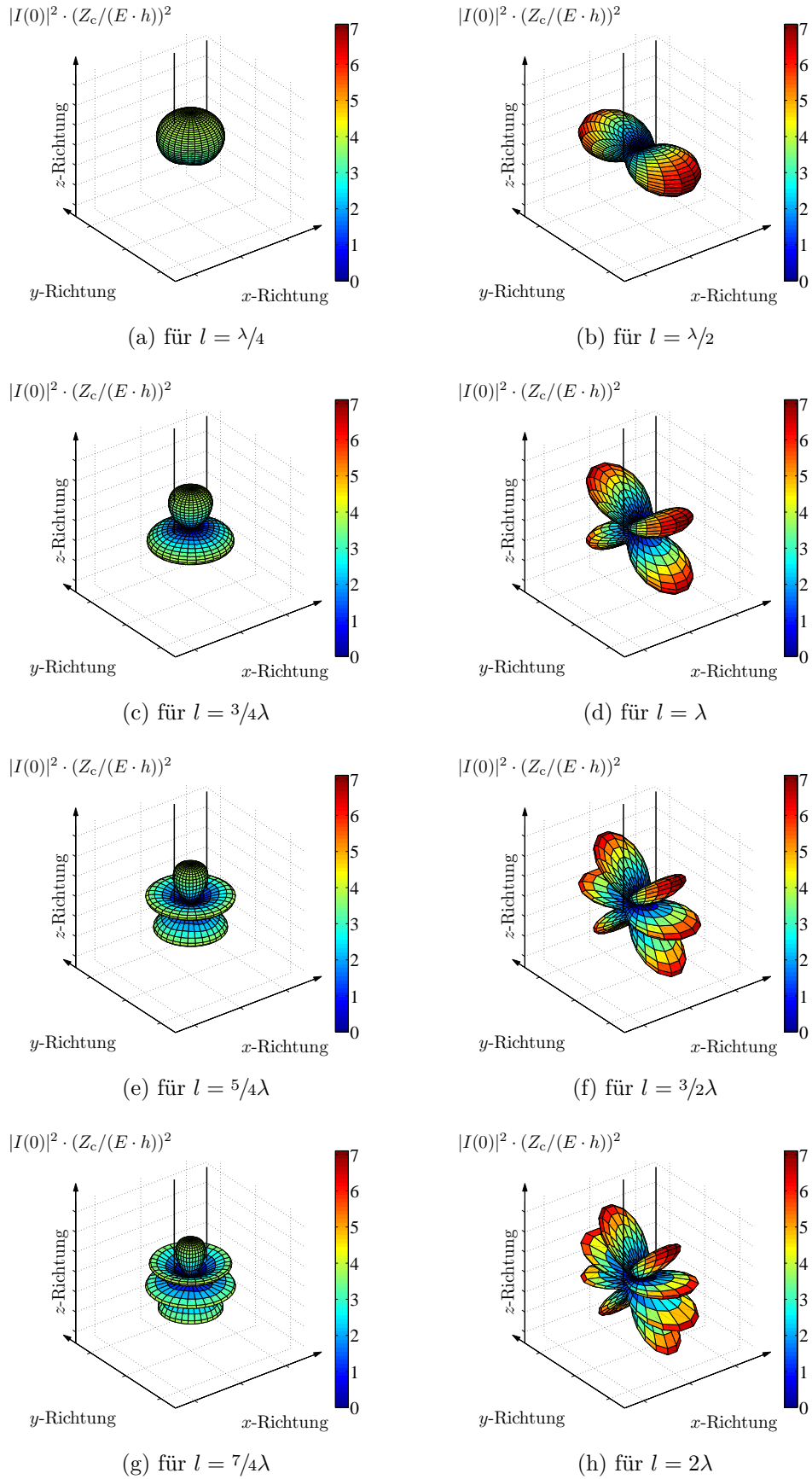


Abbildung 4.6: Betragsquadrat des eingekoppelten Stromes am Anfang der Leitung als Funktion der Einfallrichtung der ebenen Welle für $R_1 = Z_c$ und $R_2 = 1/2Z_c$

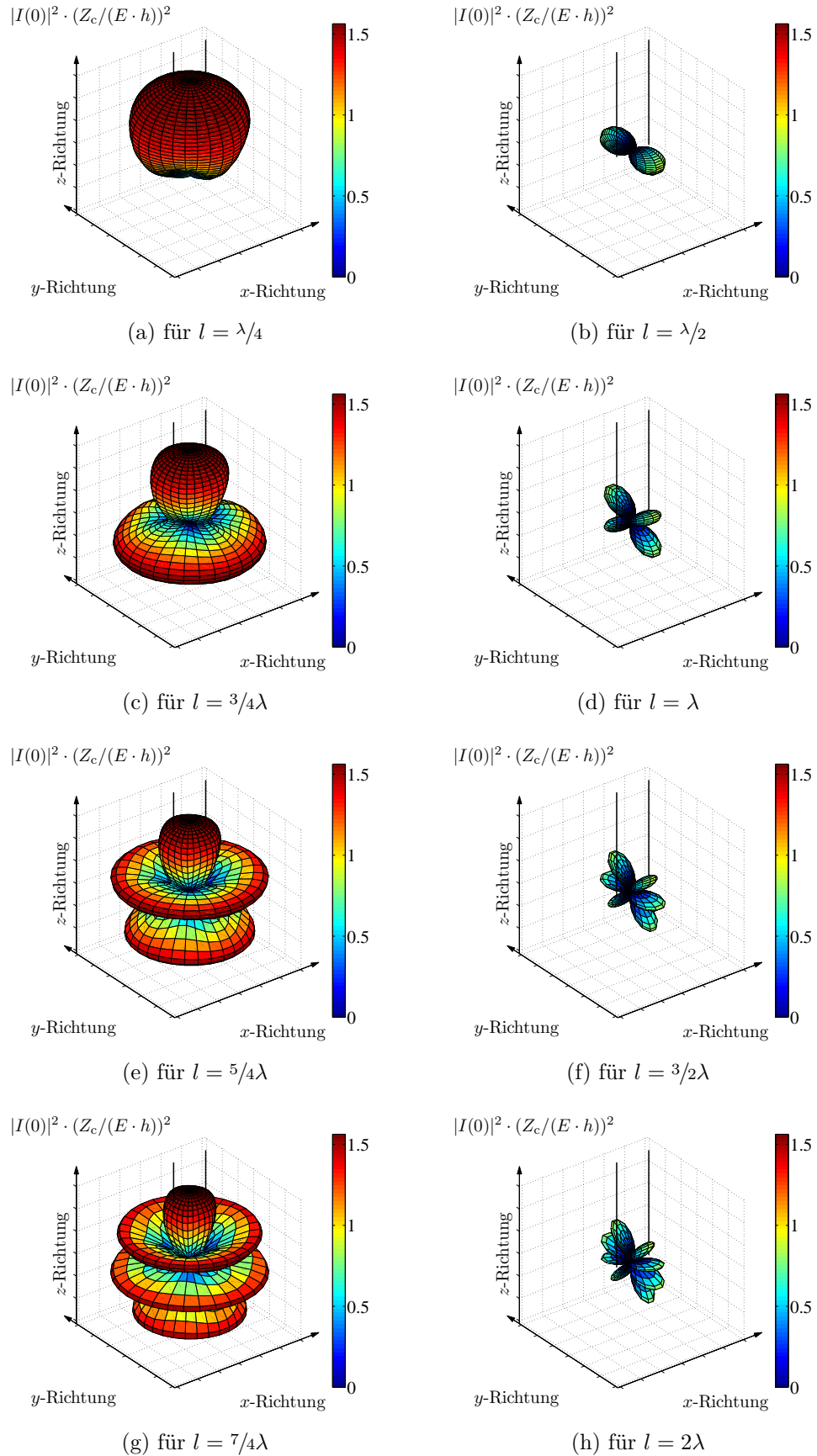


Abbildung 4.7: Betragsquadrat des eingekoppelten Stromes am Anfang der Leitung als Funktion der Einfallrichtung der ebenen Welle für $R_1 = 4Z_c$ und $R_2 = 1/4Z_c$

dieses Maximum soll eine analytische Formel gefunden werden. Als deterministisches Maximum $\hat{\uparrow}|I(0)|^2\hat{\uparrow}$ wird das Maximum verstanden, dass sich bei der Einkopplung *einer* ebenen Welle aus der *effektivsten Einkoppelrichtung* ergibt. Deterministisch ist dieses Maximum deshalb, weil sich je nach Leitungsgeometrie und Abschlusswiderständen sowie Frequenz und Amplitude der ebenen Welle ein *fester* Maximalwert ergibt. Dieser Maximalwert ist keinen statistischen Schwankungen unterworfen, solange man tatsächlich immer aus der effektivsten Richtung einkoppelt. In den folgenden Abschnitten geht es darum, diese effektivste Richtung zu bestimmen.

Im Gegensatz dazu existiert bei der Einkopplung statistischer Felder (siehe Kapitel 5) auch ein statistisches Maximum $\lceil |I(0)|^2 \rceil$, das statistischen Schwankungen unterworfen ist und von der Anzahl statistisch unabhängiger Stichproben in einem Ensemble abhängt.

4.3.1 Maximalwert des Stromes am Anfang der Leitung

Für die Herleitung wird das Betragsquadrat des Stromes $|I(0)|^2$ genutzt. Die Vorteile der einfachen Berechnung aus $I(0) \cdot I(0)^*$ und der Proportionalität zur Leistung wurden bereits in Abschnitt 4.2.3 dargestellt. Ein weiterer entscheidender Vorteil gegenüber der Nutzung des einfachen Betrages ist auch die stetige Differenzierbarkeit über den Polarwinkel ϑ , den Azimutwinkel φ und den Polarisationswinkel α .

4.3.1.1 Bestimmung der effektivsten Einkoppelrichtung

a) Bestimmung des effektivsten Polarisationswinkels

Zur Bestimmung des effektivsten Polarisationswinkel betrachtet man zunächst die beidseitig angepasste Leitung mit $A_{I1} = A_{I2} = 0$. Nach dem Einsetzen der Gleichungen (3.1) und (3.2) und aller anderen Terme in Gleichung (4.18a) sowie dem Ausführen der Matrixmultiplikation erhält man eine Gleichung, die von den Winkeln ϑ , φ und α abhängt. Zur Bestimmung des Maximums kann man nach dem Polarisationswinkel α ableiten und die Ableitung nullsetzen. Eine geschlossene Lösung ist möglich, wenn die nach der Leitungstheorie zulässige Vereinfachung $\sin(kh) = kh$ für $kh \ll 1$ genutzt wird. Als Lösung² ergibt sich $\alpha = -\varphi$. Die notwendige Bedingung für ein Maximum ist damit erfüllt.

Eine Überprüfung der hinreichenden Bedingung über die zweite Ableitung ist sehr schwierig, da die analytischen Ausdrücke sehr unübersichtlich werden. Stattdessen ist es prag-

²Diese Lösung ist formal korrekt, widerspricht aber der ursprünglichen Definition des Wertebereichs des Polarisationswinkels α in Abschnitt 3.1.1 auf Seite 20 und in Abschnitt 3.1.2.2 auf Seite 25. Eine mögliche Lösung, welche dieses Problem umgeht, ist $\alpha = -\varphi + \begin{cases} \pi & \text{für } 0 \leq \varphi < \pi \\ 2\pi & \text{für } \pi \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$.

matischer, numerische Simulationen zur Validierung anzustellen. Dazu kann man zuerst eine schnelle Simulation wie in Abschnitt 4.2.3 mit $\alpha = -\varphi$ durchführen.

Weiterhin kann man in der Simulation für jedes ϑ und φ eine weitere Schleifenebene über alle möglichen α hinzufügen und das tatsächliche Maximum über alle Winkel bestimmen. Diese Simulationen sind recht zeitaufwendig, zeigen aber, dass die Annahme von $\alpha = -\varphi$ in jedem Fall das größte Maximum findet. Das gilt auch für nichtangepasste Leitungsabschlüsse.

Damit beschränkt sich die dreidimensionale Suche nunmehr auf eine zweidimensionale Suche über den verbleibenden Azimutwinkel φ und den Polarwinkel ϑ .

b) Bestimmung des effektivsten Azimutwinkels

Zur Bestimmung des effektivsten Azimutwinkels benutzt man ebenfalls Gleichung (4.18a) und leitet den Ausdruck $|I(0)|^2$ nach φ ab. Nach dem Nullsetzen erhält man als mögliche Lösungen $\varphi = 0, 90^\circ, 180^\circ$ und 270° . Aufgrund der schon in Abschnitt 4.2.3 besprochenen Spiegelsymmetrie des Einkoppeldiagramms können die Lösungen $\varphi = 180^\circ$ und 270° vernachlässigt werden, da bei $\varphi = 0$ oder entsprechend 90° das gleiche Maximum erreicht wird.

Auch hier ist die analytische Auswertung der hinreichenden Bedingung aus der zweiten Ableitung nicht zielführend. Numerische Simulationen wie in Abschnitt 4.2.3 zeigen, dass der maximale Strom bei

- $\varphi = 0$ erreicht wird, wenn $R_2 > Z_c$ ist; und bei
- $\varphi = 90^\circ$ erreicht wird, wenn $R_2 < Z_c$ ist.

Der Abschlusswiderstand R_1 spielt dabei keine Rolle. Im Fall $R_2 = Z_c$ ergibt sich ein zur z -Achse rotationssymmetrisches Einkoppeldiagramm und der Winkel φ ist ebenfalls ohne Einfluss.

Somit beschränkt sich die zweidimensionale Suche auf eine eindimensionale Suche über den verbleibenden Polarwinkel ϑ .

c) Bestimmung des effektivsten Polarwinkels

Zur Bestimmung des effektivsten Polarwinkels benutzt man erneut Gleichung (4.18a) und setzt $\alpha = -\varphi$ sowie $\varphi = 0$ oder $\varphi = 90^\circ$. Den verbleibenden Ausdruck leitet man nach ϑ ab und setzt die Ableitung zu Null.

Nun können zwei Fälle unterschieden werden:

1. Bei niedrigen Frequenzen bzw. kurzen Leitungen mit $l < \lambda/4$ wird der maximale Strom immer bei $\vartheta = 0$ erreicht. Diese Lösung ergibt sich aus der Ableitung und ist auch aus den numerischen Simulationen in Abschnitt 4.2.3 zu erkennen.
2. Bei höheren Frequenzen bzw. Leitungslängen von $l > \lambda/4$ wird das Maximum bei Polarwinkeln $\vartheta \neq 0$ erreicht. Für die Nullstellen der Ableitung nach ϑ erhält man bei $\varphi = 0$ und $\varphi = 90^\circ$ ähnliche Ausdrücke, die sich nur im Vorzeichen des Reflexionsfaktors A_{I2} unterscheiden.

Benutzt man Gleichung (4.19) zur Bestimmung der Reflexionsfaktoren, so gilt:

- wenn $A_{I2} < 0$, so wird der maximale Strom bei $\varphi = 0$ erreicht und
- wenn $A_{I2} > 0$, so wird der maximale Strom bei $\varphi = 90^\circ$ erreicht.

Deshalb kann man beide Fälle $\varphi = 0$ und $\varphi = 90^\circ$ mit einer gemeinsamen Gleichung beschreiben, in der man den Betrag des Reflexionsfaktors benutzt. Somit ergibt sich für den effektivsten Polarwinkel ϑ_{\max} folgende Form:

$$\vartheta_{\max} = \arccos \left(\frac{\operatorname{atan2}(-|A_{I2}| \sin(2kl), -|A_{I2}| \cos(2kl) - 1) - kl}{kl} \right). \quad (4.26)$$

Die atan2-Funktion ist dabei wie üblich definiert.

$$\operatorname{atan2}(y, x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{für } x > 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{für } x < 0, y \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & \text{für } x < 0, y < 0 \\ +\pi/2 & \text{für } x = 0, y > 0 \\ -\pi/2 & \text{für } x = 0, y < 0 \\ 0 & \text{für } x = 0, y = 0 \end{cases} \quad (4.27)$$

Eine Überprüfung der hinreichenden Bedingung auf analytischem Wege über die zweite Ableitung ist auch hier schwierig, weshalb die Existenz des Maximums nur auf numerischem Weg überprüft wurde.

4.3.1.2 Allgemeine Abschlusswiderstände

Setzt man nun die eben ermittelten effektivsten Winkel in Gleichung (4.18a) ein, so ergibt sich für das deterministische Maximum des Betragsquadrats des eingekoppelten Stromes

am Anfang der Leitung folgende Lösung.

$$\begin{aligned} \uparrow |I(0)|^2 \uparrow = & \left(\frac{Eh(1 + A_{I1})}{Z_c} \right)^2 \cdot \frac{1}{1 - 2A_{I1}A_{I2} \cos(2kl) + A_{I1}^2 A_{I2}^2} \\ & \cdot \begin{cases} 4 \sin^2(kl) & \text{für } l \leq \frac{\lambda}{4} \\ \left| 1 + |A_{I2}| e^{-2jkl} - (1 + |A_{I2}|) e^{-jkl(1 + \cos(\vartheta_{\max}))} \right|^2 & \text{für } l > \frac{\lambda}{4} \end{cases} \quad (4.28) \end{aligned}$$

Trotz der Fallunterscheidung ist die Lösung stetig über der Leitungslänge l .

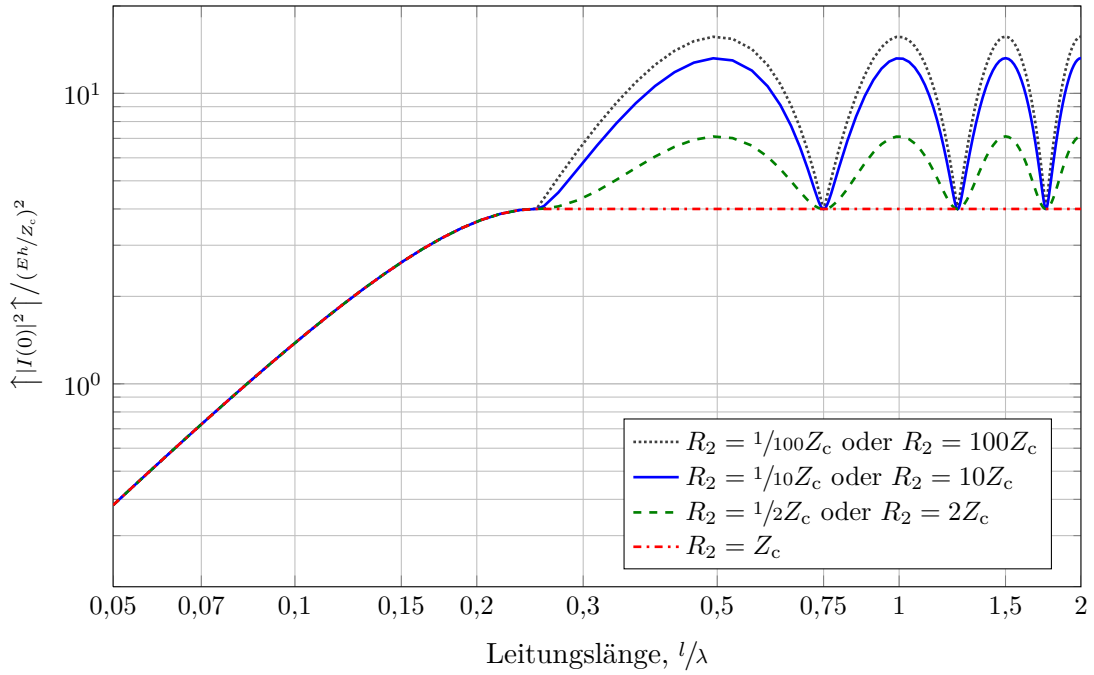
a) Übertragen der Ergebnisse auf das Ende der Leitung

Um das Ergebnis für den Strom am Anfang der Leitung auf den Strom am Ende der Leitung zu übertragen, müssen die Abschlusswiderstände $R_1 \leftrightarrow R_2$ gegenseitig vertauscht werden, wodurch sich auch die Reflexionsfaktoren $A_{I1} \leftrightarrow A_{I2}$ in den Gleichungen (4.26) und (4.28) vertauschen. Ansonsten bleiben diese Gleichungen unverändert und liefern $\uparrow |I(l)|^2 \uparrow$.

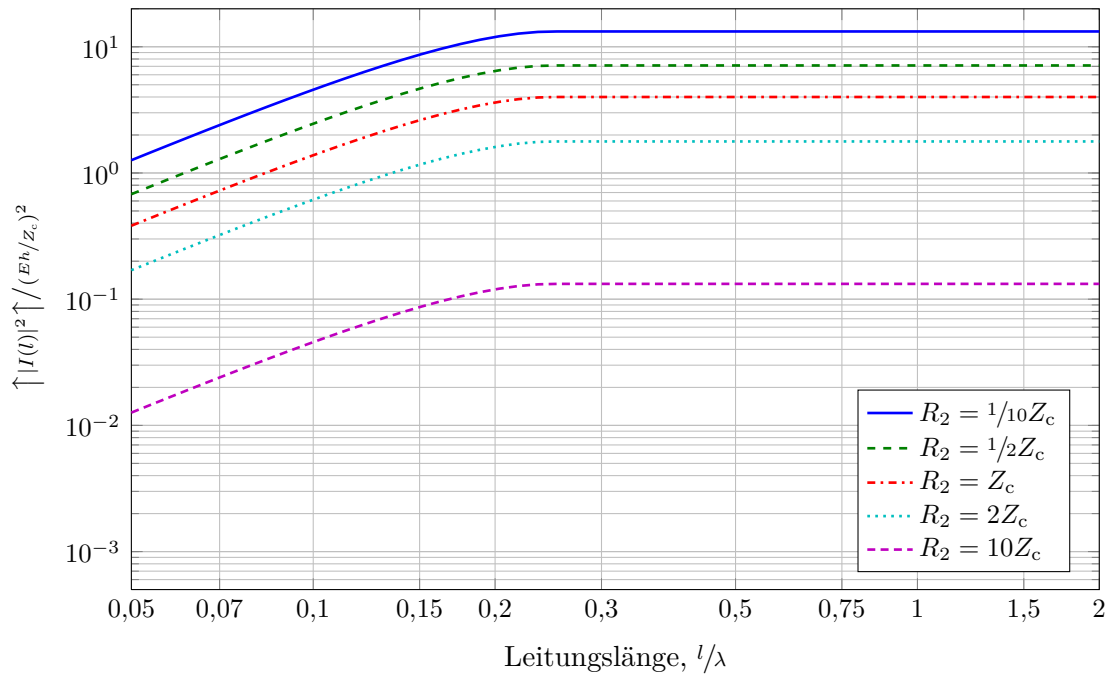
Für eine beispielhaft angenommene Leitung wird das deterministische Maximum des Betragsquadrats des an den Enden eingekoppelten Stromes in den Abbildungen 4.8 und 4.9 in Abhängigkeit der Leitungslänge dargestellt. Die Leitungslänge ist auf die Wellenlänge $\lambda = 2\pi/k$ normiert. Das Betragsquadrat des Stromes ist ähnlich wie in Abschnitt 4.2.3 mit $(Eh/Z_c)^2$ normiert. Beide Achsen sind logarithmisch skaliert.

In Abbildung 4.8 ist das Maximum des Betragsquadrats des eingekoppelten Stromes an den Enden einer einseitig fehlangepassten Leitung gezeigt. Die Fehlanpassung befindet sich am Ende der Leitung. Zum Vergleich ist auch der entsprechende Verlauf einer beidseitig angepassten Leitung dargestellt. Aus Abbildung 4.8a ist zu entnehmen, dass die durch die Fehlanpassung verursachten Leitungsresonanzen nur am Anfang der Leitung sichtbar sind. Je größer die Fehlanpassung, desto stärker ausgeprägt sind die Resonanzen, wobei die Richtung der Fehlanpassung (gegen Leerlauf oder gegen Kurzschluss) unbedeutend ist. Im Extremfall eines Leerlaufs oder Kurzschlusses am Ende der Leitung wird die maximale Einkopplung in den Anfang der Leitung bei einer Resonanz vervierfacht.

In Abbildung 4.8b, die das maximale Betragsquadrat des Stromes am Ende zeigt, sind dagegen keine Leitungsresonanzen erkennbar. Stattdessen erhält man über der Frequenz bzw. Leitungslänge glatte Verläufe. Trotzdem hängt der maximale Strom natürlich vom Abschlusswiderstand ab. Je kleiner R_2 , desto größer wird der Strom, der durch ihn durch fließt. Im Extremfall eines Kurzschlusses am Ende der Leitung ergibt sich das vierfache Betragsquadrat gegenüber der beidseitig angepassten Leitung.



(a) am Anfang der Leitung



(b) am Ende der Leitung

Abbildung 4.8: Maximalwert des Betragsquadrats des eingekoppelten Stromes an den Enden einer einseitig fehlangepassten Leitung als Funktion der Leitungslänge bzw. der Frequenz. Zum Vergleich ist auch der entsprechende Verlauf einer beidseitig angepassten Leitung dargestellt.

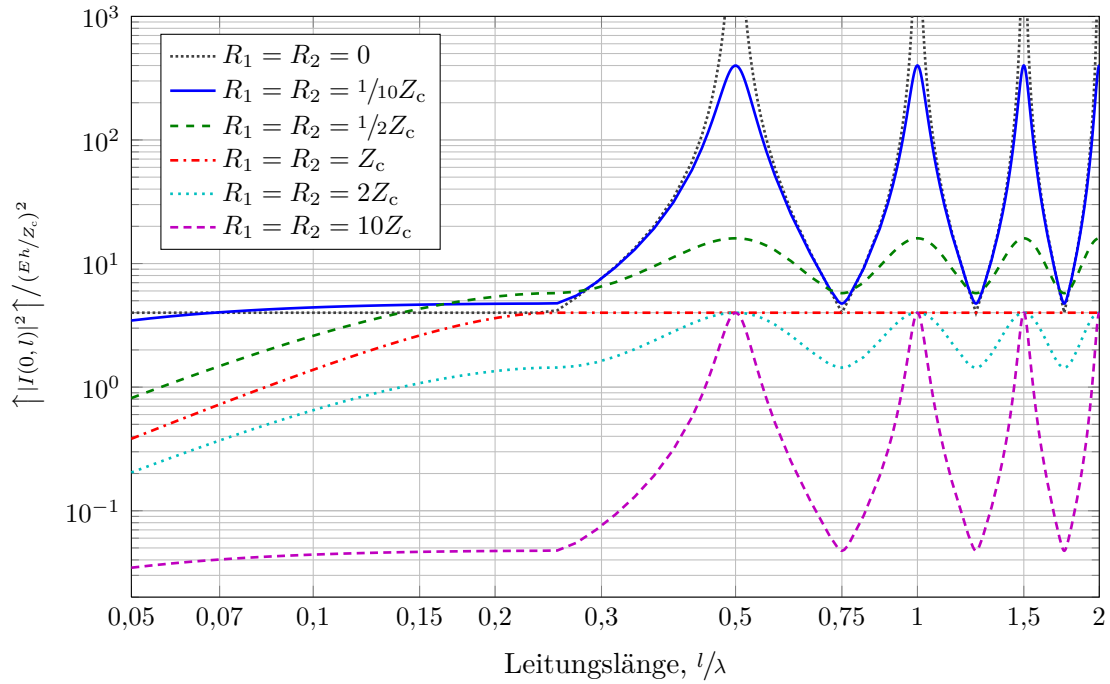
In Abbildung 4.9 ist das Maximum des Betragsquadrats des eingekoppelten Stromes an den Enden einer beidseitig fehlangepassten Leitung gezeigt. Abbildung 4.9a veranschaulicht die Lösung am Anfang und am Ende einer beidseitig symmetrisch fehlangepassten Leitung. Durch die symmetrische Fehlanpassung ergeben sich Leitungsresonanzen, die bei $l = \lambda/2, \lambda, 3/2\lambda$ und weiteren Vielfachen von $\lambda/2$ auftreten. Bei Abschlusswiderständen kleiner als Z_c ist der maximale Strom immer größer als im Fall der angepassten Leitung. Im idealen Kurzschlussfall würde der maximale Strom bei einer Resonanz gegen unendlich gehen. Dieses unphysikalische Ergebnis wird durch die Annahme einer vollständig verlustlosen Leitung hervorgerufen. Interessant ist auch, dass im Kurzschlussfall selbst bei sehr niedrigen Frequenzen bzw. sehr kurzen Leitungslängen ein maximaler Strom in die Leitung eingekoppelt werden kann, der dem maximalen Strom einer langen, angepassten Leitung entspricht. Auch dieses Resultat wird durch die Annahme einer vollständig verlustlosen Leitung verursacht.

Bei Abschlusswiderständen größer als Z_c ist der maximale Strom stets kleiner als im Fall der angepassten Leitung. Nur im Resonanzfall wird der gleiche maximale Strom wie in der beidseitig angepassten Leitung erreicht. Das gilt auch für den Leerlauffall mit $R_1 = R_2 \mapsto \infty$. Da das Modell auch hier keine Verluste beinhaltet, geht der Strom im Leerlauffall entlang der Leitung gegen unendlich und verursacht an den ideal leerlaufenden Enden der Leitung trotzdem einen Stromfluss, dessen Grenzwert mit dem maximalen Strom der beidseitig angepassten Leitung übereinstimmt. Diese Eigenschaft der Lösung ist nur aus theoretischer Sicht relevant und verdeutlicht die Grenzen des Modells. In einer praktischen Messung würde dieses Verhalten nicht nachweisbar sein.

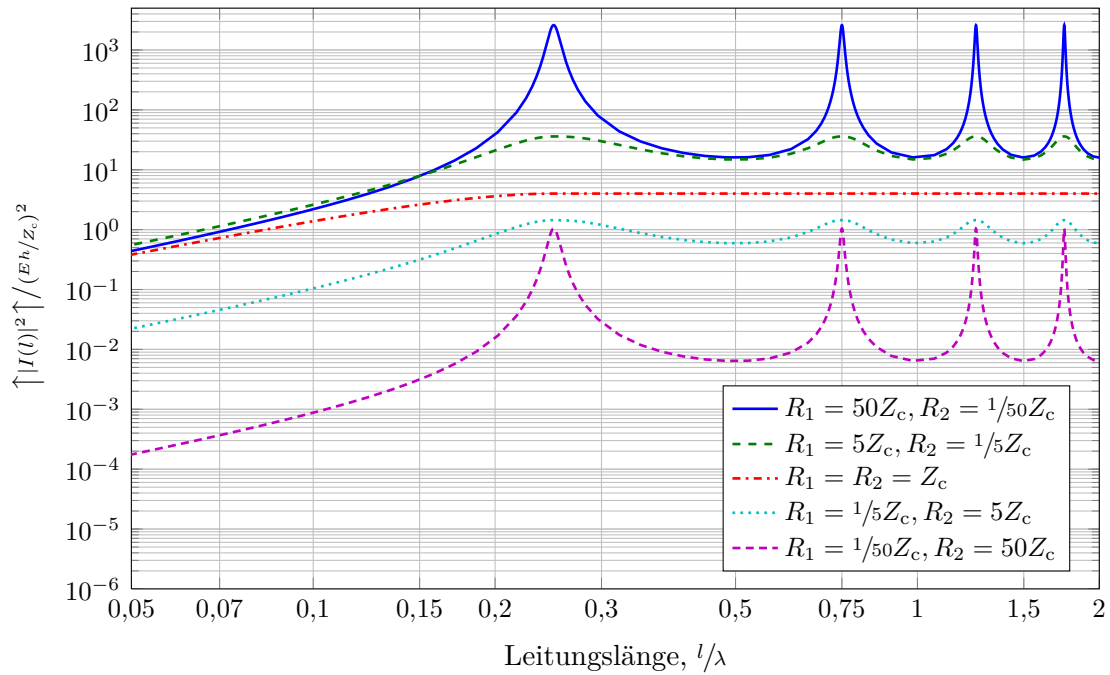
Abbildung 4.9b zeigt die Lösung am Ende einer beidseitig asymmetrisch fehlangepassten Leitung. Durch die asymmetrische Fehlanpassung treten die Leitungsresonanzen bei $l = \lambda/4, 3/4\lambda, 5/4\lambda$, usw. auf. Wenn der Abschlusswiderstand $R_2 < Z_c$ ist, so ist der maximale Strom stets größer als im Fall der angepassten Leitung. Bei einem Leerlauf am Anfang und Kurzschluss am Ende der Leitung würde der maximale Strom im Resonanzfall aufgrund der fehlenden Verluste im Modell erneut gegen unendlich gehen. Wenn $R_2 > Z_c$ ist, so ist der maximale Strom stets kleiner als bei der beidseitig angepassten Leitung, auch im Resonanzfall.

4.3.1.3 Sonderfall der beidseitig angepassten Leitung

Für die beidseitig angepasste (engl. *matched*) Leitung gilt $R_1 = R_2 = Z_c$ und damit auch $A_{I1} = A_{I2} = 0$. Dementsprechend vereinfacht sich die atan2 -Funktion in Gleichung (4.26) zu $\text{atan2}(0, -1) = \pi$. Der Polarwinkel, bei dem der maximale Strom eingekoppelt wird,



(a) am Anfang und am Ende einer beidseitig symmetrisch fehlangepassten Leitung



(b) am Ende einer beidseitig asymmetrisch fehlangepassten Leitung

Abbildung 4.9: Maximalwert des Betragsquadrats des eingekoppelten Stromes an den Enden einer beidseitig fehlangepassten Leitung als Funktion der Leitungslänge bzw. der Frequenz. Zum Vergleich ist auch der entsprechende Verlauf einer beidseitig angepassten Leitung dargestellt.

ergibt sich damit zu

$$\vartheta_{\max} = \arccos\left(\frac{\pi - kl}{kl}\right) = \arccos\left(\frac{\pi}{kl} - 1\right). \quad (4.29)$$

Mit $A_{I1} = A_{I2} = 0$ vereinfacht sich das Betragsquadrat für den Fall $l > \lambda/4$ in Gleichung (4.28) zu $1/4 \left|1 - e^{-jkl(1+\cos(\vartheta_{\max}))}\right|^2$. Setzt man zusätzlich Gleichung (4.29) für den Winkel ϑ_{\max} ein, so vereinfacht sich die Exponentialfunktion zu $e^{-j\pi} = -1$. Damit ergibt sich für das deterministische Maximum des Betragsquadrats des eingekoppelten Stromes am Anfang und am Ende einer beidseitig angepassten Leitung eine sehr einfache Lösung.

$$\uparrow |I_{\text{match}}(0, l)|^2 \uparrow = 4 \left(\frac{Eh}{Z_c}\right)^2 \cdot \begin{cases} \sin^2(kl) & \text{für } l \leq \frac{\lambda}{4} \\ 1 & \text{für } l > \frac{\lambda}{4} \end{cases} \quad (4.30)$$

4.3.1.4 Sonderfall der beidseitig kurzgeschlossenen Leitung

Im Sonderfall der beidseitig kurzgeschlossenen (engl. short-circuited) Leitung gilt $R_1 = R_2 = 0$ und damit auch $A_{I1} = A_{I2} = 1$. Mit ähnlichen Vereinfachungen wie im vorherigen Abschnitt 4.3.1.3 und der Ersetzung $1 - 2\cos(2kl) + 1 = 4\sin^2(kl)$ im Nenner von Gleichung (4.28) ergibt sich auch hier eine sehr kurze Lösung.

$$\uparrow |I_{\text{short}}(0, l)|^2 \uparrow = 4 \left(\frac{Eh}{Z_c}\right)^2 \cdot \begin{cases} 1 & \text{für } l \leq \frac{\lambda}{4} \\ \left(\frac{1+|\cos(kl)|}{\sin(kl)}\right)^2 & \text{für } l > \frac{\lambda}{4} \end{cases} \quad (4.31)$$

4.3.1.5 Sonderfall der beidseitig leerlaufenden Leitung

Für die beidseitig leerlaufende (engl. open-circuited) Leitung gilt $R_1 = R_2 \mapsto \infty$ und somit auch $A_{I1} = A_{I2} = -1$. Auch wenn dieser Fall aufgrund der unphysikalischen Annahme einer perfekt verlustlosen Leitung keine praktische Relevanz hat, soll er trotzdem diskutiert werden, weil das Ergebnis für die Herleitung der Direktivität noch nützlich ist. Mit analogen Vereinfachungen wie in den vorhergehenden Abschnitten und durch Anwendung der Regel von L'Hospital gelangt man zu folgender Lösung.

$$\uparrow |I_{\text{open}}(0, l)|^2 \uparrow = 4 \left(\frac{Eh}{Z_c}\right)^2 \cdot \begin{cases} 1 & \text{für } l = \frac{\lambda}{2}, \lambda, \frac{3}{2}\lambda, 2\lambda, \dots \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.32)$$

Dieses Ergebnis lässt sich auch numerisch aus Abbildung 4.9a ableiten und wurde in diesem Zusammenhang bereits diskutiert.

4.3.2 Übertragen der Ergebnisse auf die Spannung

Möchte man statt des maximalen Stromes das deterministische Maximum des Betragsquadrats der eingekoppelten Spannung bestimmen, so kann man Gleichung (4.18b) benutzen und die gleiche Herleitung wie in Abschnitt 4.3.1 durchführen. Das erhaltene Ergebnis ist analog zu Gleichung (4.28).

$$\begin{aligned} \uparrow |U(0)|^2 \uparrow &= (Eh(1 + A_{U1}))^2 \cdot \frac{1}{1 - 2A_{U1}A_{U2} \cos(2kl) + A_{U1}^2 A_{U2}^2} \\ &\cdot \begin{cases} 4 \sin^2(kl) & \text{für } l \leq \frac{\lambda}{4} \\ \left| 1 + |A_{U2}| e^{-2jkl} - (1 + |A_{U2}|) e^{-jkl(1 + \cos(\vartheta_{\max}))} \right|^2 & \text{für } l > \frac{\lambda}{4} \end{cases} \quad (4.33) \end{aligned}$$

Im Gegensatz zu Gleichung (4.28) wird nicht durch die charakteristische Impedanz Z_c geteilt und die Reflexionsfaktoren müssen in der für Spannungswellen gültigen Form wie in Gleichung (4.6) geschrieben werden.

Zur Rechtfertigung dieses Ergebnisses kann auch die in Abschnitt 4.2.1.2 diskutierte Eigenschaft der Lösung der Leitungsgleichungen in Form der BLT-Gleichungen benutzt werden. Dort wurde gezeigt, dass für Strom und Spannung sehr ähnliche Gleichungen gelten, die sich durch einen Faktor Z_c unterscheiden und bei denen in der ersten Matrix die Vorzeichen der Reflexionsfaktoren vertauscht sind. Dies gilt aber nicht für die zweite Matrix in Gleichung (4.18a) und (4.18b), welche die Leitungsresonanzen repräsentiert. In den Gleichungen (4.28) und (4.33) werden die Leitungsresonanzen anstatt dessen durch den Nenner $1 - 2A_{U1}A_{U2} \cos(2kl) + A_{U1}^2 A_{U2}^2$ ausgedrückt, bei dem die Vorzeichen von A_{U1} und A_{U2} beide invertiert werden können, ohne den Wert des Terms zu beeinflussen.

4.3.2.1 Sonderfall der beidseitig angepassten Leitung

Für die beidseitig angepasste Leitung ergibt sich erneut eine sehr kurze Lösung für den deterministischen Maximalwert des Betragsquadrats der an den Enden eingekoppelten Spannung. Diese entspricht bis auf die fehlende charakteristische Impedanz Z_c der Leitung exakt der Lösung für den maximalen Strom.

$$\uparrow |U_{\text{match}}(0, l)|^2 \uparrow = 4(Eh)^2 \cdot \begin{cases} \sin^2(kl) & \text{für } l \leq \frac{\lambda}{4} \\ 1 & \text{für } l > \frac{\lambda}{4} \end{cases} \quad (4.34)$$

4.3.2.2 Sonderfall der beidseitig kurzgeschlossenen Leitung

Die maximale Spannung an den Enden der beidseitig kurzgeschlossenen Leitung ist analog zum maximalen Strom an den Enden der beidseitig leerlaufenden Leitung.

$$\uparrow |U_{\text{short}}(0, l)|^2 \uparrow = 4(Eh)^2 \cdot \begin{cases} 1 & \text{für } l = \frac{\lambda}{2}, \lambda, \frac{3}{2}\lambda, 2\lambda, \dots \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.35)$$

4.3.2.3 Sonderfall der beidseitig leerlaufenden Leitung

Die maximale Spannung im Sonderfall der beidseitig leerlaufenden Leitung entspricht dem maximalen Strom im Fall der beidseitig kurzgeschlossenen Leitung.

$$\uparrow |U_{\text{open}}(0, l)|^2 \uparrow = 4(Eh)^2 \cdot \begin{cases} 1 & \text{für } l \leq \frac{\lambda}{4} \\ \left(\frac{1 + |\cos(kl)|}{\sin(kl)} \right)^2 & \text{für } l > \frac{\lambda}{4} \end{cases} \quad (4.36)$$

4.3.3 Numerische Simulationen mit weniger Einfallsrichtungen

Das bisher dargestellte Maximum entspricht dem Maximum, das sich tatsächlich über alle möglichen Einfallsrichtungen der einfallenden ebenen Welle ergibt. Man stelle sich die Leitung erneut als ein einfaches Modell für einen Prüfling vor, an dem eine Störfestigkeitsuntersuchung durchgeführt wird. Während dieser praktischen Messung wird man nicht alle möglichen Einfallsrichtungen untersuchen können. Stattdessen beschränkt man sich mit dem Zweck der Zeitersparnis auf eine feste Anzahl von möglichen Einfallsrichtungen und Polarisierungen.

Auf Freifeldern sowie in Halb- und Vollabsorberhallen bestrahlt man den Prüfling typischerweise aus einer Ebene und benutzt dabei vertikale und horizontale Polarisation der Sendeantenne. Um auf Freifeldern und in Halbabsorberhallen eine Interferenz der direkten und der am Boden reflektierten Welle zu vermeiden, kleidet man den Boden im Bereich zwischen Antenne und Prüfling meist mit zusätzlichen Absorbern aus [DIN11b]. Da hier bisher von Freiraumbedingungen ausgegangen wurde, beschränkt sich die Untersuchung auf die Anregung der Leitung aus einer Ebene mit zwei Polarisationsrichtungen.

