

Ein nichtlineares anisotropes Materialmodell auf der Basis der Hencky-Dehnung und der logarithmischen Rate zur Beschreibung duktiler Schädigung

N. C. Bongmba, H. Schütte

Ein nichtlineares, dreidimensionales und anisotropes Schädigungsmodell wird vorgestellt. Basis des Modells ist der Rahmen für finite Elastoplastizität von Xiao, Bruhns & Meyers. Von entscheidender Bedeutung für die Modellierung ist eine doppelte Interpretation des Schädigungsparameters. Für die thermodynamischen Betrachtungen wird der Schädigungsparameter als eine interne Zustandsvariable betrachtet. Zur Modellierung der schädigungsinduzierten Anisotropie wird er als ein sich mit der Deformation entwickelnder Struktur- oder Materialtensor interpretiert. Schädigungsmodellierung reduziert sich damit auf die Formulierung von Evolutionsgleichungen, die Festlegung von Versagenskriterien und die Bestimmung von Materialkonstanten.

1 Einleitung

Strukturen und Konstruktionen, die ständig einer mechanischen, thermischen und/oder chemischen Belastung unterliegen, können nach einer bestimmten Zeit versagen. Durch die Belastung tritt dann eine von der Belastung, den Materialeigenschaften und der Zeit abhängige Abnahme der Tragfähigkeit der Struktur ein, die mit dem Versagen der Struktur endet. Die Abnahme der Tragfähigkeit wird Schädigung oder Deterioration genannt. In experimentellen Untersuchungen hat man festgestellt, dass die Abnahme der Tragfähigkeit durch die Entstehung und Ausbreitung von Mikrodefekten, wie Poren, Rissen und Scherbändern auf der Mikroebene, verursacht wird. Diese Mikrodefekte entstehen an Schwachstellen wie z. B. Korngrenzen, Leerstellen, eingeschlossenen Partikeln, Hindernissen gegen die Bewegung von Versetzungen oder schon vorhandenen Mikrodefekten. Die Entstehung und das Wachstum von Poren und anderen Mikrodefekten während eines Schädigungsvorgangs sind in der Regel - egal um welche Art von Schädigung es sich handelt - anisotrope Phänomene, da diese entscheidend von der Richtung der aufgetragenen Spannungen oder Dehnungen abhängen. Experimentelle Ergebnisse von Leckie und Hayhurst (1974) zeigen, dass bei Kriechschädigung in Polykristallen die Mikrodefekte, obwohl sie makroskopisch gesehen homogen verteilt sind, überwiegend nur an Korngrenzen entstehen, und zwar an den Korngrenzen, die senkrecht zur Hauptspannungsrichtung stehen. Abgesehen also von dem einfachen aber nicht trivialen Sonderfall, in dem das Material anfänglich isotrop und die entstehenden Mikrodefekte gleich verteilte, kugelförmige Poren sind, ist jedes geschädigte Material anisotrop. Makroskopisch können sich diese Defekte - abhängig von der Art der Schädigung - in der Veränderung eines oder mehrerer der folgenden makroskopischen Eigenschaften bemerkbar machen: Elastizitätsmodul, Fließspannung, Dichte, und viele anderen Eigenschaften.

Mit seinem eindimensionalen Modell zur Beschreibung vom Kriechverhalten hat Kachanov (1958) das erste phänomenologische Schädigungsmodell vorgestellt. Dieses Modell wird generell akzeptiert und bildet die Basis der Schädigungsmechanik. Erweiterungen des eindimensionalen Modells von Kachanov (1958) auf den dreidimensionalen Spannungszustand wurden für isotrope Schädigung z. B. von Davison u. a. (1977), Leckie und Hayhurst (1974), Lemaitre und Chaboche (1978, 1990), Lemaitre (1985a, 1985b) und Chaboche (1988, 1998) vorgenommen. Anisotrope Modelle mit einem Tensor zweiter Stufe als Schädigungsparameter wurden von Cordebois und Sidoroff (1979), Dragon und Mroz (1979), Sidoroff (1981), Murakami und Ohno (1981), Betten (1982) und Murakami (1988) vorgeschlagen.