4.3.3.1 Anregung aus einer Ebene mit zwei Polarisierungen

Die Analyse der Anregung der Leitung aus einer Ebene wird auf numerischem Wege durchgeführt. Dazu wird zuerst ein zufälliger Punkt auf einer gedachten Einheitskugel bestimmt, die den Prüfling bzw. die Leitung umschließt. Dieser Punkt sei beliebig, aber

fest. Zur Bestimmung dieses Punktes ist eine Definition in Kugelkoordinaten wie in Abbildung 3.1a auf Seite 20 mit einem Polarwinkel ϑ_1 und einem Azimutwinkel φ_1 nützlich. Zusätzlich wird eine beliebige, aber feste Polarisationsrichtung α_1 bestimmt. Die statistischen Verteilungen der Winkel sind in Tabelle 3.1 auf Seite 26 zusammengefasst. Die Verteilung des Phasenwinkels β spielt hier keine Rolle, da erneut nur das Betragsquadrat des Stromes ausgewertet wird.

Nun werden mit Hilfe der Gleichung (3.1) mit $k = 1$ die kartesischen Koordinaten des Punktes auf der Einheitskugel berechnet und mit $k_{x,1}$, $k_{y,1}$ und $k_{z,1}$ bezeichnet. Ebenso bestimmt man mit Gleichung (3.2) die normierten Komponenten e_x , e_y und e_z der Polarisationsrichtung.

Ein weiterer Punkt auf der Einheitskugel kann durch folgende Matrixgleichung bestimmt werden.

$$\begin{bmatrix} k_{x,n} \\ k_{y,n} \\ k_{z,n} \end{bmatrix} = \mathbf{D} \cdot \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

Die Drehmatrix \mathbf{D} hat dabei folgende Form:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \cos \gamma + e_x^2(1 - \cos \gamma) & e_x e_y(1 - \cos \gamma) - e_z \sin \gamma & e_x e_z(1 - \cos \gamma) + e_y \sin \gamma \\ e_y e_x(1 - \cos \gamma) + e_z \sin \gamma & \cos \gamma + e_y^2(1 - \cos \gamma) & e_y e_z(1 - \cos \gamma) - e_x \sin \gamma \\ e_z e_x(1 - \cos \gamma) - e_y \sin \gamma & e_z e_y(1 - \cos \gamma) + e_x \sin \gamma & \cos \gamma + e_z^2(1 - \cos \gamma) \end{bmatrix}. \quad (4.38)$$

Dabei wird der Vektor \mathbf{e} als Drehachse benutzt und um den Winkel $\gamma = 2\pi \frac{n-1}{N}$ gedreht. So erhält man weitere Punkte auf einer Ebene, die senkrecht zur eingangs bestimmten Polarisationsrichtung sind. Die Variable N bezeichnet die Anzahl der möglichen Einfallrichtungen. Die folgenden Ausführungen beschränken sich auf $N = 4$, woraus sich Drehwinkel von $\gamma = 90^\circ$, 180° und 270° ergeben.

Aus den so bestimmten kartesischen Koordinaten $k_{x,n}$, $k_{y,n}$ und $k_{z,n}$ wird die Einfallrichtung durch eine Konvertierung in Kugelkoordinaten wieder in Winkeln definiert. Der Polarisationswinkel wird so bestimmt, dass sich für alle Einfallrichtungen in einer Ebene die gleiche Polarisationsrichtung senkrecht zu dieser Ebene ergibt.

$$\vartheta_n = \text{atan2} \left(\sqrt{k_{x,n}^2 + k_{y,n}^2}, k_{z,n} \right) \quad (4.39)$$

$$\varphi_n = \text{atan2}(k_{y,n}, k_{x,n}) \quad (4.40)$$

$$\alpha_n = \text{atan2} \left(\frac{e_y \cos \vartheta_n \cos \varphi_n - e_x \cos \vartheta_n \sin \varphi_n}{\cos \vartheta_n}, \frac{e_y \sin \varphi_n + e_x \cos \varphi_n}{\cos \vartheta_n} \right) \quad (4.41)$$

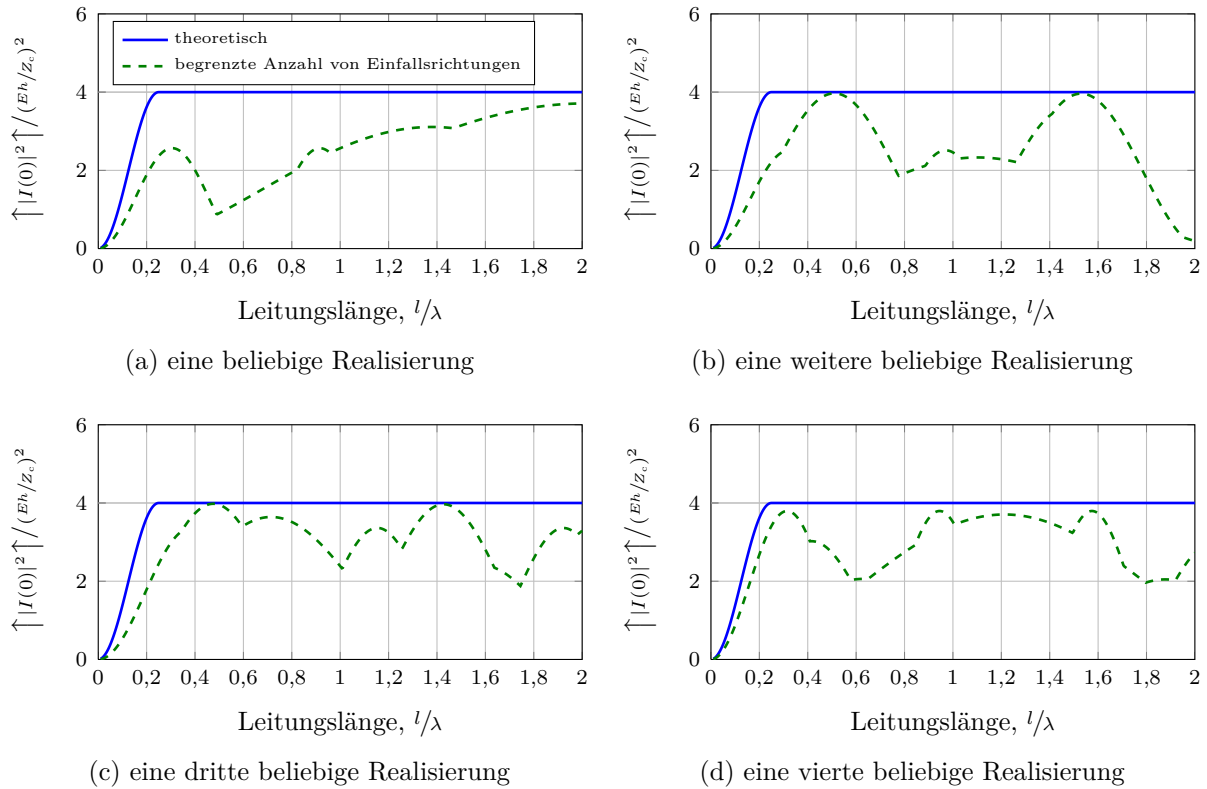


Abbildung 4.10: Maximalwert des Betragsquadrats des eingekoppelten Stromes am Anfang der Leitung als Funktion der Leitungslänge für $R_1 = Z_c$ und $R_2 = Z_c$

Die zweite Polarisations Ebene parallel zur Einfallsebene wird ermittelt, indem zum Polarisationswinkel α ein Winkel von $\pi/2 = 90^\circ$ addiert wird. Damit sind die Winkel aller Einfallrichtungen aus einer Ebene mit jeweils zwei Polarisierungen senkrecht und parallel zu dieser Ebene bestimmt.

In den Abbildungen 4.10 bis 4.13 sind einige numerische Beispiele für unterschiedliche Leitungsabschlüsse dargestellt. Jede Abbildung enthält vier Unterabbildungen, die jeweils eine beliebige Ausrichtung des Prüflings bzw. der Leitung zeigen. In jeder Unterabbildung wird das analytisch bestimmte deterministische Maximum über alle möglichen Einfallrichtungen mit dem numerisch bestimmten Maximum über einer begrenzten Anzahl von Einfallrichtungen verglichen.

Es ist zu erkennen, dass die analytische Lösung tatsächlich ein *Supremum* darstellt und stets größer oder gleich der numerischen Lösung ist. Man erkennt außerdem, dass durch die Einschränkung der möglichen Einfallrichtungen auf eine Ebene nicht bei jeder Frequenz bzw. Leitungslänge ein maximaler Strom erreicht wird, welcher dem analytischen Maximum nahe kommt. Bei der beidseitig angepassten Leitung in Abbildung 4.10 gibt es Leitungslängen bzw. Frequenzen, bei denen nicht einmal die Hälfte des maximal möglichen Betragsquadrats des eingekoppelten Stromes erreicht wird. Bei den Leitungen mit Fehlanpassungen ist das teilweise noch deutlicher ersichtlich, z. B. in Abbildung 4.11d,

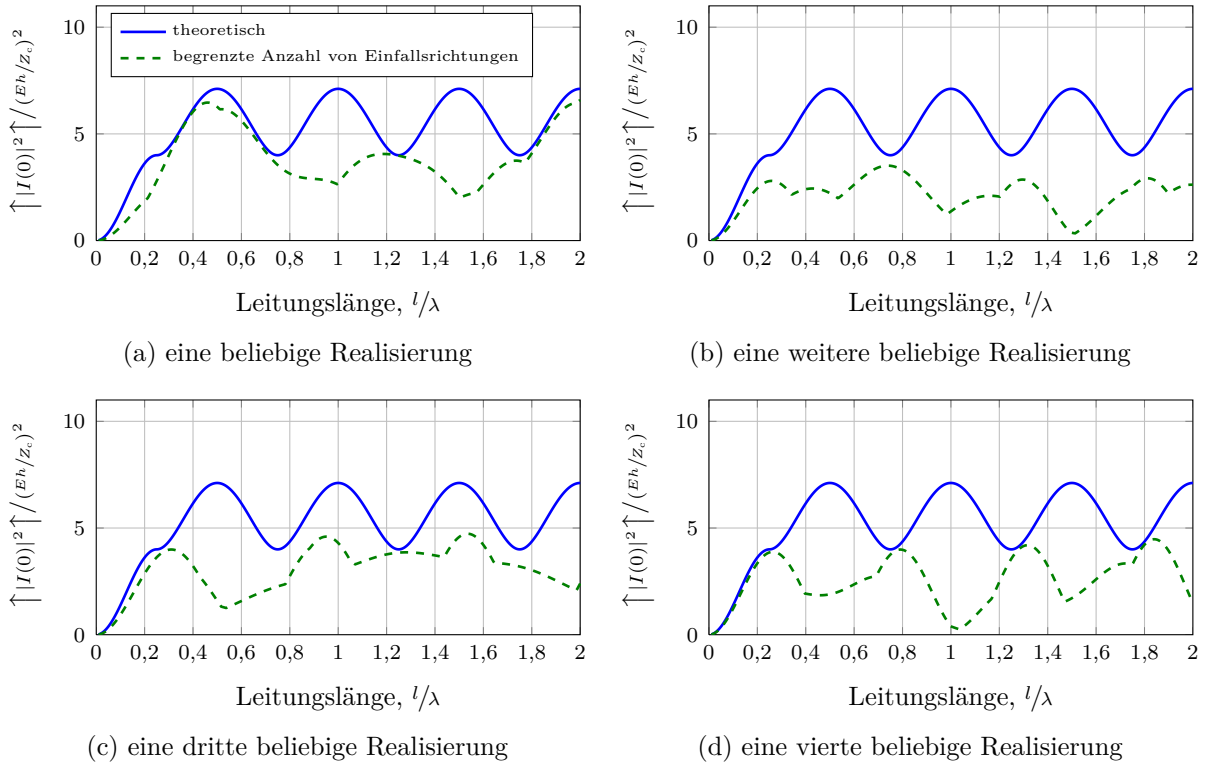


Abbildung 4.11: Maximalwert des Betragsquadrats des eingekoppelten Stromes am Anfang der Leitung als Funktion der Leitungslänge für $R_1 = Z_c$ und $R_2 = 2Z_c$

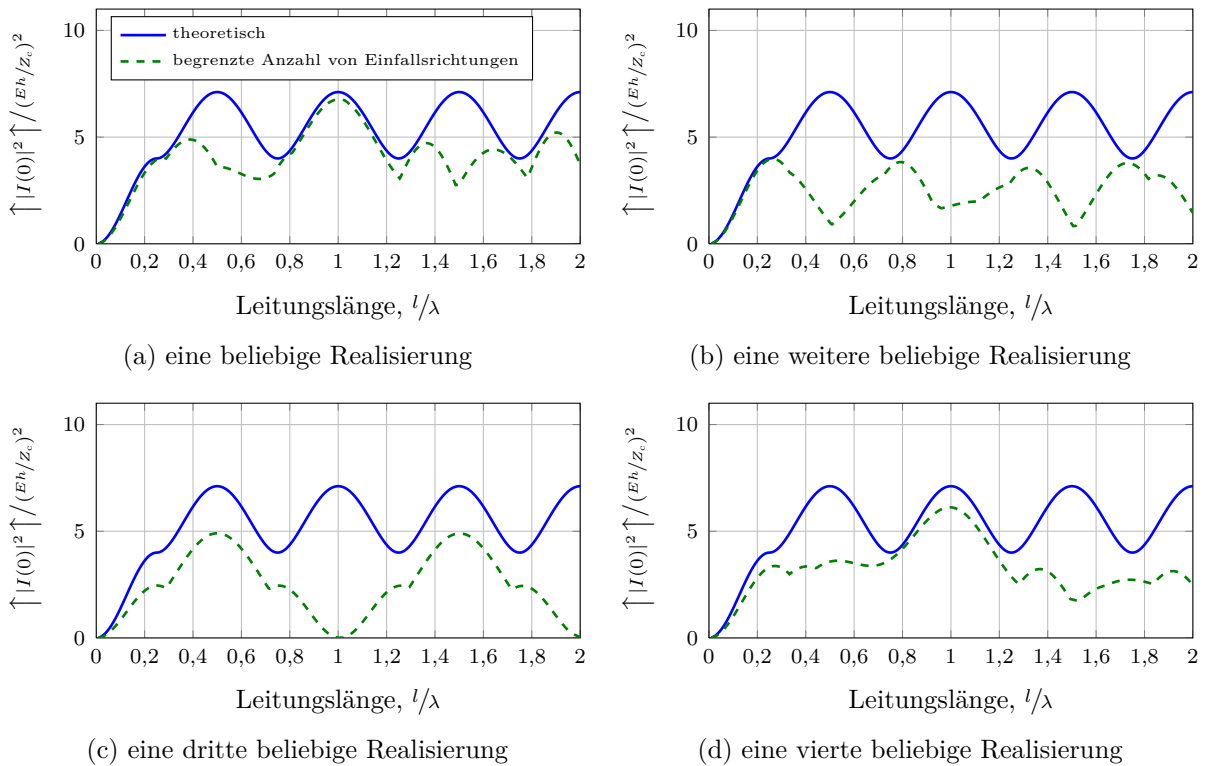


Abbildung 4.12: Maximalwert des Betragsquadrats des eingekoppelten Stromes am Anfang der Leitung als Funktion der Leitungslänge für $R_1 = Z_c$ und $R_2 = 1/2Z_c$

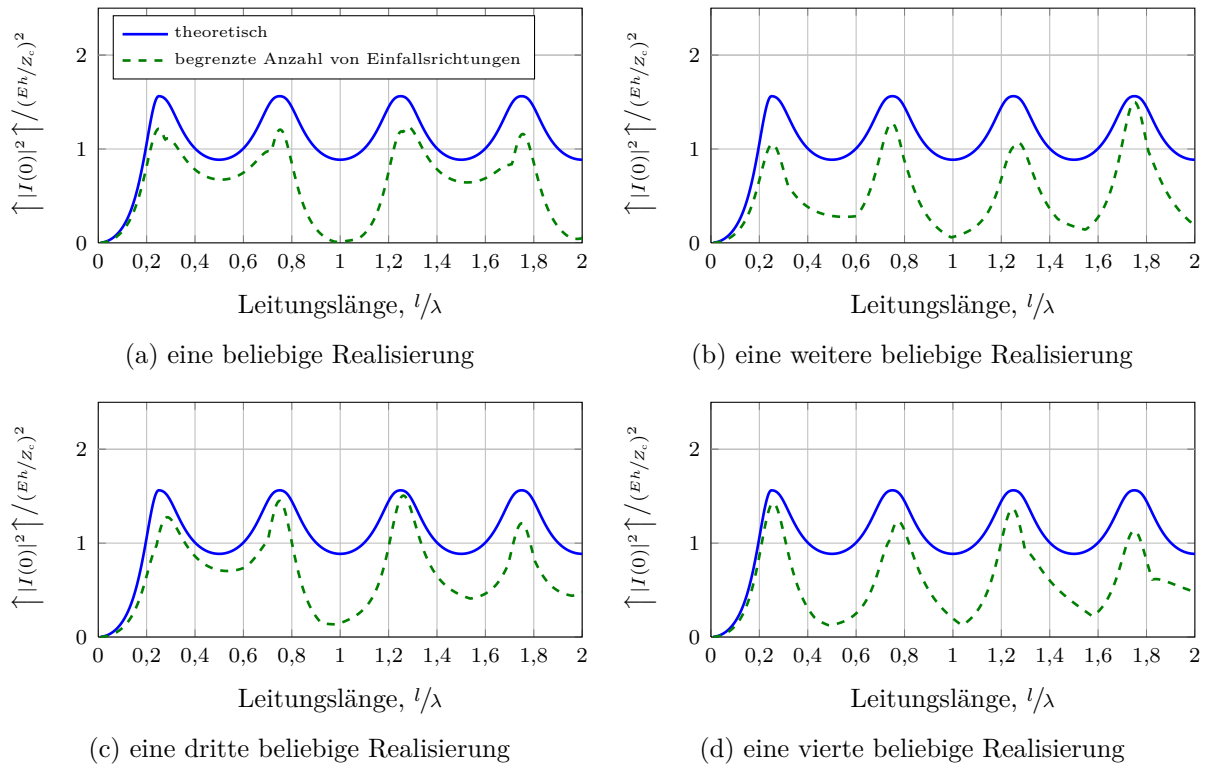


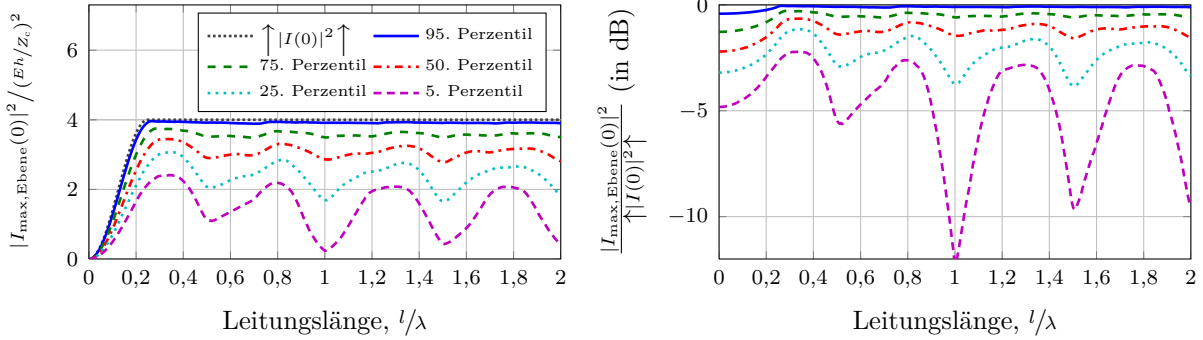
Abbildung 4.13: Maximalwert des Betragsquadrats des eingekoppelten Stromes am Anfang der Leitung als Funktion der Leitungslänge für $R_1 = 4Z_c$ und $R_2 = 1/4Z_c$

4.12c oder 4.13a.

Abmildernd kann festgestellt werden, dass für kurze Leitungslängen bzw. niedrige Frequenzen das numerische Maximum meist nicht viel kleiner als das analytische Maximum ist. So lange der durch die Leitung modellierte Prüfling also kleiner als $\lambda/4$ ist, ist die Wahrscheinlichkeit, den gewünschten Maximalwert der Störung bei der Bestrahlung aus einer Ebene zu finden, relativ hoch. Für *elektrisch größere* Prüflinge gilt dies aber nicht mehr und man müsste den Prüfling bzw. die Leitung aus mehreren Ebenen und in feineren Winkelschritten bestrahlen.

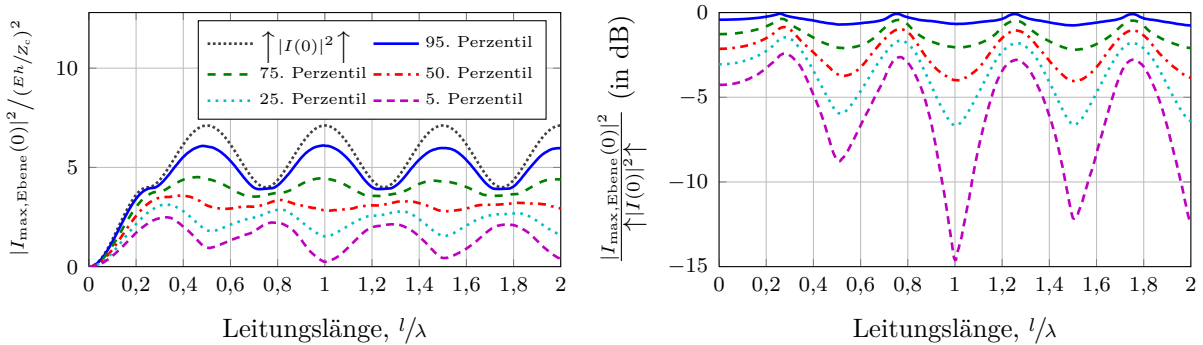
4.3.3.2 Schlussfolgerungen für EMV-Tests

Um den numerischen Simulationen mit einer begrenzten Anzahl von vier Einfallsrichtungen in einer Ebene mehr Aussagekraft zu verleihen, werden in einem weiteren Schritt eine größere Anzahl von 10 000 Simulationen durchgeführt und anschließend statistisch ausgewertet. Das bei jeder Simulation erreichte maximale Betragsquadrat des eingekoppelten Stromes am Anfang der Leitung wird mit $|I_{\max, \text{Ebene}}(0)|^2$ bezeichnet. Die Auswertung ist in den Abbildungen 4.14 bis 4.17 anhand von entsprechenden Perzentilkurven dargestellt. In den linken Abbildungen sind erneut der deterministische Maximalwert des Betragsquadrats des eingekoppelten Stromes sowie verschiedene Perzentile aller 10 000 numerischen



(a) theoretischer Maximalwert und Perzentile (b) Verhältnis der Perzentile zum theoretischen Maximalwert (in dB)

Abbildung 4.14: Maximalwertverteilung des Betragsquadrats des eingekoppelten Stromes am Anfang der Leitung als Funktion der Leitungslänge für $R_1 = Z_c$ und $R_2 = Z_c$. Für die statistische Auswertung wurden 10 000 Simulationen mit einer begrenzten Anzahl von vier Einfallsrichtungen in einer Ebene durchgeführt.



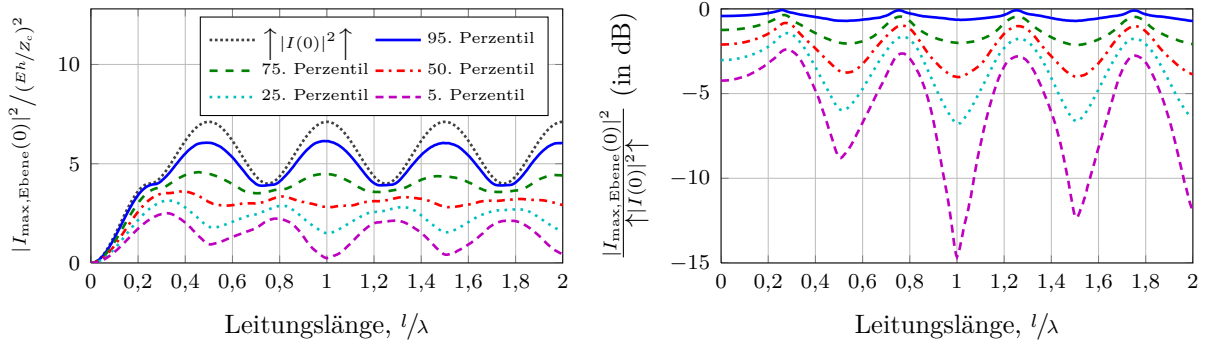
(a) theoretischer Maximalwert und Perzentile (b) Verhältnis der Perzentile zum theoretischen Maximalwert (in dB)

Abbildung 4.15: Maximalwertverteilung des Betragsquadrats des eingekoppelten Stromes am Anfang der Leitung als Funktion der Leitungslänge für $R_1 = Z_c$ und $R_2 = 2Z_c$. Für die statistische Auswertung wurden 10 000 Simulationen mit einer begrenzten Anzahl von vier Einfallsrichtungen in einer Ebene durchgeführt.

Simulationen zu finden. Die rechten Abbildungen zeigen das Verhältnis der Perzentile der numerischen Simulation zum deterministischen Maximalwert in dB.

Interessant ist im Fall der beidseitig angepassten Leitung, wie in Abbildung 4.14 gezeigt, dass die unteren Perzentile des maximalen Stromes deutliche Leitungsresonanzen zeigen, obwohl das deterministische Maximum über der Frequenz vollkommen glatt ist. In 50 % der Fälle erreicht man aber ein Maximum, das nur etwa 2 dB vom theoretischen Supremum abweicht. In 5 % der Fälle wird jedoch bei bestimmten Frequenzen nicht mal ein Zehntel der maximal möglichen Leistung in die Leitung eingekoppelt.

Im Fall der einseitig fehlangepassten Leitung, wie in den Abbildungen 4.15 und 4.16 gezeigt, ergibt sich ein ähnliches Bild. Obwohl die Leitung fehlangepasst ist und Leitungs-



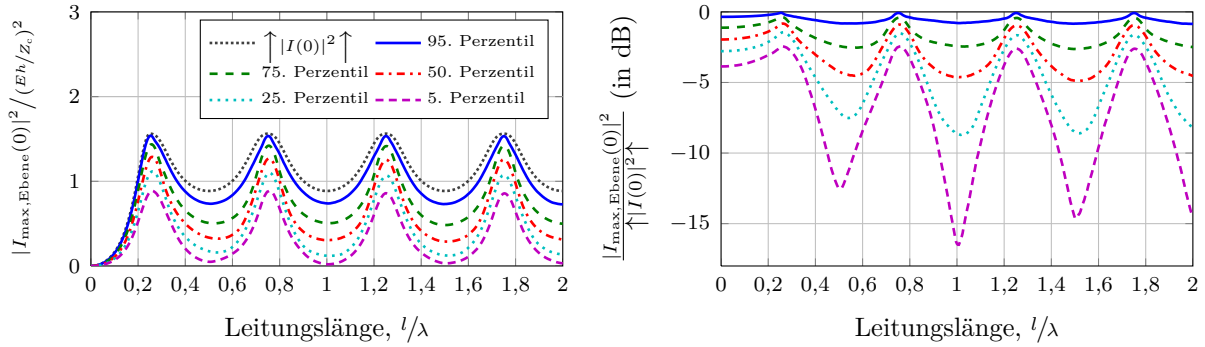
(a) theoretischer Maximalwert und Perzentile (b) Verhältnis der Perzentile zum theoretischen Maximalwert (in dB)

Abbildung 4.16: Maximalwertverteilung des Betragsquadrats des eingekoppelten Stromes am Anfang der Leitung als Funktion der Leitungslänge für $R_1 = Z_c$ und $R_2 = 1/2 Z_c$. Für die statistische Auswertung wurden 10 000 Simulationen mit einer begrenzten Anzahl von vier Einfallrichtungen in einer Ebene durchgeführt.

resonanzen auftreten, ist das 50. Perzentil über der Frequenz nahezu glatt. Deshalb wird in 50 % der Fälle im Resonanzfall nur ein Maximalwert erreicht, der 4 dB unterhalb des möglichen Maximalwerts liegt. In 5 % der Fälle erreicht man im Resonanzfall sogar nur ein Maximum, das 15 dB unterhalb des möglichen Maximums liegt. Problematisch sind also immer die Leitungslängen, die einem Vielfachen von $\lambda/2$ entsprechen. Bei Leitungslängen wie $\lambda/4$, $3/4\lambda$, $5/4\lambda$, usw. ist die Situation dagegen vollkommen unkritisch. Hier wird selbst beim 5. Perzentil ein Maximum erreicht, das nur etwa 3 dB kleiner als das Supremum ist.

In Abbildung 4.17 ist der Fall einer beidseitig asymmetrisch fehlangepassten Leitung dargestellt. Aus Abbildung 4.17a ist zu entnehmen, dass die Leitungsresonanzen wie in diesem Fall üblich bei $\lambda/4$, $3/4\lambda$, $5/4\lambda$, usw. auftreten. Auch beim 50. Perzentil sind diese Resonanzen deutlich sichtbar. Abbildung 4.17b zeigt dagegen ein, auf den ersten Blick etwas unerwartetes, Ergebnis. Auch im Fall der beidseitig asymmetrisch fehlangepassten Leitung ist die Einkopplung aus nur einer Ebene dann besonders schlecht, wenn die Leitungslänge ein Vielfaches von $\lambda/2$ und die Leitung eben nicht in Resonanz ist. Dagegen ist die Abweichung bei resonanten Leitungslängen nicht größer als 3 dB und die Einkopplung aus einer Ebene hinreichend effektiv. Ein Rückblick zu den Darstellungen in Abschnitt 4.2.3 verdeutlicht, warum das so ist:

- Für Leitungslängen wie $l = \lambda/4$, $3/4\lambda$, $5/4\lambda$, usw. ist das Einkoppeldiagramm immer nahezu rotationssymmetrisch. Deshalb ist es sehr wahrscheinlich, auch aus einer begrenzten Anzahl von Einfallrichtungen das Supremum der Einkopplung zu erreichen.
- Für Leitungslängen wie $l = \lambda/2$, λ , $3/2\lambda$ und weiteren Vielfachen von $\lambda/2$ verliert



(a) theoretischer Maximalwert und Perzentile (b) Verhältnis der Perzentile zum theoretischen Maximalwert (in dB)

Abbildung 4.17: Maximalwertverteilung des Betragsquadrats des eingekoppelten Stromes am Anfang der Leitung als Funktion der Leitungslänge für $R_1 = 4Z_c$ und $R_2 = 1/4Z_c$. Für die statistische Auswertung wurden 10 000 Simulationen mit einer begrenzten Anzahl von vier Einfallrichtungen in einer Ebene durchgeführt.

das Einkoppeldiagramm bei fehlangepassten Leitungen seine Rotationssymmetrie und ist nur noch spiegelsymmetrisch. Das Einkoppelverhalten in die Leitung wird gerichteter. Deshalb wird es unwahrscheinlicher mit einer begrenzten Anzahl von Einfallrichtungen das Supremum der Einkopplung zu erreichen.

Abschließend kann Folgendes festgestellt werden:

- Bei einer Leitung mit $l < \lambda/4$ ist die Wahrscheinlichkeit, bei der Anregung aus nur einer Ebene das tatsächliche Supremum der Einkopplung zu finden, relativ hoch. Im Mittel (50% der Fälle) ist die Abweichung nicht viel größer als 2 dB. Selbst in weniger als 5% der Fälle wird die Abweichung nicht viel größer als 4 dB sein.
- Bei einer Leitung mit $l > \lambda/4$ sinkt die Wahrscheinlichkeit bei der Anregung aus nur einer Ebene das tatsächliche Maximum der Einkopplung zu finden. Im Mittel (50% der Fälle) muss mit Abweichungen bis etwa 4 dB gerechnet werden, wobei resonante Leitungen kritischer als nichtresonante Leitungen sind. In 5% der Fälle muss mit Abweichungen größer als 10 dB, bei resonanten Leitungen auch größer als 15 dB, gerechnet werden. Besonders stark treten diese Abweichungen bei Leitungslängen von $l = \lambda/2, \lambda, 3/2\lambda$ und weiteren Vielfachen von $\lambda/2$ auf.

Leitungslängen wie $l = \lambda/4, 3/4\lambda, 5/4\lambda$, usw. sind dagegen unkritisch. Hier sind im Mittel nur Abweichungen von etwa 1 dB zu erwarten und selbst in 95% der Fälle wird die Abweichung nicht stärker als 3 dB sein.

Bei einer Leitung mit $l > \lambda/4$ müsste also z. B. aus mehreren, zueinander senkrechten Einfallsebenen oder mit einem feineren Versatzwinkel $\gamma < 90^\circ$ eingestrahlt werden, um das tatsächliche Supremum der Einkopplung mit einer höheren Wahrscheinlichkeit zu finden.

5 Einkopplung statistischer Felder in eine Leitung

In diesem Kapitel wird die Einkopplung statistischer Felder in eine Leitung detailliert analysiert. Das statistische Feld wird, wie in Kapitel 3 beschrieben, durch eine Überlagerung ebener Wellen dargestellt. Für die Leitung wird das gleiche Leitungsmodell wie in Kapitel 4 benutzt.

Um den Erwartungswert der Einkopplung statistischer Felder in eine Leitung zu bestimmen, wird ein ähnliches Verfahren wie in [Hil98b] angewandt. Der Erwartungswert für die Einkopplung vieler ebener Wellen ergibt sich aus einem Integral über alle möglichen Einfallsrichtungen, Polarisierungen und Phasenlagen (siehe Gleichung (3.4) auf Seite 22).

5.1 Erwartungswert des Betragsquadrats des eingekoppelten Stromes

Beschränkt man sich zunächst auf das Betragsquadrat des eingekoppelten Stromes, kann das Integral zur Bestimmung des Erwartungswerts sehr einfach formuliert werden. Wie schon in Abschnitt 4.2.3 bemerkt, ist das Betragsquadrat eine wichtige Kenngröße, weil es zur Leistung proportional ist und sich einfach aus einer Größe und ihrer komplexen Konjugation berechnen lässt. Die Integration erfolgt über die Winkel ϑ und φ zur Bestimmung der Einfallsrichtung, zusammengefasst als Raumwinkel $\Omega = \iint \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$, sowie den Polarisationswinkel α und den Phasenwinkel β .

$$\langle |I(z)|^2 \rangle_{\infty} = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} I(z) I(z)^* \, d\beta \, d\alpha \, d\Omega \quad (5.1)$$

Diese Lösungsmethode wurde bereits in [Mag08] angewandt, allerdings mit der Beschränkung auf eine Leitung mit beidseitiger Anpassung. Das Verfahren wird hier auf eine Leitung mit beliebigen Abschlusswiderständen verallgemeinert. Für den Strom $I(z)$ entlang der Leitung wird die in [Mag08, Gleichung (4.18a)] hergeleitete Lösung der Leitungsgleichungen eingesetzt. Der Effektivwert E der anregenden ebenen Wellen wird mit der kammer-spezifischen Konstante E_0 aus Gleichung (3.6) gleichgesetzt. Mit der Näherung $\sin(kh) \approx kh$, die unter den Annahmen der Leitungstheorie zulässig ist, können die Integrale in Gleichung (5.1) mit Hilfe eines Computeralgebrasystems wie Maple analytisch

gelöst und anschließend zusammengefasst werden. Die so erhaltene geschlossene Lösung für den Erwartungswert des Betragsquadrats des eingekoppelten Stromes kann unter Ausnutzung der Eigenschaften der Leitungsgleichungen, die in Abschnitt 4.2.1.2 diskutiert wurden, auf die eingekoppelte Spannung übertragen werden.

5.1.1 Lösung entlang der Leitung

Zunächst wird ganz allgemein die Lösung entlang der Leitung für allgemeine Abschlusswiderstände betrachtet. Auf der Basis dieser generellen Lösung werden anschließend mehrere Sonderfälle wie angepasste, kurzgeschlossene oder leerlaufende Leitungen untersucht. Weiterhin werden die Erwartungswerte der Einkopplung an den Leitungsenden diskutiert.

5.1.1.1 Allgemeine Abschlusswiderstände

Für den Erwartungswert des Betragsquadrats des Stromes entlang der Leitung ergibt sich für allgemeine Abschlusswiderstände folgende Lösung:

$$\langle |I(z)|^2 \rangle_\infty = \left(\frac{E_0 h}{Z_c D} \right)^2 \cdot [C_1 \cdot \cos(2kz) + C_2 \cdot \cos(2k(l-z)) + S_1 \cdot \sin(2kz) + S_2 \cdot \sin(2k(l-z)) + O \cdot D] \quad (5.2)$$

Die Lösung enthält einen konstanten Faktor, der von der kammer-spezifischen Konstante E_0 , dem halben Abstand der Leiter h , der charakteristischen Impedanz Z_c , sowie einem Nenner D abhängt. Die Ortsabhängigkeit von z entlang der Leitung wird durch Sinus- und Cosinus-Funktionen beschrieben, deren Anteil durch ebenfalls ortsabhängige Faktoren C_1 , C_2 , S_1 und S_2 bestimmt wird. Die einzelnen Terme C_1 und C_2 für den Cosinus-Anteil, S_1 und S_2 für den Sinus-Anteil sowie O für eine Verschiebung (engl. offset) sind dabei wie folgt definiert:

$$C_1 = \frac{A_{I1} A_{I2} (W_1 A_{I1} A_{I2} + W_2) \sin(2kl)}{2k} - A_{I2} A_{I1}^2 (1 + A_{I2}^2) \cos(2kl) + A_{I1} (1 + A_{I1}^2 A_{I2}^4), \quad (5.3)$$

$$C_2 = \frac{A_{I1} A_{I2} (W_2 A_{I1} A_{I2} + W_1) \sin(2kl)}{2k} - A_{I1} A_{I2}^2 (1 + A_{I1}^2) \cos(2kl) + A_{I2} (1 + A_{I1}^4 A_{I2}^2), \quad (5.4)$$

$$S_1 = \frac{(W_1 A_{I1} A_{I2} + W_2) (A_{I1} A_{I2} \cos(2kl) - A_{I1}^2 A_{I2}^2 - 1) - A_{I1} A_{I2} (W_1 + W_2 A_{I1} A_{I2})}{2k} + A_{I2} A_{I1}^2 (1 + A_{I2}^2) \sin(2kl), \quad (5.5)$$

$$S_2 = \frac{(W_2 A_{I1} A_{I2} + W_1)(A_{I1} A_{I2} \cos(2kl) - A_{I1}^2 A_{I2}^2 - 1) - A_{I1} A_{I2} (W_2 + W_1 A_{I1} A_{I2})}{2k} + A_{I1} A_{I2}^2 (1 + A_{I1}^2) \sin(2kl), \quad (5.6)$$

$$O = (1 + A_{I1}^2)(1 + A_{I2}^2) + D - \left(\frac{A_{I2}(1 - A_{I1})^2}{z} + \frac{A_{I1}(1 - A_{I2})^2}{l - z} + \frac{(A_{I1} + A_{I2})^2}{l} \right) \cdot \frac{\sin(2kl)}{2k}. \quad (5.7)$$

Dabei werden folgende Ersetzungen W_1 und W_2 sowie der Nenner D verwendet:

$$W_1 = \frac{1 - A_{I2}}{l - z} - \frac{A_{I2}(1 - A_{I1})}{z} + \frac{A_{I1} + A_{I2}}{l}, \quad (5.8)$$

$$W_2 = \frac{1 - A_{I1}}{z} - \frac{A_{I1}(1 - A_{I2})}{l - z} + \frac{A_{I1} + A_{I2}}{l}, \quad (5.9)$$

$$D = 1 - 2A_{I1}A_{I2} \cos(2kl) + A_{I1}^2 A_{I2}^2. \quad (5.10)$$

Die Reflexionsfaktoren A_{I1} und A_{I2} für Stromwellen sind in Gleichung (4.19) definiert.

a) Symmetrie der Lösung

Bei näherer Betrachtung fällt auf, dass die Lösungsformel symmetrisch aufgebaut ist. Das ist auch sehr sinnvoll, denn beim Vertauschen der Abschlusswiderstände R_1 und R_2 gegeneinander sollte sich die Lösung auch nicht grundlegend ändern, sondern nur ihre Ortsabhängigkeit von z auf $l - z$ wechseln. Deshalb besteht eine Dualität zwischen:

- A_{I1} und A_{I2} ,
- W_1 und W_2 ,
- C_1 und C_2 sowie
- S_1 und S_2 .

Werden jeweils:

- $R_1 \leftrightarrow R_2$

miteinander vertauscht, so erhält man A_{I2} aus A_{I1} und umgekehrt.

Wenn jeweils:

- $A_{I1} \leftrightarrow A_{I2}$ sowie
- $z \leftrightarrow l - z$

miteinander getauscht werden, so erhält man auch W_1 aus W_2 und umgekehrt.

Werden außerdem jeweils:

- $A_{I1} \leftrightarrow A_{I2}$,
- $W_1 \leftrightarrow W_2$ sowie
- $z \leftrightarrow l - z$

miteinander vertauscht, so erhält man C_1 aus C_2 und umgekehrt. Das Gleiche gilt für S_1 und S_2 .

Eine Besonderheit gilt für den Term O und den Nenner D . Hier können sowohl:

- $A_{I1} \leftrightarrow A_{I2}$ als auch
- $z \leftrightarrow l - z$

gegeneinander getauscht werden, wobei der Term O und der Nenner D unverändert bleiben.

Schlussendlich können auch für $\langle |I(z)|^2 \rangle_\infty$ aus Gleichung (5.2) die Ersetzungen:

- $C_1 \leftrightarrow C_2$,
- $S_1 \leftrightarrow S_2$ sowie
- $z \leftrightarrow l - z$

vorgenommen und eine äquivalente Lösung erhalten werden.

b) Beispiele

Als Beispiel wird eine Leitung mit $l = 17/8\lambda$ Länge betrachtet, da eine solche Leitung mit rein resistiven Abschlüssen niemals in Resonanz gerät (siehe auch die Beispiele in Abschnitt 5.1.2.1 auf Seite 84 und 87). Die Leitung befindet sich dabei in einem Medium mit der Permittivität ε und Permeabilität μ . Alle Ergebnisse für den Erwartungswert des Betragsquadrats des eingekoppelten Stromes sind auf den Faktor $(E_0 h / Z_c)^2$ normiert. Damit sind die dargestellten Diagramme unabhängig von der kammer-spezifischen Konstante und den Querabmessungen der Leitung.

Damit bei der Fülle von möglichen Abschlussimpedanzen überhaupt etwas aus den Abbildungen abgeleitet werden kann, werden drei verschiedene Fälle untersucht. Zum Ersten wird eine nur einseitig fehlangepasste Leitung betrachtet. Weiterhin wird eine beidseitig fehlangepasste Leitung mit symmetrischer Fehlanpassung an beiden Enden, sowie eine beidseitig fehlangepasste Leitung mit asymmetrischer Fehlanpassung untersucht. Der

Grad der Fehlanpassung gegenüber dem angepassten Fall wird jeweils gering, mittel und stark variiert.

Einseitig fehlangepasste Leitung

Der Erwartungswert des Betragsquadrats des Stromes entlang der Leitung für eine einseitig fehlangepasste Leitung ist in Abbildung 5.1 dargestellt. Es ist zu erkennen, dass die Fehlanpassung am Ende der Leitung einen starken Einfluss auf den Strom am Ende, jedoch nur einen geringen Einfluss auf den Strom am angepassten Anfang der Leitung hat. Die Amplitude und Position der Maxima entlang der Leitung werden stark beeinflusst. Die Amplitude der Maxima nimmt mit dem Grad der Fehlanpassung zu. Beim Vergleich des Kurzschlussfalls mit dem Leerlaufcase kann festgestellt werden, dass das Auftreten und die Position der Minima und Maxima ungefähr entgegengesetzt sind.

Beidseitig symmetrisch fehlangepasste Leitung

Für eine beidseitig symmetrisch fehlangepasste Leitung ist der Erwartungswert des Betragsquadrats des Stromes in Abbildung 5.2 dargestellt. Der Erwartungswert entlang der Leitung ist symmetrisch, da die Leitung mit beidseitig gleichen Abschlüssen auch eine symmetrische Anordnung bildet. Erneut wird durch den Grad der Fehlanpassung sowohl der Erwartungswert des Stromes an den Leitungsenden als auch die Amplitude und Position der Minima und Maxima entlang der Leitung beeinflusst.

Beidseitig asymmetrisch fehlangepasste Leitung

Ein analoges Ergebnis ist in Abbildung 5.3 für den Erwartungswert des Betragsquadrats des eingekoppelten Stromes entlang einer beidseitig asymmetrisch fehlangepassten Leitung gezeigt. Der Grad der Fehlanpassung beeinflusst erneut den Strom an den Leitungsenden und die Amplitude der Maxima entlang der Leitung. Im Gegensatz zu den vorherigen Beispielen wird die Position der Maxima entlang der Leitung dagegen kaum geändert.

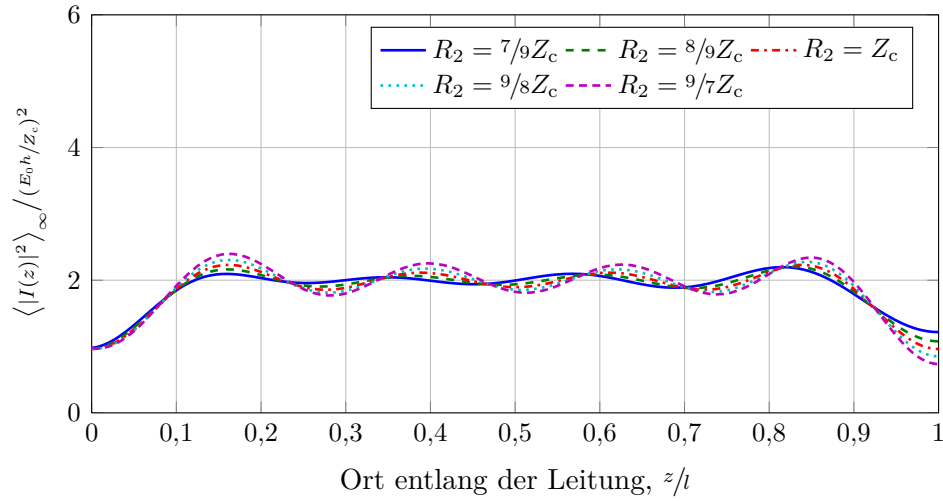
5.1.1.2 Sonderfall der beidseitig angepassten Leitung

Beim Sonderfall der an beiden Enden angepassten Leitung sind beide Reflexionsfaktoren $A_{I1} = A_{I2} = 0$. Dadurch ergeben sich direkt folgende Vereinfachungen:

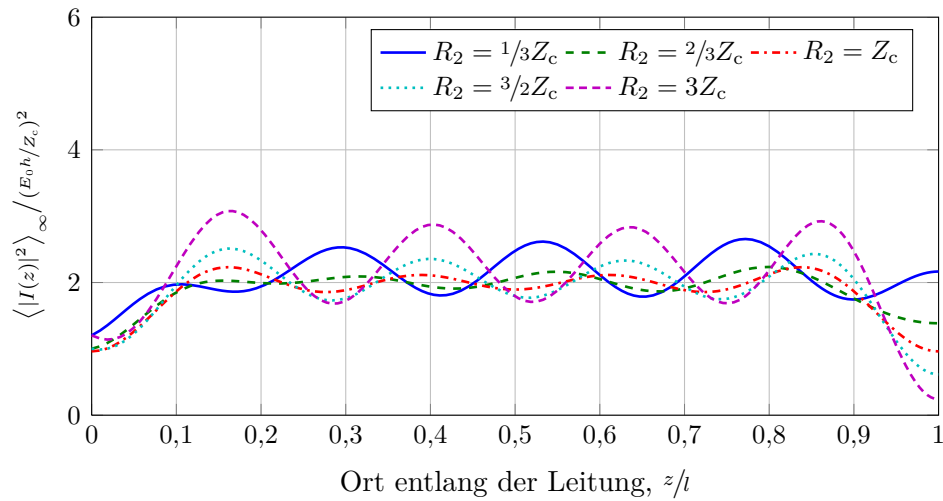
$$D = 1, \tag{5.11}$$

$$W_1 = \frac{1}{l - z}, \tag{5.12}$$

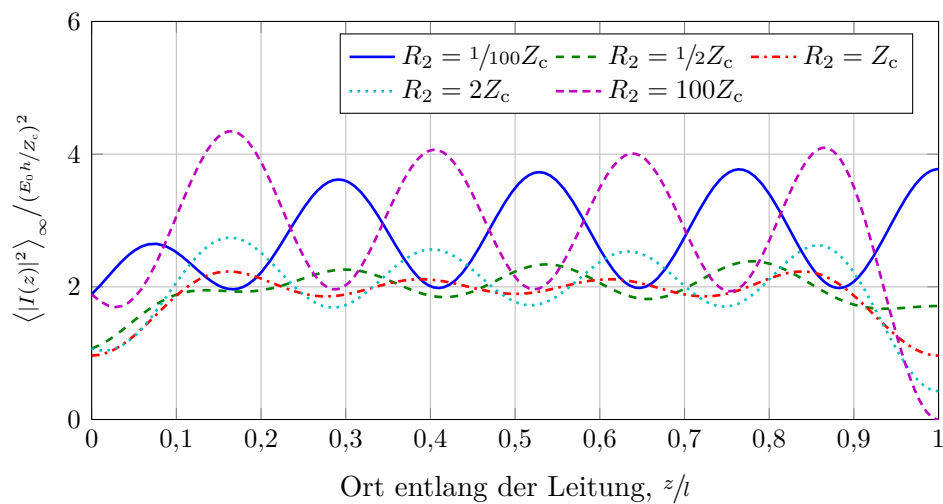
$$W_2 = \frac{1}{z}. \tag{5.13}$$



(a) geringe Variation

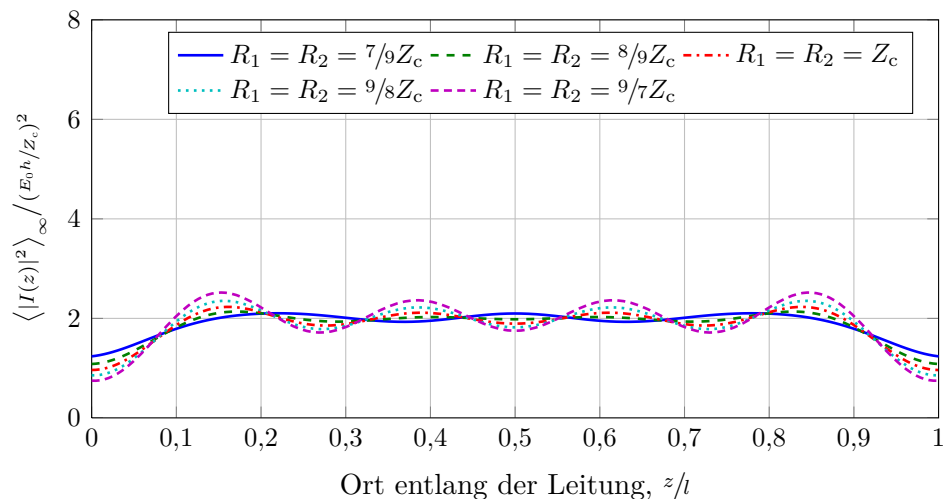


(b) mittlere Variation

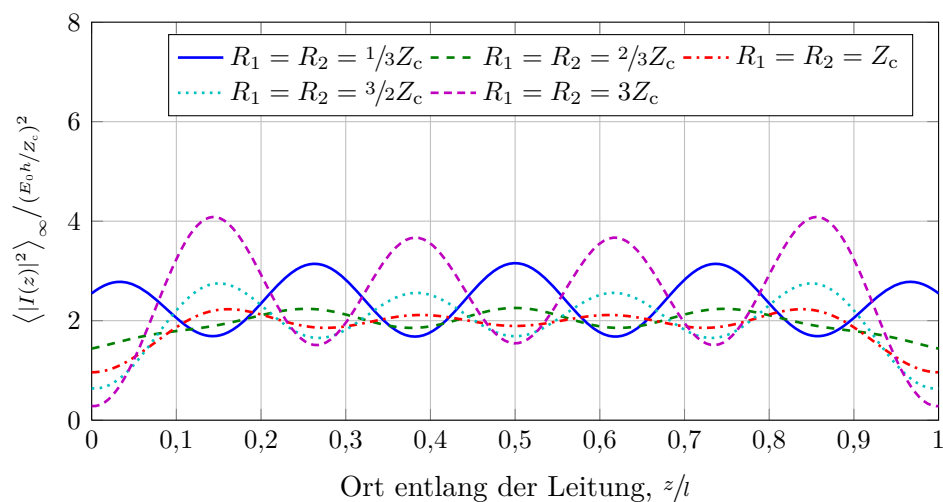


(c) starke Variation

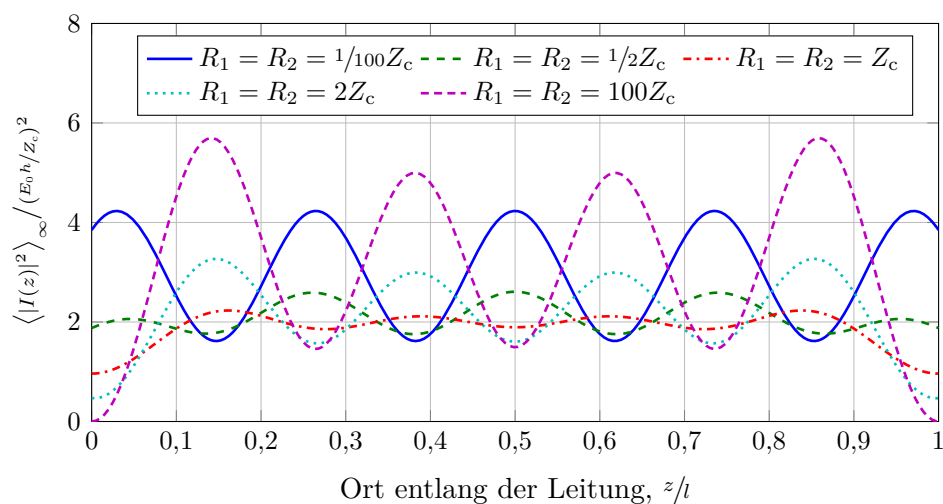
Abbildung 5.1: Erwartungswert des Betragsquadrats des eingekoppelten Stromes entlang einer einseitig fehlangepassten Leitung der Länge $l = 17/8\lambda$. Zum Vergleich ist auch der entsprechende Verlauf einer beidseitig angepassten Leitung gezeigt.



(a) geringe Variation

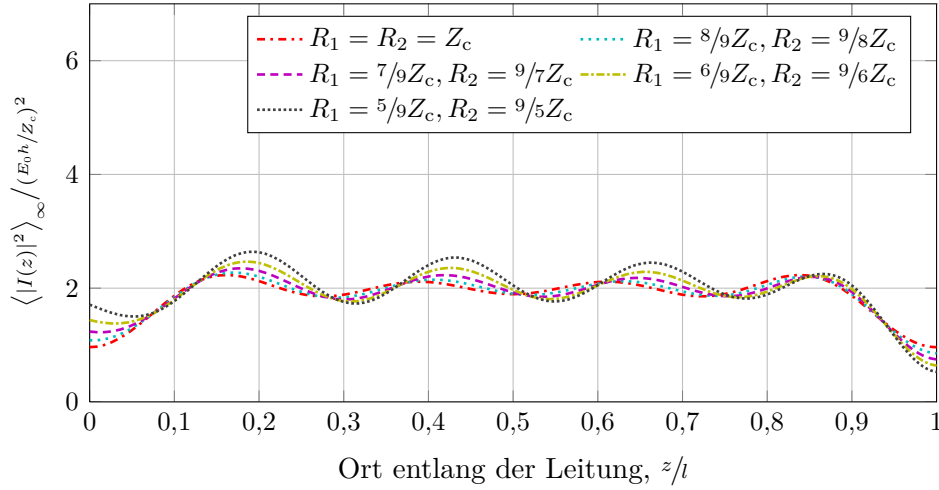


(b) mittlere Variation

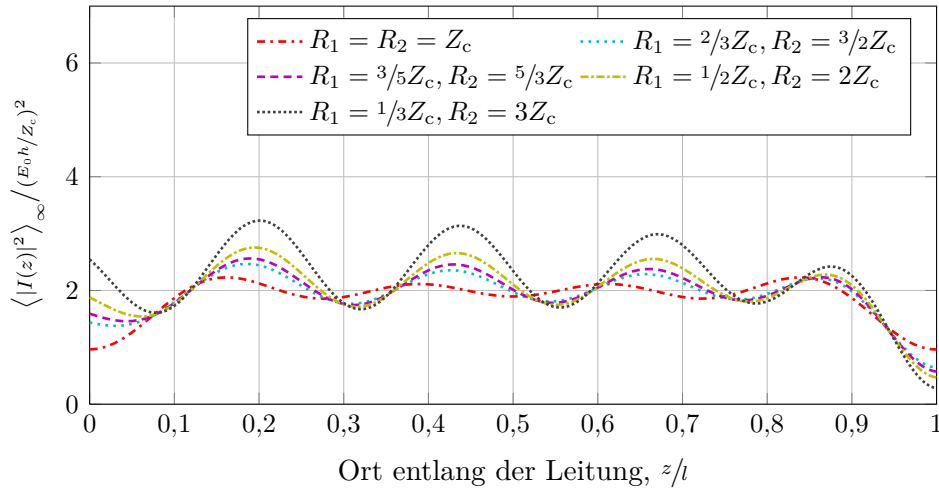


(c) starke Variation

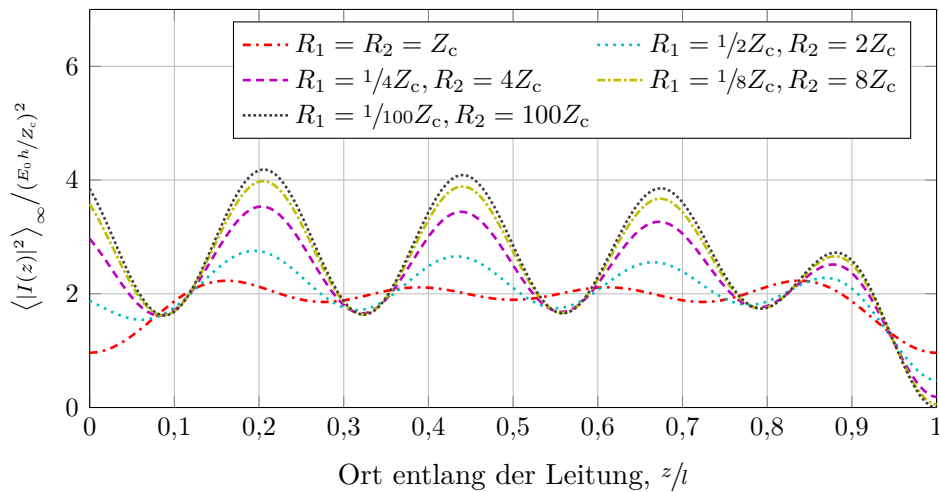
Abbildung 5.2: Erwartungswert des Betragsquadrats des eingekoppelten Stromes entlang einer beidseitig symmetrisch fehlangepassten Leitung der Länge $l = 17/8\lambda$. Zum Vergleich ist auch der entsprechende Verlauf einer beidseitig angepassten Leitung gezeigt.



(a) geringe Variation



(b) mittlere Variation



(c) starke Variation

Abbildung 5.3: Erwartungswert des Betragsquadrats des eingekoppelten Stromes entlang einer beidseitig asymmetrisch fehlangepassten Leitung der Länge $l = 17/8\lambda$. Zum Vergleich ist auch der entsprechende Verlauf einer beidseitig angepassten Leitung gezeigt.

Die Cosinus-Anteile sind ebenfalls beide $C_1 = C_2 = 0$. Für die Sinus-Anteile und die Verschiebung ergibt sich:

$$S_1 = -\frac{1}{2kz}, \quad (5.14)$$

$$S_2 = -\frac{1}{2k(l-z)}, \quad (5.15)$$

$$O = 2. \quad (5.16)$$

Daraus resultiert folgende Vereinfachung für Gleichung (5.2), die der bekannten Lösung (siehe [Mag08, Gleichung (4.39)]) für die beidseitig angepasste Leitung entspricht.

$$\langle |I_{\text{match}}(z)|^2 \rangle_{\infty} = \left(\frac{E_0 h}{Z_c} \right)^2 \cdot \left(2 - \frac{\sin(2k(l-z))}{2k(l-z)} - \frac{\sin(2kz)}{2kz} \right) \quad (5.17)$$

Der Erwartungswert des Betragsquadrats des Stromes ist in Abbildung 5.4a für verschiedene Längen der beidseitig angepassten Leitung dargestellt. Die Ergebnisse sind wiederum auf den Faktor $(E_0 h / Z_c)^2$ normiert. Direkt an den Leitungsenden beträgt der normierte Erwartungswert des Betragsquadrats des eingekoppelten Stromes für die ausgewählten Leitungslängen Eins. Entlang der Leitung wird dieser Erwartungswert ungefähr verdoppelt. Je größer die Leitungslänge bzw. je höher die Frequenz des anregendes Feldes, desto steiler steigt der Erwartungswert am Anfang und am Ende der Leitung an. Bei langen Leitungen (oder hohen Frequenzen) erreicht der Erwartungswert des Betragsquadrats des eingekoppelten Stromes entlang der Leitung ein annähernd konstantes Plateau und ist nahezu unabhängig von z (zumindest in einem Abstand von ungefähr $\lambda/2$ zu den Abschlüssen). Die Lösung ist weiterhin symmetrisch.

5.1.1.3 Sonderfall der beidseitig kurzgeschlossenen Leitung

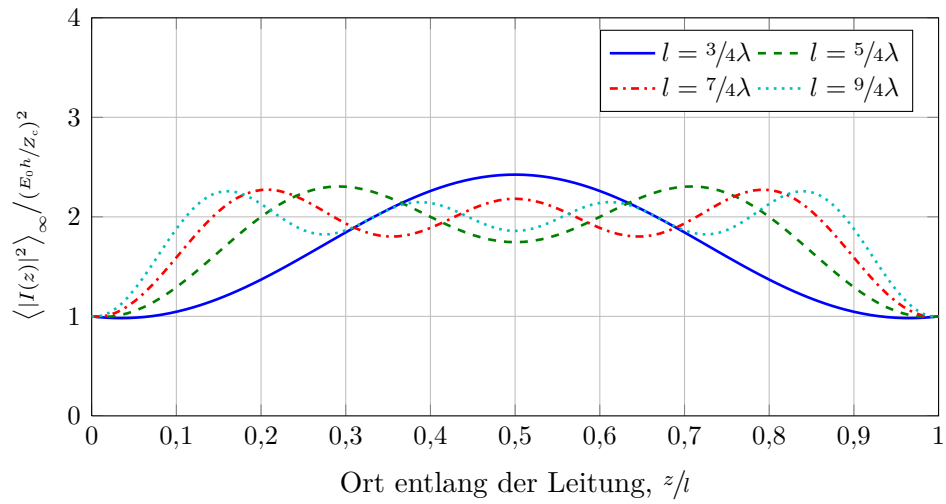
Beim Sonderfall der an beiden Enden kurzgeschlossenen Leitung sind beide Reflexionsfaktoren $A_{I1} = A_{I2} = 1$. Dadurch ergibt sich für den Nenner $D = 2 \cdot (1 - \cos(2kl))$. Außerdem ergeben sich folgende Vereinfachungen:

$$W_1 = W_2 = \frac{2}{l}, \quad (5.18)$$

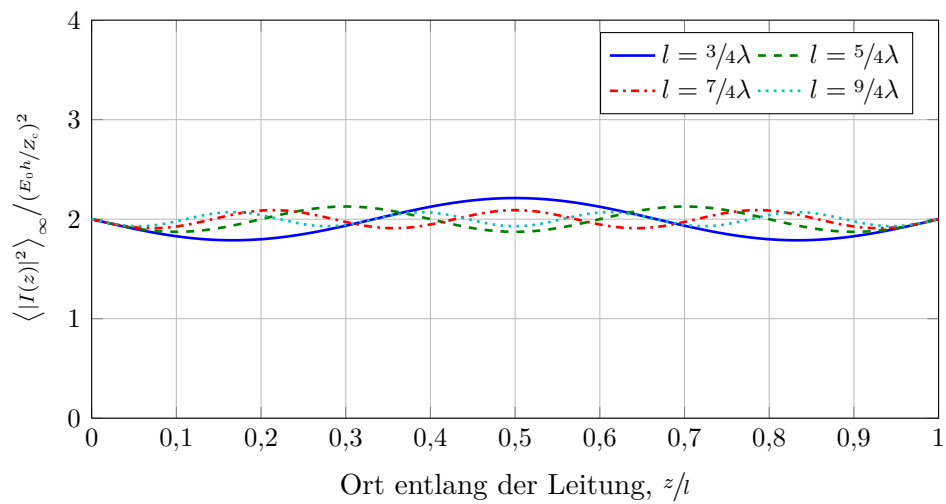
$$C_1 = C_2 = 2 \cdot \left(1 - \cos(2kl) + \frac{\sin(2kl)}{kl} \right), \quad (5.19)$$

$$S_1 = S_2 = 2 \cdot \left(\sin(2kl) + \frac{\cos(2kl) - 3}{kl} \right), \quad (5.20)$$

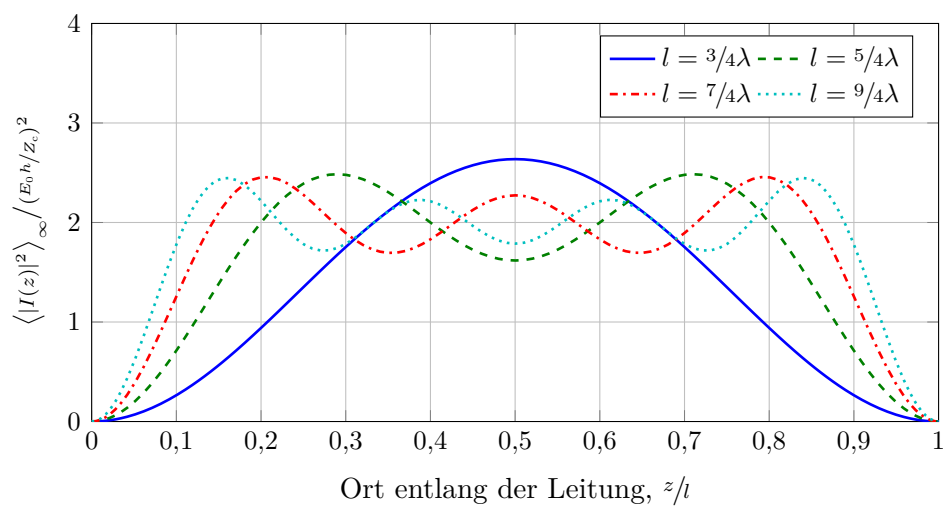
$$O = 2 \cdot \left(3 - \cos(2kl) - \frac{\sin(2kl)}{kl} \right). \quad (5.21)$$



(a) beidseitig angepasste Leitung



(b) beidseitig kurzgeschlossene Leitung



(c) beidseitig leerlaufende Leitung

Abbildung 5.4: Erwartungswert des Betragsquadrats des eingekoppelten Stromes entlang einer beidseitig angepassten, kurzgeschlossenen und leerlaufenden Leitung für verschiedene Leitungslängen

Für den Erwartungswert des Betragsquadrats des eingekoppelten Stromes entlang der Leitung ergibt sich folgende Lösung:

$$\langle |I_{\text{short}}(z)|^2 \rangle_{\infty} = \frac{1}{1 - \cos(2kl)} \cdot \left(\frac{E_0 h}{Z_c} \right)^2 \cdot \left[3 + \cos(2k(l-z)) - \cos(2kl) + \cos(2kz) - \frac{\sin(2kl) + \sin(2kz) + \sin(2k(l-z))}{kl} \right]. \quad (5.22)$$

Dieser Erwartungswert ist in Abbildung 5.4b für verschiedene Leitungslängen dargestellt. Im Gegensatz zur beidseitig angepassten Leitung entfällt das Ansteigen und Abfallen des Erwartungswerts am Anfang und am Ende der Leitung. Stattdessen ist der Erwartungswert des Betragsquadrats des eingekoppelten Stromes entlang der Leitung für die dargestellten Leitungslängen nahezu konstant. Diese Leitungslängen sind erneut so gewählt, dass sich keine Resonanz ergibt (siehe auch Abschnitt 5.1.2.1). Auch hier ist die Lösung symmetrisch. Der normierte Erwartungswert an den Enden der Leitung beträgt Zwei.

5.1.1.4 Sonderfall der beidseitig leerlaufenden Leitung

Beim Sonderfall der an beiden Enden leerlaufenden Leitung sind beide Reflexionsfaktoren $A_{I1} = A_{I2} = -1$. Dadurch ergibt sich für den Nenner ebenfalls $D = 2 \cdot (1 - \cos(2kl))$. Außerdem ergeben sich folgende Vereinfachungen:

$$W_1 = W_2 = 2 \cdot \left(\frac{1}{l-z} + \frac{1}{z} - \frac{1}{l} \right), \quad (5.23)$$

$$C_1 = C_2 = 2 \cdot \left(-1 + \cos(2kl) + \left(\frac{1}{l-z} + \frac{1}{z} - \frac{1}{l} \right) \cdot \frac{\sin(2kl)}{k} \right), \quad (5.24)$$

$$S_1 = S_2 = 2 \cdot \left(-\sin(2kl) + \left(\frac{1}{l-z} + \frac{1}{z} - \frac{1}{l} \right) \cdot \frac{\cos(2kl) - 3}{k} \right), \quad (5.25)$$

$$O = 2 \cdot \left(3 - \cos(2kl) + \left(\frac{1}{l-z} + \frac{1}{z} - \frac{1}{l} \right) \cdot \frac{\sin(2kl)}{k} \right). \quad (5.26)$$

Für den Erwartungswert des Betragsquadrats des eingekoppelten Stromes entlang der Leitung ergibt sich folgende Lösung:

$$\langle |I_{\text{open}}(z)|^2 \rangle_{\infty} = \frac{1}{1 - \cos(2kl)} \cdot \left(\frac{E_0 h}{Z_c} \right)^2 \cdot \left[3 - \cos(2k(l-z)) - \cos(2kl) - \cos(2kz) + (l^2 - lz + z^2) \cdot \frac{\sin(2kl) - \sin(2kz) - \sin(2k(l-z))}{klz(l-z)} \right]. \quad (5.27)$$

In Abbildung 5.4c ist dieser Erwartungswert für verschiedene Leitungslängen gezeigt. An

den Enden der leerlaufenden Leitung ist der Erwartungswert des Betragsquadrats des eingekoppelten Stromes Null. In einem Abstand von $\lambda/2$ zu den Enden steigt der Erwartungswert stark an. Je größer die Leitungslänge bzw. je höher die Frequenz des anregenden Feldes, desto steiler erfolgt dieser Anstieg. Im Mittelteil der Leitung ist der Erwartungswert dann mehr oder weniger konstant. Die Lösung ist wie auch in den vorherigen Fällen symmetrisch.

5.1.2 Grenzwert am Anfang und am Ende der Leitung

Für praktische Anwendungen ist die Stromverteilung entlang der Leitung häufig nicht so wichtig. Von größerem Interesse ist dagegen der Strom an den Leitungsenden oder Abschlüssen, da dieser Strom Auswirkungen auf einen möglicherweise angeschlossenen Prüfling hat. Deshalb soll der Erwartungswert des Betragsquadrats des eingekoppelten Stromes näher untersucht werden, zunächst für allgemeine Abschlusswiderstände und anschließend erneut für die Sonderfälle einer beidseitig angepassten, kurzgeschlossenen bzw. leerlaufenden Leitung.

5.1.2.1 Allgemeine Abschlusswiderstände

Aus der Grenzwertbetrachtung für $z \mapsto 0$ folgt für den Erwartungswert des Betragsquadrats des eingekoppelten Stromes am Anfang der Leitung:

$$\langle |I(0)|^2 \rangle_{\infty} = \frac{(1 + A_{I1})^2 \cdot (1 + A_{I2}^2)}{D} \cdot \left(\frac{E_0 h}{Z_c} \right)^2 \cdot \left(1 - \frac{\sin(2kl)}{2kl} \right). \quad (5.28)$$

Der Grenzwert für den Erwartungswert des Betragsquadrats des eingekoppelten Stromes am Ende der Leitung ergibt sich nach dem bereits beschriebenen Dualitätsprinzip durch Tauschen von $A_{I1} \leftrightarrow A_{I2}$ zu:

$$\langle |I(l)|^2 \rangle_{\infty} = \frac{(1 + A_{I2})^2 \cdot (1 + A_{I1}^2)}{D} \cdot \left(\frac{E_0 h}{Z_c} \right)^2 \cdot \left(1 - \frac{\sin(2kl)}{2kl} \right). \quad (5.29)$$

Der Nenner D sowie die Reflexionsfaktoren A_{I1} und A_{I2} sind dabei jeweils durch Gleichung (5.10) bzw. (4.19) gegeben.

a) Beispiele

Für die beispielhafte Darstellung der Ergebnisse werden wieder je eine einseitig fehlangepasste sowie eine beidseitig symmetrisch und asymmetrisch fehlangepasste Leitung betrachtet.

Einseitig fehlangepasste Leitung

Der Erwartungswert des Betragsquadrats des Stromes am Anfang bzw. am Ende einer einseitig fehlangepassten Leitung ist in Abbildung 5.5 als Funktion der Leitungslänge bzw. der Frequenz dargestellt. Die Einkopplung in kurze Leitungen ist gering und steigt mit wachsender Leitungslänge. Bei einer Leitungslänge von $l = \lambda/4$ wird die Einkopplung erstmals maximal. Bei längeren Leitungen bzw. bei höheren Frequenzen steigt die Einkopplung nicht weiter an, sondern erreicht ein annähernd konstantes Plateau.

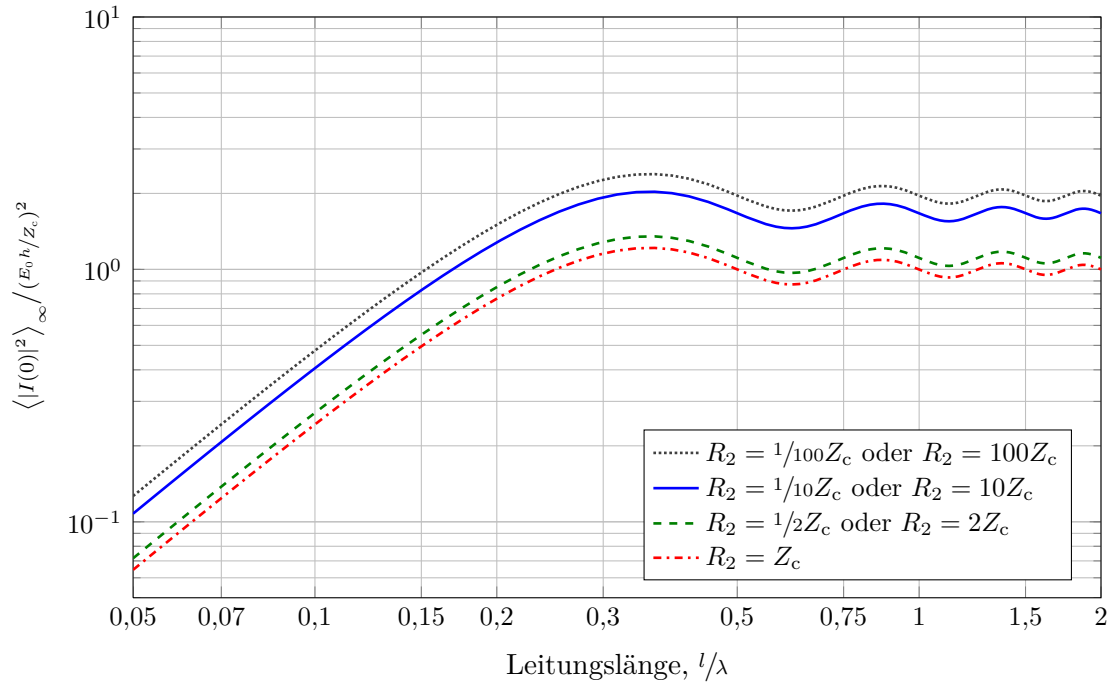
In Abbildung 5.5a ist zu erkennen, dass der Strom am angepassten Anfang der Leitung am geringsten ist, wenn auch das Ende der Leitung angepasst ist. Mit zunehmender Fehlanpassung am Ende der Leitung wird auch die Reflexion am Ende stärker und die Leitungsstruktur entsprechend resonanter und verlustloser. Der Strom am angepassten Anfang steigt deshalb an. Dabei spielt die Richtung der Fehlanpassung am Ende keine Rolle. Im Maximalfall eines totalen Kurzschlusses oder Leerlaufes am Ende steigt der Erwartungswert am Anfang gegenüber dem angepassten Fall um den Faktor Zwei.

Am fehlangepassten Ende der Leitung lässt sich ein ähnlicher Zusammenhang finden. Wie Abbildung 5.5b zeigt, wird der Erwartungswert des Stromes umso geringer, je höher der Abschlusswiderstand ist. Im Leerlauf wird der Strom Null. Im Kurzschlussfall steigt der Erwartungswert gegenüber dem angepassten Fall um den Faktor Vier.

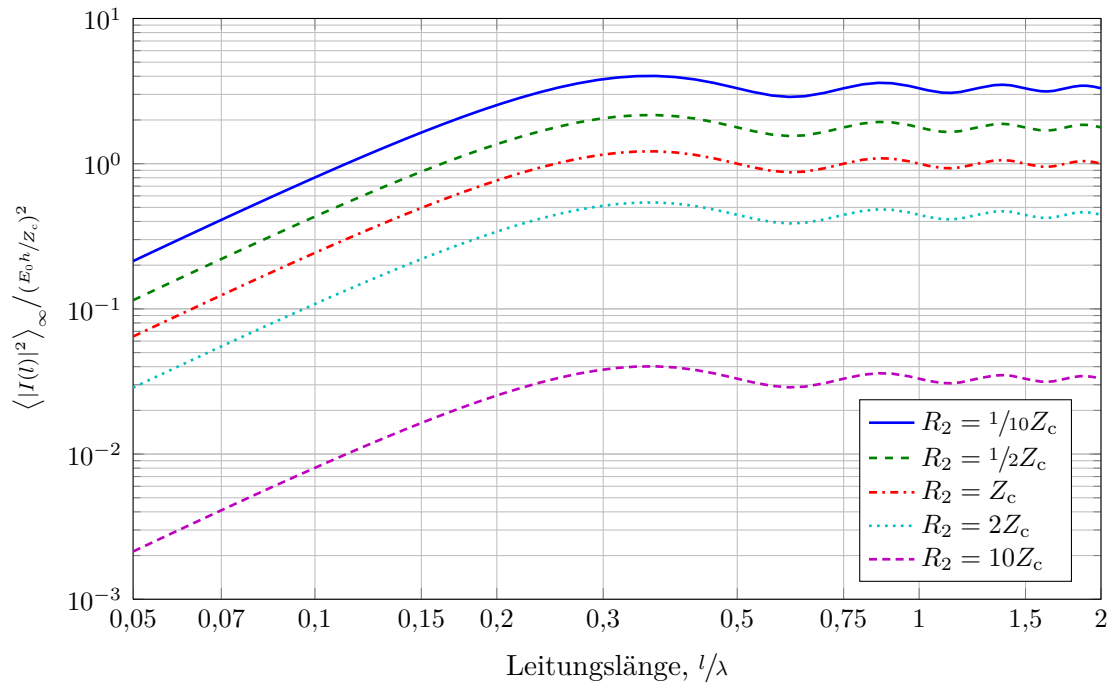
Beidseitig symmetrisch fehlangepasste Leitung

Als zweites Beispiel ist in Abbildung 5.6a der Erwartungswert des Betragsquadrats des Stromes am Anfang und am Ende einer beidseitig symmetrisch fehlangepassten Leitung in Abhängigkeit der Leitungslänge gezeigt. Auch hier wird in kurze Leitungen wenig Strom eingekoppelt. Mit wachsender Leitungslänge steigt der Erwartungswert der Einkopplung an. Bei einer Leitungslänge von etwa $l = \lambda/2$ wird ein erstes Maximum der Einkopplung erreicht. Nur im Sonderfall der beidseitig kurzgeschlossenen Leitung, der in Abschnitt 5.1.3 diskutiert wird, geht die Einkopplung mit sinkender Leitungslänge nicht gegen Null.

Bei Abschlüssen, die nahe am Kurzschluss liegen, kommt es zu Resonanzen, bei denen der Erwartungswert des Stromes gegen unendlich geht. Dieses unphysikalische Ergebnis ist im Modell der Leitung begründet, dass in solchem Fall keinerlei Verluste beinhaltet. Diese Resonanzen treten bei Leitungslängen von $l = \lambda/2, \lambda, 3/2\lambda$ und weiteren Vielfachen von $\lambda/2$ auf. Bei Abschlüssen, die nahe am Leerlauf liegen, kommt es ebenfalls zu Resonanzen. Diese treten wiederum bei $l = \lambda/2, \lambda, 3/2\lambda$ und weiteren Vielfachen von $\lambda/2$ auf, liegen aber von der Amplitude her alle unterhalb des Verlaufs der beidseitig angepassten Leitung. Bei Leitungslängen von $l = 1/4\lambda, 3/4\lambda, 5/4\lambda$ usw. wird in jedem Fall besonders wenig Strom eingekoppelt.

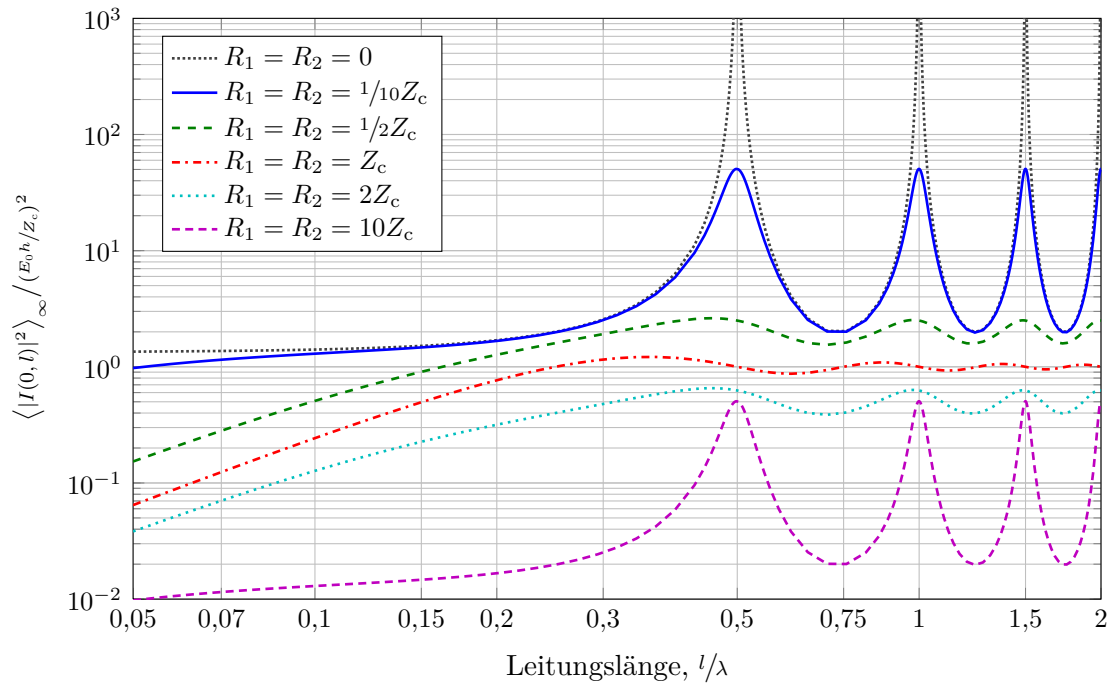


(a) am Anfang der Leitung

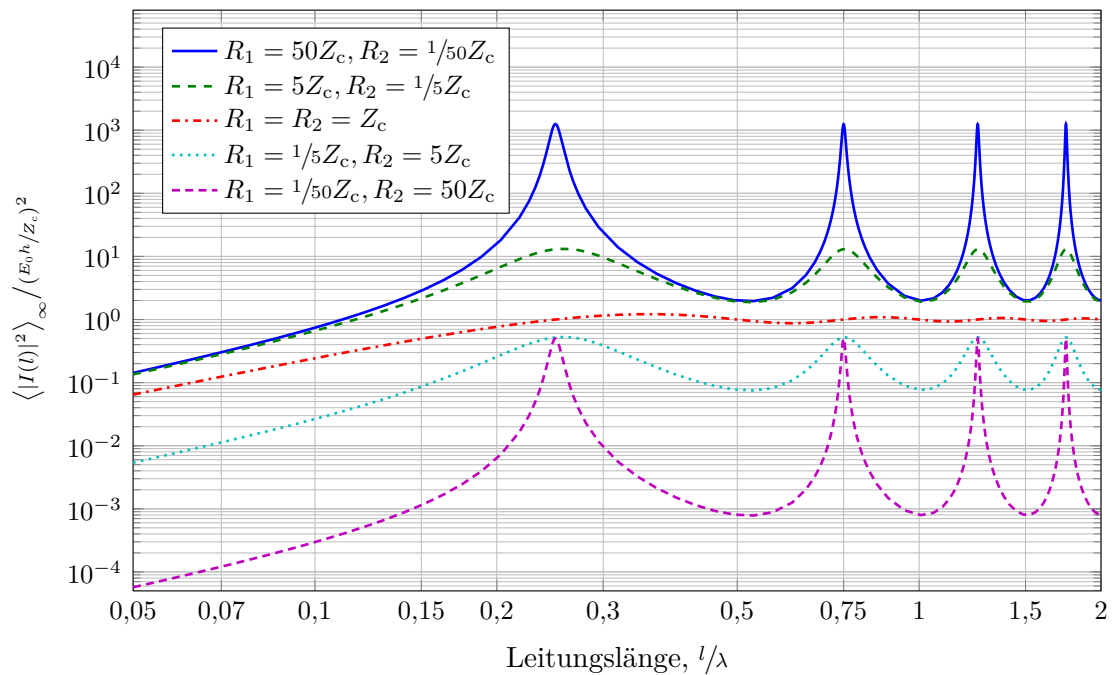


(b) am Ende der Leitung

Abbildung 5.5: Erwartungswert des Betragsquadrats des eingekoppelten Stromes an den Enden einer einseitig fehlangepassten Leitung als Funktion der Leitungslänge bzw. der Frequenz. Zum Vergleich ist auch der entsprechende Verlauf einer beidseitig angepassten Leitung dargestellt.