Die oben genannten isotropen Schädigungsmodelle liefern zum Teil keine befriedigenden Ergebnisse, da sie in Experimenten festgestellte Veränderung der Querkontraktionszahl auf Grund der Schädigung nicht wiedergeben können. Rabier (1989) und Ju (1990) haben als erste auf diese Schwäche hingewiesen und zeigen in ihren Arbeiten, wie man sie behebt. In dem Modell von Rabier (1989) wird z. B., unter Zuhilfenahme von Ergebnissen aus der Mikromechanik, eine direkte Abhängigkeit der zwei Materialparameter für isotropes Materialverhalten von der skalarwertigen Schädigungsvariable postuliert.

Bei den anisotropen Schädigungsmodellen geht man so vor, dass man Kachanov (1958) folgend eine verallgemeinerte Effektivspannung entweder berechnet oder postuliert. Dann wird mit Hilfe der Hypothese der Verzerrungsäquivalenz oder ähnlichen Hypothesen – siehe Lemaitre und Chaboche (1990) – das Verhalten des geschädigten Materials bestimmt. Meistens stellt sich aber bei diesen Modellen heraus, dass die Effektivspannung nicht symmetrisch ist. Eine Symmetrisierung wird dann nach verschiedenen Symmetrisierungsvorschriften durchgeführt.

Das grundlegende Problem mit anisotropen Effektivspannungs-Schädigungsmodellen ist folgendes: geht man z. B. wie bei Murakami (1988) vor, ist die Effektivspannung

$$\boldsymbol{\sigma}^* = (\mathbf{1} - \mathbf{d})^{-T} \boldsymbol{\sigma} \quad (1)$$

eine Art 1. Piola-Kirchhoffscher Spannungstensor. Hier bezeichnet \mathbf{d} den Schädigungstensor zweiter Stufe, $\mathbf{1}$ den *shifter* zweiter Stufe und $\boldsymbol{\sigma}$ den Cauchyschen Spannungstensor. $\boldsymbol{\sigma}^*$ – genauso wie \mathbf{d} – ist deshalb ein Zweipunkt-Tensor und stellt eine bilineare Abbildung zwischen der Momentankonfiguration und einer fiktiven ungeschädigten Konfiguration dar. Da der Effektivspannungstensor (1) nicht symmetrisch ist, wird er allgemein als ungeeignet für das Effektivspannungskonzept betrachtet. Murakami (1988) und Murakami und Ohno (1981) schlagen deshalb vor, nur den symmetrischen Anteil von $\boldsymbol{\sigma}^*$ als Effektivspannung $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ zu definieren:

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{2} ([\mathbf{1} - \mathbf{d}]^{-1} \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} [\mathbf{1} - \mathbf{d}]^{-1}), \quad (2)$$

wobei hier zusätzlich angenommen wird, dass der Schädigungstensor symmetrisch ist. Weitere Symmetrisierungsvorschläge wurden von Cordebois und Sidoroff (1979), Sidoroff (1981) sowie von Chow und Wang (1987) gemacht.

Man beachte, dass auch für eine Theorie kleiner Formänderungen die Effektivspannung $\boldsymbol{\sigma}^*$ nicht symmetrisch sein kann. Denn Symmetrie von $\boldsymbol{\sigma}^*$ würde bedeuten, dass die beiden Konfigurationen gleich gesetzt werden (siehe Marsden und Hughes, 1983). Weiterhin kann durch eine ähnliche Vorgehensweise wie in der Arbeit von Murakami (1988) der symmetrische Spannungstensor

$$\mathbf{S}^* = [\det(\mathbf{1} - \mathbf{d})]^{\frac{1}{2}} (\mathbf{1} - \mathbf{d})^{-T} \boldsymbol{\sigma} (\mathbf{1} - \mathbf{d})^{-1}, \quad (3)$$

eine Art 2. Piola-Kirchhoffscher Spannungstensor, hergeleitet werden. \mathbf{S}^* ist vollständig in der fiktiven ungeschädigten Konfiguration definiert. Keine der in der Literatur verwendeten symmetrisierten Effektivspannungen ist mit diesem Spannungsmaß identisch. Des Weiteren lässt sich zeigen, dass trotz der Symmetrisierung diese Modelle für isotropes Verhalten nicht in der Lage sind, eine Änderung der Querkontraktionszahl wiederzugeben.

Ziel dieser Arbeit ist die Präsentation eines nichtlinearen, anisotropen Materialmodells zur Beschreibung duktiler Schädigung, ein Phänomen, das überwiegend in metallischen Werkstoffen auftritt und mit großen inelastischen Formänderungen verbunden ist. Das Materialmodell ist für die Beschreibung von Lokalisierung und Makrorissbildung in metallischen Werkstoffen vorgesehen. Der Rahmen für finite Elastoplastizität von Xiao u.a. (2000) ist nicht auf eine bestimmte Materialsymmetrie beschränkt und deshalb gut geeignet für die Schädigungsmodellierung, siehe auch Bruhns u.a. (2000). Dieser Rahmen wird hier deshalb als Basis für das Schädigungsmodell verwendet, d. h. Dehnungs- und Spannungsmaße sind die logarithmischen Henckyschen Dehnungstensoren und ihre arbeitskonjugierten Spannungen. Für die Ratenformulierung von konstitutiven Beziehungen wird die logarithmische Rate verwendet. Außerdem wird eine additive Aufspaltung der Verzerrungsgeschwindigkeit mit der multiplikativen Zerlegung des Deformationsgradienten kombiniert.

Als Schädigungsparameter wird ein symmetrischer, positiv semi-definiten Tensor zweiter Stufe verwendet. Zusätzlich zu der klassischen Interpretation des Schädigungsparameters als eine interne Zustandsvariable wird er hier auch als ein allgemein und mit der Deformation sich entwickelnder Struktur- oder Materialtensor betrachtet. Diese Interpretation erlaubt, die Schädigungsmodellierung auf folgende Punkte zu reduzieren: auf die Formulierung von thermodynamisch konsistenten Evolutionsgleichungen, die Bestimmung von kritischen Werten für den Schädigungsparameter (d. h. Festlegung von Versagenskriterien) und die Bestimmung von Materialkonstanten. Dabei kann zur Beschreibung von schädigungsinduzierter Anisotropie auf Ergebnisse zur Modellierung von stark anisotropen Materialien zurückgegriffen werden.

Auf der Basis der Thermodynamik mit internen Zustandsvariablen lassen sich Einschränkungen an die Gestalt der konstitutiven Gleichungen angeben.

Das hier vorgestellte Materialmodell kann sowohl die Veränderung des Elastizitätsmoduls als auch die der Querkontraktionszahl wiedergeben. Außerdem verschwinden für das Schädigungsmodell die Diskrepanzen zwischen der Zerlegung der Verzerrungsgeschwindigkeit und des Deformationsgradienten (siehe Xiao u.a., 2000). Des Weiteren wird für die multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten die Objektivitätsforderung im allgemeinen Sinne von Naghdi (1990) erfüllt, und das Materialmodell ist kinematisch konsistent in dem Sinne, dass der elastische Anteil und der inelastische Anteil des Deformationsgradienten und alle mit ihnen zusammenhängenden kinematischen Größen konsistent und eindeutig bestimmt werden können (Xiao u.a., 2000).

Ein kurzer Abriss der Arbeit sieht wie folgt aus: in Abschnitt 2 wird die in der Arbeit verwendete Notation zusammengestellt. Die logarithmische Rate und die verwendeten Spannungs- und Dehnungsmaße werden in den Abschnitten 3 und 4 eingeführt. In Abschnitt 5 wird zuerst auf die Zerlegung des Deformationsgradienten und der Verzerrungsgeschwindigkeit bei großen inelastischen Formänderungen eingegangen. Anschließend wird die Motivation für die neue Interpretation des Schädigungsparameters als Strukturtenor und die Wahl dieses Parameters als Tensor zweiter Stufe gegeben. Danach wird die Konstitutivbeziehung für elastisches Materialverhalten vorgestellt. Die Darstellung für das komplementäre hyperelastische Potential wird angegeben. Anschließend wird auf die Ratenformulierung des elastischen Stoffgesetzes eingegangen und die konkrete Form des Gibbsschen Potentials angegeben. Es folgt dann der Einfluß der Schädigung auf das plastische Materialverhalten; ausführlich wird auf die Herleitung einer anisotropen Fließbedingung und die Anpassung dieser Funktion an die Gurson-Fließfunktion eingegangen. Schließlich werden Be- und Entlastungsbedingung und die Evolutionsgleichungen beschrieben. Im Abschnitt 6 wird schließlich ein numerisches Beispiel angeführt, das die Leistungsfähigkeit des Materialmodells zeigt.