(a) am Anfang und am Ende einer beidseitig symmetrisch fehlangepassten Leitung



(b) am Ende einer beidseitig asymmetrisch fehlangepassten Leitung

Abbildung 5.6: Erwartungswert des Betragsquadrats des eingekoppelten Stromes an den Enden einer beidseitig fehlangepassten Leitung als Funktion der Leitungslänge bzw. der Frequenz. Zum Vergleich ist auch der entsprechende Verlauf einer beidseitig angepassten Leitung dargestellt.

Beidseitig asymmetrisch fehlangepasste Leitung

Das analoge Ergebnis für den Erwartungswert des Betragsquadrats des Stromes am Ende der beidseitig asymmetrisch fehlangepassten Leitung ist in Abbildung 5.6b dargestellt. Bei Abschlüssen, die nahe am Kurzschluss oder Leerlauf liegen und dementsprechend starke Reflexionen hervorrufen, kommt es ebenfalls zu Resonanzen. Auch hier kann der Erwartungswert der Einkopplung aufgrund des verlustlosen Modells gegen unendlich gehen. Die Resonanzen treten bei Leitungslängen von $l = 1/4\lambda, 3/4\lambda, 5/4\lambda$ usw. auf. Ist der Abschlusswiderstand am Anfang größer als die charakteristische Impedanz Z_c und am Ende geringer als Z_c , so liegen die Resonanzen stets oberhalb des Verlaufs der beidseitig angepassten Leitung. Ist der Abschlusswiderstand am Anfang kleiner und am Ende größer als Z_c , so liegen die Resonanzen unterhalb des Verlaufs der beidseitig angepassten Lösung. Bei $l = \lambda/2, \lambda, 3/2\lambda$ und weiteren Vielfachen von $\lambda/2$ wird in jedem Fall besonders wenig Strom eingekoppelt.

Vergleicht man die Fälle der beidseitig symmetrisch bzw. asymmetrisch fehlangepassten Leitungen, so kann festgestellt werden, dass das Verhalten des Erwartungswerts über der Leitungslänge bzw. Frequenz vergleichbar ist. Allerdings sind die Positionen der Resonanzen sowie der Minima und Maxima genau entgegengesetzt.

5.1.2.2 Sonderfall der beidseitig angepassten Leitung

Beim Sonderfall der an beiden Enden angepassten Leitung sind beide Reflexionsfaktoren $A_{I1} = A_{I2} = 0$ und dadurch auch der Nenner $D = 1$. Dadurch ergibt sich folgender Grenzwert für den Erwartungswert des Betragsquadrats des Stromes am Anfang und am Ende der Leitung.

$$\langle |I_{\text{match}}(0, l)|^2 \rangle_{\infty} = \left(\frac{E_0 h}{Z_c} \right)^2 \cdot \left(1 - \frac{\sin(2kl)}{2kl} \right) \quad (5.30)$$

Diese Form ist äquivalent mit der bekannten Lösung aus [Mag08, Gleichung (4.40)]. Ein ähnlicher Ausdruck in Form der eingekoppelten Spannung kann in [DDM04, Gleichung (10)] gefunden werden.

5.1.2.3 Sonderfall der beidseitig kurzgeschlossenen Leitung

Beim Sonderfall der an beiden Enden kurzgeschlossenen Leitung sind beide Reflexionsfaktoren $A_{I1} = A_{I2} = 1$. Aus der Grenzwertbetrachtung für $z \mapsto 0$ oder $z \mapsto l$ ergibt sich:

$$\langle |I_{\text{short}}(0, l)|^2 \rangle_{\infty} = \frac{4}{1 - \cos(2kl)} \cdot \left(\frac{E_0 h}{Z_c} \right)^2 \cdot \left(1 - \frac{\sin(2kl)}{2kl} \right). \quad (5.31)$$

5.1.2.4 Sonderfall der beidseitig leerlaufenden Leitung

Beim Sonderfall der an beiden Enden leerlaufenden Leitung muss der Grenzwert für $A_{I1} = A_{I2} = -1$ bestimmt werden. Die beidseitig leerlaufende Leitung bildet dabei einen Resonator. Aufgrund der theoretisch unendlich hohen Güte dieses Resonators kommt es innerhalb einer unendlich kleinen Bandbreite zu unendlich großen Stromamplituden entlang der Leitung. An den Enden der Leitung wird der Strom aufgrund des Leerlaufs auf Null gezwungen. Genau im Resonanzfall ergibt sich an den Leitungsenden ein Erwartungswert der ungleich Null ist.

$$\langle |I_{\text{open}}(0, l)|^2 \rangle_{\infty} = \frac{1}{2} \left(\frac{E_0 h}{Z_c} \right)^2 \cdot \begin{cases} 1 & \text{für } l = \frac{\lambda}{2}, \lambda, \frac{3}{2}\lambda, 2\lambda, \dots \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (5.32)$$

Dieser Sonderfall hat nur geringe praktische Relevanz, da die Annahme einer perfekt verlustlosen Leitung mit ebenso perfekt reflektierenden Abschlüssen unphysikalisch ist. Trotzdem ist die erhaltene Lösung aus theoretischer Sicht für die spätere Herleitung der Direktivität in Abschnitt 6.1 nützlich.

5.1.2.5 Vergleich

Wenn man den Erwartungswert des Betragsquadrats des eingekoppelten Stromes an den Enden der beidseitig angepassten Leitung in Gleichung (5.30) als $\langle |I_{\text{match}}(0, l)|^2 \rangle_{\infty}$ definiert, dann ergibt sich der Erwartungswert für die beidseitig kurzgeschlossene Leitung in Gleichung (5.31) als:

$$\langle |I_{\text{short}}(0, l)|^2 \rangle_{\infty} = \frac{4}{1 - \cos(2kl)} \cdot \langle |I_{\text{match}}(0, l)|^2 \rangle_{\infty}, \quad (5.33)$$

und für die Leitung mit beliebigen Abschlusswiderständen in den Gleichungen (5.28) und (5.29) als:

$$\langle |I(0)|^2 \rangle_{\infty} = \frac{(1 + A_{I1})^2 \cdot (1 + A_{I2}^2)}{1 - 2A_{I1}A_{I2} \cos(2kl) + A_{I1}^2 A_{I2}^2} \cdot \langle |I_{\text{match}}(0, l)|^2 \rangle_{\infty}, \quad (5.34)$$

$$\langle |I(l)|^2 \rangle_{\infty} = \frac{(1 + A_{I2})^2 \cdot (1 + A_{I1}^2)}{1 - 2A_{I1}A_{I2} \cos(2kl) + A_{I1}^2 A_{I2}^2} \cdot \langle |I_{\text{match}}(0, l)|^2 \rangle_{\infty}. \quad (5.35)$$

5.1.3 Grenzwert für sehr kurze Leitungen bzw. sehr niedrige Frequenzen

Aus der Grenzwertbetrachtung für $kl \mapsto 0$ erhält man für den Erwartungswert des Betragsquadrats des Stromes

$$\langle |I(z)|^2 \rangle_{\infty} \Big|_{kl \rightarrow 0} = 0, \quad (5.36)$$

weil der Zähler in Gleichung (5.2)

$$[C_1 \cos(2kz) + C_2 \cos(2k(l-z)) + S_1 \sin(2kz) + S_2 \sin(2k(l-z)) + OD]_{kl \rightarrow 0} = 0, \quad (5.37)$$

in jedem Fall gleich Null wird.

Dies gilt allerdings nur, solange der Nenner D nicht auch gleichzeitig Null wird. Der Nenner wird allerdings nur Null, wenn die Abschlüsse entweder beide leerlaufend oder beide kurzgeschlossen sind. In diesen Fällen muss eine weitere Grenzwertbetrachtung, z. B. mit Hilfe der Regel von L'Hospital erfolgen. Danach erhält man im Fall der beidseitig leerlaufenden und beidseitig kurzgeschlossenen Leitung jeweils:

$$\langle |I_{\text{open}}(z)|^2 \rangle_{\infty} \Big|_{kl \rightarrow 0} = 0, \quad (5.38)$$

$$\langle |I_{\text{short}}(z)|^2 \rangle_{\infty} \Big|_{kl \rightarrow 0} = \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{E_0 h}{Z_c} \right)^2. \quad (5.39)$$

Die nichtverschwindende Lösung für die beidseitig kurzgeschlossene Leitung mag im ersten Moment irritieren. Es erscheint nicht plausibel, warum in eine Leitung der Länge $l \mapsto 0$ oder bei einer Anregung mit der Frequenz $f \mapsto 0$ überhaupt ein Strom eingekoppelt werden kann. Jedoch muss festgehalten werden, dass die betrachtete Leitung als verlustlos angenommen wird. Wenn nun zusätzlich auch noch die Abschlüsse kurzgeschlossen sind, ist im Modell kein Anteil enthalten, der die eingekoppelte Energie dissipiert, weshalb dieser Grenzwert zustande kommt. Im folgenden Abschnitt 5.2 wird noch genauer auf diesen Grenzwert eingegangen.

5.2 Übertragen der Ergebnisse auf die Spannung

Das gleiche Verfahren zur Berechnung des Erwartungswerts des Betragsquadrats wie in Gleichung (5.1) kann für die eingekoppelte Spannung entlang der Leitung wiederholt werden. Die von einer ebenen Welle in eine Leitung eingekoppelte Spannung wurde bereits in [Mag08, Gleichung (4.18b)] angegeben. Für die praktische Anwendung ist es sinnvoll, diese Streuspannung mit Hilfe von [Mag08, Gleichung (4.10)] in die messbare Gesamtspannung zu überführen.

Die Lösung für den Erwartungswert des Betragsquadrats der Spannung entlang der Leitung besitzt eine ganz ähnliche Form.

$$\begin{aligned} \langle |U(z)|^2 \rangle_\infty = & \left(\frac{E_0 h}{D} \right)^2 \cdot [C_1 \cdot \cos(2kz) + C_2 \cdot \cos(2k(l-z)) \\ & + S_1 \cdot \sin(2kz) + S_2 \cdot \sin(2k(l-z)) + O \cdot D] \end{aligned} \quad (5.40)$$

Der einzige Unterschied besteht darin, dass nicht durch die charakteristische Impedanz Z_c geteilt wird. Alle anderen Terme C_1 , C_2 , S_1 , S_2 , W_1 , W_2 , D und O behalten die gleiche Form wie in den Gleichungen (5.3) bis (5.10). Einzig die Reflexionsfaktoren müssen in der für Spannungswellen üblichen Form wie in Gleichung (4.6) definiert werden.

Alle anderen abgeleiteten Gleichungen, Sonderfälle und Grenzwerte können auf gleiche Art und Weise transformiert werden. Damit sind die Sonderfälle für den Erwartungswert des Betragsquadrats entlang der Leitung auch direkt vom Strom auf die Spannung übertragbar. Der Sonderfall der beidseitig kurzgeschlossenen Leitung beim Strom entspricht dem Sonderfall der beidseitig leerlaufenden Leitung bei der Spannung und umgekehrt. Der Sonderfall der beidseitig angepassten Leitung ist direkt übertragbar. Auf diese Weise können auch die Grenzwerte am Anfang und am Ende der Leitung vom Strom auf die Spannung übertragen werden. Für die beidseitig kurzgeschlossene Leitung ergibt sich an deren Enden der folgende Erwartungswert des Betragsquadrats der eingekoppelten Spannung:

$$\langle |U_{\text{short}}(0, l)|^2 \rangle_\infty = \frac{1}{2} (E_0 h)^2 \cdot \begin{cases} 1 & \text{für } l = \frac{\lambda}{2}, \lambda, \frac{3}{2}\lambda, 2\lambda, \dots \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (5.41)$$

Bei der beidseitig leerlaufenden Leitung beträgt der Erwartungswert des Betragsquadrats der eingekoppelten Spannung an den Enden der Leitung

$$\langle |U_{\text{open}}(0, l)|^2 \rangle_\infty = \frac{4}{1 - \cos(2kl)} \cdot (E_0 h)^2 \cdot \left(1 - \frac{\sin(2kl)}{2kl} \right). \quad (5.42)$$

Im Grenzfall, wenn die Leitungslänge bzw. die Frequenz der Anregung gegen Null geht, strebt der Erwartungswert des Betragsquadrats der eingekoppelten Spannung an den beidseitig leerlaufenden Enden der Leitung gegen

$$\langle |U_{\text{open}}(0, l)|^2 \rangle_\infty \Big|_{kl \rightarrow 0} = \frac{4}{3} \cdot (E_0 h)^2. \quad (5.43)$$

Das lässt sich zu

$$\langle |U_{\text{open}}(0, l)|^2 \rangle_\infty \Big|_{kl \rightarrow 0} = \frac{1}{3} \cdot (E_0 2h)^2, \quad (5.44)$$

umformen, wobei $2h$ dem Abstand zwischen dem Hin- und Rückleiter entspricht.

Damit ist das Ergebnis konsistent mit dem Erwartungswert des Betragsquadrats der kartesischen Komponenten der E -Feldes, der durch Gleichung (3.7c) auf Seite 23 bekannt ist. So lässt sich der Erwartungswert des Betragsquadrats der eingekoppelten Spannung im konkreten Sonderfall als

$$\langle |U_{\text{open}}(0, l)|^2 \rangle_{\infty} \Big|_{kl \rightarrow 0} = \langle |E_x|^2 \rangle_{\infty} \cdot (2h)^2, \quad (5.45)$$

schreiben, wobei die x -Richtung transversal zur Leitung liegt und vom Rück- zum Hinleiter zeigt.

5.3 Übertragen der Ergebnisse auf eine Einfachleitung über perfekt leitender Ebene

Wie bereits in Abschnitt 4.2.2 beschrieben wurde, sind eine Doppelleitung im Freiraum und eine Einfachleitung über einer perfekt leitenden Ebene aus Sicht der Leitungsgleichungen vollkommen äquivalent.

Ein Unterschied besteht allerdings in der Definition der Feldstärke. Um zwischen den unterschiedlichen Definitionen zu unterscheiden, wird der Effektivwert der ebenen Welle im Fall der Doppelleitung mit $E_{0,\text{tcl}}$ (engl. two-conductor line) und im Fall der Einfachleitung mit $E_{0,\text{scl}}$ (engl. single-conductor line) bezeichnet.

Im Fall der Doppelleitung würde jede ebene Welle von einer gedachten Feldsonde, die sich in einem größeren Abstand zur Leitung befindet, genau einmal gemessen werden. Dementsprechend würde sich nach Gleichung (3.5b) für viele einfallende Wellen aus allen möglichen Einfallrichtungen eine kammer-spezifische Konstante von $E_0^2 = E_{0,\text{tcl}}^2$ ergeben.

Im Fall der Einfachleitung würde eine gedachte Feldsonde, die sich in einem größeren Abstand zur Leitung und damit auch zur leitfähigen Ebene befindet, genau zwei Wellen messen, nämlich die einfallende Welle und die reflektierte Welle. Für viele einfallende Wellen ergibt sich nach Gleichung (3.5b) auf Seite 22 eine kammer-spezifische Konstante von $E_0^2 = 2E_{0,\text{scl}}^2$.

Daraus folgt der Erwartungswert des Betragsquadrats des eingekoppelten Stromes an den

Enden einer beidseitig angepassten Doppelleitung nach Gleichung (5.30) als

$$\langle |I_{\text{tcl}}(0, l)|^2 \rangle_{\infty} = \left(\frac{E_{0, \text{tcl}} h}{Z_c} \right)^2 \left(1 - \frac{\sin(2kl)}{2kl} \right), \quad (5.46a)$$

$$= \left(\frac{E_0 h}{Z_c} \right)^2 \left(1 - \frac{\sin(2kl)}{2kl} \right). \quad (5.46b)$$

Ebenso kann der gleiche Erwartungswert für die Einfachleitung angegeben werden.

$$\langle |I_{\text{scl}}(0, l)|^2 \rangle_{\infty} = \left(\frac{E_{0, \text{tcl}} h}{Z_c} \right)^2 \left(1 - \frac{\sin(2kl)}{2kl} \right) \quad (5.47a)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{E_0 h}{Z_c} \right)^2 \left(1 - \frac{\sin(2kl)}{2kl} \right) \quad (5.47b)$$

$$= \frac{1}{2} \langle |I_{\text{tcl}}(0, l)|^2 \rangle_{\infty} \quad (5.47c)$$

Damit wird in Gleichung (5.47b) eine zu [ZZY⁺12, Gleichung (9)] äquivalente Lösung erhalten. Zwischen den Erwartungswerten der Einkopplung in die Doppelleitung und in die Einfachleitung liegt also ein Faktor von Zwei. Obwohl dieser Zusammenhang nur beispielhaft für die beidseitig angepasste Leitung gezeigt wurde, kann dieses Verhalten auch auf alle anderen entsprechenden Gleichungen in diesem Kapitel übertragen werden. Besonders nützlich ist dieses Ergebnis bei der Interpretation der experimentellen Ergebnisse in Abschnitt 5.6, die auf der Messung der Einkopplung in eine Einfachleitung basieren.

Typischerweise wird die Berechnung des Erwartungswerts der Einkopplung in eine Doppelleitung durch eine Integration über den gesamten Raumwinkel vorgenommen. Wie in [Hil05] beschrieben, genügt für den Fall einer Einfachleitung über einer perfekt leitenden Ebene eine Integration über den halben Raumwinkel. Somit kann Gleichung (5.1) für die Einfachleitung in der Form

$$\langle |I_{\text{scl}}(z)|^2 \rangle_{\infty} = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} I_{\text{scl}}(z) I_{\text{scl}}(z)^* \, d\beta \, d\alpha \, d\Omega \quad (5.48)$$

geschrieben werden. Allein aus dieser Gleichung erklärt sich aber nicht der vorher beschriebene Unterschied des Faktors von Zwei zwischen den Erwartungswerten der Doppel- und der Einfachleitung.

Bei der numerischen Auswertung der Ausdrücke in den Gleichungen (5.46) und (5.47) wird noch ein weiterer Unterschied zwischen einer Doppelleitung und einer Einfachleitung deutlich, nämlich deren abweichende charakteristische Impedanz. Aus [Pau94] folgt für die

charakteristische Impedanz der Doppelleitung

$$Z_{c,dw} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \cdot \operatorname{arcosh} \left(\frac{h}{r_0} \right), \quad (5.49)$$

und für die charakteristische Impedanz der Einfachleitung

$$Z_{c,sw} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \cdot \operatorname{arcosh} \left(\frac{h}{r_0} \right) = \frac{1}{2} Z_{c,dw}. \quad (5.50)$$

Bei gleichen Querabmessungen der Leitung¹ ergibt sich für eine Einfachleitung also der doppelte Erwartungswert des Betragsquadrats des eingekoppelten Stromes gegenüber dem Fall einer Doppelleitung. Ebenso ergibt sich für die Einfachleitung nur der halbe Erwartungswert des Betragsquadrats der eingekoppelten Spannung gegenüber dem Fall einer Doppelleitung. Dieser Zusammenhang ist auch in Abbildung 5.7 dargestellt.

5.4 Verteilungs- und Dichtefunktionen

Für praxisnahe Applikationen der bislang dargestellten Theorie ist nicht nur der Erwartungswert des Betragsquadrats des eingekoppelten Stromes oder der eingekoppelten Spannung wichtig. Für Störfestigkeitstests ist zum Beispiel die maximale Einkopplung häufig viel bedeutender. Dieser Maximalwert und andere wichtige Kenngrößen wie z. B. die Perzentile der eingekoppelten Größen lassen sich aus der statistischen Verteilung des eingekoppelten Stromes oder der eingekoppelten Spannung ableiten.

Wie schon in [HSJ98] bemerkt wurde, sind der Real- und Imaginärteil des eingekoppelten Stromes unabhängige statistische Größen, die normalverteilt mit einem Erwartungswert von Null

$$\langle \Re \{I\} \rangle_{\infty} = \langle \Im \{I\} \rangle_{\infty} = 0 \quad (5.51a)$$

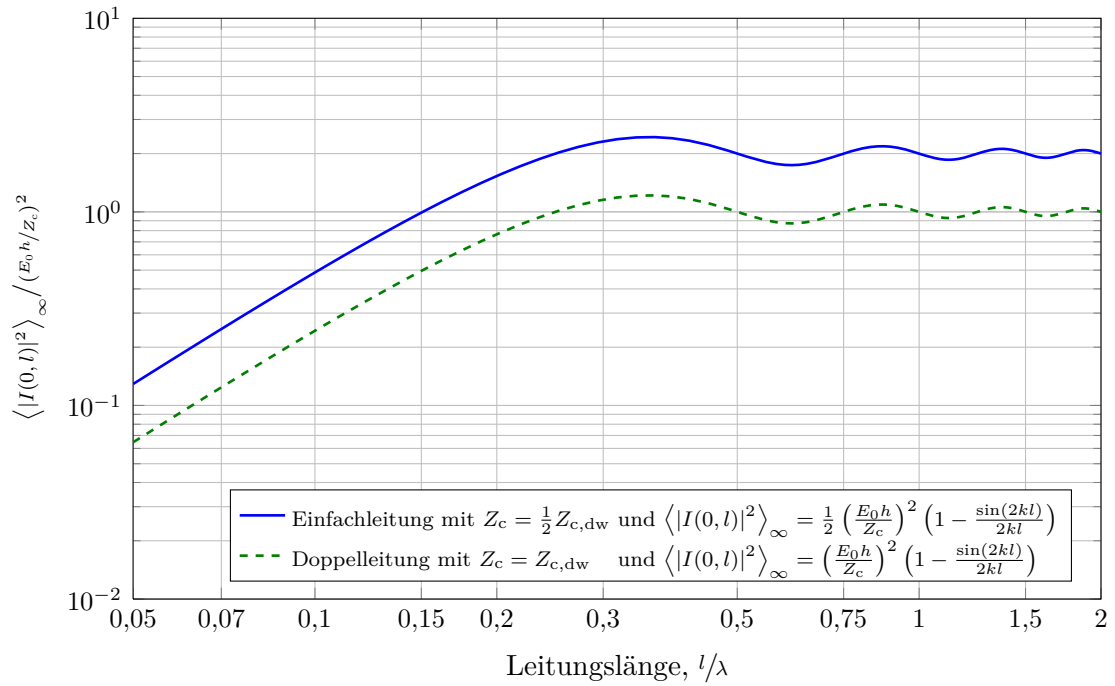
und einer Standardabweichung von

$$\sigma_{\Re\{I\}} = \sigma_{\Im\{I\}} = \sqrt{\frac{\langle |I|^2 \rangle_{\infty}}{2}} \quad (5.51b)$$

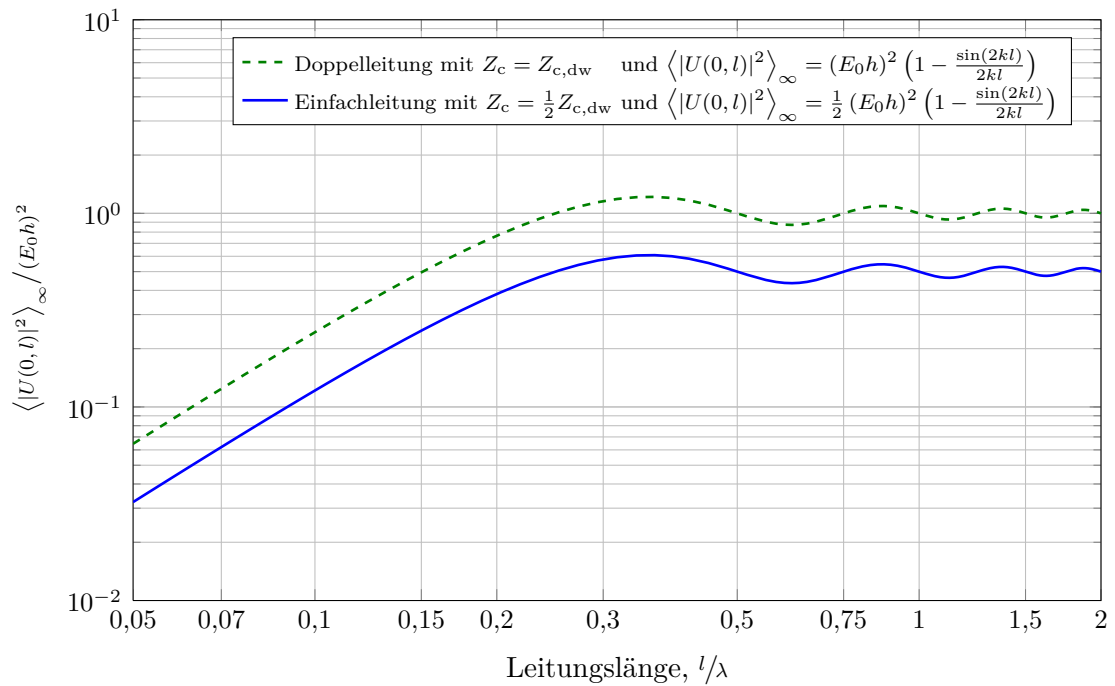
sind.

Demnach folgt der Betrag des eingekoppelten Stromes einer χ -Verteilung und das Betragsquadrat des eingekoppelten Stromes einer χ^2 -Verteilung mit jeweils zwei Freiheits-

¹Der halbe Abstand zwischen Hin- und Rückleiter einer Doppelleitung entspricht dem Abstand zwischen einer Einfachleitung und einer leitenden Ebene.



(a) für den Strom



(b) für die Spannung

Abbildung 5.7: Erwartungswert des Betragsquadrats der Einkopplung an den Enden einer beidseitig angepassten Doppel- bzw. Einfachleitung als Funktion der Leitungslänge bzw. der Frequenz

graden [Moo74]. Auch der Erwartungswert und die Standardabweichung des Betrags des eingekoppelten Stromes können somit aus dem Erwartungswert des Betragsquadrats bestimmt werden.

$$\langle |I| \rangle_\infty = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi \cdot \langle |I|^2 \rangle_\infty} \quad (5.52a)$$

$$\sigma_{|I|} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(4 - \pi) \cdot \langle |I|^2 \rangle_\infty} \quad (5.52b)$$

Das Gleiche gilt für die Standardabweichung des Betragsquadrats des eingekoppelten Stromes.

$$\sigma_{|I|^2} = \langle |I|^2 \rangle_\infty \quad (5.53)$$

Die Gleichungen (5.51) bis (5.53) gelten äquivalent auch für die Kenngrößen der eingekoppelten Spannung. Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass die statistische Verteilung des eingekoppelten Stromes bzw. der eingekoppelten Spannung vollkommen äquivalent zur Verteilung einer kartesischen Komponente des anregenden statistischen Feldes ist.

5.5 Maximalwert der Einkopplung

In diesem Abschnitt geht es um die Abschätzung eines Erwartungswerts für die maximale Einkopplung in eine Leitung. Wie schon bemerkt, sind der maximal eingekoppelte Strom bzw. die maximal eingekoppelte Spannung die signifikanten Größen für Störfestigkeits-tests. Da die statistische Verteilung des eingekoppelten Stromes und die Verteilung einer kartesischen Komponente des statistischen Feldes übereinstimmen, kann auch die Theorie aus den Abschnitten 3.3.2 und 3.3.3 weiter angewendet werden. Somit ergeben sich die erwarteten Maxima des Betrags und des Betragsquadrats des eingekoppelten Stromes direkt aus den Erwartungswerten und den jeweiligen Verhältnissen zwischen dem Maximalwert und dem Erwartungswert.

$$\lceil |I| \rceil \approx \ddagger_B (|E_R|) \cdot \langle |I| \rangle_\infty \quad (5.54a)$$

$$\lceil |I|^2 \rceil \approx \ddagger_B (|E_R|^2) \cdot \langle |I|^2 \rangle_\infty \quad (5.54b)$$

Die Größe $\ddagger_B (|E_R|)$ steht dabei für das Verhältnis zwischen dem Maximum und dem Erwartungswert einer χ_2 -verteilten Zufallsgröße, wie z. B. des Betrags einer kartesischen Feldkomponente. Die Größe $\ddagger_B (|E_R|^2)$ besitzt die gleiche Bedeutung für eine χ_2^2 -verteilte Zufallsvariable. Diese Verhältnisse hängen, wie schon in Abschnitt 3.3.3 beschrieben, nur von der Anzahl der betrachteten statistisch unabhängigen Randbedingungen ab. Die reale Schwankungsbreite des Maximums ist dabei vergleichsweise groß, wie in den Verteilungsfunktionen der Maximalwerte in Abschnitt 3.3.2 zu erkennen ist. Die Gleichungen (5.54a)

und (5.54b) gelten äquivalent auch für die Maximalwerte des Betrags und des Betragsquadrats der eingekoppelten Spannung.

5.6 Vergleich mit Messergebnissen

Zur Validierung der vorgestellten Theorie der Einkopplung statistischer Felder in eine gerade und gleichförmige Leitung wurden Messungen in einer Modenverwirbelungskammer durchgeführt. Die Einkopplung wurde über einen weiten Frequenzbereich und für unterschiedlich lange Leitungen gemessen. Die Messergebnisse werden im folgenden Abschnitt statistisch ausgewertet und mit theoretischen Ergebnissen verglichen.

5.6.1 Aufbau und Ablauf der Messung

5.6.1.1 Aufbau der Messung

Zur Messung der statistischen Einkopplung wurde ein entsprechender Messaufbau in der großen Modenverwirbelungskammer an der Otto-von-Guericke-Universität in Magdeburg errichtet. Die Abmaße dieser Kammer betragen etwa $7,9\text{ m} \times 6,5\text{ m} \times 3,5\text{ m}$. Die erste Hohlraumresonanz liegt bei 30 MHz. Die niedrigste nutzbare Frequenz LUF (engl. lowest usable frequency) beträgt etwa 200 MHz. Der gesamte Messaufbau ist in Abbildung 5.8 gezeigt. Ein zeitlich sinusförmiges Signal wird über einen Signalgenerator verstärkt und in die Kammer eingespeist. Das erzeugte statistische Feld, das in die Leitung einkoppelt, kann mit acht Feldsonden gemessen werden.

Die eigentliche Leitung ist in Abbildung 5.9 detaillierter dargestellt. Um das Problem der Verbindung einer symmetrischen Doppelleitung mit einem asymmetrischen Koaxialkabel über einen Balun zu vermeiden, wurde für die Messung eine Einfachleitung über einer leitfähigen Ebene benutzt. Die prinzipielle Ähnlichkeit dieser Anordnungen wurde bereits in den Abschnitten 4.2.2 und 5.3 diskutiert. Damit zum Anschluss der Einfachleitung keine Löcher in eine Schirmwand der MVK gebohrt werden mussten, wurde eine zusätzliche Metallplatte mit einer Größe von ungefähr $1\text{ m} \times 2\text{ m}$ in die Kammer eingefügt. Diese zusätzliche Metallplatte, die als Rückleiter der Einfachleitung dient, wurde möglichst dicht zu einer vorhandenen Wand aufgestellt und leitfähig mit dieser verbunden. In die Metallplatte wurden insgesamt 16 Löcher in einem Abstand von 10 cm gebohrt, um messbare Leitungslängen zwischen 10 cm und 150 cm zu ermöglichen. Die für eine bestimmte Leitungslänge nicht benutzten Löcher wurden mit leitfähigem Klebeband abgedeckt.

Zur Herstellung der Einfachleitungen wurde starres Kupferkabel mit einem kreisförmigen Querschnitt von 4 mm^2 benutzt. Die Isolierung des Kabels wurde entfernt. An die abgewinkelten Enden der Leitung wurden Anschlussstifte von N-Steckverbindern angelötet.

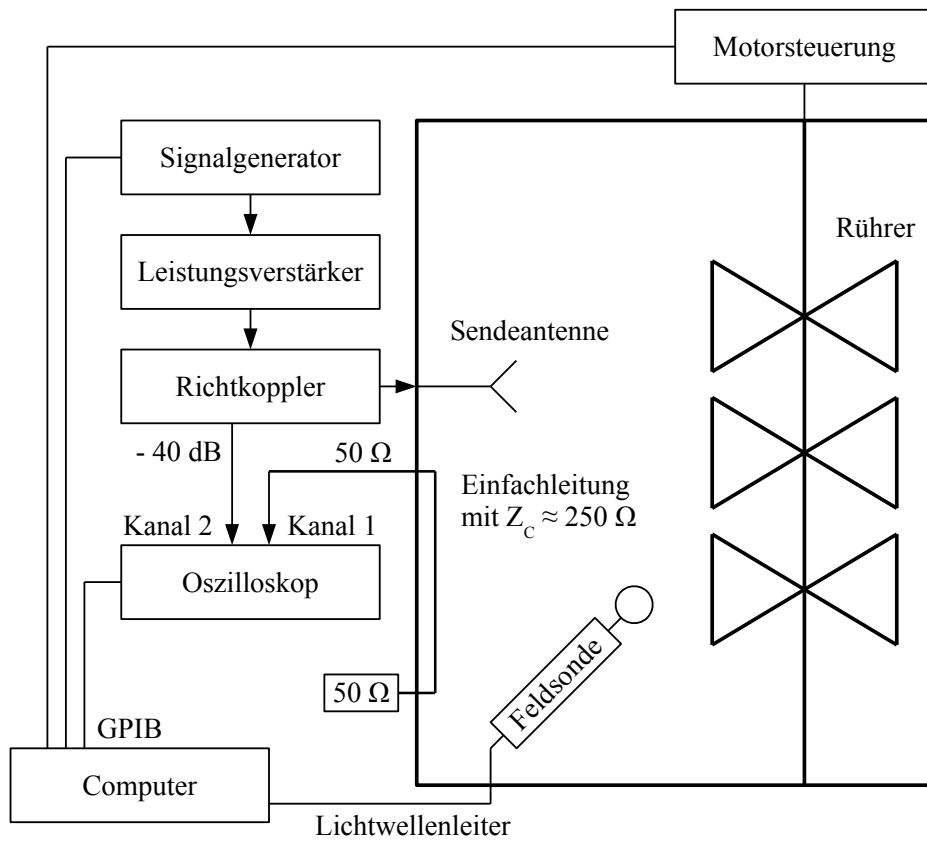
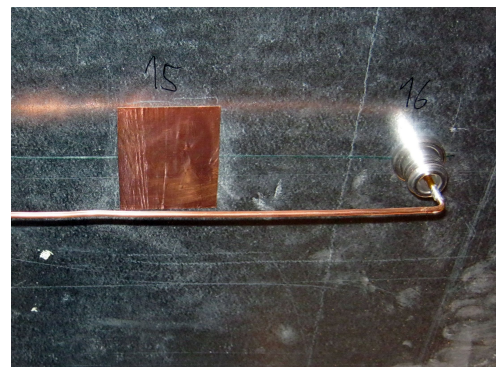


Abbildung 5.8: Schematischer Messaufbau zur Bestimmung der eingekoppelten Spannung in eine Einfachleitung



(a) Gesamtansicht



(b) Detailansicht eines Leitungsendes

Abbildung 5.9: Messaufbau für die 150 cm lange Leitung

Trotz des relativ großen Leitungsquerschnitts würden besonders die längeren Leitungen durchhängen und müssen daher mit Styropor abgestützt werden. Noch dünnere Leitungen mit geringerem Querschnitt als 4 mm^2 wären mechanisch zu flexibel und instabil. Bei der Benutzung dickerer Leitungen wäre das Überstreifen und Festlöten der N-Anschlussstifte nicht möglich.

An den Leitungsenden wurden N-Durchführungen an der Metallplatte angebracht, die zum Anschluss der Messleitung dienen und gleichzeitig einen Leitungsabschluss mit 50Ω darstellen. Dieser Aufbau ist detailliert in Abbildung 5.9b gezeigt. Der Abstand h zwischen der Einfachleitung der Masseebene betrug 32 mm , wodurch sich eine charakteristische Impedanz der Leitung von etwa $Z_c = 242 \Omega$ ergibt. Für diese Querschnittsabmessungen ist die zur Nutzung der Leitungstheorie notwendige Bedingung $kh < 1$ bis zu einer Frequenz von etwa $1,5 \text{ GHz}$ gültig.

Die eingekoppelte Spannung am Anfang der Leitung wurde mit einem Digitalspeicheroszilloskop mit einem Eingangswiderstand von 50Ω nach Betrag und Phase gemessen. Die Einfügedämpfung des koaxialen Verbindungskabels wurde separat vermessen und entsprechend kompensiert. Als Phasenreferenz wurde ein Signal aus dem Richtkoppler auf einem zweiten Kanal des Oszilloskops ausgelesen.

Die Durchführung am Ende der Einfachleitung wurde mit einem Abschlusswiderstand von 50Ω terminiert. Damit weisen beide Leitungsenden gegenüber der charakteristischen Impedanz eine starke Fehlanpassung auf, die in Richtung eines Kurzschlusses zeigt.

5.6.1.2 Messablauf

Untersucht wurde der Frequenzbereich von 200 MHz bis 1000 MHz in Schritten von 1 MHz , woraus sich eine Anzahl von 801 Frequenzpunkten ergibt. Die untere Frequenzgrenze ist durch die LUF der Kammer gegeben. Die obere Frequenzgrenze wird durch den verwendeten Leistungsverstärker und das Oszilloskop festgelegt. Insgesamt wurden 15 Leitungslängen im Bereich von 10 cm bis 150 cm vermessen. Für jede Frequenz und jede Leitungslänge wurden 36 hinreichend unkorrelierte Rührerpositionen in Schritten von 10° gemessen. Der Messablauf wurde so festgelegt, dass zuerst bei einer Rührerposition alle Frequenzschritte vermessen wurden. Dieser Schritt wurde für alle anderen Rührerpositionen und schließlich für alle Leitungslängen wiederholt. Die Messung einer Leitungslänge dauerte dabei etwa 4 h .

Zur Anregung der Kammer wurde eine konstante Leistung von etwa $35 \text{ dB}_{\text{mW}}$ eingespeist, aus der sich ein mittlerer Effektivwert der Gesamtfeldstärke von etwa $60 \frac{\text{V}}{\text{m}}$ ergibt. Dieser Leistungspegel wurde gewählt, um eine vernünftige Aussteuerung am Oszilloskop zu erreichen, ohne gleichzeitig den empfindlichen Eingang zu überlasten. Aufgrund der geringen

Dynamik des Oszilloskops und der starken Variabilität der eingekoppelten Spannung muss die vertikale Auflösung während der Messung ständig angepasst werden. Um den Betrag und die Phase der eingekoppelten Spannung möglichst exakt zu bestimmen, kann eine schnelle Fourier-Transformation mehrerer Perioden des Signals berechnet werden. Beide Aufgaben wurden in das Steuerungsprogramm der Messung implementiert.

5.6.1.3 Ermittlung der elektrischen Länge der Leitung

Zum Vergleich der experimentellen Ergebnisse mit den theoretischen Vorhersagen muss die elektrische Länge der Leitungen bekannt sein. Diese unterscheidet sich von der physikalischen Länge der Leitung hauptsächlich durch die Abwinklungen an den Leitungsenden. Um die elektrische Länge exakt zu bestimmen, wurde vor dem eigentlichen Einkoppelversuch für jede Leitungslänge eine zusätzliche Messung des Eingangsreflexionsfaktors mit einem Netzwerkanalysator durchgeführt. Dieser Reflexionsfaktor wird klein, wenn die Leitung in Resonanz ist. Aus der Resonanzfrequenz und deren jeweiliger Ordnung lässt sich die elektrische Länge der Leitung berechnen.

$$l = \frac{nc}{2f_r} \quad (5.55)$$

Die so bestimmten elektrischen Leitungslängen sind mit den jeweiligen physikalischen Längen in Tabelle 5.1 gegenübergestellt.

5.6.2 Messergebnisse

Um den Erwartungswert der Einkopplung zu berechnen, muss Gleichung (5.28), wie in Abschnitt 5.2 beschrieben, vom Strom auf die Spannung und weiterhin, wie in Abschnitt 5.3 beschrieben, von der Doppelleitung auf die Einfachleitung übertragen werden. Der Betrag des Spannungszeigers ist – wie bisher – ein Effektivwert.

$$\langle |U(0)|^2 \rangle_\infty = (E_0 h)^2 \cdot \frac{(1 + A_1)^2 (1 + A_2^2)}{2D} \cdot \left(1 - \frac{\sin(2kl)}{2kl} \right) \quad (5.56)$$

5.6.2.1 Kammerspezifische Konstante

Zur Berechnung der theoretischen Einkopplung mit Hilfe der Gleichung (5.56) muss auch die kammerspezifische Konstante E_0 bekannt sein. Diese wird entsprechend der Gleichung (3.5b) aus dem Mittelwert des Betragsquadrats der gesamten elektrischen Feldstärke berechnet. Der mittlere Effektivwert wird dabei für jeden Frequenzschritt über alle 36 Rührerpositionen und über alle acht verwendeten Feldsonden bestimmt. Die gemessene

Tabelle 5.1: Gegenüberstellung der physikalischen und elektrischen Leitungslängen

physikalische Länge l_{phys} in cm	Resonanzfrequenz f_r in MHz	Ordnung n	elektrische Länge l in cm
10	-	-	- ^a
20	698,8	1	21,45
30	477,2	1	31,45
40	362,4	1	41,55
50	290,4	1	51,55
60	239,2	1	62,15
70	204	1	72,89
80	364,4	2	82,74
90	326,4	2	92,03
100	290	2	103,9
110	267,6	2	112,4
120	245,6	2	122,7
130	226,8	2	132,9
140	207,6	2	143,8
150	200	2	153,4

^aFür die 10 cm lange Leitung ist zwischen 200 MHz und 1 GHz keine Resonanz messbar.

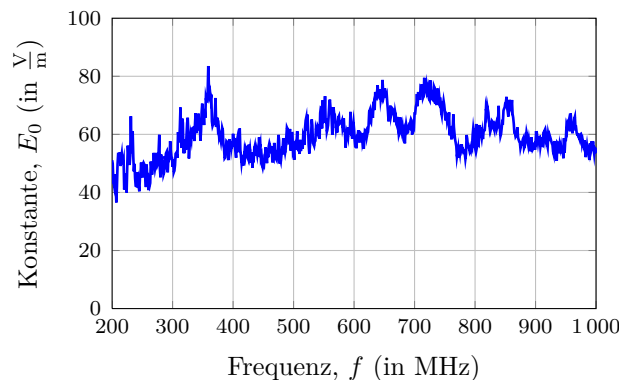
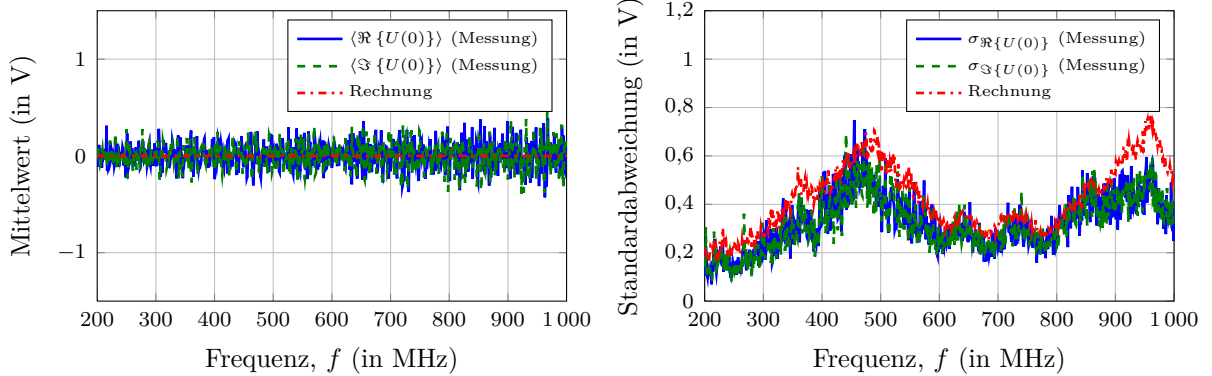


Abbildung 5.10: Gemessene kammerspezifische Konstante $E_0 = \sqrt{\langle |E|^2 \rangle}$ als Funktion der Frequenz

kammerspezifische Konstante ist in Abbildung 5.10 gezeigt. Aufgrund der konstanten Eingangsleistung ist auch die Feldstärke im Inneren der Kammer nur geringen Schwankungen unterworfen.

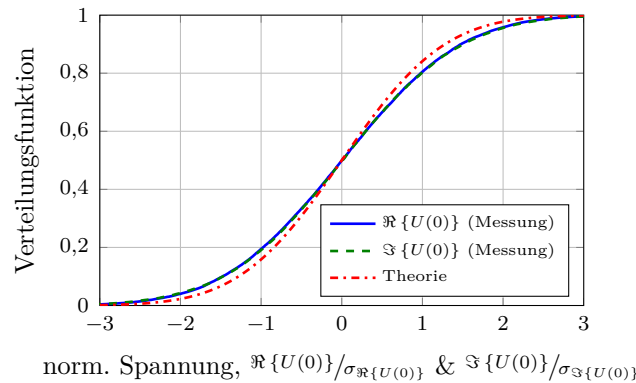
5.6.2.2 Real- und Imaginärteil der eingekoppelten Spannung

Da die eingekoppelte Spannung nach Betrag und Phase gemessen wurde, können auch der Real- und Imaginärteil der eingekoppelten Spannung bestimmt werden. Diese sind vor allem für theoretische Betrachtungen interessant. Der Mittelwert und die Standardabweichung



(a) Mittelwert für die 10 cm lange Leitung

(b) Standardabweichung für die 30 cm lange Leitung



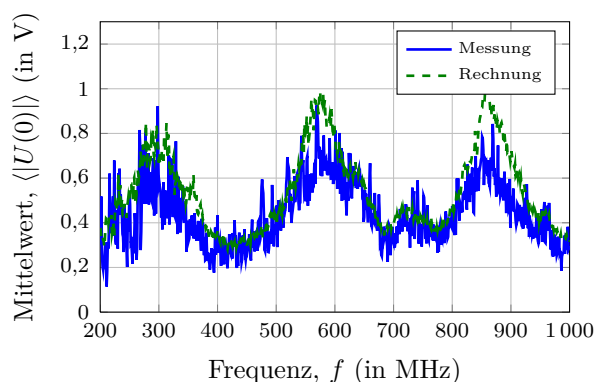
(c) Verteilungsfunktion für die 150 cm lange Leitung

Abbildung 5.11: Vergleich der gemessenen und berechneten statistischen Kennwerte des Real- und Imaginärteils der eingekoppelten Spannung

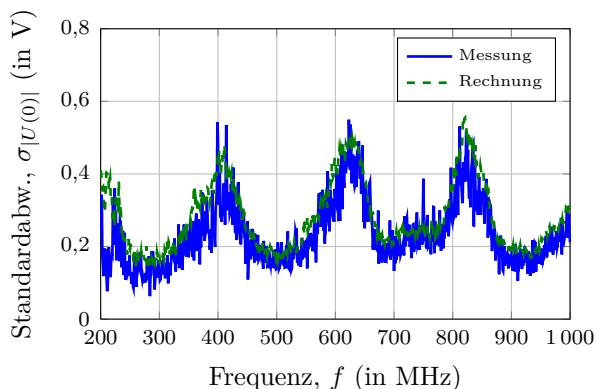
chung des Real- und Imaginärteils sind in Abbildung 5.11 dargestellt. Jedes Diagramm zeigt das Ergebnis für eine andere Leitungslänge.

In Abbildung 5.11a ist zu erkennen, dass der Mittelwert des Real- und Imaginärteils der eingekoppelten Spannung tatsächlich nahe bei Null liegt. Die in Abbildung 5.11b dargestellte gemessene Standardabweichung ist für den Real- und Imaginärteil sehr ähnlich und entspricht auch prinzipiell der theoretischen Vorhersage nach Gleichung (5.51b), liegt aber stets etwas unterhalb dieser.

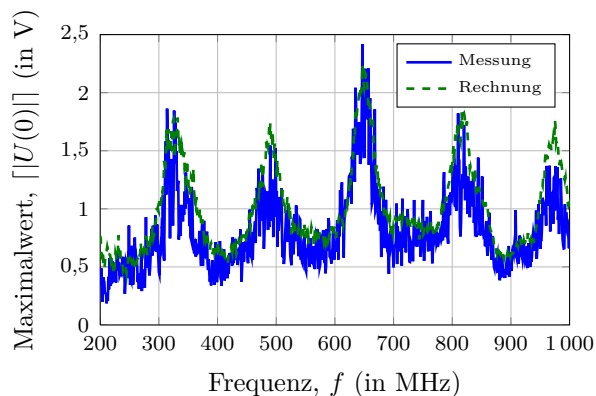
Eine weitere wichtige Aufgabe der Messung ist die Bestätigung der statistischen Verteilung der eingekoppelten Spannung. Um eine möglichst große Stichprobe zu erhalten, wird der Real- und Imaginärteil der eingekoppelten Spannung für jede Rührerposition und jede Frequenz auf die entsprechende Standardabweichung über alle Rührerpositionen bei der jeweiligen Frequenz normiert. So können insgesamt 801×36 Werte für die Darstellung einer entsprechend glatten empirischen kumulativen Verteilungsfunktion benutzt werden. Diese Verteilungsfunktion ist in Abbildung 5.11c gezeigt. Die gemessene Verteilungsfunktion weist eine gute Übereinstimmung mit der theoretisch zu erwartenden Normalverteilung



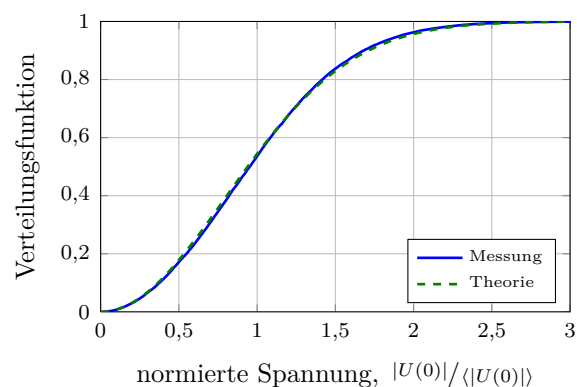
(a) Mittelwert für die 50 cm lange Leitung



(b) Standardabweichung für die 70 cm lange Leitung



(c) Maximalwert für die 90 cm lange Leitung



(d) Verteilungsfunktion für die 150 cm lange Leitung

Abbildung 5.12: Vergleich der gemessenen und berechneten statistischen Kennwerte des Betrags der eingekoppelten Spannung

auf. Die Verteilung ist für die 150 cm lange Leitung gezeigt, ergibt sich so aber auch für alle anderen Leitungslängen.

5.6.2.3 Betrag der eingekoppelten Spannung

Der Betrag oder Effektivwert ist der am häufigsten gebrauchte Kennwert einer zeitlich sinusförmigen Spannung. Der Mittelwert, die Standardabweichung und das Maximum des Betrags der eingekoppelten Spannung sind in Abbildung 5.12 dargestellt. Erneut zeigt jedes Diagramm das Ergebnis für eine andere Leitungslänge. Der theoretisch zu erwartende Mittelwert und die Standardabweichung wurden entsprechend den Gleichungen (5.52a) und (5.52b) bestimmt. Die Berechnung des theoretisch zu erwartenden Maximalwerts wurde in Abschnitt 5.5 diskutiert.

In den Diagrammen sind die Leitungsresonanzen deutlich erkennbar. Entgegen einigen Darstellungen in der Literatur [Bau91] ist die Modenverwirbelungskammer also tatsächlich in der Lage, die kritischen Frequenzen und Eigenresonanzen eines Prüflings zu be-

stimmen. Bei der betrachteten symmetrisch fehlangepassten Leitung der Länge l treten diese Resonanzen bei Frequenzen auf, an denen die Wellenlänge $\lambda = 2l, l, 2/3l, 1/2l, 2/5l$ usw. entspricht.

Es ist außerdem zu erkennen, dass im übermodierten Betrieb keine einzelnen Resonanzen der Modenverwirbelungskammer mehr sichtbar sind. Die Fluktuation der Verläufe wird hauptsächlich durch Zufallsrauschen verursacht und veranschaulicht die statistische Unsicherheit der Messung. Die tolerierbare Amplitude dieses Zufallsrauschens wird in Abschnitt 5.6.2.5 näher untersucht. Das Zufallsrauschen ändert sich sehr schnell über der Frequenz, da die Korrelationslänge der Frequenzkorrelation im Bereich der Bandbreite der Kammeresonanzen liegt und somit viel kleiner als die Frequenzauflösung der Messung ist.

Die experimentell bestimmte Verteilungsfunktion des auf den jeweiligen Mittelwert normierten Betrags der eingekoppelten Spannung ist in Abbildung 5.12d dargestellt und zeigt eine sehr gute Übereinstimmung mit der theoretisch zu erwartenden χ_2 -Verteilung.

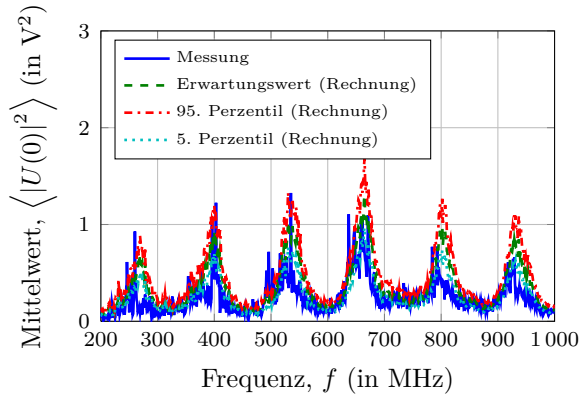
5.6.2.4 Betragsquadrat der eingekoppelten Spannung

Das Betragsquadrat der Spannung ist proportional zur eingekoppelten Leistung. Die gemessenen Mittelwerte, Standardabweichungen und Maximalwerte des Betragsquadrat der Spannung sind in Abbildung 5.13 zusammen mit den jeweiligen berechneten Verläufen dargestellt. In Abbildung 5.13a sind neben dem theoretischen Erwartungswert auch das 5. und 95. Perzentil der Verteilung des Mittelwerts abgebildet. Im Rahmen der statistischen Unsicherheit, auf die im nächsten Abschnitt noch näher eingegangen wird, sollten 90 % der gemessenen Mittelwerte innerhalb dieses Bereichs liegen. Die relativ starke Schwankungsbreite des Maximalwerts, auf die schon in Abschnitt 3.3.2 eingegangen wurde, ist auch an den Ausreißern in Abbildung 5.13c zu erkennen.

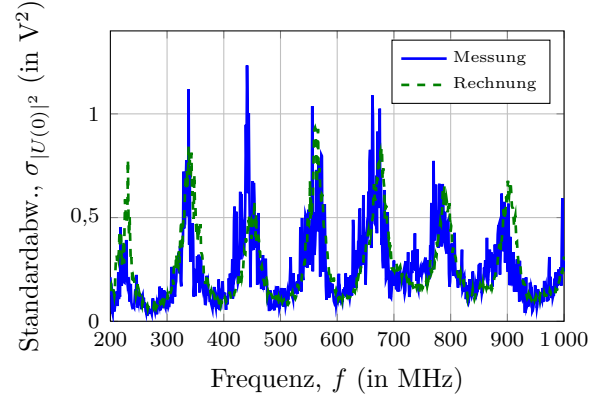
Abbildung 5.13d zeigt die experimentell bestimmte Verteilungsfunktion des auf den jeweiligen Mittelwert normierten Betragsquadrats der eingekoppelten Spannung. Auch hier ist eine sehr gute Übereinstimmung mit der theoretisch zu erwartenden χ_2^2 -Verteilung vorhanden.

5.6.2.5 Diskussion der statistischen Unsicherheit

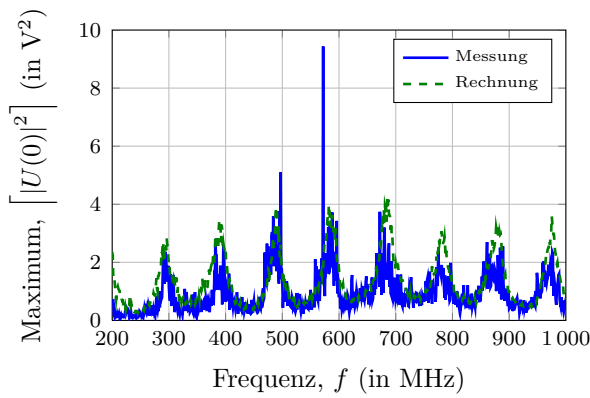
Jede Messung wird durch Messunsicherheiten verfälscht. Um die reine statistische Unsicherheit der Messung abzuschätzen, kann die Verteilung des Mittelwerts ähnlich wie in



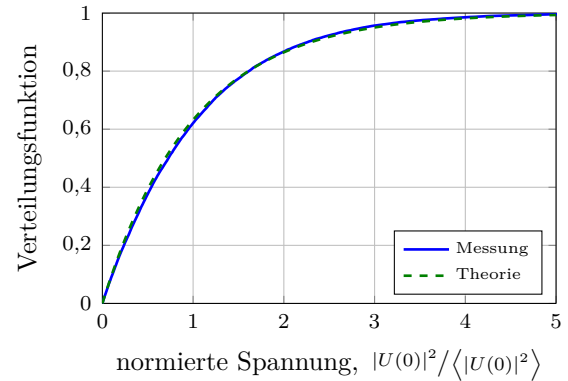
(a) Mittelwert für die 110 cm lange Leitung



(b) Standardabweichung für die 130 cm lange Leitung



(c) Maximalwert für die 150 cm lange Leitung



(d) Verteilungsfunktion für die 150 cm lange Leitung

Abbildung 5.13: Vergleich der gemessenen und berechneten statistischen Kennwerte des Betragsquadrats der eingekoppelten Spannung

Abschnitt 3.3.2 untersucht werden. Zur einfacheren Betrachtung wird der Mittelwert auf den Erwartungswert bezogen und die erhaltene Variable wie in [HL08] mit Q bezeichnet.

$$Q = \frac{\langle |U(0)|^2 \rangle_B}{\langle |U(0)|^2 \rangle_\infty} \quad (5.57)$$

Die Dichte- und Verteilungsfunktionen dieser Variable sind in Gleichung (6.26) auf Seite 126 beschrieben und in Abbildung 6.7 auf Seite 127 dargestellt. Für $B = 36$ unabhängige Rührerpositionen – wie in der gezeigten Messung – liegen das 5. und 95. Perzentil von Q bei $-1,3$ dB und $1,1$ dB. Das entspricht einer statistischen Unsicherheit von 74 % bis 129 % für den Mittelwert des Betragsquadrats der eingekoppelten Spannung in Bezug auf dessen Erwartungswert. Dieser Unsicherheitsbereich ist auch in Abbildung 5.13a dargestellt.

Da mehr als 10 % der gemessenen Mittelwerte außerhalb der statistischen Unsicherheit liegen, traten bei der Messung noch weitere Unsicherheiten (z. B. Linearitätsfehler der

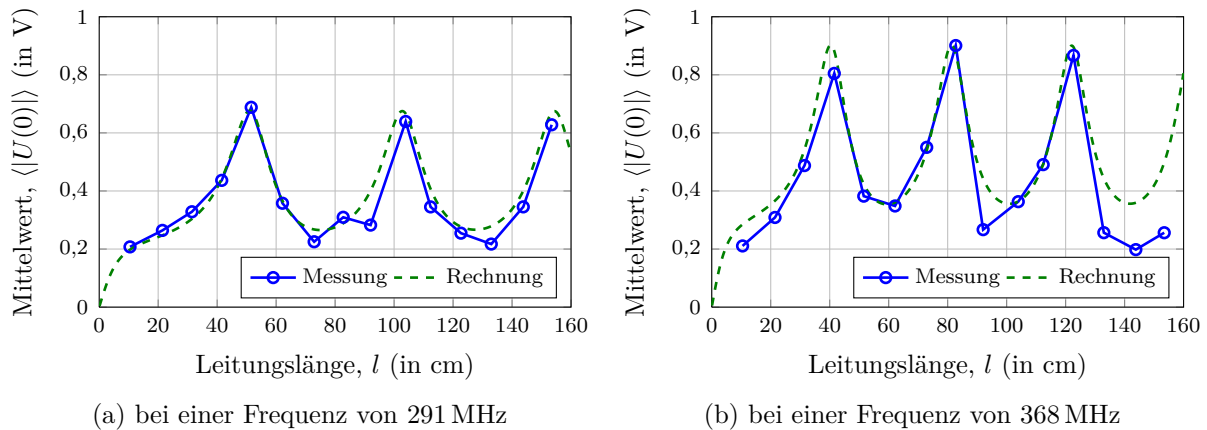


Abbildung 5.14: Mittelwert des Betrags der eingekoppelten Spannung als Funktion der Leitungslänge

Feldsonden, Digitalisierungsrauschen am Oszilloskops, usw.) auf, auf die aber nicht weiter eingegangen werden soll.

5.6.2.6 Einfluss der Leitungslänge

Um den Einfluss der Leitungslänge zu untersuchen, ist der mittlere Betrag der eingekoppelten Spannung in Abbildung 5.14 als Funktion der Leitungslänge dargestellt. Bei einer Frequenz von 291 MHz beträgt die Wellenlänge ca. $\lambda = 103$ cm, bei 368 MHz etwa 81 cm. Für die beidseitig symmetrisch fehlangepasste Leitung existiert eine kritische Leitungslänge von $l = \lambda/2$. Wenn die Leitung kürzer als $\lambda/2$ ist, so hängt die mittlere Einkopplung sehr stark von der Leitungslänge ab und steigt mit wachsender Leitungslänge an. Wenn die Leitung länger als $\lambda/2$ ist, so hängt die mittlere Einkopplung ebenfalls von der Leitungslänge ab, steigt aber nicht mehr an. Stattdessen schwankt die mittlere Einkopplung mit einer Periode von $\lambda/2$. Dieser Effekt wurde bereits in Abschnitt 5.1.2.1 diskutiert.

Im Allgemeinen ergibt sich eine befriedigende Übereinstimmung zwischen den experimentell ermittelten und theoretisch berechneten Ergebnissen. Das gilt sowohl für die Mittelwerte, Standardabweichungen (und Maximalwerte) des Real- und Imaginärteils, des Betrags und des Betragsquadrats der eingekoppelten Spannung, als auch für deren statistische Verteilungen.

6 Vergleich zwischen deterministischer und statistischer Einkopplung

6.1 Direktivität der Einkopplung in eine Leitung

In Kapitel 4 wurde eine geschlossene Lösung für den Maximalwert des Betragsquadrats des eingekoppelten Stromes bzw. der eingekoppelten Spannung in eine Leitung abgeleitet. Dieser Maximalwert ist das Maximum über alle möglichen Einfallrichtungen einer ebenen Welle und entspricht dem Wert der Einkopplung aus der *effektivsten* Einkoppelrichtung. Der so hergeleitete Maximalwert wird mit $\hat{|I|^2}$ bezeichnet.

In Kapitel 5 wurde ebenso eine geschlossene Lösung für den Mittelwert des Betragsquadrats des eingekoppelten Stromes bzw. der eingekoppelten Spannung in eine Leitung hergeleitet. Dieser Mittelwert ist der Mittelwert über alle möglichen Einfallrichtungen einer ebenen Welle und entspricht auch dem Erwartungswert bei der Einkopplung von statistischen elektromagnetischen Feldern, wie sie z. B. in einer Modenverwirbelungskammer auftreten. Die statistischen elektromagnetischen Felder werden dabei durch eine Überlagerung von ebenen Wellen [Hil98b] aus allen möglichen Einfallrichtungen sowie mit allen möglichen Polarisierungen und Phasenlagen modelliert. Der so hergeleitete Mittelwert des Betragsquadrats des eingekoppelten Stromes wird mit $\langle |I|^2 \rangle_\infty$ bezeichnet.

Beide Lösungen sind für beliebige Abschlusswiderstände gültig. Sie werden in diesem Kapitel verwendet, um die Richtwirkung der Einkopplung in eine Leitung zu untersuchen und auf dieser Grundlage einen Vergleich von Störfestigkeitstests in unterschiedlichen Messumgebungen herzustellen.

6.1.1 Definition

Die Direktivität der Einkopplung in eine Leitung kann analog zur Direktivität der Abstrahlung eines beliebigen Strahlers als Verhältnis der Einkopplung aus einer bestimmten Richtung bezogen auf die mittlere Einkopplung aus allen Richtungen definiert werden. Zur Charakterisierung der Einkopplung wird das Betragsquadrat des eingekoppelten Stromes benutzt. Ob dabei der Strom am Anfang, am Ende oder entlang der Leitung gemeint

ist, spielt für die allgemeine Definition keine Rolle. Von besonderem Interesse ist die *maximale Direktivität*, also die Direktivität in der Haupteinkoppelrichtung, in welcher das Supremum des Betragsquadrats des Stromes eingekoppelt wird.

$$D_{\max} = \frac{\uparrow |I|^2 \uparrow}{\langle |I|^2 \rangle_{\infty}} \quad (6.1)$$

6.1.2 Allgemeine Abschlusswiderstände

Die Direktivität $D_{\max}(0)$ des Betragsquadrats des eingekoppelten Stromes am Anfang einer Leitung kann durch Einsetzen der Lösung für $\uparrow |I(0)|^2 \uparrow$ aus Gleichung (4.28) auf Seite 58 und der Lösung für $\langle |I(0)|^2 \rangle_{\infty}$ aus Gleichung (5.28) auf Seite 83 direkt angegeben werden. Dazu müssen formal der Effektivwert der einzelnen einfallenden ebenen Welle E in der Definition von $\uparrow |I(0)|^2 \uparrow$ und die kammerspezifische Konstante E_0 in $\langle |I(0)|^2 \rangle_{\infty}$ gleichgesetzt werden.

$$D_{\max}(0) = \frac{\uparrow |I(0)|^2 \uparrow}{\langle |I(0)|^2 \rangle_{\infty}} \quad (6.2a)$$

$$= \frac{1}{(1 + A_{I2}^2) \cdot \left(1 - \frac{\sin(2kl)}{2kl}\right)} \quad (6.2b)$$

$$\cdot \begin{cases} 4 \sin^2(kl) & \text{für } l \leq \frac{\lambda}{4} \\ \left|1 + |A_{I2}| e^{-2jkl} - (1 + |A_{I2}|) e^{-jkl(1+\cos(\vartheta_{\max}))}\right|^2 & \text{für } l > \frac{\lambda}{4} \end{cases}$$

Trotz der nötigen Fallunterscheidung ist die Lösung stetig über der Leitungslänge l . Der Polarwinkel der effektivsten Einkoppelrichtung ϑ_{\max} ist in Gleichung (4.26) auf Seite 57 zu finden. Der Reflexionsfaktor A_{I2} wurde in Gleichung (4.19) auf Seite 46 definiert.

6.1.2.1 Abhängigkeit von den Abschlusswiderständen

Bei genauerer Betrachtung der Gleichungen (6.2b) und (4.26) fällt auf, dass die Direktivität der Einkopplung des Stromes am Anfang der Leitung nur noch vom Abschlusswiderstand am Ende der Leitung abhängt. Der Abschlusswiderstand am Anfang der Leitung beeinflusst dagegen sowohl das Supremum der deterministischen Einkopplung als auch den Mittelwert der statistischen Einkopplung in gleicher Weise und spielt dagegen für die Direktivität keine Rolle.

Außerdem ist aus den Gleichungen (6.2b) und (4.26) ersichtlich, dass die Direktivität nicht mehr direkt vom Reflexionsfaktor A_{I2} abhängt, sondern nur noch von dessen Betrag. Wird

der Abschlusswiderstand R_2 in der Form $\hat{R}_2 = R_2/Z_c$ auf die charakteristische Impedanz Z_c normiert, so ist es für die Direktivität vollkommen gleichgültig, ob die Leitung am Ende mit \hat{R}_2 oder $1/\hat{R}_2$ abgeschlossen ist, weil man in jedem Fall einen betragsmäßig gleichen Reflexionsfaktor A_{I2} erhält. Anders ausgedrückt: Es hat einen Einfluss, ob das Ende der Leitung angepasst oder fehlangepasst ist. Auch die Stärke der Fehlanpassung hat einen Einfluss. Die Richtung der Fehlanpassung (hin zum Leerlauf oder hin zum Kurzschluss) beeinflusst die Direktivität aber nicht.

6.1.2.2 Abhängigkeit von der eingekoppelten Größe (Strom und Spannung)

Da in die Gleichungen (6.2b) und (4.26) nur der Betrag von A_{I2} eingeht, spielt es auch keine Rolle, ob der Reflexionsfaktor wie in Gleichung (4.19) für Stromwellen, oder wie in Gleichung (4.6) auf Seite 41 für Spannungswellen definiert wird.

Die maximale Direktivität der Einkopplung in eine Leitung ist demnach unabhängig davon, ob sie über den Strom oder die Spannung definiert wird.

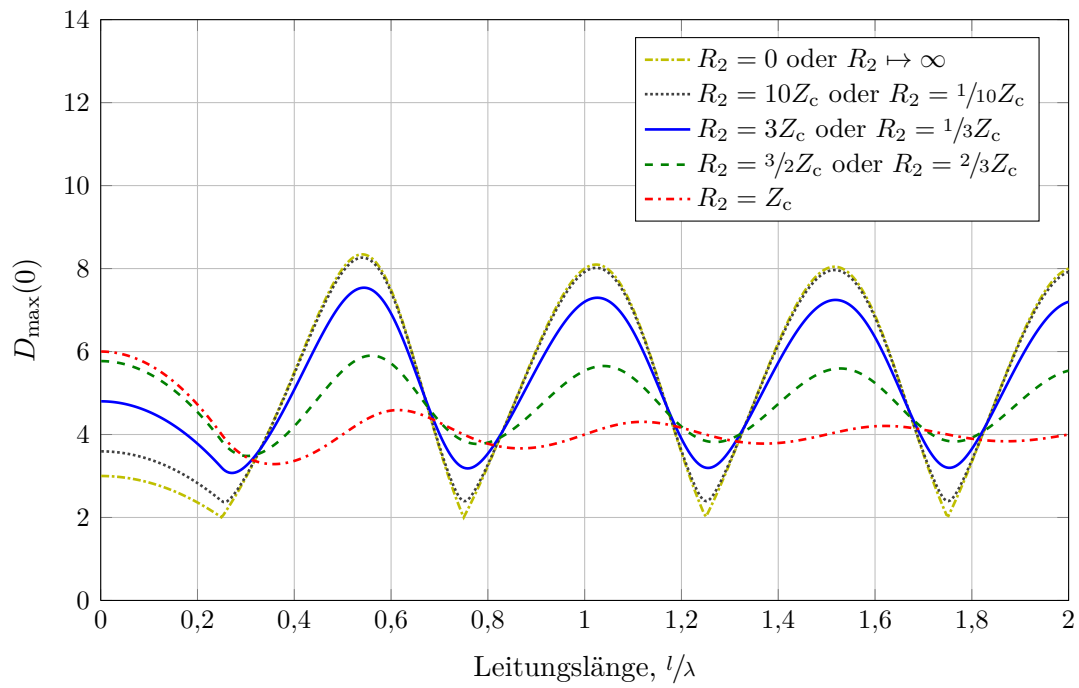
$$D_{\max}(0) = \frac{\uparrow |I(0)|^2 \uparrow}{\langle |I(0)|^2 \rangle_{\infty}} = \frac{\uparrow |U(0)|^2 \uparrow}{\langle |U(0)|^2 \rangle_{\infty}} \quad (6.3)$$

Dieses Ergebnis ist auch vom physikalischen Verständnis her plausibel, da der Strom und die Spannung am Anfang der Leitung nach $U(0) = -R_1 I(0)$ über den Abschlusswiderstand R_1 direkt proportional zueinander sind.

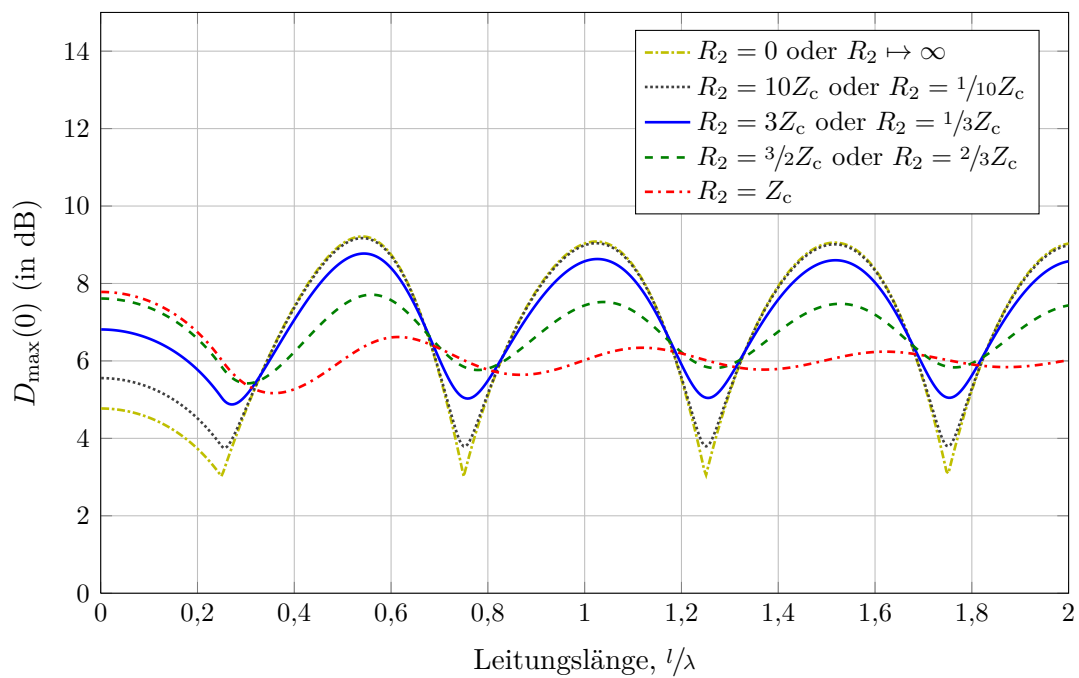
Abbildung 6.1 veranschaulicht die Direktivität der Einkopplung in den Abschlusswiderstand am Anfang der Leitung grafisch. Das Diagramm zeigt die Direktivität als Funktion der Leitungslänge bzw. Frequenz in Abhängigkeit des Abschlusswiderstandes am Ende der Leitung. Die Leitungslänge ist dabei auf die Wellenlänge λ der einfallenden ebenen Welle(n) normiert.

Die Direktivität der beidseitig angepassten Leitung weist die geringsten Schwankungen auf und pendelt um einen Wert von etwa Vier. Die geringe Schwankungsbreite lässt sich auch durch das in Abschnitt 4.2.3 auf Seite 50 gezeigte räumliche Einkoppeldiagramm der Leitung erklären, das im Fall beidseitiger Anpassung stets eine Rotationssymmetrie aufweist.

Je größer die Fehlanpassung der Leitung, desto stärker werden auch die Leitungsresonanzen in der Direktivität sichtbar. Die Direktivität ist aber stets größer oder gleich Zwei und hat einen Maximalwert von etwa Acht. Im Kurzschluss- oder Leerlauf der Leitung wird der Minimalwert von $D_{\max}(0) = 2$ bei Leitungslängen von $l = \lambda/4, 3/4\lambda, 5/4\lambda$ usw. erreicht. In diesem Fall sind die in Abschnitt 4.2.3 gezeigten Einkoppeldiagramme auch



(a) linear skaliert



(b) in dB

Abbildung 6.1: Direktivität der Einkopplung in den Anfang der Leitung in Abhängigkeit des Abschlusswiderstandes am Ende der Leitung als Funktion der Leitungslänge

stets rotationssymmetrisch. Besonders groß wird die Direktivität bei Leitungslängen von $l = \lambda/2, \lambda, 3/2\lambda$ und weiteren Vielfachen von $\lambda/2$. Bei diesen Leitungslängen verlieren die in Abschnitt 4.2.3 ab Seite 52 gezeigten Einkoppeldiagramme ihre Rotationssymmetrie und sind nur noch spiegelsymmetrisch. Das gilt sowohl für Leitungen mit beidseitigem Leerlauf, beidseitigem Kurzschluss oder einem Leerlauf an einem Ende und einem Kurzschluss am anderen Ende.

In Abbildung 6.1b findet man eine analoge Darstellung mit dB-skaliertem Ordinate.

6.1.2.3 Übertragen der Ergebnisse auf das Ende der Leitung

Um die Direktivität der Einkopplung in den Abschlusswiderstand am Ende der Leitung zu bestimmen, genügt es, entsprechend des Leitungsmodells $R_1 \leftrightarrow R_2$ miteinander zu tauschen. Dadurch werden auch $A_{I1} \leftrightarrow A_{I2}$ in den Gleichungen (6.2b) und (4.26) vertauscht und man erhält die maximale Direktivität $D_{\max}(l)$. Die Reflexionsfaktoren A_{I1} oder A_{U1} werden analog zu den Gleichungen (4.19) oder (4.6) bestimmt.

6.1.3 Sonderfall der beidseitig angepassten Leitung

Im Sonderfall der beidseitig angepassten Leitung gilt $R_1 = R_2 = Z_c$ und $A_{I1} = A_{I2} = 0$. Dadurch kann Gleichung (6.2b) deutlich vereinfacht werden.

$$D_{\max}(0, l) = \frac{4}{1 - \frac{\sin(2kl)}{2kl}} \cdot \begin{cases} \sin^2(kl) & \text{für } l \leq \frac{\lambda}{4} \\ 1 & \text{für } l > \frac{\lambda}{4} \end{cases} \quad (6.4)$$

Alternativ können zur Herleitung auch die Gleichungen (4.30) und (5.30) benutzt werden.

6.1.3.1 Grenzwert für sehr niedrige Frequenzen/sehr kurze Leitungen

Für sehr niedrige Frequenzen bzw. kurze Leitungslängen ergibt sich aus Gleichung (6.4) der folgende Grenzwert.

$$D_{\max}(0, l) \Big|_{kl \rightarrow 0} = 6 \quad (6.5)$$

Dieser Wert ist auch in Abbildung 6.1a zu erkennen.

Allgemein sind bestimmte Werte für die Direktivität der Einkopplung nur schwer mit Werten für die Direktivität der Emission zu vergleichen. Bei der Emission wird die Direktivität aus der Leistungsflussdichte in einer bestimmten Raumrichtung und der gesamten abgestrahlten Leistung bestimmt. Zur Bestimmung der maximalen Direktivität wird dann

der gesamte Raumwinkel untersucht. So ergibt sich z. B. für einen elektrischen oder magnetischen Dipol [Har61] eine Direktivität von $\left(1/2 \int_0^\pi \sin^2 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta\right)^{-1} = 1,5$.

Bei der Einkopplung werden nicht nur der gesamte Raumwinkel, sondern zusätzlich auch alle möglichen Polarisierungen betrachtet. Dadurch ergibt sich ein zusätzlicher Faktor von $\left(1/\pi \int_0^\pi \sin^2 \alpha d\alpha\right)^{-1} = 2$. In diesem Sinne hätte ein einfacher elektrischer oder magnetischer Dipol bei Berücksichtigung des Polarisationsversatzes eine Abstrahldirektivität von Drei und ein kombinierter elektrischer und magnetischer Dipol eine Abstrahldirektivität von Sechs.

6.1.3.2 Grenzwert für sehr hohe Frequenzen/sehr lange Leitungen

Für sehr hohe Frequenzen bzw. sehr lange Leitungslängen ergibt sich aus Gleichung (6.4) der Grenzwert

$$D_{\max}(0, l) \Big|_{kl \rightarrow \infty} = 4. \quad (6.6)$$

Auch bei den Leitungslängen $l = \lambda/4, \lambda/2, 3/4\lambda, \lambda, 5/4\lambda$ usw. hat $D_{\max}(0, l)$ der beidseitig angepassten Leitung immer den Wert Vier.

6.1.4 Sonderfall der beidseitig kurzgeschlossenen/leerlaufenden Leitung

Für die beidseitig kurzgeschlossene bzw. beidseitig leerlaufende Leitung gilt $|A_{I1}| = |A_{I2}| = 1$. Damit ergibt sich aus Gleichung (6.2b) eine deutlich einfachere Form für die maximale Direktivität.

$$D_{\max}(0, l) = \frac{2}{1 - \frac{\sin(2kl)}{2kl}} \cdot \begin{cases} \sin^2(kl) & \text{für } l \leq \frac{\lambda}{4} \\ (1 + |\cos(kl)|)^2 & \text{für } l > \frac{\lambda}{4} \end{cases} \quad (6.7)$$

Alternativ können zur Herleitung auch die Gleichungen (4.31) und (5.31) benutzt werden.

6.1.4.1 Grenzwert für sehr niedrige Frequenzen/sehr kurze Leitungen

Für sehr kleine Leitungslängen bzw. niedrige Frequenzen ergibt sich aus Gleichung (6.7) der Grenzwert

$$D_{\max}(0, l) \Big|_{kl \rightarrow 0} = 3. \quad (6.8)$$

Dieser Grenzwert für die maximale Direktivität der Einkopplung entspricht auch der maximalen Direktivität der Abstrahlung eines kombinierten elektrischen und magnetischen Dipols.

Bei Leitungslängen von $l = \lambda/4, 3/4\lambda, 5/4\lambda$ usw. hat $D_{\max}(0, l)$ der beidseitig kurzgeschlossenen oder leerlaufenden Leitung immer den Wert Zwei. Bei Leitungslängen von $l = \lambda/2, \lambda, 3/2\lambda$ und weiteren Vielfachen von $\lambda/2$ erreicht $D_{\max}(0, l)$ dagegen immer den Wert Acht.

6.2 Schlussfolgerungen für EMV-Tests

Praktische Relevanz besitzt die Direktivität bei der Korrelation von Messungen im Rahmen der elektromagnetischen Verträglichkeit in unterschiedlichen Messumgebungen. Bisherige Untersuchungen beschränken sich aber meist auf die Abstrahlung eines Prüflings bei einer Emissionsmessung, z. B. [WHH02, Kra11], oder auf die Untersuchung der statistischen Unsicherheit bei einer Störfestigkeitsmessung in der Modenverwirbelungskammer, wie z. B. [HÖ6, HL08, Höi11]. Wird die Leitung als ein einfaches Modell für einen Prüfling aufgefasst, können mit Hilfe der Direktivität auch Aussagen über die Korrelation von Störfestigkeitsuntersuchungen in unterschiedlichen Messumgebungen gemacht werden.

6.2.1 Tests in deterministischen Messumgebungen

In herkömmlichen Testumgebungen wie einer Halb- oder Vollabsorberhalle sowie in alternativen Testumgebungen wie einem Wellenleiter oder einer GTEM-Zelle wird ein Prüfling zu jeder Zeit typischerweise nur aus einer Richtung bestrahlt. Das einfallende Feld kann unter Fernfeldbedingungen als eine ebene Welle aufgefasst werden. Nun wird bei jeder Frequenz die effektivste Einkoppelrichtung gesucht, um die größtmögliche Störung am Prüfling hervorzurufen [DIN11b]. Im Idealfall entspricht das Maximum des Betragsquadrats des eingekoppelten Stromes der deterministischen Größe $\hat{\uparrow}|I|^2\hat{\uparrow}$. Der dazu nötige Effektivwert der elektrischen Feldstärke der ebenen Welle wurde in Kapitel 4 mit E bezeichnet. Zur Unterscheidung gegenüber der Modenverwirbelungskammer soll diese Feldstärke hier $E_{0,\text{TEM}}$ genannt werden.