2 Kinematische Grundlagen

Seien \mathbf{A} ein Tensor zweiter Stufe und \mathbf{Q} ein Drehtensor, so gelte die Notation $\mathbf{Q} \star \mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^T$ (Xiao u.a., 2000). Damit lauten die Verknüpfungen zwischen dem rechten Strecktensor \mathbf{U} und dem linken Strecktensor \mathbf{V} sowie zwischen der materiellen Zeitableitung $\dot{\mathbf{U}}$ von \mathbf{U} und der Green-Naghdi Rate $\overset{\circ}{\mathbf{V}}^R$ von \mathbf{V} wie folgt

$$\mathbf{V} = \mathbf{R} \star \mathbf{U}, \quad \dot{\mathbf{U}} = \mathbf{R}^T \star \overset{\circ}{\mathbf{V}}^R, \quad \overset{\circ}{\mathbf{V}}^R = \mathbf{R} \star \left[\frac{d}{dt} \mathbf{R}^T \star \mathbf{V} \right] = \dot{\mathbf{V}} + \mathbf{V}\boldsymbol{\Omega}^R - \boldsymbol{\Omega}^R \mathbf{V}, \quad \boldsymbol{\Omega}^R = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T, \quad (4)$$

wobei \mathbf{R} den Rotationstensor aus der Polarzerlegung des Deformationsgradienten \mathbf{F} bezeichnet. Die Spektraldarstellungen des linken Cauchy-Green Tensors $\mathbf{B} = \mathbf{V}^2 = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$ und des rechten Cauchy-Green Tensors $\mathbf{C} = \mathbf{U}^2 = \mathbf{F}^T\mathbf{F}$ lauten

$$\mathbf{B} = \sum_{\sigma=1}^n \chi_{\sigma} \mathbf{B}_{\sigma}, \quad \mathbf{C} = \sum_{\sigma=1}^n \chi_{\sigma} \mathbf{C}_{\sigma}, \quad \mathbf{B}_{\sigma} = \delta_{n1} \mathbf{1} + \prod_{\tau \neq \sigma}^n \frac{\mathbf{B} - \chi_{\tau} \mathbf{1}}{\chi_{\sigma} - \chi_{\tau}}, \quad \mathbf{C}_{\sigma} = \mathbf{R}^T \star \mathbf{B}_{\sigma}. \quad (5)$$

Hierin bezeichnen χ_{σ} die Eigenwerte von \mathbf{B} und \mathbf{C} . Die \mathbf{B}_{σ} (\mathbf{C}_{σ}) kennzeichnen die Eigenprojektionen von \mathbf{B} (\mathbf{C}), die auch im Falle mehrfacher Eigenwerte eindeutig aus der Sylvesterformel (5)₃ bestimmt werden können; n kennzeichnet die Anzahl ungleicher Eigenwerte, $\mathbf{1}$ ab hier den Einheitstensor zweiter Stufe und $\delta_{\sigma\tau}$ das Kronecker-Delta. Für $n = 1$ verschwindet das durch $\prod_{\sigma \neq \tau}^n$ gekennzeichnete Produkt. Im Folgenden bezeichnen \mathbf{L} , \mathbf{D} und \mathbf{W} den Geschwindigkeitsgradienten, die Verzerrungsgeschwindigkeit und den Drehgeschwindigkeitstensor.

3 Dehnung- und Spannungsmaße

Im Rahmen der Elastoplastizität von Xiao u.a. (2000) werden als Dehnungsmaße die referentiellen und räumlichen Henckyschen Dehnungstensoren

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2} \ln \mathbf{C} = \sum_{\sigma=1}^n \frac{1}{2} \ln \chi_{\sigma} \mathbf{C}_{\sigma}, \quad \mathbf{h} = \frac{1}{2} \ln \mathbf{B} = \sum_{\sigma=1}^n \frac{1}{2} \ln \chi_{\sigma} \mathbf{B}_{\sigma} \quad (6)$$

verwendet. Die Henckyschen Dehnungstensoren stellen eine dreidimensionale oder tensorielle Verallgemeinerung der eindimensionalen natürlichen Dehnung dar.

Die Spannung

$$\boldsymbol{\pi} = \sum_{\alpha, \beta=1}^n \sqrt{\chi_\alpha^{-1} \chi_\beta^{-1}} \left(\frac{\chi_\alpha - \chi_\beta}{\ln \chi_\alpha - \ln \chi_\beta} \right) \mathbf{B}_\alpha \boldsymbol{\tau} \mathbf{B}_\beta \quad (7)$$

eine Eulersche Größe, bildet mit dem räumlichen Henckyschen Dehnungstensor \mathbf{h} unabhängig von den jeweiligen Symmetrieeigenschaften des betrachteten Materials ein arbeitskonjugiertes Paar (Xiao u.a., 1998b). Hierin bezeichnet $\boldsymbol{\tau}$ den Kirchhoffschen Spannungstensor. Die Rückwärtsdrehung von $\boldsymbol{\pi}$ mit \mathbf{R} ergibt den Lagrangeschen Spannungstensor

$$\boldsymbol{\Pi} = \mathbf{R}^T \star \boldsymbol{\pi} = \sum_{\alpha, \beta=1}^n \sqrt{\chi_\alpha^{-1} \chi_\beta^{-1}} \left(\frac{\chi_\alpha - \chi_\beta}{\ln \chi_\alpha - \ln \chi_\beta} \right) \mathbf{C}_\alpha \tilde{\boldsymbol{\tau}} \mathbf{C}_\beta, \quad \tilde{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{R}^T \star \boldsymbol{\tau}, \quad (8)$$

der mit dem referentiellen Henckyschen Dehnungstensor \mathbf{H} unabhängig von den jeweiligen Symmetrieeigenschaften des betrachteten Materials ein arbeitskonjugiertes Paar bildet.

4 Logarithmische Rate

Die mitrotierende Zeitableitung des räumlichen Henckyschen Dehnungstensors \mathbf{h} mit dem logarithmischen Spintensor

$$\boldsymbol{\Omega}^{\text{Log}} = \mathbf{W} + \sum_{\sigma \neq \tau}^n \left(\frac{1 + (\chi_\sigma / \chi_\tau)}{1 - (\chi_\sigma / \chi_\tau)} + \frac{2}{\ln(\chi_\sigma / \chi_\tau)} \right) \mathbf{B}_\sigma \mathbf{D} \mathbf{B}_\tau = \mathbf{W} + \mathbf{N}^{\text{Log}} \quad (9)$$

liefert die Verzerrungsgeschwindigkeit \mathbf{D} (Xiao u.a., 1997a, 1997b)

$$\overset{\circ}{\mathbf{h}}^{\text{Log}} = \dot{\mathbf{h}} + \mathbf{h} \boldsymbol{\Omega}^{\text{Log}} - \boldsymbol{\Omega}^{\text{Log}} \mathbf{h} = \mathbf{D}. \quad (10)$$

Die logarithmische Rotation (Log-Rotation) wird aus der linearen tensoriellen Differentialgleichung

$$\dot{\mathbf{R}}^{\text{Log}} = -\mathbf{R}^{\text{Log}} \boldsymbol{\Omega}^{\text{Log}}, \quad \mathbf{R}^{\text{Log}}|_{t=0} = \mathbf{1} \quad (11)$$

bestimmt. Zwischen der logarithmischen Rate (Log-Rate) und der Green-Naghdi-Rate $\overset{\circ}{\mathbf{G}}^{\text{R}}$ einer Eulerschen Größe \mathbf{G} besteht der folgende Zusammenhang

$$\overset{\circ}{\mathbf{G}}^{\text{Log}} = \overset{\circ}{\mathbf{G}}^{\text{R}} + \mathbf{G} \boldsymbol{\Omega}^{\text{LR}} - \boldsymbol{\Omega}^{\text{LR}} \mathbf{G}, \quad (12)$$

wobei $\boldsymbol{\Omega}^{\text{LR}}$ hier die Differenz aus dem Log-Spin $\boldsymbol{\Omega}^{\text{Log}}$ und dem Polar-Spin $\boldsymbol{\Omega}^{\text{R}}$ bezeichnet. Für moderate Verzerrungen sind der Log-Spin und der Polar-Spin näherungsweise identisch.

Für einen beliebigen Eulerschen Tensor zweiter Stufe \mathbf{G} gelten die folgenden Beziehungen

$$\overline{\mathbf{R}^{\text{Log}} \star \mathbf{G}} = \mathbf{R}^{\text{Log}} \star \overset{\circ}{\mathbf{G}}^{\text{Log}}, \quad \mathbf{G} = (\mathbf{R}^{\text{Log}})^T \star \int_0^t \mathbf{R}^{\text{Log}} \star \overset{\circ}{\mathbf{G}}^{\text{Log}} ds. \quad (13)$$

Die Gleichung (13) lässt auch die folgende Interpretation zu: die (Eulersche) Größe $\overset{\circ}{\mathbf{G}}^{\text{Log}}$ wird in die Lagrangesche Konfiguration zurückgedreht; dort wird das Integral gebildet und das Ergebnis dann anschließend wieder nach vorne in die Eulersche Konfiguration gedreht. Sie stellt damit die Formel oder das Rezept für die mitrotierende Integration dar.