Wie in Abschnitt 4.3.3 beschrieben, beschränkt sich die Suche nach der maximalen Einkopplung aus Zeitgründen auf nur eine Ebene mit jeweils zwei zueinander senkrechten Polarisationsrichtungen. Der dabei erreichte maximale Strom wird mit $\hat{\uparrow}|I_{\max,\text{Ebene}}|^2\hat{\uparrow}$ bezeichnet und kann je nach Leitungslänge/Frequenz und den Leitungsanschlüssen deutlich kleiner als $\hat{\uparrow}|I|^2\hat{\uparrow}$ sein. Der maximale Strom wird außerdem zu einer statistischen Größe, obwohl herkömmliche Testumgebungen meist als rein deterministisch aufgefasst werden.

Die Einbußen oder die Dämpfung (engl. loss) des maximalen Stromes, die durch die Einstrahlung aus nur einer Ebene entstehen, können durch das Verhältnis von $\hat{|I_{\max, \text{Ebene}}|^2}$ zu $\hat{|I|^2}$ beschrieben werden. Dieses Verhältnis ist stets kleiner oder gleich Eins und wird mit L_{Ebene} bezeichnet.

$$L_{\text{Ebene}} = \frac{\hat{|I_{\max, \text{Ebene}}|^2}}{\hat{|I|^2}} \quad (6.9)$$

Auch die Größe L_{Ebene} ist eine statistische Größe. Sie wurde bereits in Abschnitt 4.3.3.2 detailliert untersucht. Zusätzlich kann festgehalten werden, dass L_{Ebene} ähnlich wie D_{\max} nicht vom nahen Abschlusswiderstand, sondern nur vom Abschlusswiderstand am anderen Ende der Leitung abhängt. Das Verhältnis L_{Ebene} wird auch nur vom Betrag des Reflexionsfaktors am fernen Ende beeinflusst. Deshalb spielt die Richtung der Fehlanpassung wie bei D_{\max} keine Rolle und der Faktor könnte ebenso in der Form $L_{\text{Ebene}} = \hat{|U_{\max, \text{Ebene}}|^2} / \hat{|U|^2}$ mit Bezug auf die Spannung definiert werden.

6.2.2 Tests in statistischen Messumgebungen

Eine Modenverwirbelungskammer ist von sich aus eine rein statistische Messumgebung. Das intrinsisch statistische Feld kann näherungsweise als eine Überlagerung von ebenen Wellen aufgefasst werden (siehe Kapitel 3). Im Idealfall entspricht der Mittelwert des Betragsquadrats des eingekoppelten Stromes dem Erwartungswert $\langle |I|^2 \rangle_{\infty}$. Die dazu nötige Feldstärke wird über den Mittelwert des Betragsquadrats der gesamten elektrischen Feldstärke definiert. In Kapitel 5 wurde diese Größe mit E_0 bezeichnet. Zur Unterscheidung gegenüber der Feldstärke in den herkömmlichen Testumgebungen soll diese Feldstärke hier $E_{0, \text{MVK}}$ genannt werden.

Obwohl der eingekoppelte Strom wie auch die Feldstärke in der MVK statistische Größen sind, konvergiert der statistische Mittelwert $\langle |I|^2 \rangle_B$ für eine unendlich große Anzahl von Stichproben gegen den Erwartungswert $\langle |I|^2 \rangle_{\infty}$ und ist damit eine feste Größe. Selbst für eine endliche Anzahl von Stichproben schwankt der statistische Mittelwert $\langle |I|^2 \rangle_B$ nur geringfügig, da die Standardabweichung des Mittelwerts näherungsweise invers proportional zur Wurzel der Stichprobengröße ist.

Während eines Störfestigkeitstests ist aber meist nicht der Mittelwert, sondern der Maximalwert von Interesse, da typische Störmechanismen hauptsächlich von der maximalen Einkopplung abhängen. Dieser statistische Maximalwert wird mit $\hat{|I_{\text{MVK}}|^2}$ bezeichnet und darf nicht mit dem deterministischen Maximum $\hat{|I|^2}$ aus Abschnitt 4.3 verwechselt werden. Die Verteilung des statistischen Maximalwerts des Betragsquadrats des eingekoppelten Stromes hängt nur von der Stichprobengröße, also der Anzahl B der während

einer Messung [DIN11a] in einer MVK realisierten statistisch *unabhängigen* elektromagnetischen Randbedingungen ab. Statistisch unabhängige Randbedingungen sind dabei Randbedingungen, die zu statistisch unabhängigen, unkorrelierten Feldverteilungen führen.

Das Verhältnis des statistischen Maximalwerts und des Erwartungswerts wird nun wie in [HL08, Kra07] mit Z bezeichnet. Der Index I steht für die Verteilung des Stromes.

$$Z_I = \frac{\lceil |I_{\text{MVK}}|^2 \rceil}{\langle |I|^2 \rangle_\infty} \quad (6.10)$$

Das Verhältnis Z ist statistischen Schwankungen unterworfen und hängt von der Anzahl der Rührerpositionen während einer Messung ab. Da der eingekoppelte Strom und die kartesischen Feldstärkekomponenten in einer MVK beide exponentialverteilt sind, gilt das Verhältnis Z auch für die Betragsquadrate der Komponenten der elektrischen Feldstärke. Hier steht der Index E für die Feldstärke.

$$Z_E = \frac{\lceil |E_x|^2 \rceil}{\langle |E_x|^2 \rangle_\infty} = \frac{\lceil |E_y|^2 \rceil}{\langle |E_y|^2 \rangle_\infty} = \frac{\lceil |E_z|^2 \rceil}{\langle |E_z|^2 \rangle_\infty} = \frac{\lceil |E_R|^2 \rceil}{\langle |E_R|^2 \rangle_\infty} \quad (6.11)$$

Der Index R steht für eine beliebige Komponente x , y oder z . Die Verteilungs- und Dichtefunktionen sowie die Lage- und Streuparameter von Z sind in [Kra07, HL08] und in Abschnitt 6.2.3.2 zu finden.

Der in Gleichung (6.11) benutzte Erwartungswert $\langle |E_R|^2 \rangle_\infty$ des Betragsquadrats der kartesischen Feldkomponenten kann nach [Hil98b, Kra07] auch als

$$\langle |E_R|^2 \rangle_\infty = \frac{E_{0,\text{MVK}}^2}{3} \quad (6.12)$$

geschrieben werden.

6.2.3 Korrelation von Messumgebungen

Vereinfacht könnte angenommen werden, dass bei gleicher elektrischer Feldstärke E_0 in einem TEM-Feld der maximale Strom $\uparrow |I|^2 \uparrow$ und in einer MVK der mittlere Strom $\langle |I|^2 \rangle_\infty$ einkoppelt wird und der Umrechnungsfaktor zwischen beiden Umgebungen einfach der Direktivität D_{max} entspricht. Der Test im TEM-Feld würde auf das Betragsquadrat des Stromes bzw. die Leistung bezogen immer um den Faktor D_{max} , also mindestens zweimal bis maximal etwa achtmal schärfer ausfallen, als der Test in der MVK.

In der Realität ist dies aber aus folgenden Gründen nicht so:

- Im TEM-Feld wird in der Realität nicht der Strom $\uparrow |I|^2 \uparrow$ erreicht, sondern nur der Strom $\uparrow |I_{\max, \text{Ebene}}|^2 \uparrow$.
- In der MVK wird nicht nur ein mittlerer Strom $\langle |I|^2 \rangle_\infty$ eingekoppelt, sondern ebenfalls ein bestimmtes Maximum $\uparrow |I_{\text{MVK}}|^2 \uparrow$ erreicht.
- Sowohl $\uparrow |I_{\max, \text{Ebene}}|^2 \uparrow$ als auch $\uparrow |I_{\text{MVK}}|^2 \uparrow$ sind statistischen Schwankungen unterworfen.
- Die Feldstärke E_0 in der Definition von $\uparrow |I|^2 \uparrow$ bzw. $\uparrow |I_{\max, \text{Ebene}}|^2 \uparrow$ sowie $\langle |I|^2 \rangle_\infty$ bzw. $\uparrow |I_{\text{MVK}}|^2 \uparrow$ ist unterschiedlich.

Deshalb ist es für einen realistischen Vergleich der herkömmlichen Messumgebungen mit einer MVK sinnvoll, das Verhältnis

$$\frac{\uparrow |I_{\text{MVK}}|^2 \uparrow}{\uparrow |I_{\max, \text{Ebene}}|^2 \uparrow} \quad (6.13)$$

auszuwerten. Der quadrierte Effektivwert der elektrischen Feldstärke der ebenen Welle im TEM-Feld einer herkömmlichen Messumgebung soll dabei genauso groß wie der Maximalwert des Betragsquadrats einer elektrischen Feldstärkekomponente in der MVK sein.

$$E_{0, \text{TEM}}^2 = \uparrow |E_R|^2 \uparrow \quad (6.14)$$

Die Wahl dieser Feldstärkebedingung erscheint zunächst willkürlich, hat aber einen großen Vorteil, der später noch ersichtlich wird. Die Größe $\uparrow |I_{\text{MVK}}|^2 \uparrow$ wird also mit Hilfe der Feldstärke $E_{0, \text{MVK}}$ berechnet, die Größe $\uparrow |I_{\max, \text{Ebene}}|^2 \uparrow$ hingegen mit der Feldstärke $E_{0, \text{TEM}}$. Wird die Bedingung (6.14) in Gleichung (6.13) eingesetzt, so ergibt sich

$$\frac{\uparrow |I_{\text{MVK}}(E_{0, \text{MVK}})|^2 \uparrow}{\uparrow |I_{\max, \text{Ebene}}(E_{0, \text{TEM}})|^2 \uparrow} \quad (6.15)$$

Dieser Quotient wird mit den Größen $\langle |I(E_{0, \text{MVK}})|^2 \rangle_\infty$ und $\uparrow |I(E_{0, \text{TEM}})|^2 \uparrow$ erweitert.

$$\frac{\uparrow |I_{\text{MVK}}(E_{0, \text{MVK}})|^2 \uparrow}{\uparrow |I_{\max, \text{Ebene}}(E_{0, \text{TEM}})|^2 \uparrow} = \frac{\uparrow |I_{\text{MVK}}(E_{0, \text{MVK}})|^2 \uparrow}{\langle |I(E_{0, \text{MVK}})|^2 \rangle_\infty} \cdot \frac{\langle |I(E_{0, \text{MVK}})|^2 \rangle_\infty}{\uparrow |I(E_{0, \text{TEM}})|^2 \uparrow} \cdot \frac{\uparrow |I(E_{0, \text{TEM}})|^2 \uparrow}{\uparrow |I(E_{0, \text{TEM}})|^2 \uparrow} \quad (6.16)$$

Durch Ordnen der Terme und Änderung des Feldstärkebezugs bei einigen Größen ergibt

sich:

$$\frac{\left[|I_{\text{MVK}}(E_{0,\text{MVK}})|^2 \right]}{\left[|I_{\text{max,Ebene}}(E_{0,\text{TEM}})|^2 \right]} = \underbrace{\frac{\left[|I_{\text{MVK}}(E_{0,\text{MVK}})|^2 \right]}{\langle |I(E_{0,\text{MVK}})|^2 \rangle_\infty}}_{Z_I} \cdot \underbrace{\frac{\left[|I(E_{0,\text{TEM}})|^2 \right]}{\left[|I_{\text{max,Ebene}}(E_{0,\text{TEM}})|^2 \right]}}_{\frac{1}{L_{\text{Ebene}}}} \cdot \underbrace{\frac{\langle |I(E_0)|^2 \rangle_\infty}{\left[|I(E_0)|^2 \right]}}_{\frac{1}{D_{\text{max}}}} \cdot \underbrace{\frac{E_{0,\text{MVK}}^2}{E_{0,\text{TEM}}^2}}_{\frac{3}{Z_E}}. \quad (6.17)$$

Die unter den Klammern angegebenen Ersetzungen ergeben sich jeweils aus den Gleichungen (6.10), (6.9) und (6.1) sowie (6.14), (6.11) und (6.12).

Der realitätsnahe Konversionsfaktor für die Umrechnung des Maximums des Betragsquadrats des eingekoppelten Stromes in einer MVK und einer herkömmlichen Testumgebung kann somit sehr kurz geschrieben werden.

$$\frac{\left[|I_{\text{MVK}}(E_{0,\text{MVK}})|^2 \right]}{\left[|I_{\text{max,Ebene}}(E_{0,\text{TEM}})|^2 \right]} = \frac{3}{L_{\text{Ebene}} D_{\text{max}}} \cdot \underbrace{\frac{Z_I}{Z_E}}_{\mathbb{U}_{\text{MVK}}} \quad (6.18)$$

Der so bestimmte Konversionsfaktor besteht aus zwei Teilen. Der erste Teil beschreibt die tatsächliche Umrechnung zwischen der Einkopplung in der MVK und der herkömmlichen Testumgebung mit allen statistischen Unsicherheiten, die dabei in der herkömmlichen Testumgebung auftreten. Der zweite Teil \mathbb{U}_{MVK} beinhaltet nur die statistische Unsicherheit (engl. uncertainty), die zusätzlich in der MVK auftritt.

Alternativ wäre es auch denkbar, einen Konversionsfaktor mit Bezug auf den unquadrierten Betrag des Stromes zu definieren. Dieser Konversionsfaktor wäre dann amplituden- statt leistungsbezogen. Da in bisherigen Untersuchungen [Hil99, SBL02] auch häufig ein Bezug auf die eingekoppelte Leistung vorgenommen wurde, soll dieser alternative Ansatz hier nicht weiter verfolgt werden.

6.2.3.1 Statistische Unsicherheit im Freifeld

Zur Vereinfachung soll nun vorerst angenommen werden, dass die statistischen Variablen Z_I und Z_E voneinander abhängig sind und $\mathbb{U}_{\text{MVK}} = Z_I/Z_E = 1$ gilt.

An dieser Stelle zeigt sich der Nutzen der in Gleichung (6.14) gewählten Feldstärkebedingung, denn der unter dieser Bedingung mit $\mathbb{U}_{\text{MVK}} = 1$ bestimmte Konversionsfaktor ist unabhängig von der Anzahl der gemessenen Rührerpositionen in der MVK. Das ist für die

nachfolgende Auswertung und grafische Darstellung von Vorteil, da ein Parameter weniger berücksichtigt werden muss. Nachteilig ist, dass dadurch die statistische Unsicherheit der Messung in der MVK vernachlässigt und nur vom Erwartungswert des Maximums der Einkopplung ausgegangen wird. Tatsächlich wird die statistische Schwankung des so bestimmten Konversionsfaktors nur von der vermeintlich deterministischen herkömmlichen Messumgebung bestimmt.

Dieser Nachteil kann aber umgangen werden, indem in Gleichung (6.18) die beiden Variablen Z_I und Z_E nicht gegeneinander gekürzt werden. Auf die sich daraus ergebenden Änderungen wird in Abschnitt 6.2.3.2 eingegangen.

Wird der mit $U_{\text{MVK}} = 1$ vereinfachte Konversionsfaktor aus Gleichung (6.18) in dB formuliert, so ergibt sich:

$$\frac{\left[|I_{\text{MVK}}(E_{0,\text{MVK}})|^2 \right]}{\left[|I_{\text{max,Ebene}}(E_{0,\text{TEM}})|^2 \right]} = 4,77 \text{ dB} - L_{\text{Ebene,dB}} - D_{\text{max,dB}} . \quad (6.19)$$

Zur Veranschaulichung ist dieser Faktor in den Abbildungen 6.2 und 6.3 gezeigt. Der Konversionsfaktor ist für das Betragsquadrat des Stromes am Anfang der Leitung berechnet und als Funktion der Leitungslänge bzw. Frequenz dargestellt. Die Leitungslänge ist auf die Wellenlänge λ normiert. Da L_{Ebene} und D_{max} nur vom Betrag des Reflexionsfaktors A_{I2} abhängen, ist der Konversionsfaktor auch nur von $|A_{I2}|$ abhängig.

Für die Darstellung in Abbildung 6.2 wurden jeweils gleiche Abschlusswiderstände am Ende der Leitung zusammengefasst. Man erkennt, dass das 50. Perzentil des Konversionsfaktors über der Leitungslänge relativ glatt ist und nur um wenige dB schwankt. Die Schwankungsbreite zwischen dem 5. Perzentil und dem 95. Perzentil ist allerdings sehr groß und kann bei gewissen Frequenzen bzw. Leitungslängen mehr als 10 dB, bei einer stark fehlangepassten Leitung (mit entsprechenden Leitungsresonanzen) auch bis zu 20 dB betragen.

In Abbildung 6.3 wurden für die Darstellung gleiche Perzentile zusammengefasst. So ist aus Abbildung 6.3c zu erkennen, dass in 50 % der Fälle die maximale Einkopplung in der MVK nahezu gleich der maximalen Einkopplung aus einer Ebene im TEM-Feld ist. Je fehlangepasster die Leitung ist und je stärker die Leitungsresonanzen sind, desto vorteilhafter ist der Test in der MVK, da ein etwas größerer Maximalstrom eingekoppelt werden kann. Der Vorteil beträgt aber nur 2 dB bis 3 dB.

Interessant ist auch Abbildung 6.3a, die das 5. Perzentil zeigt. Hier ist der schlechteste Fall für die MVK bzw. der beste Fall in der herkömmlichen Testumgebung dargestellt. Man erkennt, dass der in der MVK eingekoppelte Maximalstrom in 95 % der Fälle nicht

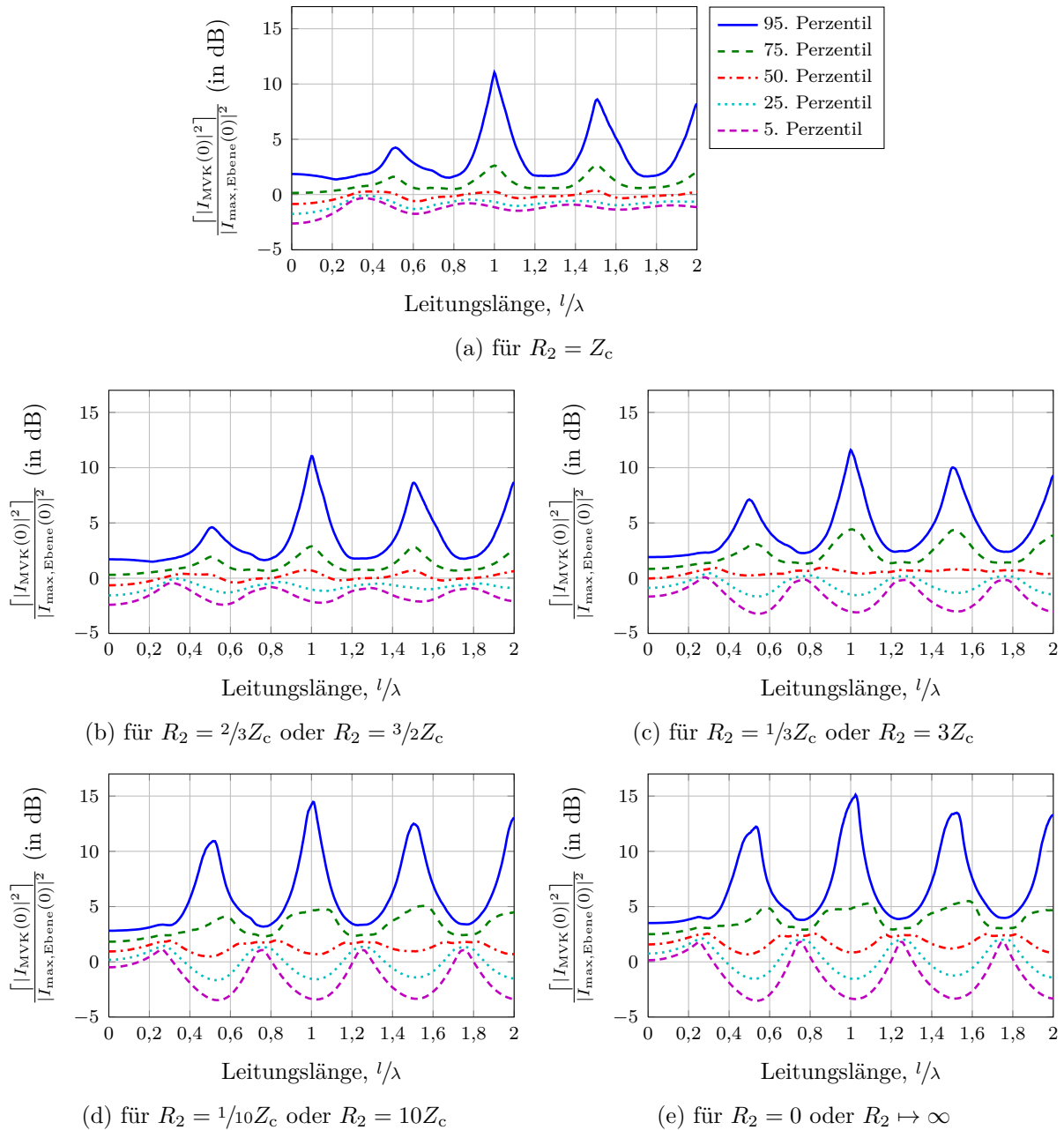


Abbildung 6.2: Verhältnis des Betragsquadrats des maximal einkoppelnden Stromes in einer Modenverwirbelungskammer zum Betragsquadrat des maximal einkoppelnden Stromes in einem TEM-Feld. Die quadrierte Feldstärke des TEM-Feldes entspricht dem Maximum des Betragsquadrats einer Feldstärkekomponente in der Modenverwirbelungskammer. Die Anregung im TEM-Feld erfolgt nur aus vier Richtungen in einer Ebene mit jeweils zwei Polarisierungen. Für die Statistik wurden 10 000 Simulationen durchgeführt. Für die Darstellung wurden gleiche Abschlusswiderstände am Ende der Leitung zusammengefasst. Die Unsicherheit der Messung in der MVK wurde durch die Vereinfachung $U_{\text{MVK}} = 1$ vernachlässigt.

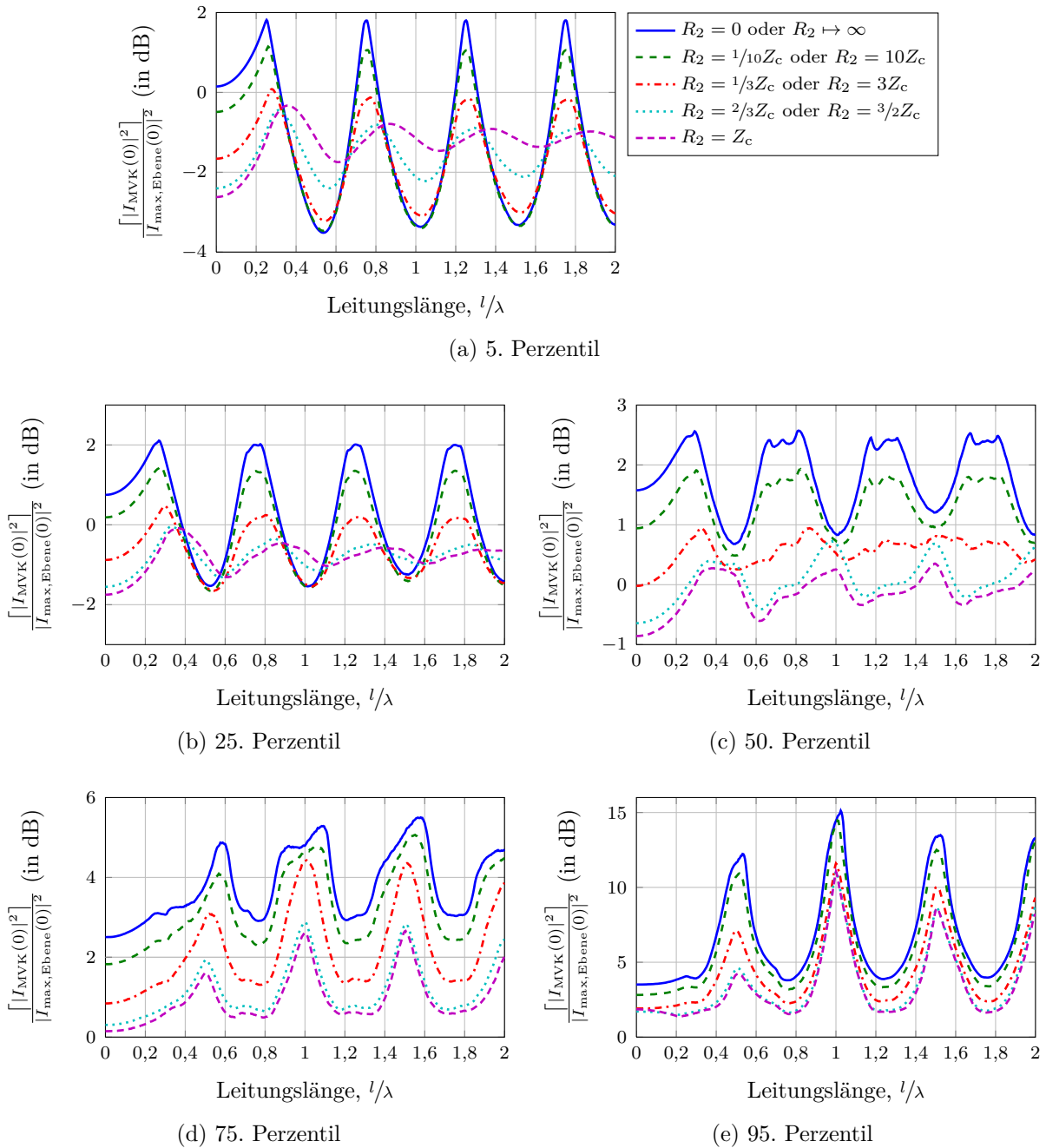


Abbildung 6.3: Verhältnis des Betragsquadrats des maximal einkoppelnden Stromes in einer Modenverwirbelungskammer zum Betragsquadrat des maximal einkoppelnden Stromes in einem TEM-Feld. Die quadrierte Feldstärke des TEM-Feldes entspricht dem Maximum des Betragsquadrats einer Feldstärkekomponente in der Modenverwirbelungskammer. Die Anregung im TEM-Feld erfolgt nur aus vier Richtungen in einer Ebene mit jeweils zwei Polarisationen. Für die Statistik wurden 10 000 Simulationen durchgeführt. Für die Darstellung wurden gleiche Perzentile zusammengefasst. Die Unsicherheit der Messung in der MVK wurde durch die Vereinfachung $\mathbb{U}_{\text{MVK}} = 1$ vernachlässigt.

mehr als etwa 3 dB unterhalb des Maximalstroms in der herkömmlichen Testumgebung liegt.

Ein ganz anderes Resultat zeigt dagegen die Abbildung 6.3e. Mit dem 95. Perzentil sind hier der beste Fall für die MVK und der schlechteste Fall für die herkömmliche Testumgebung dargestellt. Für niedrige Frequenzen bzw. kleine Leitungslängen $l < \lambda/4$ ist der Nachteil der herkömmlichen Testumgebung selbst bei starker Fehlanpassung nicht größer als etwa 4 dB. Für längere Leitungen wächst der Nachteil besonders bei Erreichen einer Leitungsresonanz stark an und kann bis zu 15 dB betragen.

Zusammenfassend lässt sich unter Vernachlässigung der statistischen Unsicherheit in der MVK folgendes festhalten:

- Beim Median wird in der MVK und in der herkömmlichen Testumgebung etwa der gleiche Strom eingekoppelt. Der Konversionsfaktor ist nahezu konstant über der Frequenz/Leitungslänge. Bei fehlangepassten Leitungen ist die MVK zusätzlich einige dB im Vorteil.
- Im für die MVK schlechtesten Fall ist die maximale Einkopplung dort nur ca. 3 dB unterhalb der maximalen Einkopplung in der herkömmlichen Testumgebung.
- Im für die MVK besten Fall ist die maximale Einkopplung bei bestimmten Leitungslängen bis zu 10 dB, bei starker Fehlanpassung auch bis zu 15 dB größer als die maximale Einkopplung in der herkömmlichen Testumgebung. Das heißt, dass die maximale Einkopplung in der herkömmlichen Testumgebung im für sie schlechtesten Fall bis zu 15 dB geringer als in der MVK ist. Diese Aussage gilt für Leitungslängen $l > \lambda/4$.

Der Test in der Modenverwirbelungskammer ist bei elektrisch großen Prüflingen also deutlich robuster darin, ein Maximum der Einkopplung zu finden, welches dem tatsächlichen Supremum der Einkopplung sehr nahe kommt.

Wird dagegen in Gleichung (6.19) der Term $L_{\text{Ebene,dB}}$ vernachlässigt, so erhält man einen Konversionsfaktor für den Fall, in dem in der herkömmlichen Testumgebung stets der maximal mögliche Strom eingekoppelt wird. Dieser Konversionsfaktor ist in Abbildung 6.4 dargestellt. Die maximale Einkopplung in der Modenverwirbelungskammer liegt im Fall der angepassten Leitung stets etwa 1 dB unterhalb der maximalen Einkopplung im TEM-Feld. Bei stark fehlangepassten Leitungen ist die MVK bei Leitungslängen von $l = \lambda/4, 3/4\lambda, 5/4\lambda$ usw. etwa 1,5 dB im Vorteil, bei Leitungslängen vom $l = \lambda/2, \lambda, 3/2\lambda$ und weiteren Vielfachen von $\lambda/2$ dagegen etwa 4,5 dB im Nachteil.

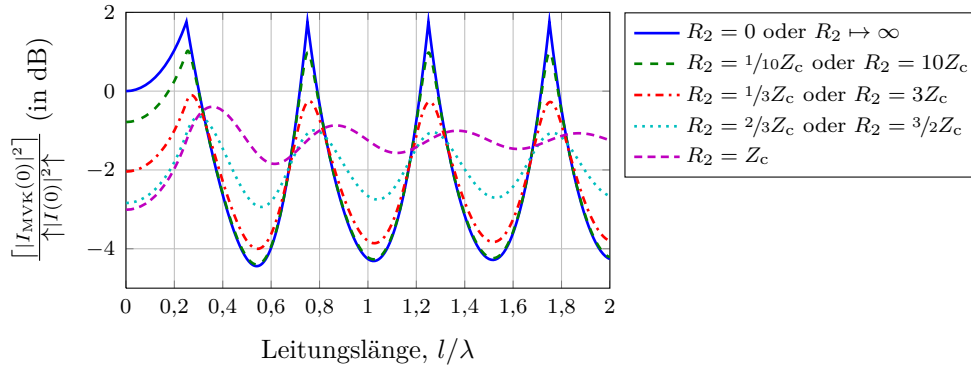


Abbildung 6.4: Verhältnis des Betragsquadrats des maximal einkoppelnden Stromes in einer Modenverwirbelungskammer zum Betragsquadrat des maximal einkoppelnden Stromes in einem TEM-Feld. Die quadrierte Feldstärke des TEM-Feldes entspricht dem Maximum des Betragsquadrats einer Feldstärkekomponente in der Modenverwirbelungskammer. Im TEM-Feld wird das Supremum der Einkopplung erreicht. Die Unsicherheit der Messung in der MVK wurde durch die Vereinfachung $\mathbb{U}_{\text{MVK}} = 1$ vernachlässigt.

6.2.3.2 Statistische Unsicherheit in der Modenverwirbelungskammer

Zur Analyse der zusätzlichen statistischen Unsicherheit der Messung in der MVK ist eine nähere Betrachtung der statistischen Variable Z in den Gleichungen (6.10) und (6.11) notwendig. Die Verteilungs- und die Dichtefunktion sind in [HL08, Kra07] angegeben.

$$\text{cdf}_Z(z) = (1 - e^{-z})^B \quad (6.20a)$$

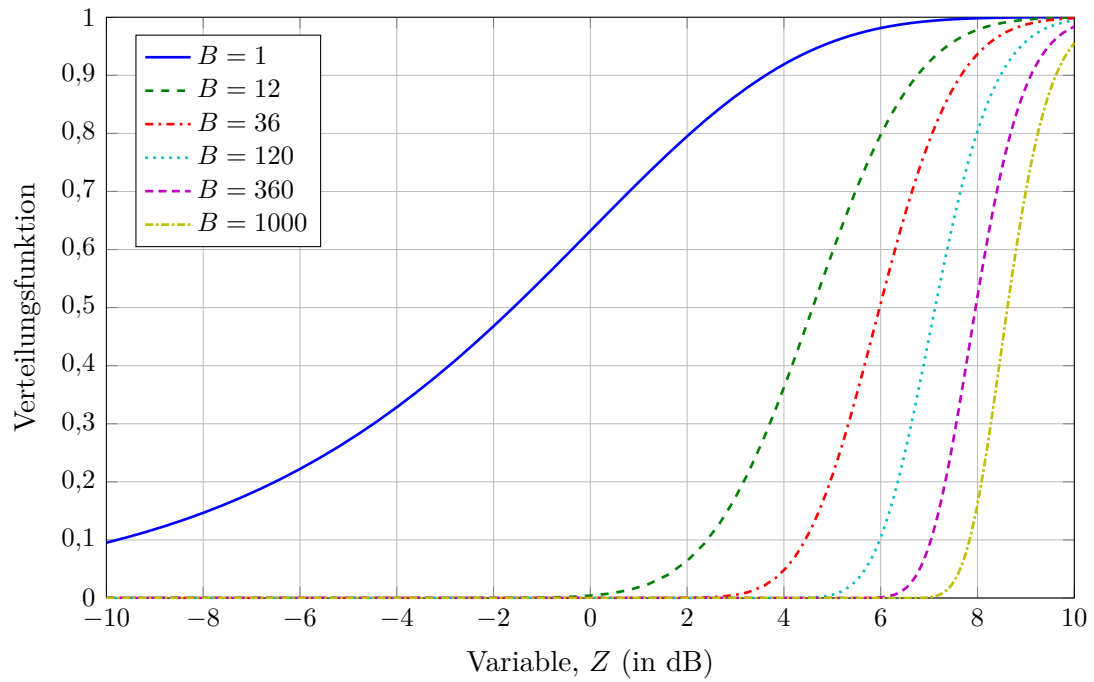
$$\text{pdf}_Z(z) = B (1 - e^{-z})^{B-1} \cdot e^{-z} \quad (6.20b)$$

Die Verteilungs- und die Dichtefunktion der Variable Z sind für unterschiedliche Anzahlen von statistisch unabhängigen Rührerpositionen B in Abbildung 6.5 dargestellt. Die Abszisse ist logarithmisch skaliert. Mit wachsender Anzahl von Rührerpositionen verschiebt sich die Verteilung von Z hin zu größeren Werten. Je mehr Rührerpositionen vermessen werden, desto höher wird der Erwartungswert des Maximums einer Größe bei gleichzeitig konstantem Mittelwert. Man erkennt allerdings auch, dass die Schwankungsbreite des Maximums mit steigendem B nur geringfügig abnimmt.

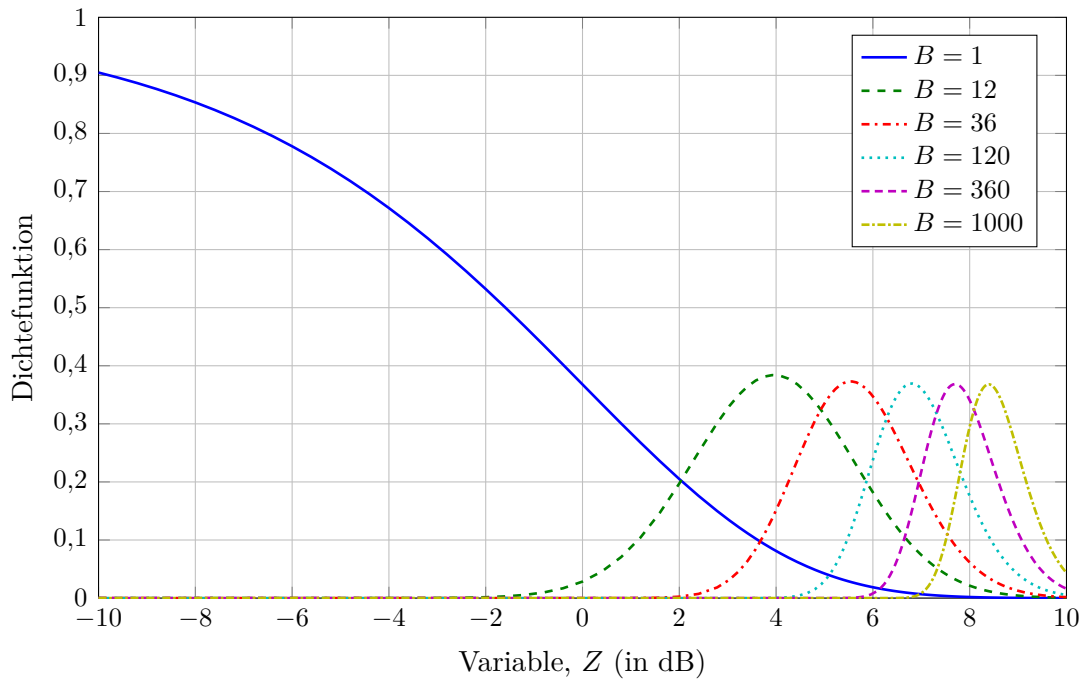
a) Bezug auf den Maximalwert der Feldstärke

Im Term \mathbb{U}_{MVK} in Gleichung (6.18) tritt aber nicht nur die Variable Z , sondern der Quotient Z_I/Z_E auf, in dem Z_I und Z_E jeweils statistisch unabhängig sind. Für die weitere Betrachtung wird dieser Quotient wie in [Kra07, HÖ6] als eine neue Größe W definiert.

$$W = \frac{Z_I}{Z_E} \quad (6.21)$$



(a) Verteilungsfunktion



(b) Dichtefunktion

Abbildung 6.5: Verteilungs- und Dichtefunktionen der Variable Z für unterschiedliche Anzahlen von statistisch unabhängigen Randbedingungen B in der Modenverwirbelungskammer

Entsprechend der in [Moo74] vorgestellten Verteilungsfunktionstechnik können die Verteilungs- und die Dichtefunktion von W direkt angegeben werden.

$$\text{cdf}_W(w) = \int_0^{\infty} \text{cdf}_Z(zw) \text{pdf}_Z(z) dz \quad (6.22a)$$

$$\text{pdf}_W(w) = \int_0^{\infty} z \text{pdf}_Z(zw) \text{pdf}_Z(z) dz \quad (6.22b)$$

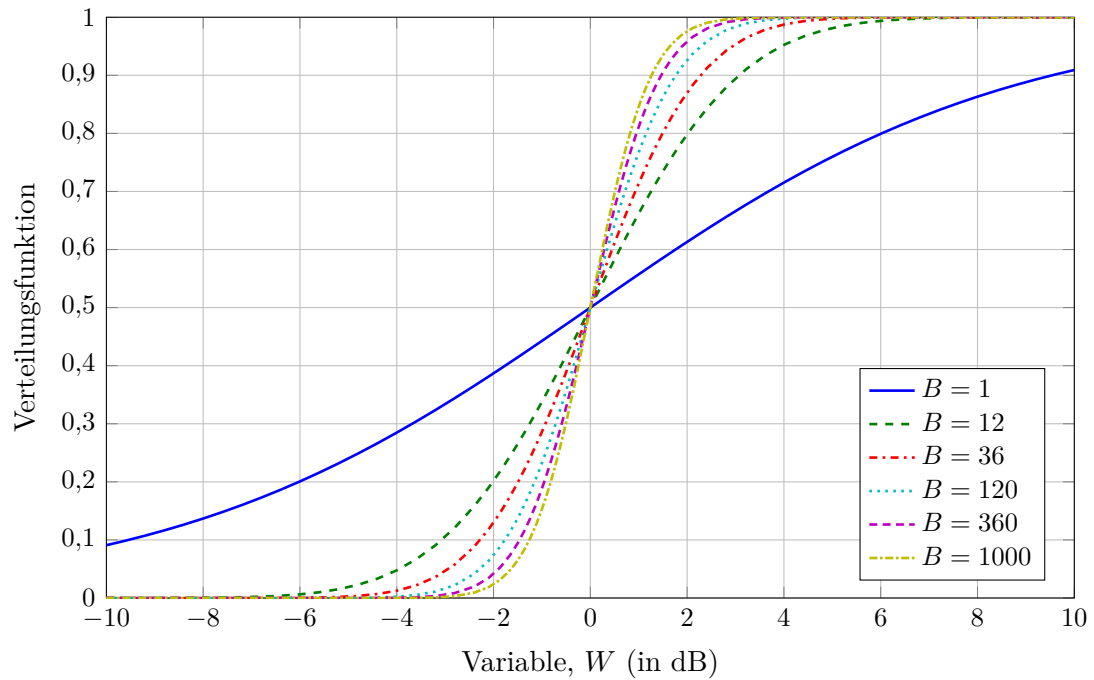
Die Integrale können in eine endliche Doppelsumme umgeschrieben werden [HÖ6].

$$\text{cdf}_W(w) = B \sum_{m=0}^B \sum_{n=0}^{B-1} \binom{B}{m} \binom{B-1}{n} \frac{(-1)^{m+n}}{mw + n + 1} \quad (6.23a)$$

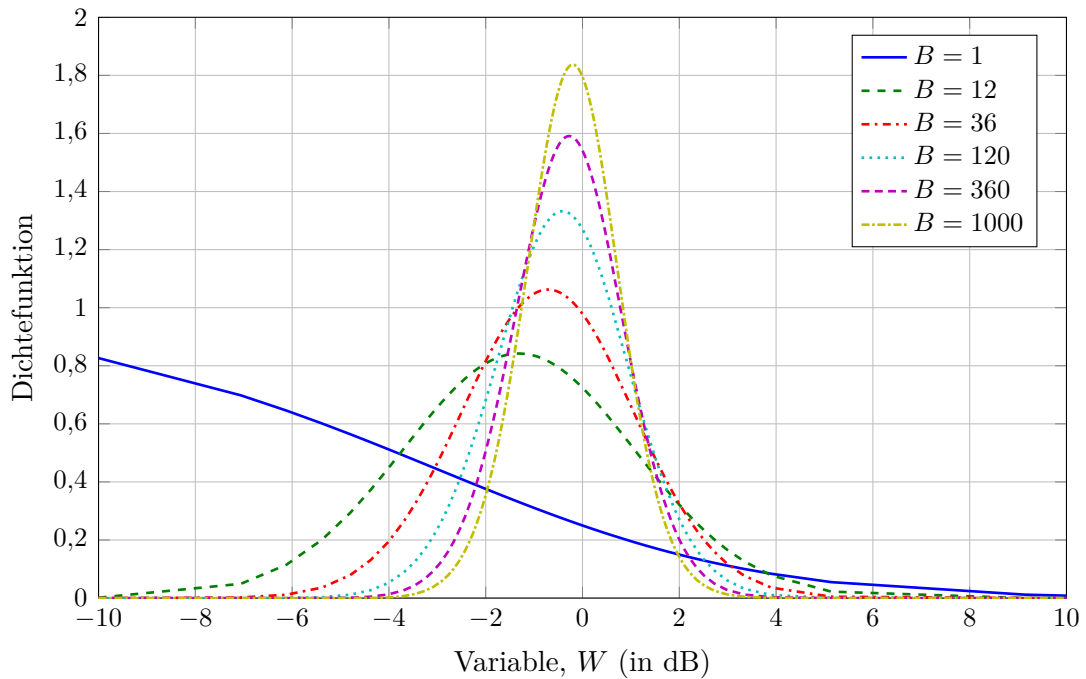
$$\text{pdf}_W(w) = B \sum_{m=0}^B \sum_{n=0}^{B-1} \binom{B}{m} \binom{B-1}{n} \frac{(-1)^{m+n+1} m}{(mw + n + 1)^2} \quad (6.23b)$$

Die Doppelsummen sind für große B numerisch schwer zu berechnen. Deshalb ist es effizienter, die Integrale in Gleichung (6.22) numerisch auszuwerten. Entsprechend der Abbildung 6.5 kann für die numerische Integration eine obere Grenze von 15 abgeschätzt werden. Die Verteilungs- und die Dichtefunktion der Variable W sind für unterschiedliche Anzahlen von Rührerpositionen in Abbildung 6.6 gezeigt. Die Abszisse ist logarithmisch skaliert. Man erkennt aus Abbildung 6.6a sehr deutlich, dass sich der Median der Variable W stets bei $w = 1$ bzw. $w = 0$ dB befindet. Das ist aufgrund der Definition der Variable W in Gleichung (6.21) auch so zu erwarten. Der Zentralwert des Konversionsfaktors in Gleichung (6.18) ändert sich durch Berücksichtigung des Terms $\mathbb{U}_{\text{MVK}} = W$ also nicht, wohl aber die anderen Quantile. Aus Abbildung 6.6 ist außerdem zu entnehmen, dass die Schwankungsbreite von W mit wachsender Anzahl von unabhängigen Rührerpositionen etwas abnimmt.

Eine etwas andere und praxisbezogenere Darstellung der statistischen Variable W ist in Abbildung 6.10 auf Seite 132 zu finden. Dort sind die Perzentile von W mit dünnen Linien als Funktion der Anzahl von unabhängigen Rührerpositionen B dargestellt. Man erkennt auch hier, dass das 50. Perzentil, also der Median oder Zentralwert, tatsächlich stets bei $w = 1$ bzw. $w = 0$ dB liegt. Mit steigender Anzahl der unabhängigen Rührerpositionen B zeigt sich wiederum eine Verringerung der Schwankungsbreite der Verteilung. Man beachte aber die logarithmische Skalierung der Abszisse, die diesen Effekt scheinbar verstärkt. Zudem ist erkennbar, dass positive wie negative Abweichungen in dB gleich wahrscheinlich sind. Bezogen auf eine lineare Skala heißt das, dass Erhöhungen und Abschwächungen um einen bestimmten Faktor gleich wahrscheinlich sind.



(a) Verteilungsfunktion



(b) Dichtefunktion

Abbildung 6.6: Verteilungs- und Dichtefunktionen der Variable W für unterschiedliche Anzahlen von statistisch unabhängigen Randbedingungen B in der Modenverwirbelungskammer

Tabelle 6.1: Perzentile der Variable W für unterschiedliche Anzahlen von statistisch unabhängigen Randbedingungen B in der Modenverwirbelungskammer

B	95 %	75 %	50 %	25 %	5 %
1	12,8	4,8	0,0	-4,8	-12,8
12	3,9	1,6	0,0	-1,6	-3,9
36	2,9	1,2	0,0	-1,2	-2,9
120	2,3	0,9	0,0	-0,9	-2,3
360	1,9	0,8	0,0	-0,8	-1,9
1000	1,6	0,7	0,0	-0,7	-1,6

Die verschiedenen Perzentile sind für einige typische Anzahlen von gemessenen Rührerpositionen in Tabelle 6.1 zusammengefasst. Die Angaben für $B = 1$ (absolut keine Statistik) und $B = 1000$ (sehr gute Statistik, aber auch sehr zeitaufwendig) haben mehr informativen Charakter, aber die anderen Anzahlen sind für Messungen durchaus üblich. Die Anzahl $B = 12$ ist die in [DIN11a] vorgeschriebene Mindestanzahl von Rührerpositionen für die Validierung und Messung in einer MVK. Die Messungen sind sehr zeitsparend, jedoch ist die Abweichung zwischen dem 5. und 95. Perzentil mit $\pm 3,9$ dB auch relativ hoch. Durch eine Verdreifachung der Messzeit auf $B = 36$ Rührerpositionen kann die Abweichung auf $\pm 2,9$ dB gesenkt werden. Nur bei sehr hohen Anforderungen an die Messunsicherheit würde man noch größere Anzahlen von Rührerpositionen wie $B = 120$ oder $B = 360$ vermessen.

Selbst bei sehr vielen Rührerpositionen verbleibt eine merkliche statistische Unsicherheit. Es darf nicht vergessen werden, dass einerseits das Maximum des Betragsquadrats des eingekoppelten Stromes bestimmt werden soll, dafür andererseits aber der Maximalwert des Betragsquadrats einer Feldstärkekomponente als Bezugsgröße benutzt wird. Beide Maxima sind unabhängig voneinander und, wie aus Abbildung 6.5 erkennbar, relativ starken Schwankungen unterworfen. So kann sich selbst bei einem geringen Maximalwert der Feldstärke am Ort der Feldsonde ein großes Maximum des eingekoppelten Stromes am Ort des Prüflings in der MVK ergeben. Dies ist eine vorgegebene Eigenschaft der Modenverwirbelungskammer. Es ist nicht möglich, die tatsächliche Feldeinwirkung auf den Prüfling zu messen. Der Prüfling und die Feldsonde/Referenzantenne werden aufgrund der geringen Korrelationslänge des Feldes immer einer unterschiedlichen Feldbeanspruchung ausgesetzt sein. Sehr wohl kann aus den Messwerten der Feldsonde/Referenzantenne auf die Feldstärke am Ort des Prüflings geschlossen werden, aber eben nur in einem statistischen Zusammenhang mit einer gewissen statistischen Unsicherheit $\mathcal{U}_{\text{MVK}} = W$. Diese Eigenschaft der MVK wurde auch ausführlich in [HL08] erläutert.

b) Bezug auf den Mittelwert der Feldstärke

Es ist nicht ohne weiteres möglich, die durch die statistische Variable W vorgegebene Unsicherheit zu verringern. Eine Möglichkeit besteht darin, nicht den relativ stark schwankenden Maximalwert des Betragsquadrats einer Feldstärkekomponente als Bezug zu verwenden, sondern den Mittelwert des Betragsquadrats einer Feldstärkekomponente. Der Mittelwert ist gerade bei vielen Rührerpositionen B deutlich geringeren Schwankungen unterworfen als das Maximum. Das dahinter stehende Konzept ist in [HL08] beschrieben. Analog zur Feldstärkebedingung in Gleichung (6.14) erfordert der Vergleich der beiden Messumgebungen

$$E_{0,\text{TEM}}^2 = \lceil |E_R|^2 \rceil. \quad (6.24)$$

Anstatt der Umformung $\lceil |E_R|^2 \rceil = Z \cdot \langle |E_R|^2 \rangle_\infty$ wird nun $\lceil |E_R|^2 \rceil = \langle Z \rangle_\infty \cdot \langle |E_R|^2 \rangle_B$ gewählt, wobei $\langle Z \rangle_\infty$ der Erwartungswert der Variable Z und $\langle |E_R|^2 \rangle_B$ der statistische Mittelwert des Betragsquadrats einer Feldkomponente ist. Auch dieser Mittelwert ist statistischen Schwankungen unterworfen, die ähnlich wie in [HL08, Kra07] durch eine statistische Variable \mathbb{Q} beschrieben werden können. Zur Unterscheidung gegenüber der Güte Q einer Modenverwirbelungskammer wird für diese Größe eine Tafelschriftart verwendet.

$$\mathbb{Q} = \frac{\langle |E_R|^2 \rangle_B}{\langle |E_R|^2 \rangle_\infty} \quad (6.25)$$

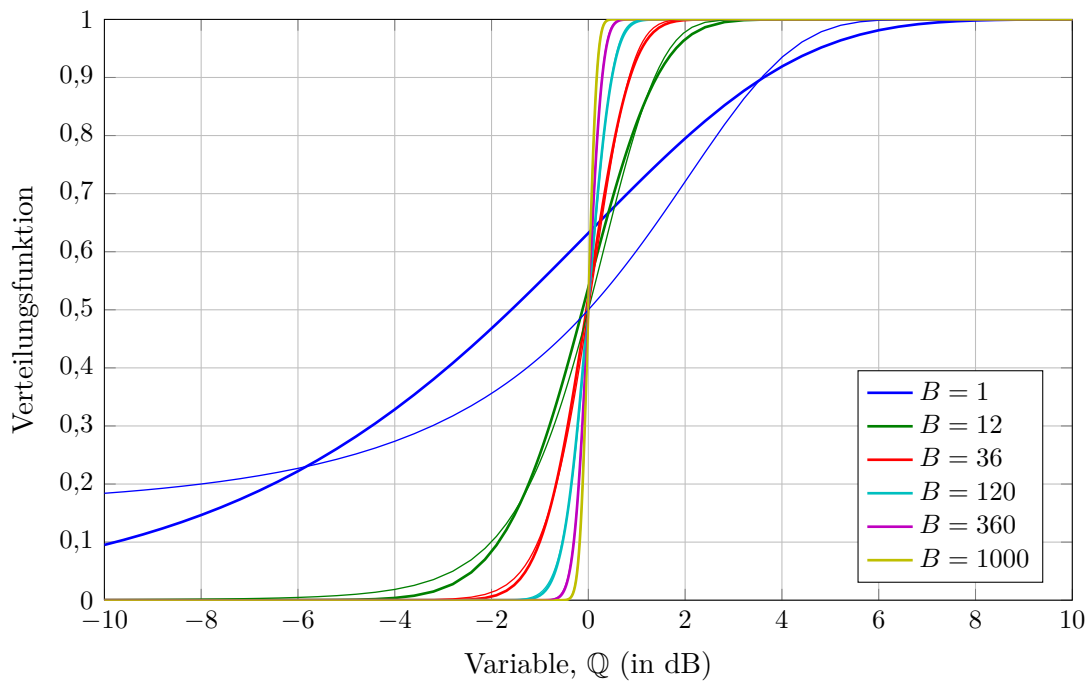
Die Verteilungs- und die Dichtefunktion der Variable \mathbb{Q} sind in [HL08, Kra07] angegeben.

$$\text{cdf}_{\mathbb{Q}}(q) = \Gamma\left(q, B, \frac{1}{B}\right) = \frac{B^B}{(B-1)!} \int_0^q x^{B-1} e^{-Bx} dx \quad (6.26a)$$

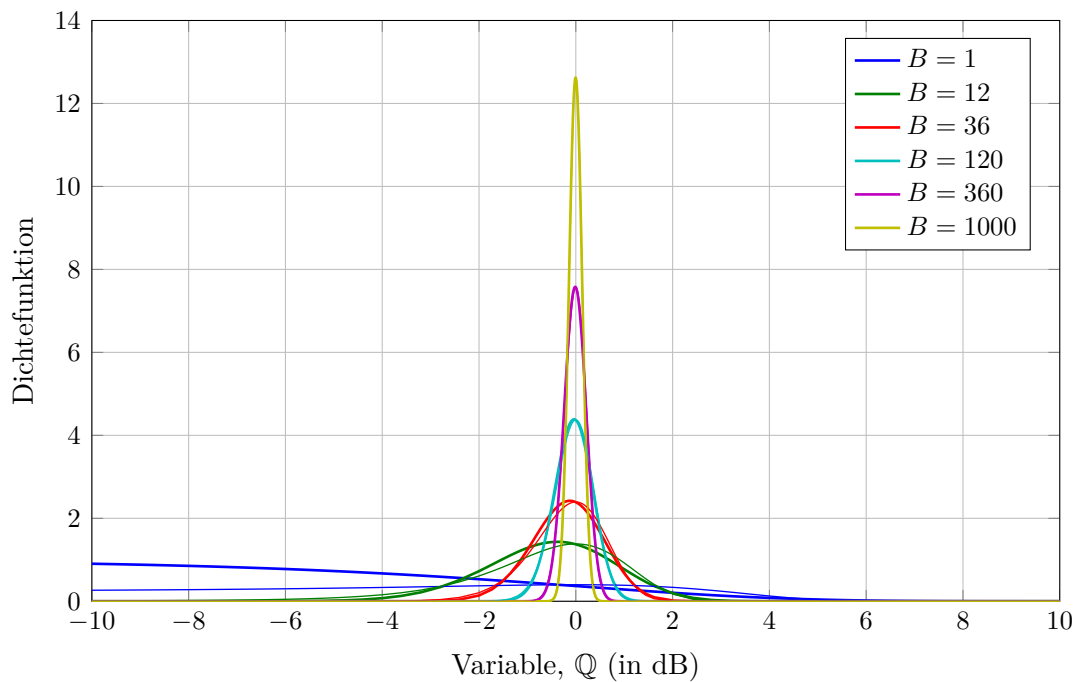
$$\text{pdf}_{\mathbb{Q}}(q) = \gamma\left(q, B, \frac{1}{B}\right) = \frac{B^B}{(B-1)!} q^{B-1} e^{-Bq} \quad (6.26b)$$

Die Funktionen Γ und γ bezeichnen die Verteilungs- und die Dichtefunktion einer Gamma-Verteilung und sind in vielen Mathematikprogrammen verfügbar (z. B. in MATLAB als `gamcdf` und `gampdf`). Die Verteilungs- und die Dichtefunktion der Variable \mathbb{Q} sind in Abbildung 6.7 für unterschiedliche Anzahlen von statistisch unabhängigen Rührerpositionen B dargestellt. Man erkennt, dass der Erwartungswert der Variable \mathbb{Q} stets bei $\langle \mathbb{Q} \rangle_\infty = 1$ liegt. Je größer B , desto geringer wird die Schwankungsbreite der Verteilung von \mathbb{Q} .

Für große B lässt sich die Verteilung von \mathbb{Q} auch sehr gut durch eine Normalverteilung mit dem Mittelwert 1 und der Standardabweichung $1/\sqrt{B}$ annähern. Die Näherung ist mit dünnen Linien ebenfalls in Abbildung 6.7 gezeigt. Für die Fälle $B = 120$, $B = 360$ und



(a) Verteilungsfunktion



(b) Dichtefunktion

Abbildung 6.7: Verteilungs- und Dichtefunktionen der Variable Q für unterschiedliche Anzahlen von statistisch unabhängigen Randbedingungen B in der Modenverwirbelungskammer. Die dicken Linien zeigen die exakte Verteilung der Variable Q (Gamma-Verteilung). Die dünnen Linien zeigen eine Näherung mit einer Normalverteilung. Für die Fälle $B = 120$, $B = 360$ und $B = 1000$ ist praktisch kein Unterschied zwischen der Gamma- und der Normalverteilung erkennbar.

$B = 1000$ ist praktisch kein Unterschied zwischen der Gamma- und der Normalverteilung erkennbar.

Auch für den Erwartungswert der Variable Z existiert eine geschlossene Lösung (siehe [Kra07]).

$$\langle Z \rangle_\infty = -\psi(1) + \psi(B + 1) \quad (6.27)$$

Der griechische Buchstabe ψ bezeichnet hierbei die sogenannte Digammafunktion (siehe [Nie06, AS72]).

Mit Hilfe der Gleichungen (6.25) und (6.27) lässt sich der zweite Term U_{MVK} in Gleichung (6.18), der die statistische Unsicherheit der Messung in der MVK analysiert, neu bestimmen.

$$U_{\text{MVK}} = \frac{Z}{\langle Z \rangle_\infty \mathbb{Q}} \quad (6.28)$$

Genau wie in [Kra07, HL08] wird eine statistische Variable T definiert.

$$T = \frac{Z}{\mathbb{Q}} \quad (6.29)$$

Mit Hilfe der Verteilungsfunktionstechnik [Moo74] können auch die Verteilungs- und die Dichtefunktion von T direkt angegeben werden.

$$\text{cdf}_T(t) = \int_0^\infty \text{cdf}_Z(qt) \text{pdf}_\mathbb{Q}(q) \, dq \quad (6.30a)$$

$$\text{pdf}_T(t) = \int_0^\infty q \text{pdf}_Z(qt) \text{pdf}_\mathbb{Q}(q) \, dq \quad (6.30b)$$

Auch diese Integrale können in eine endliche Summe überführt werden. Die Lösungen wurden bereits in [Hö6] angegeben.

$$\text{cdf}_T(t) = \sum_{n=0}^B \binom{B}{n} (-1)^n \left(\frac{1}{1 + \frac{n}{B}t} \right)^B \quad (6.31a)$$

$$\text{pdf}_T(t) = \sum_{n=1}^B \binom{B}{n} (-1)^{n+1} n \left(\frac{1}{1 + \frac{n}{B}t} \right)^{B+1} \quad (6.31b)$$

Für große B ist auch hier die numerische Auswertung der Summen nicht zielführend, da die Binomialkoeffizienten sehr große Werte annehmen. Dies tritt ab ca. $B = 50$ auf. Stattdessen ist es für große B effizienter, die Integrale in Gleichung (6.30) numerisch auszuwerten. Auch hier kann aus Abbildung 6.5 auf Seite 122 eine obere Integrationsgrenze

von 15 abgeschätzt werden. Die Verteilungs- und die Dichtefunktion der statistischen Variable T sind in Abbildung 6.8 für unterschiedliche Stichprobengrößen B gezeigt.

Da die Schwankungsbreite der Verteilung von \mathbb{Q} für große B sehr klein wird, kann in diesem Fall die Verteilung von T durch die Verteilung der Variable Z angenähert werden. Diese Näherung ist mit dünnen Linien ebenfalls in Abbildung 6.8 dargestellt.

Für die weitere Betrachtung der statistischen Messunsicherheit in der MVK wird die statistische Variable \hat{T} definiert. Dazu wird die Variable T auf den Erwartungswert der Variable Z normiert.

$$\hat{T} = \frac{T}{\langle Z \rangle_\infty} \quad (6.32)$$

Damit entspricht die statistische Unsicherheit der Messung in der Modenverwirbelungskammer der Größe $\mathbb{U}_{\text{MVK}} = \hat{T}$. Die Verteilungs- und die Dichtefunktion von \hat{T} können aus Gleichung (6.30) abgeleitet werden.

$$\text{cdf}_{\hat{T}}(\hat{t}) = \text{cdf}_T(\hat{t} \cdot \langle Z \rangle_\infty) \quad (6.33a)$$

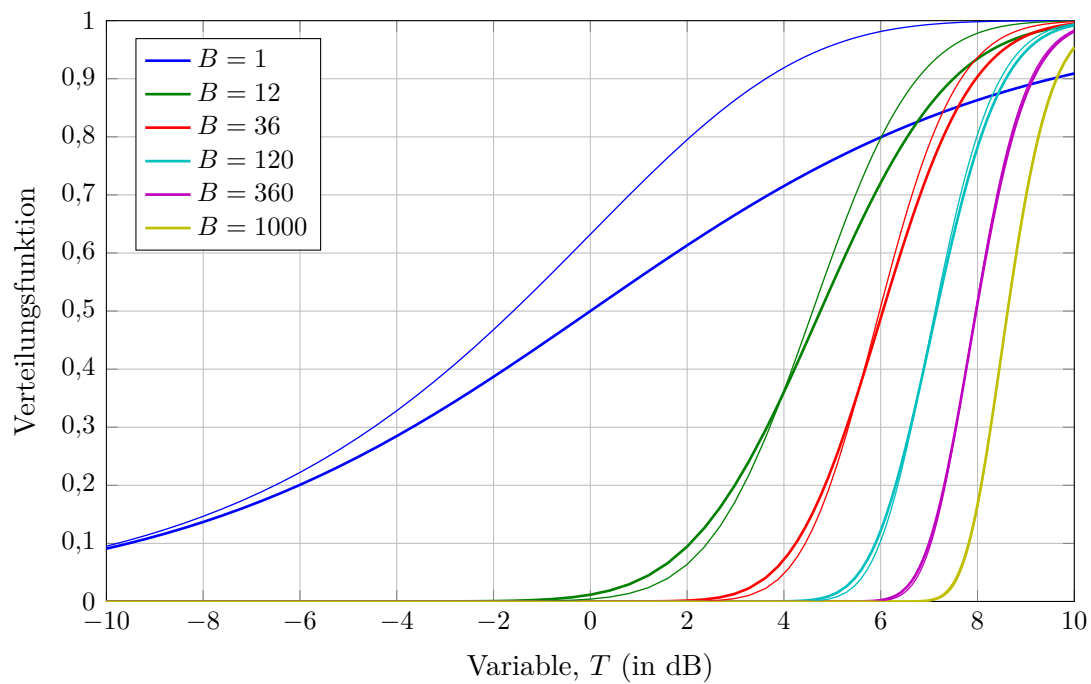
$$\text{pdf}_{\hat{T}}(\hat{t}) = \text{pdf}_T(\hat{t} \cdot \langle Z \rangle_\infty) \cdot \langle Z \rangle_\infty \quad (6.33b)$$

Sie sind in Abbildung 6.9 für unterschiedliche Stichprobengrößen B dargestellt. Man erkennt, dass die Variable \hat{T} einen Zentralwert von etwa Eins hat und die Schwankungsbreite für große B schnell kleiner wird. Gegenüber der statistischen Variable W ist der Zentralwert aber nicht mehr stets exakt Eins. Das lässt sich durch die Normierung von \hat{T} auf den Erwartungswert von Z erklären, der nicht dem Zentralwert von T entspricht.

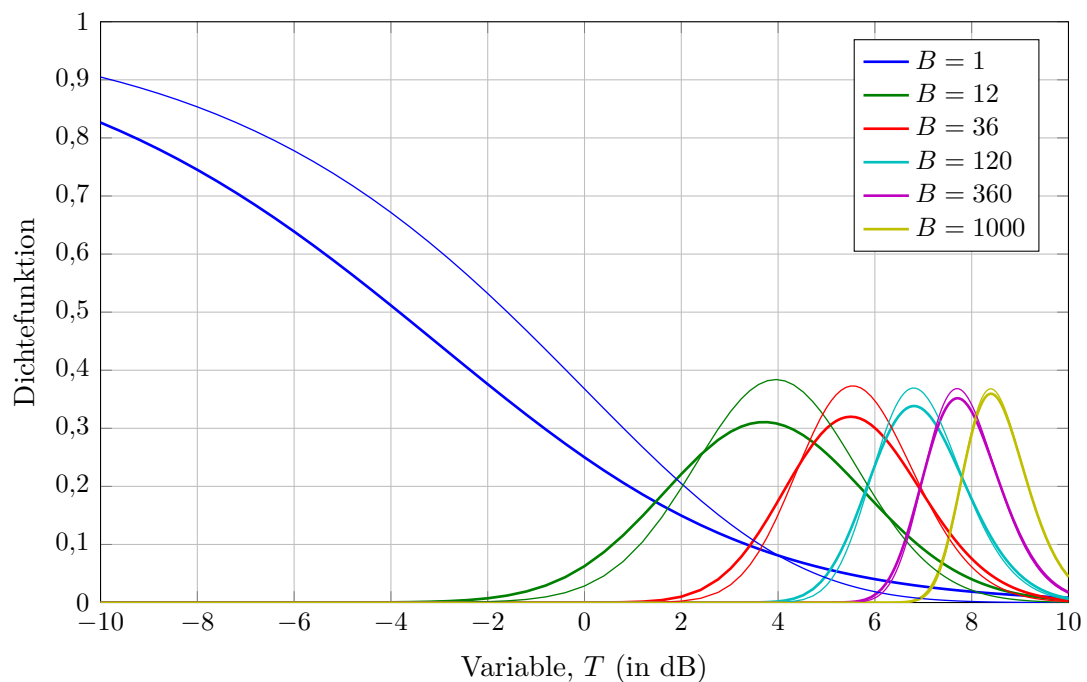
Interessanter für die praktische Anwendung sind die Perzentile der Variable \hat{T} , die als dicke Linien in Abbildung 6.10 gezeigt sind. Im Vergleich mit den Perzentilen der Variable W zeigt sich mit wachsendem B eine deutlich geringere Schwankungsbreite. Das heißt, dass die statistische Unsicherheit der Messung in der MVK deutlich reduziert werden kann, wenn man sich nicht auf den Maximalwert des Betragsquadrats einer Feldstärkekomponente, sondern auf deren Mittelwert bezieht.

Im Fall $B = 1$ mit nur einer vermessenen Rührerstellung gibt es keine Statistik und der Mittelwert entspricht dem Maximalwert. Deshalb ist in diesem Fall auch $Z = \mathbb{Q}$ (vergleiche Abbildung 6.5a und 6.7a), $\langle Z \rangle_\infty = 1$ und somit auch $W = T = \hat{T}$ (vergleiche Abbildung 6.6a, 6.8a und 6.9a). Dementsprechend sind für $B = 1$ auch die Perzentile von W und \hat{T} gleich (siehe Abbildung 6.10), da es bei Gleichheit von Maximal- und Mittelwert keine Rolle spielt, ob man sich bei der Messung auf das Maximum oder den Mittelwert bezieht.

Für einige typische Anzahlen von gemessenen Rührerpositionen sind die verschiedenen Perzentile von \hat{T} in Tabelle 6.2 zusammengefasst. Im Vergleich mit Tabelle 6.1 zeigt sich,

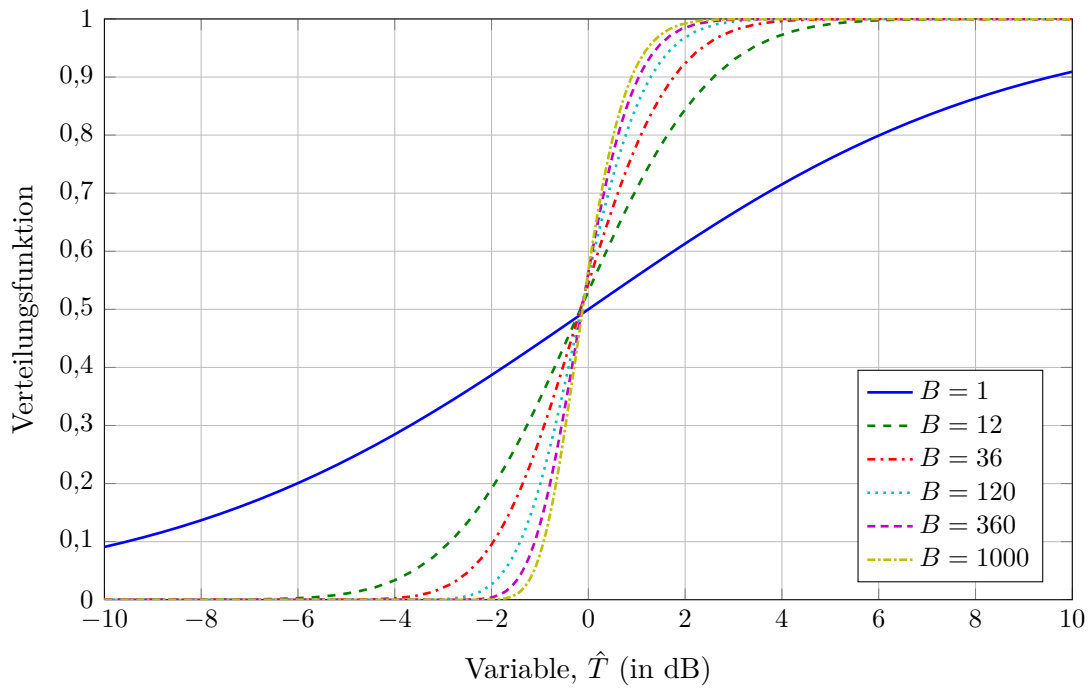


(a) Verteilungsfunktion

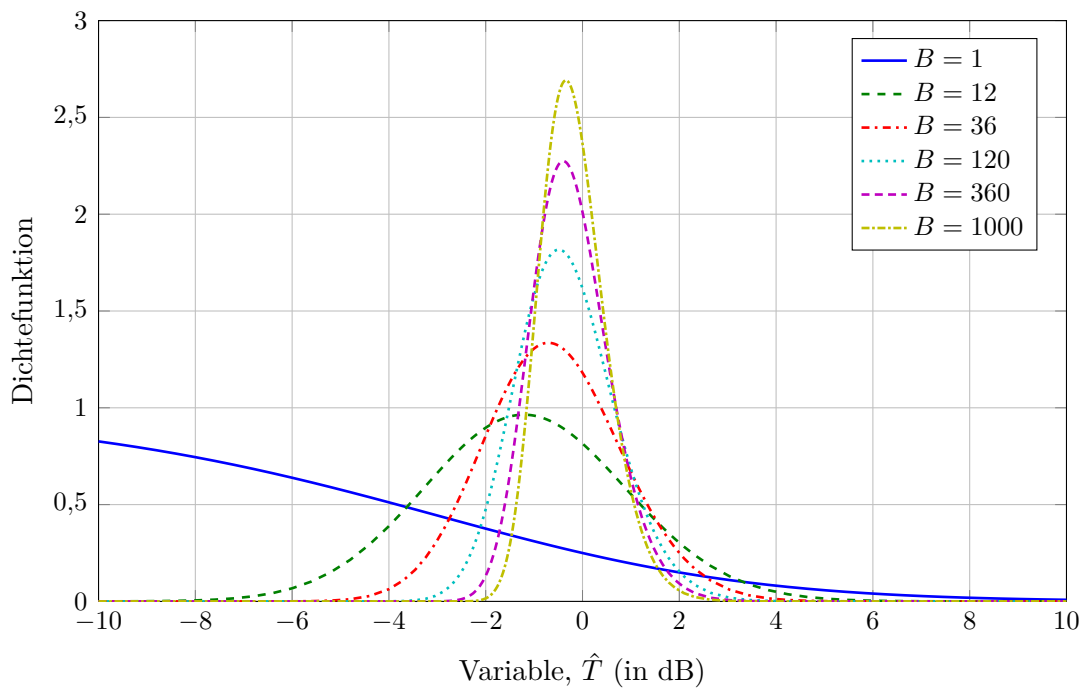


(b) Dichtefunktion

Abbildung 6.8: Verteilungs- und Dichtefunktionen der Variable T für unterschiedliche Anzahlen von statistisch unabhängigen Randbedingungen B in der Modenverwirbelungskammer. Die dicken Linien zeigen die Verteilung der Variable T , die dünnen Linien zeigen eine Näherung mit der Variable Z . Für den Fall $B = 1000$ ist praktisch kein Unterschied zwischen der Verteilung der Variable T und der Variable Z erkennbar.



(a) Verteilungsfunktion



(b) Dichtefunktion

Abbildung 6.9: Verteilungs- und Dichtefunktionen der Variable \hat{T} für unterschiedliche Anzahlen von statistisch unabhängigen Randbedingungen B in der Modenverwirbelungskammer

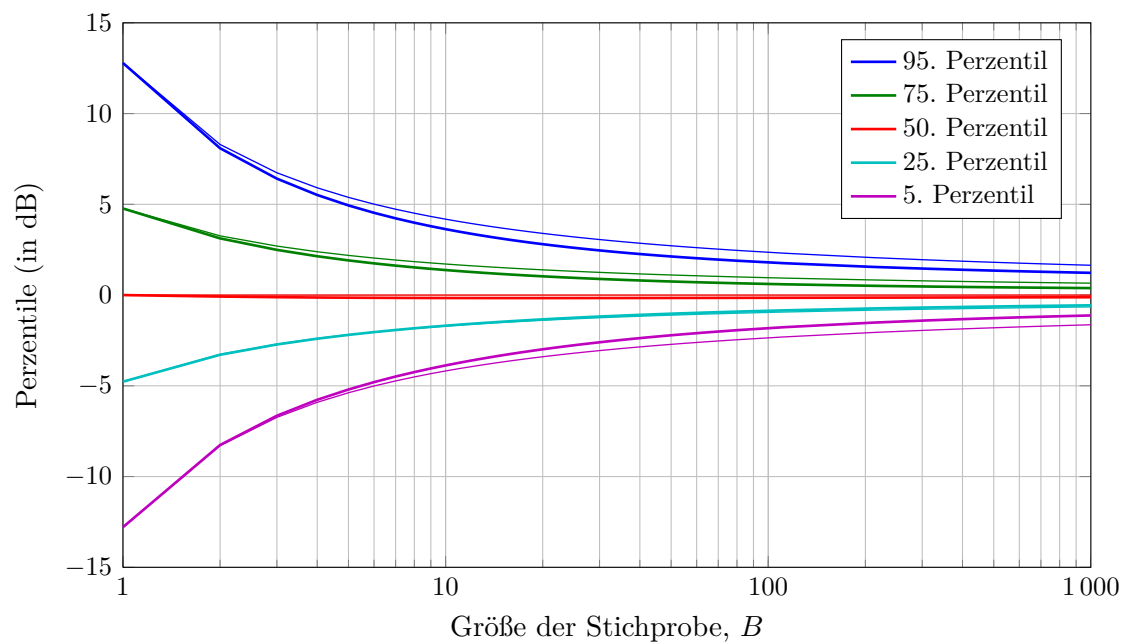


Abbildung 6.10: Perzentile der Variablen \hat{T} und W für unterschiedliche Anzahlen von statistisch unabhängigen Randbedingungen B in der Modenverwirbelungskammer. Die dicken Linien zeigen die Perzentile von \hat{T} , die dünnen Linien die Perzentile von W . Die Verteilung W entspricht der statistischen Messunsicherheit in der MVK beim Bezug auf das Maximum des Betragsquadrats einer Feldstärkekomponente. Die Verteilung von \hat{T} entspricht dagegen der Messunsicherheit beim Bezug auf den entsprechenden Mittelwert.

Tabelle 6.2: Perzentile der Variable \hat{T} für unterschiedliche Anzahlen von statistisch unabhängigen Randbedingungen B in der Modenverwirbelungskammer

B	95 %	75 %	50 %	25 %	5 %
1	12,8	4,8	0,0	-4,8	-12,8
12	3,4	1,3	-0,2	-1,6	-3,6
36	2,3	0,8	-0,2	-1,1	-2,5
120	1,7	0,6	-0,1	-0,8	-1,7
360	1,7	0,6	-0,1	-0,8	-1,7
1000	1,7	0,6	-0,1	-0,8	-1,7

dass durch den Bezug auf den Mittelwert der Feldstärke die statistische Unsicherheit mit steigendem B deutlich gesenkt werden kann. Bei $B = 12$ beträgt der Vorteil ca. $\pm 0,4$ dB, bei $B = 36$ schon $\pm 0,5$ dB und bei $B = 120$ etwa $\pm 0,6$ dB.

6.2.3.3 Weitere statistische Unsicherheiten

Bisher nicht betrachtet ist die weitere statistische Unsicherheit, die allein durch die zufälligen Fehler der beteiligten Geräte entsteht. Hier ist typischerweise mit weiteren ± 1 dB zu rechnen [TY09].

7 Zusammenfassung

7.1 Ergebnisse

Basierend auf der Beschreibung deterministischer elektromagnetischer Felder durch eine einzelne ebene Welle und der Beschreibung statistischer elektromagnetischer Felder durch die Überlagerung vieler ebener Wellen wurde die Einkopplung solcher Felder in eine gleichförmige und verlustlose Doppelleitung untersucht. Besonderer Wert wurde auf das Betragsquadrat des eingekoppelten Gegentaktstromes gelegt, da diese Größe proportional zur eingekoppelten Leistung ist und eine vorteilhafte mathematische Beschreibung erlaubt. Ein möglicher Gleichtaktstrom wurde vernachlässigt.

Die Leitung dient dabei als Modell eines einfachen Prüflings zur Nachbildung gestrahlter Störfestigkeitstests. Da für typische Störmechanismen oft der Maximalwert der Einkopplung ausschlaggebend ist, wurden für den Fall der deterministischen Felder die effektivste Einkoppelrichtung sowie die effektivste Polarisierung und das sich daraus ergebende Supremum der Einkopplung erstmalig analytisch bestimmt (siehe Gleichung (4.28) auf Seite 58).

Für die Einkopplung statistischer Felder wurde ebenfalls eine bisher nicht existierende geschlossene Lösung für den Erwartungswert des Betragsquadrats des eingekoppelten Stromes über alle möglichen Einfallrichtungen, Polarisierungen und Phasenlagen der einfallenden ebene Wellen hergeleitet. Diese allgemeine Lösung (siehe Gleichung (5.2) auf Seite 73), die entlang einer mit beliebigen Widerständen abgeschlossenen Leitung gültig ist, wurde für zahlreiche Sonderfälle vereinfacht. Die statistische Verteilung des eingekoppelten Stromes entspricht der bekannten Verteilung einer Feldkomponente des statistischen elektromagnetischen Feldes. Damit kann auch das statistische Maximum des Betragsquadrats des eingekoppelten Stromes angegeben werden (siehe Gleichung (5.54b) auf Seite 95). Diese Ergebnisse wurden anschließend auf die eingekoppelte Spannung sowie auf eine Einfachleitung über einer perfekt leitenden Ebene verallgemeinert und mit experimentellen Daten verglichen.

Für die praktische Anwendung wurden diese Erkenntnisse genutzt, um erstmalig einen geschlossenen Ausdruck für die Richtwirkung der Einkopplung in eine Leitung zu bestimmen (siehe Gleichung (6.2b) auf Seite 107) und einen Vergleich zwischen Störfestigkeitstests in

herkömmlichen Testumgebungen und Modenverwirbelungskammern auf theoretischer Basis zu ermöglichen. Da der Prüfling in einer herkömmlichen Testumgebung aus Zeitgründen meist nur aus vier Einfallrichtungen in einer Ebene mit jeweils zwei Polarisationen bestrahlt wird, ist das tatsächlich erreichte Maximum der Einkopplung in der vermeintlich deterministischen Testumgebung ebenfalls statistischen Schwankungen unterworfen.

Besonders bei elektrisch langen Leitungen, die länger als ein Viertel der Wellenlänge der Anregung sind, kann die statistische Unsicherheit in der herkömmlichen Testumgebung größer sein als die statistische Unsicherheit in einer Modenverwirbelungskammer, in der sie allein von der Anzahl der untersuchten, statistisch unabhängigen Randbedingungen abhängt. Ein Störfestigkeitstest in einer Modenverwirbelungskammer ist bei elektrisch großen Prüflingen deutlich robuster darin, ein Maximum der Einkopplung zu finden, welches dem tatsächlichen Supremum der Einkopplung nahe kommt.

7.2 Ausblick

Reale Prüflinge besitzen meist mehr oder weniger stark ausgeprägte Nichtlinearitäten. Um beim Vergleich unterschiedlicher Messumgebungen auch den Einfluss solcher Nichtlinearitäten zu berücksichtigen, sind weitere Untersuchungen im Zeitbereich nötig. Die Modellierung eines einfachen Prüflings durch eine Leitung kann zunächst beibehalten werden, indem die bisher linearen Abschlusswiderstände durch entsprechend nichtlineare Elemente oder Baugruppen ersetzt werden.

Von weiterem Interesse für die praktische Anwendung ist die Untersuchung der statistischen Einkopplung in kompliziertere Leitungsstrukturen. Dazu zählen ungleichförmige Leitungen oder Mehrfachleitungen, wie sie z. B. in Kabelbäumen im Automobil- oder Luftfahrtbereich auftreten. Für reale Kabelbaumgeometrien müsste dazu das Modell des statistischen Feldes mit einem statistischen Kabelbaummodell [Ste06] verknüpft werden.

Ein erster Ansatz dazu ist es, entsprechende Simulationen der statistischen Einkopplung mit Hilfe der Momentenmethode zu realisieren. Die numerische Simulation ermöglicht die Untersuchung von Geometrien, für die keine geschlossenen analytischen Lösungen verfügbar sind. Der Ansatz ebener Wellen zur Darstellung des Feldes in einer Modenverwirbelungskammer kann ebenfalls wiederverwendet werden. Aufgrund der Vielzahl der zu betrachtenden Einfallrichtungen und Polarisationen der ebenen Welle sind dazu allerdings schnelle Löser [SBS12] notwendig, die sich zur Zeit noch in der Entwicklung befinden.

Literaturverzeichnis

- [APG80] AGRAWAL, A. K. ; PRICE, H. J. ; GURBAXANI, S. H.: Transient Response of Multiconductor Transmission Lines Excited by a Nonuniform Electromagnetic Field. In: *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility* 22 (1980), Mai, Nr. 2, S. 119 – 129
- [AS72] ABRAMOWITZ, Milton ; STEGUN, Irene A.: *Handbook of Mathematical Functions*. Washington D.C., USA : Dover Publications Inc., 1972. – 1046 S. – ISBN 0318117304. – <http://www.math.sfu.ca/~cbm/aands/>
- [AW98] ARNAUT, Luk R. ; WEST, P. D.: Evaluation of the NPL Untuned Stadium Reverberation Chamber Using Mechanical and Electronic Stirring Techniques / National Physical Laboratory. Teddington, UK, August 1998 (11). – NPL Report CEM. – ISSN 1369–6742
- [Bau91] BAUM, Carl E.: The Microwave-Oven Theorem: All Power to the Chicken. 1991 (Memo 3). – Microwave Memos
- [BLT78] BAUM, Carl E. ; LIU, T. K. ; TESCHE, Frederick M.: On the Analysis of General Multiconductor Transmission Line Networks / Air Force Weapons Laboratory. Kirtland Air Force Base, Albuquerque, NM, USA, 1978 (350). – Interaction Note
- [BS85] BRONSTEIN, I. N. ; SEMENDJAJEW, K. A.: *Taschenbuch der Mathematik*. 22. Leipzig : BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1985
- [DDM04] DE DONCKER, Ph. ; MEYS, R.: Electromagnetic Coupling to Transmission Lines under Complex Illumination. In: *Electronics Letters* 40 (2004), Nr. 1, 11-13. <http://dx.doi.org/10.1049/el:20040039>. – DOI 10.1049/el:20040039
- [DIN11a] DIN DEUTSCHES INSTITUT FÜR NORMUNG E.V. UND VDE VERBAND DER ELEKTROTECHNIK ELEKTRONIK INFORMATIONSTECHNIK E.V. (Hrsg.): *Elektromagnetische Verträglichkeit (EMV) – Teil 4-21: Prüf- und Messverfahren – Verfahren für die Prüfung in der Modenverwirbelungskammer (IEC 61000-4-21:2011)*. 2. Berlin, Frankfurt: DIN Deutsches Institut für Normung e.V. und VDE Verband der Elektrotechnik Elektronik Informationstechnik e.V., Dezember 2011

- [DIN11b] DIN DEUTSCHES INSTITUT FÜR NORMUNG E.V. UND VDE VERBAND DER ELEKTROTECHNIK ELEKTRONIK INFORMATIONSTECHNIK E.V. (Hrsg.): *Elektromagnetische Verträglichkeit (EMV) – Teil 4-3: Prüf- und Messverfahren – Prüfung der Störfestigkeit gegen hochfrequente elektromagnetische Felder (IEC 61000-4-3:2006 + A1:2007 + A2:2010); Deutsche Fassung EN 61000-4-3:2006 + A1:2008 + A2:2010*. Berlin, Frankfurt: DIN Deutsches Institut für Normung e.V. und VDE Verband der Elektrotechnik Elektronik Informationstechnik e.V., April 2011
- [Dun90] DUNN, John M.: Local, High-Frequency Analysis of the Fields in a Mode-Stirred Chamber. In: *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility* 32 (1990), Februar, Nr. 1, S. 53 – 58
- [Hö6] HÖIJER, Magnus: Radiated Susceptibility Tests in Reverberation Chamber / FOI Swedish Defence Research Agency. Linköping, Schweden, Juni 2006 (FOI-R-2007-SE). – Scientific Report. – ISSN 1650-1942
- [Har61] HARRINGTON, Roger F.: *Time-Harmonic Electromagnetic Fields*. New York, USA : John Wiley & Sons, 1961 (IEEE Press Series on Electromagnetic Wave Theory). – ISBN 0-471-20806-X
- [HBL03] HÖIJER, Magnus ; BÄCKSTRÖM, Mats ; LORÉN, J.: Angular Patterns in Low Level Coupling Measurements and in High Level Radiated Susceptibility Testing. In: *20th International Zurich Symposium on Electromagnetic Compatibility*. Zürich, Schweiz, Februar 2003
- [Höi06] HÖIJER, Magnus: Maximum Power Available to Stress Onto the Critical Component in the Equipment Under Test When Performing a Radiated Susceptibility Test in the Reverberation Chamber. In: *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility* 48 (2006), Mai, Nr. 2, S. 372 – 384. <http://dx.doi.org/10.1109/TEMC.2006.874665>. – DOI 10.1109/TEMC.2006.874665. – ISSN 0018-9375
- [Höi11] HÖIJER, Magnus: Including Directivity in Reverberation Chamber Radiated Susceptibility Testing. In: *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility* 53 (2011), Mai, Nr. 2, S. 283 – 287. <http://dx.doi.org/10.1109/TEMC.2011.2119489>. – DOI 10.1109/TEMC.2011.2119489. – ISSN 0018-9375
- [Hil95] HILL, David A.: Spatial Correlation Function for Fields in a Reverberation Chamber. In: *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility* 37 (1995), Februar, Nr. 1, S. 138

-
- [Hil98a] HILL, David A.: *Electromagnetic Theory of Reverberation Chambers* / National Institute of Standards and Technology. Boulder, CO, USA, 1998 (1506). – Technical Note
- [Hil98b] HILL, David A.: Plane Wave Integral Representation for Fields in Reverberation Chambers. In: *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility* 40 (1998), August, Nr. 3, S. 209 – 217
- [Hil99] HILL, David A.: Linear Dipole Response in a Reverberation Chamber. In: *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility* 41 (1999), November, Nr. 4, S. 365 – 368
- [Hil05] HILL, David A.: Boundary Fields in Reverberation Chambers. In: *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility* 47 (2005), Mai, Nr. 2, S. 281 – 290
- [HL02] HILL, David A. ; LADBURY, John M.: Spatial-Correlation Functions of Fields and Energy Density in a Reverberation Chamber. In: *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility* 44 (2002), Februar, Nr. 1, S. 95 – 101
- [HL08] HÖIJER, Magnus ; LUNDÉN, Olof: Radiated Susceptibility Tests in the Reverberation Chamber in Practice / FOI Swedish Defence Research Agency. Linköping, Schweden, 2008 (FOI-R-2632-SE). – Scientific Report
- [HMO⁺94] HILL, David A. ; MA, Mark T. ; ONDREJKA, Arthur R. ; RIDDLE, Bill F. ; CRAWFORD, Myron L. ; JOHNK, Robert T.: Aperture Excitation of Electrically Large, Lossy Cavities. In: *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility* 36 (1994), August, Nr. 3, S. 169–178
- [HSJ98] HOLLAND, Richard ; ST. JOHN, Richard H.: *Statistical Response of EM-Driven Cables Inside an Overmoded Enclosure*. Albuquerque, NM, USA, Mai 1998 (544). – Interaction Note
- [HSJ99] HOLLAND, Richard ; ST. JOHN, Richard H.: *Statistical Electromagnetics*. Philadelphia, PA, USA : Taylor & Francis, 1999 (Electromagnetics Library). – ISBN 1-56032-856-8
- [Kin55] KING, Ronold Wyeth P.: *Transmission-Line Theory*. New York : McGraw-Hill Book Company, 1955
- [Kra07] KRAUTHÄUSER, Hans G.: *Magdeburger Forum zur Elektrotechnik*. Bd. 17: *Grundlagen und Anwendungen von Modenverwirbelungskammern*. 1. Magdeburg : Res Electricae Magdeburgenses, 2007. – ISBN 978-3-929757-43-9

- [Kra11] KRAUTHÄUSER, Hans G.: Statistical Analysis of the Correlation of Emission Limits for Established and Alternative Test Sites. In: *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility* 53 (2011), November, Nr. 4, S. 863 –875. <http://dx.doi.org/10.1109/TEM.C.2010.2102764>. – DOI 10.1109/TEM.C.2010.2102764. – ISSN 0018–9375
- [Kra12] KRAUTHÄUSER, Hans G.: Number of Samples Required to Meet a Field Inhomogeneity Limit With Given Confidence in Reverberation Chambers. In: *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility* PP (2012), Nr. 99, S. 1 – 8. <http://dx.doi.org/10.1109/TEM.C.2012.2195497>. – DOI 10.1109/TEM.C.2012.2195497. – ISSN 0018–9375. – verfügbar via IEEE Early Access
- [Lad99] LADBURY, John M.: Monte Carlo Simulation of Reverberation Chambers. In: *Digital Avionics Systems Conference* Bd. 2. St Louis, MO, USA, Oktober 1999, S. 10.C.1–1–10.C.1–8
- [LB00] LUNDÉN, Olof ; BÄCKSTRÖM, Mats: Stirrer Efficiency in FOA Reverberation Chambers. Evaluation of Correlation Coefficients and Chi-Squared Tests. In: IEEE (Hrsg.): *International Symposium on Electromagnetic Compatibility* Bd. 1. Washington D.C., USA, August 2000, S. 11 – 16
- [LK99] LADBURY, John M. ; KOEPKE, Galen H.: Reverberation Chamber Relationships: Corrections and Improvements or Three Wrongs Can (almost) Make a Right. In: IEEE (Hrsg.): *International Symposium on Electromagnetic Compatibility* Bd. 1. Seattle, WA, USA, August 1999, S. 1 – 6
- [Mag08] MAGDOWSKI, Mathias: *Entwicklung und Validierung eines Werkzeugs zur Berechnung der elektromagnetischen Einkopplung von stochastischen Feldern in Leitungsstrukturen*. 1. Magdeburg : Nitsch, Jürgen and Styczynski, Zbigniew Antoni, 2008 (Res Electricae Magdeburgenses 29). – ISBN 978–3–940961–28–0
- [MBCD02] MUSSO, Luca ; BERAT, V. ; CANAVERO, Flavio G. ; DEMOULIN, B.: A Plane Wave Monte Carlo Simulation Method for Reverberation Chambers. In: IEEE (Hrsg.): *International Symposium on Electromagnetic Compatibility*. Sorrento, Italien, September 2002, S. 45 – 50
- [MH09] MAGDOWSKI, Mathias ; HILL, David A.: Corrections to 'Boundary Fields in Reverberation Chambers'. In: *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility* 51 (2009), Mai, Nr. 2, S. 420 – 421. <http://dx.doi.org/10.1109/TEM.C.2009.2012870>. – DOI 10.1109/TEM.C.2009.2012870. – ISSN 0018–9375
- [MN04] MONTROSE, Mark I. ; NAKAUCHI, Edward M.: *Testing for EMC Compliance - Approaches and Techniques*. 1. Piscataway, NJ : IEEE Press, 2004. –

-
- 475 S. – ISBN 0-471-43308-X. – sponsored by the IEEE Electromagnetic Compatibility Society
- [Moo74] MOOD, Alexander M.: *Introduction to the Theory of Statistics*. 3. US : McGraw-Hill, 1974. – ISBN 0-07-042864-6
- [MTV09] MAGDOWSKI, Mathias ; TKACHENKO, Sergey V. ; VICK, Ralf: Simulation of the Stochastic Electromagnetic Field Coupling to a Transmission Line Using a Monte-Carlo Method. In: *ESA Workshop on Aerospace EMC*. Florenz, Italien, März 2009
- [MTV11] MAGDOWSKI, Mathias ; TKACHENKO, Sergey V. ; VICK, Ralf: Coupling of Stochastic Electromagnetic Fields to a Transmission Line in a Reverberation Chamber. In: *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility* 53 (2011), Mai, Nr. 2, S. 308–317. <http://dx.doi.org/10.1109/TEMC.2010.2097267>. – DOI 10.1109/TEMC.2010.2097267. – ISSN 0018-9375
- [Mus03] MUSSO, Luca: *Assessment of Reverberation Chamber Testing for Automotive Applications*. Villeneuve-d'Ascq, TELICE Laboratory, L'Université des Sciences et Technologies de Lille, PhD Thesis, Februar 2003
- [MV10a] MAGDOWSKI, Mathias ; VICK, Ralf: A Monte-Carlo Simulation of Mode-Stirred Chambers with Standing Waves. In: IEEE (Hrsg.): *EMC Europe 2010*. Breslau, Polen, September 2010. – ISBN 978-83-7493-426-8, S. 287 – 292
- [MV10b] MAGDOWSKI, Mathias ; VICK, Ralf: Theoretical Considerations about the Determination of Statistically Independent Stirrer Positions of Mode-Stirred Chambers. In: IEEE (Hrsg.): *EMC Europe 2010*. Breslau, Polen, September 2010. – ISBN 978-83-7493-426-8, S. 185 – 190
- [Nie06] NIELSEN, Niels: *Handbuch der Theorie der Gammafunktion*. Leipzig : B. G. Teubner, 1906. – 326 S. – <http://www.archive.org/details/handbuchgamma00nielrich>
- [Pau94] PAUL, Clayton R.: *Analysis of Multiconductor Transmission Lines*. New York, USA : John Wiley & Sons, 1994 (Wiley series in microwave and optical engineering). – ISBN 0-471-02080-X
- [Per95] PEREZ, Reinaldo (Hrsg.): *Handbook of Electromagnetic Compatibility*. 1. London : Academic Press, 1995. – ISBN 0-12-550710-0
- [SBL02] SILFVERSKIÖLD, Stefan ; BÄCKSTRÖM, Mats ; LORÉN, Jörgen: Microwave Field-to-Printed-Circuit-Board Coupling Measurements in Reverberation

- Chamber / FOI Swedish Defence Research Agency. Linköping, Schweden, Februar 2002 (FOI-R-0425-SE). – Technical report. – ISSN 1650-1942
- [SBS12] SCHRÖDER, Arne ; BRÜNS, Heinz-D. ; SCHUSTER, Christian: Beschleunigung schneller Löser in der Momentenmethode bei Einkopplungsproblemen mit Mehrfachanregung. In: GARBE, Heyno (Hrsg.): *EMV 2012 Internationale Fachmesse und Kongress für Elektromagnetische Verträglichkeit*. Düsseldorf : VDE Verlag, Februar 2012. – ISBN 978-3-8007-3405-4, S. 37 – 44
- [Ste06] STEINMETZ, Torsten: *Ungleichförmige und zufällig geführte Mehrfachleitungen in komplexen, technischen Systemen*. 1. Magdeburg : Nitsch, Jürgen and Styczynski, Zbigniew Antoni, 2006 (Res Electricae Magdeburgenses 12). – ISBN 978-3-929757-98-2. – Nummerierung geändert
- [TY09] TOSAKA, Toshihide ; YAMANAKA, Yukio: Round Robin Test of EMI Measurement in the 1 - 18 GHz Range. In: IEICE (Hrsg.): *International Symposium on Electromagnetic Compatibility* Bd. 1. Kyoto, Japan, Juli 2009, S. 7 – 11
- [WHH02] WILSON, Perry F. ; HILL, David A. ; HOLLOWAY, Christopher: On Determining the Maximum Emissions From Electrically Large Sources. In: *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility* 44 (2002), Februar, Nr. 1, S. 79 – 86
- [ZZY⁺12] ZHANG, Huabin ; ZHAO, Xiang ; YAN, Liping ; LIU, Changjun ; HUANG, Kama: Some Amendments to 'Field-to-Wire Coupling in an Electrically Large Cavity: A Semianalytic Solution'. In: *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility* 54 (2012), Februar, Nr. 1, S. 232 –234. <http://dx.doi.org/10.1109/TEM.2011.2180910>. – DOI 10.1109/TEM.2011.2180910. – ISSN 0018-9375

A Anhang

A.1 Verteilungs- und Dichtefunktionen der elektrischen Feldgrößen

Die Dichtefunktionen des Real- und Imaginärteils, des Betrags und des Betragsquadrats der E -Feldkomponenten sowie des Betrags und des Betragsquadrats der gesamten E -Feldstärke können in Bezug auf die kammer-spezifische Konstante E_0 (siehe Gleichung (3.6) auf Seite 23) wie folgt angegeben werden [Hil98b, Kra07].

$$\text{pdf}_{\Re\{E_R\}}(e) = \text{pdf}_{\Im\{E_R\}}(e) = \frac{1}{E_0} \sqrt{\frac{3}{\pi}} e^{-\frac{3e^2}{E_0^2}} \quad (\text{A.1a})$$

$$\text{pdf}_{|E_R|}(e) = \frac{6e}{E_0^2} e^{-\frac{3e^2}{E_0^2}} \quad (\text{A.1b})$$

$$\text{pdf}_{|E_R|^2}(e) = \frac{3}{E_0^2} e^{-\frac{3e}{E_0^2}} \quad (\text{A.1c})$$

$$\text{pdf}_{|\mathbf{E}|}(e) = \frac{27e^5}{E_0^6} e^{-\frac{3e^2}{E_0^2}} \quad (\text{A.1d})$$

$$\text{pdf}_{|\mathbf{E}|}(e) = \frac{27e^2}{2E_0^6} e^{-\frac{3e}{E_0^2}} \quad (\text{A.1e})$$

Die entsprechenden Verteilungsfunktionen lauten:

$$\text{cdf}_{\Re\{E_R\}}(e) = \text{cdf}_{\Im\{E_R\}}(e) = \frac{1}{2} \left[1 + \text{erf} \left(\frac{\sqrt{3}e}{E_0} \right) \right], \quad (\text{A.2a})$$

$$\text{cdf}_{|E_R|}(e) = 1 - e^{-\frac{3e^2}{E_0^2}}, \quad (\text{A.2b})$$

$$\text{cdf}_{|E_R|^2}(e) = 1 - e^{-\frac{3e}{E_0^2}}, \quad (\text{A.2c})$$

$$\text{cdf}_{|\mathbf{E}|}(e) = 1 - \left(1 + \frac{3e^2}{E_0^2} + \frac{9e^4}{2E_0^4} \right) e^{-\frac{3e^2}{E_0^2}}, \quad (\text{A.2d})$$

$$\text{cdf}_{|\mathbf{E}|}(e) = 1 - \left(1 + \frac{3e}{E_0^2} + \frac{9e^2}{2E_0^4} \right) e^{-\frac{3e}{E_0^2}}. \quad (\text{A.2e})$$

Dabei bezeichnet erf die Fehlerfunktion (engl. error function).

Mit Bezug auf die kammer-spezifische Konstante H_0 im Sinne einer magnetischen Feldstärke (siehe Gleichung (3.11) auf Seite 24) gelten diese Gleichungen auch für die entsprechenden Kenngrößen der magnetischen Feldstärke \mathbf{H} .

A.2 Verteilungs- und Dichtefunktionen der auf ihren Erwartungswert normierten elektrischen Feldgrößen

Die Erwartungswerte der Kenngrößen der elektrischen Feldstärke lassen sich aus den Dichtefunktionen in Gleichung (A.1) bestimmen.

$$\langle \Re \{E_R\} \rangle_\infty = \langle \Im \{E_R\} \rangle_\infty = \int_{-\infty}^{\infty} e \, \text{pdf}_{\Re\{E_R\}}(e) \, de = \int_{-\infty}^{\infty} e \, \text{pdf}_{\Im\{E_R\}}(e) \, de = 0 \quad (\text{A.3a})$$

$$\langle |E_R| \rangle_\infty = \int_0^{\infty} e \, \text{pdf}_{|E_R|}(e) \, de = \sqrt{\frac{\pi}{12}} E_0 \quad (\text{A.3b})$$

$$\langle |E_R|^2 \rangle_\infty = \int_0^{\infty} e \, \text{pdf}_{|E_R|^2}(e) \, de = \frac{E_0^2}{3} \quad (\text{A.3c})$$

$$\langle |\mathbf{E}| \rangle_\infty = \int_0^{\infty} e \, \text{pdf}_{|\mathbf{E}|}(e) \, de = \frac{15}{16} \sqrt{\frac{\pi}{3}} E_0 \quad (\text{A.3d})$$

$$\langle |\mathbf{E}|^2 \rangle_\infty = \int_0^{\infty} e \, \text{pdf}_{|\mathbf{E}|^2}(e) \, de = E_0^2 \quad (\text{A.3e})$$

Die Dichtefunktion einer statistischen Variable (z. B. $|E_R|$) kann entsprechend der Transformation

$$\text{pdf}_{\frac{|E_R|}{\langle |E_R| \rangle_\infty}}(e) = \langle |E_R| \rangle_\infty \cdot \text{pdf}_{|E_R|}(e \cdot \langle |E_R| \rangle_\infty) \quad (\text{A.4})$$

auf den Erwartungswert $\langle |E_R| \rangle_\infty$ dieser Variable normiert werden.

Normiert man die Dichtefunktion des Betrags und des Betragsquadrats der E -Feldkomponenten sowie des Betrags und des Betragsquadrats der gesamten E -Feldstärke aus Gleichung (A.1) auf ihren jeweiligen Erwartungswert aus Gleichung (A.3), so ergeben sich folgende Dichtefunktionen.

$$\text{pdf}_{\frac{|E_R|}{\langle |E_R| \rangle_\infty}}(e) = \frac{\pi e}{2} \cdot e^{-\frac{\pi e^2}{4}} \quad (\text{A.5a})$$

$$\text{pdf}_{\frac{|E_R|^2}{\langle |E_R|^2 \rangle_\infty}}(e) = e^{-e} \quad (\text{A.5b})$$

$$\text{pdf}_{\frac{|\mathbf{E}|}{\langle |\mathbf{E}| \rangle_\infty}}(e) = \left(\frac{15}{16}\right)^6 \pi^3 e^5 e^{-\left(\frac{15e}{16}\right)^2 \pi} \quad (\text{A.5c})$$

$$\text{pdf}_{\frac{|\mathbf{E}|^2}{\langle |\mathbf{E}|^2 \rangle_\infty}}(e) = \frac{27}{2} e^2 e^{-3e} \quad (\text{A.5d})$$

Die dadurch beschriebenen statistischen Verteilungen besitzen einen Erwartungswert von Eins und hängen nicht mehr von der kammer-spezifischen Konstante E_0 ab. Sie gelten vollkommen äquivalent für die Kenngrößen der magnetischen Feldstärke \mathbf{H} .

Die Verteilungsfunktion einer statistischen Variable (z. B. $|E_R|$) kann ebenso mit Hilfe einer Transformation

$$\text{cdf}_{\frac{|E_R|}{\langle |E_R| \rangle_\infty}}(e) = \text{cdf}_{|E_R|}(e \cdot \langle |E_R| \rangle_\infty) \quad (\text{A.6})$$

auf den Erwartungswert $\langle |E_R| \rangle_\infty$ dieser Variable normiert werden.

Die entsprechend auf den Erwartungswert normierten Verteilungsfunktionen des Betrags und des Betragsquadrats der E -Feldkomponenten sowie des Betrags und des Betragsquadrats der gesamten E -Feldstärke aus Gleichung (A.2) lauten:

$$\text{cdf}_{\frac{|E_R|}{\langle |E_R| \rangle_\infty}}(e) = 1 - e^{-\frac{\pi e^2}{4}}, \quad (\text{A.7a})$$

$$\text{cdf}_{\frac{|E_R|^2}{\langle |E_R|^2 \rangle_\infty}}(e) = 1 - e^{-e}, \quad (\text{A.7b})$$

$$\text{cdf}_{\frac{|E|}{\langle |E| \rangle_\infty}}(e) = 1 - \left[1 + \left(\frac{15e}{16} \right)^2 \pi + \left(\frac{15e}{16} \right)^4 \frac{\pi^2}{2} \right] e^{-\left(\frac{15e}{16} \right)^2 \pi}, \quad (\text{A.7c})$$

$$\text{cdf}_{\frac{|E|^2}{\langle |E|^2 \rangle_\infty}}(e) = 1 - \left(1 + 3e + \frac{9e^2}{2} \right) e^{-3e}. \quad (\text{A.7d})$$

A.3 Verhältnisse von Maximum/Erwartungswert, Erwartungswert/Minimum und Maximum/Minimum

Die auf den jeweiligen Erwartungswert normierten Dichte- und Verteilungsfunktionen aus Gleichung (A.5) und (A.7) können in die Dichtefunktion des Maximums einer statistischen Variable (siehe Gleichung (3.26a) auf Seite 34) eingesetzt werden. Das Verhältnis zwischen Maximum und Erwartungswert $\dagger_B()$ einer statistische Variable ergibt sich dann aus dem Erwartungswert dieser Dichtefunktion.

$$\begin{aligned} \dagger_B(|E_R|) &= \frac{B\pi}{2} \int_0^\infty e^2 \left(1 - e^{-\frac{\pi e^2}{4}} \right)^{B-1} e^{-\frac{\pi e^2}{4}} de \\ &= \frac{4B}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^2 \left(1 - e^{-e^2} \right)^{B-1} e^{-e^2} de \end{aligned} \quad (\text{A.8a})$$

$$\begin{aligned} \dagger_B(|E_R|^2) &= B \int_0^\infty e \left(1 - e^{-e} \right)^{B-1} e^{-e} de \\ &= -\psi(1) + \psi(B+1) \end{aligned} \quad (\text{A.8b})$$

$$\begin{aligned} \dagger_B(|\mathbf{E}|) &= B \left(\frac{15}{16}\right)^6 \pi^3 \int_0^\infty e^6 \left\{ 1 - \left[1 + \left(\frac{15e}{16}\right)^2 \pi + \left(\frac{15e}{16}\right)^4 \frac{\pi^2}{2} \right] e^{-\left(\frac{15e}{16}\right)^2 \pi} \right\}^{B-1} \\ &\quad \cdot e^{-\left(\frac{15e}{16}\right)^2 \pi} de \\ &= \frac{16B}{15\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^6 \left[1 - \left(1 + e^2 + \frac{e^4}{2} \right) e^{-e^2} \right]^{B-1} e^{-e^2} de \end{aligned} \quad (\text{A.8c})$$

$$\begin{aligned} \dagger_B(|\mathbf{E}|^2) &= \frac{27B}{2} \int_0^\infty e^3 \left[1 - \left(1 + 3e + \frac{9e^2}{2} \right) e^{-3e} \right]^{B-1} e^{-3e} de \\ &= \frac{B}{6} \int_0^\infty e^3 \left[1 - \left(1 + e + \frac{e^2}{2} \right) e^{-e} \right]^{B-1} e^{-e} de \end{aligned} \quad (\text{A.8d})$$

Durch Substitution der Integrationsvariable können die Integrale vereinfacht werden. Im Allgemeinen müssen diese Integrale aber numerisch gelöst werden. Die Integrationsgrenzen für die numerische Integration können empirisch aus einer grafischen Darstellung der Dichtefunktionen gewonnen werden. Für das Verhältnis zwischen Maximum und Erwartungswert des Betragsquadrats einer Feldkomponente (χ_2^2 -Verteilung) existiert auch eine geschlossene Lösung des Integrals. Dort bezeichnet ψ die Digammafunktion (siehe [Nie06, AS72]).

Die gleiche Herleitung ist mit der Dichtefunktion des Minimums einer statistischen Variable (siehe Gleichung (3.27a) auf Seite 34) auch für das Verhältnis $\downarrow_B()$ zwischen dem Erwartungswert und dem Minimum möglich.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\downarrow_B(|E_R|)} &= \frac{B\pi}{2} \int_0^\infty e^2 e^{-\frac{\pi e^2}{4} B} de \\ &= \frac{4}{\sqrt{\pi B}} \int_0^\infty e^2 e^{-e^2} de = \frac{1}{\sqrt{B}} \end{aligned} \quad (\text{A.9a})$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\downarrow_B(|E_R|^2)} &= B \int_0^\infty e e^{-eB} de \\ &= \frac{1}{B} \int_0^\infty e e^{-e} de = \frac{1}{B} \end{aligned} \quad (\text{A.9b})$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\downarrow_B(|\mathbf{E}|)} &= B \left(\frac{15}{16}\right)^6 \pi^3 \int_0^\infty e^6 \left[1 + \left(\frac{15e}{16}\right)^2 \pi + \left(\frac{15e}{16}\right)^4 \frac{\pi^2}{2} \right]^{B-1} e^{-\left(\frac{15e}{16}\right)^2 \pi B} de \\ &= \frac{16B}{15\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^6 \left(1 + e^2 + \frac{e^4}{2} \right)^{B-1} e^{-e^2 B} de \end{aligned} \quad (\text{A.9c})$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\downarrow_B(|\mathbf{E}|^2)} &= \frac{27B}{2} \int_0^\infty e^3 \left(1 + 3e + \frac{9e^2}{2}\right)^{B-1} e^{-3eB} de \\
&= \frac{B}{6} \int_0^\infty e^3 \left(1 + e + \frac{e^2}{2}\right)^{B-1} e^{-eB} de
\end{aligned} \tag{A.9d}$$

Im Allgemeinen müssen auch diese Integrale numerisch gelöst werden. Nur für die Verhältnisse zwischen Erwartungswert und Minimum des Betrags und des Betragsquadrats einer Feldkomponente (χ_2 - und χ_2^2 -Verteilung) existiert eine geschlossene Lösung des Integrals.

Das Verhältnis Maximum/Minimum ergibt sich aus $\uparrow_B(\cdot) \cdot \downarrow_B(\cdot)$. Alle Verhältnisse sind in Abbildung 3.5 auf Seite 37 dargestellt.

A.4 Quelltexte

Die im Rahmen der Arbeit entwickelten Quelltexte sind über die Internetseite

<http://www.emv.ovgu.de/>

des Lehrstuhls für Elektromagnetische Verträglichkeit am Institut für Grundlagen der Elektrotechnik und EMV an der Otto-von-Guericke Universität Magdeburg verfügbar.

Die Quelltexte ermöglichen die Reproduktion aller Diagramme der Arbeit. Sie wurden mit der Software *MATLAB* des Unternehmens *The MathWorks, Inc.* in der Version 7.4.0.287 (R2007a) entwickelt.

Danksagung

Eine erfolgreiche Promotion erfordert ein anregendes wissenschaftliches Umfeld, das kreative Impulse für die eigene Arbeit aussendet, genügend Zeit lässt, diese Impulse in neue Ideen umzusetzen und dabei gleichzeitig nicht mit konstruktiver Kritik spart. Daher möchte ich allen Kollegen und Freunden aus *meinem* wissenschaftlichen Umfeld danken, die zum erfolgreichen Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

Mein erster Dank gilt Prof. Ralf Vick, der mir großes Vertrauen in meine Arbeit entgegenbrachte und mir so eine sehr selbstständige und eigenverantwortliche Arbeitsweise ermöglichte. Auch für fachliche Diskussionen und den wissenschaftlichen Austausch stand seine Tür jederzeit für mich offen. Ein zweiter Dank gilt Prof. Hans Georg Krauthäuser, der ebenfalls ein wichtiger Ideengeber für diese Arbeit war und dessen räumliche Distanz von Magdeburg nach Dresden durch zahlreiche Telefongespräche und E-Mails kaum spürbar war. Ein weiterer Dank gilt Prof. Jürgen Nitsch, der mich besonders in der Anfangszeit meiner Arbeit in die Gepflogenheiten der wissenschaftlichen Arbeit einführte. Prof. Günter Wollenberg möchte ich für die Übernahme eines Gutachtens danken.

Ein großer Dank geht auch an Kollegen und Wissenschaftler aus dem internationalen Umfeld, die gern Fragen zu ihren Arbeiten beantworteten und durch ihr Interesse an meinen Arbeiten ein stetiger Anreiz und eine Motivationshilfe waren. Dazu zählen Dr. David Hill und Dr. Perry Wilson vom National Institute of Standards and Technology in Boulder, Colorado, ebenso Dr. Frederic Tesche, EMV-Berater aus Saluda, North Carolina, Prof. Luk Arnaut vom National Physical Laboratory in Teddington, UK sowie Dr. Magnus Höijer vom schwedischen Verteidigungsforschungsinstitut FOI in Linköping.

Weiterhin danke ich meinen Kollegen am Lehrstuhl für Elektromagnetische Verträglichkeit und am Institut für Grundlagen der Elektrotechnik und EMV, insbesondere Ana Hewicker, Jörg Petzold, Matthias Hirte, Dr. Hans-Jürgen Scheibe, Dr. Moawia Al-Hamid, Dr. Sergey Tkachenko, Anke Fröbel, Matthias Friedrich, Dr. Volker Vahrenholt und Prof. Marco Leone. Auch den von mir betreuten Studenten Saquib Siddiqui, Archit Somani und Crinivas Gorla möchte ich Danke sagen, da sie mich im Rahmen von Forschungsprojekten und Masterarbeiten bei einigen Messaufgaben unterstützt haben.

Abschließend danke ich auch meiner Familie, meiner Frau Birgit und unseren beiden Kindern Mona und Moritz für ihren liebevollen Rückhalt, sowie meiner Schwester Annika und meinen Eltern Christine und Klaus für ihre stete Unterstützung.

Lebenslauf

Mathias Magdowski
Kaiser-Otto-Ring 2
39106 Magdeburg
verheiratet, 2 Kinder



Ausbildung/Studium

09. April 1984 geboren in Wolmirstedt/Sachsen-Anhalt

- 1990 - 1994 Besuch der Diesterweg-Grundschule in Wolmirstedt, 1. bis 4. Klasse
- 1994 - 2003 Besuch des Kurfürst-Joachim-Friedrich-Gymnasiums in Wolmirstedt, 5. bis 13. Klasse, Leistungskurse Mathematik und Physik, Abschluss mit dem Abitur (Note 1,0)
- 2003 - 2005 Grundstudium der Elektrotechnik an der Otto-von-Guericke-Universität in Magdeburg, Erreichen des Vordiploms (Note 1,5)
- 2005 - 2008 Hauptstudium mit der Spezialisierung „Allgemeine Elektrotechnik“ an der OvGU in Magdeburg, Abschluss mit der Diplomarbeit (Note 1,0)

Praktika/Tätigkeiten

- Feb./März 2005 Grundpraktikum im Ingenieurbüro Flamme, Teichweg 1, 39179 Barleben
- Dez. 2006 - Mai 2007 wissenschaftliche Hilfskraft am Lehrstuhl für Theoretische Elektrotechnik, Institut für Grundlagen der Elektrotechnik und Elektromagnetische Verträglichkeit an der OvGU in Magdeburg
- Okt. 2007 - Feb. 2008 Fachpraktikum bei der FuelCon AG, Steinfeldstraße 3, 39179 Barleben zum Thema „Zyklische Voltammetrie an Brennstoffzellen mit Hilfe von elektronischen Lasten“
- April 2008 - Sept. 2008 wissenschaftliche Hilfskraft am Lehrstuhl für Elektromagnetische Verträglichkeit, IGET an der OvGU in Magdeburg
- ab Okt. 2008 wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für EMV, IGET an der OvGU in Magdeburg

Mitgliedschaften

- Electromagnetic Compatibility (EMC) Society des Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE)
- Gemeinschaftsarbeitskreis (GAK) 767.3-767.4 in der Deutschen Kommission Elektrotechnik Elektronik Informationstechnik (DKE)



- MAFO-01** ORTHS, A.: *Multikriterielle, optimale Planung von Verteilungsnetzen im liberalisierten Energiemarkt unter Verwendung von spieltheoretischen Verfahren*, 2003. ISBN 3-929757-57-5.
- MAFO-02** PURMANN, M.: *Optimierung des Betriebsverhaltens von PEM-Brennstoffzellen unter Berücksichtigung von elektrischem und Gesamtwirkungsgrad bei unterschiedlichen Lastanforderungen und Betriebsparametern*, 2004. ISBN 3-929757-63-X.
- MAFO-03** AL-HAMID, M.: *Extraktion von höheren Moden in TEM-Wellenleitern*, 2004. ISBN 3-929757-64-8.
- MAFO-04** HAASE, H., J. NITSCH, and T. STEINMETZ: *Transmission-Line Super Theory – A new Approach to an Effective Calculation of Electromagnetic Interference*, 2004. ISBN 3-929757-67-2.
- MAFO-05** BACHRY, A.: *Power Quality Studies in Distribution Systems Involving Spectral Decomposition*, 2004. ISBN 3-929757-68-0.
- MAFO-06** STYCZYNSKI, Z. A.: *Power Network and Renewables – A Scientific Report*, 2004. ISBN 3-929757-69-9.
- MAFO-07** BLUME, E.: *Numerische Analyse der Kopplung linearer Antennen innerhalb eines Resonators*, 2004. ISBN 3-929757-71-0.
- MAFO-08** HANDSCHIN, E. and Z. A. STYCZYNSKI: *Power System Application of the Modern Battery Storage*, 2004. ISBN 3-929757-75-3.
- MAFO-09** HAASE, H.: *Full-Wave Field Interactions of Nonuniform Transmission Lines*, 2005. ISBN 3-929757-78-8.
- MAFO-10** NITSCH, D.: *Die Wirkung eingekoppelter ultrabreitbandiger elektromagnetischer Impulse auf komplexe elektronische Systeme*, 2005. ISBN 3-929757-79-6.
- MAFO-11** HADZI-KOSTOVA, B.: *Protection Concepts in Distribution Networks with Decentralized Energy Resources*, 2005. ISBN 3-929757-84-2.
- MAFO-12** STEINMETZ, T.: *Ungleichförmige und zufällig geführte Mehrfachleitungen in komplexen technischen Systemen*, 2006. Nummerierung geändert, ISBN 3-929757-98-2.
- MAFO-13** STYCZYNSKI, Z. and J. HAUBROCK: *Influence of Distributed and Renewable Generation on Power System Security – Proceedings of the CRIS Workshop 2006*, 2006. ISBN 3-929757-99-0.
- MAFO-14** HEIDECK, G.: *Ein autonomes Brennstoffzellensystem: Optimierungsansätze*, 2006. ISBN 3-929757-94-X.

- MAFO-15** STYCZYNSKI, Z. und H.-D. MUSIKOWSKI: *Dresdener Kreis Elektroenergieversorgung 7*, 2006. ISBN 3-929757-85-0.
- MAFO-16** GRONWALD, F.: *Antenna Theory in Resonating Systems derived from Fundamental Electromagnetism*, 2007. ISBN 3-929757-93-1.
- MAFO-17** KRAUTHÄUSER, H.G.: *Grundlagen und Anwendungen von Modenverwirbelungskammern*, 2007. ISBN 978-3-929757-43-9.
- MAFO-18** DZIENIS, C.: *Ersatzmodelle nichtlinearer Lasten in elektrischen Verteilungsnetzen*, 2007. ISBN 978-3-929757-07-1.
- MAFO-19** STYCZYNSKI, Z. and J. HAUBROCK: *Renewable and Dispersed Power Generation in Power Systems*, 2007. ISBN 978-3-929757-44-6.
- MAFO-20** HAUBROCK, J.: *Parametrierung elektrischer Äquivalentschaltbilder von PEM-Brennstoffzellen*, 2008. ISBN 978-3-940961-02-0.
- MAFO-21** ANGELOV, A. N.: *Rechnergestütztes Lernen im Bereich der Regenerativen Energien (Ausgewählte Aspekte)*, 2008. ISBN 978-3-940961-03-7.
- MAFO-22** KOMARNICKI, P.: *Anwendung hochgenauer, synchroner Messungen zur Verbesserung des Betriebs von Verteilungsnetzen*, 2008. ISBN 978-3-940961-04-4.
- MAFO-23** ROGGATZ, C.: *Trainingssimulator für die Führung von elektrischen Systemen mit dezentralen Energieeinspeisungen – Trainingsszenarien und Umsetzung*, 2008. ISBN 978-3-940961-05-1.
- MAFO-24** RUDION, K.: *Aggregated Modelling of Wind Farms*, 2008. ISBN 978-3-940961-14-3.
- MAFO-25** GANJAVI, M. R.: *Protection System Coordination Using Expert System*, 2008. ISBN 978-3-940961-15-0.
- MAFO-26** BOFINGER, S.: *Energieversorgungsnetze mit einem hohen Anteil an photovoltaischer Solarenergie: Standortbestimmung, Solarstromprognose, Netzintegration*, 2008. ISBN 978-3-940961-25-9.
- MAFO-27** STYCZYNSKI, Z. and P. KOMARNICKI: *Distributed and Renewable Power Generation*, 2008. ISBN 978-3-940961-26-6.
- MAFO-28** KOCHETOV, S. V.: *Time- and Frequency-Domain Modeling of Passive Interconnection Structures in Field and Circuit Analysis*, 2008. ISBN 978-3-940961-27-3.
- MAFO-29** MAGDOWSKI, M.: *Entwicklung und Validierung eines Werkzeugs zur Berechnung der elektromagnetischen Einkopplung von stochastischen Feldern in Leitungsstrukturen*, 2008. ISBN 978-3-940961-28-0.
- MAFO-30** SONNEMANN, F.: *Elektromagnetische Effekte an elektrischen Zündmitteln (EED) mit angeschlossener Zündkreiselektronik (ZKE) bei impulsförmiger, breitbandiger Bestrahlung*, 2009. ISBN 978-3-940961-32-7.
- MAFO-31** SMIEJA, T.: *Multikriterielle Planung interregionaler Elektrizitätsnetze im liberalisierten Energiemarkt*, 2009. ISBN 978-3-940961-35-8.

- MAFO-32** HEYDE, C. O.: *Dynamic Voltage Security Assessment for On-Line Control Room Application*, 2010. ISBN 978-3-940961-40-2.
- MAFO-33** STYCZYNSKI, Z. A. and N. I. (EDITORS) VOROPAI: *Renewable Energy Systems Fundamentals, Technologies, Techniques and Economics*, 2010. ISBN 978-3-940961-42-6.
- MAFO-34** Styczynski, Z. A. и N. I. (Editors) Voropai: *Renewable Energy Systems Fundamentals, Technologies, Techniques and Economics (Russian Version)*, 2010. ISBN 978-3-940961-44-0.
- MAFO-35** STYCZYNSKI, Z. A. and A. (EDITORS) LINDEMANN: *Integration of Renewable Energies into the Grid / Proceedings of the Power & Energy Student Summit 2010*, 2010. ISBN 978-3-940961-47-1.
- MAFO-36** STYCZYNSKI, Z. A. und H.-D. (EDITORS) MUSIKOWSKI: *Dresdener Kreis Elektroenergieversorgung 11*, 2010. ISBN 978-3-940961-51-8.
- MAFO-37** GURBIEL, M. A.: *Definition and Testing of a Digital Interface of a Power Substation*, 2011. ISBN 978-3-940961-54-9.
- MAFO-38** LOMBARDI, P.: *Multi Criteria Optimization of an Autonomous Virtual Power Plant*, 2011. ISBN 978-3-940961-55-6.
- MAFO-39** POWALKO, M.: *Beobachtbarkeit eines elektrischen Verteilungsnetzes – Ein Beitrag zum Smart Grid*, 2011. ISBN 978-3-940961-62-4.
- MAFO-40** STYCZYNSKI, Z. A., K. RUDION, and C. (EDITORIAL BOARD) NGUYEN-MAU: *Power System Dynamic Security Assessment*, 2011. ISBN 978-3-940961-61-7.
- MAFO-41** KÄBISCH, M.: *Optimale Dimensionierung und Betriebsführung einer brennstoffzellenbasierten Auxiliary Power Unit im Fahrzeug*, 2011. ISBN 978-3-940961-67-9.
- MAFO-42** STYCZYNSKI, Z. A. und N. I. (EDITORS) VOROPAI: *Special Issue Grant 220 Russian Federation SSmart Grid for Efficient Energy Power System for the Future”, Proceedings Volume I*, 2012. ISBN 978-3-940961-74-7.
- MAFO-43** STYCZYNSKI, Z. A., P. KOMARNICKI und A. (EDITORS) NAUMANN: *abschlussbericht Harz.ErneuerbareEnergien-mobility*, 2012. ISBN 978-3-940961-71-6.
- MAFO-44** HEUER, M.: *Diagnosetool für stationär betriebene PEM-Brennstoffzellensysteme*, 2012. ISBN 978-3-940961-77-8.
- MAFO-45** STÖTZER, M.: *Demand Side Integration in elektrischen Verteilnetzen – Potenzialanalyse und Bewertung*, 2012. ISBN 978-3-940961-78-5.
- MAFO-46** MAGDOWSKI, M.: *Vergleich der Einkopplung deterministischer und statistischer elektromagnetischer Felder in Leitungen*, 2012. ISBN 978-3-940961-75-4.
-