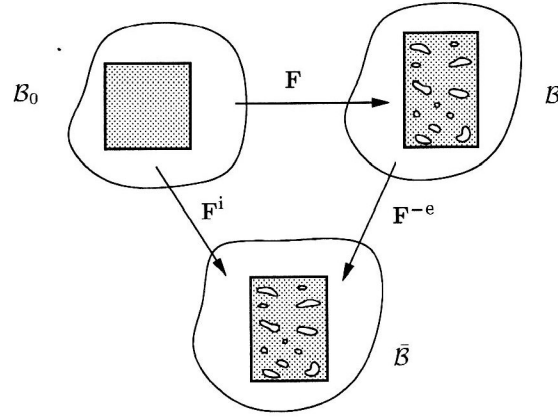


Bild 1: Deformation eines Körpers mit Anfangs-, Momentan- und Zwischenkonfiguration \mathcal{B}_0 , $\bar{\mathcal{B}}$ und \mathcal{B} . In \mathcal{B}_0 sei das Material ungeschädigt und isotrop.

5 Konstitutive Gleichungen

5.1 Zerlegung der finiten Deformation

Um die elastischen Anteile der Deformation von den inelastischen Anteilen zu trennen, wird hier nach Kröner (1960) und Lee (1969) – und als Teil des konstitutiven Gesetzes – die multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten angenommen

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^i. \quad (14)$$

\mathbf{F}^e bezeichnet den rein elastischen Anteil von \mathbf{F} und \mathbf{F}^i den inelastischen Anteil als Folge von rein plastischer Formänderung oder plastischer Formänderung mit Schädigung. \mathbf{F}^e stellt eine Abbildung von der Zwischenkonfiguration $\bar{\mathcal{B}}$ in die Momentankonfiguration \mathcal{B} dar und \mathbf{F}^i bildet ein Linienelement der Referenzkonfiguration \mathcal{B}_0 in die Zwischenkonfiguration $\bar{\mathcal{B}}$ ab (siehe Bild 1). Man beachte, dass die multiplikative Zerlegung (14) nur bis auf eine beliebige Rotation der Zwischenkonfiguration eindeutig ist.

Als weitere konstitutive Annahme wird - Xiao u.a. (2000) folgend - zusätzlich zu der multiplikativen Zerlegung des Deformationsgradienten (14) von einer additiven Zerlegung der Verzerrungsgeschwindigkeit \mathbf{D} in einen elastischen Anteil \mathbf{D}^e und einen elastisch-inelastischen Anteil \mathbf{D}^{ei} ausgegangen

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^e + \mathbf{D}^{ei}. \quad (15)$$

Die einzig sinnvolle und natürliche Verknüpfung zwischen der additiven Zerlegung der Verzerrungsgeschwindigkeit (15) und der multiplikativen Zerlegung des Deformationsgradienten (14) wird durch die Beziehung

$$\mathbf{D}^e = \text{sym}(\dot{\mathbf{F}}^e \mathbf{F}^{-e}), \quad \mathbf{D}^{ei} = \text{sym}(\mathbf{F}^e \dot{\mathbf{F}}^i \mathbf{F}^{-i} \mathbf{F}^{-e}) \quad (16)$$

gegeben, wobei $\text{sym}(\bullet)$ hier den symmetrischen Anteil von (\bullet) bezeichnet.

Xiao u.a. (2000) haben gezeigt, dass wenn man - wie hier - die multiplikative Zerlegung von \mathbf{F} mit der additiven Aufteilung von \mathbf{D} kombiniert und eine geeignete elastische Beziehung für den linken elastischen Strecktensor \mathbf{V}^e angibt, \mathbf{F}^e und \mathbf{F}^i und alle mit ihnen zusammenhängenden kinematischen Größen konsistent und eindeutig bestimmt werden können (siehe auch Bruhns und Bongmba, 2000).

5.2 Schädigungsvariable

Es wird hier angenommen, dass das Material in der spannungsfreien Ausgangskonfiguration mikrodefektfrei und isotrop sei. Durch die Schädigung entstehen Mikrodefekte, die eine Veränderung der Materialsymmetrie hervorrufen (siehe Bild 1). In einem makroskopischen, phänomenologischen Rahmen ist die durch Schädigung induzierte Anisotropie nach Belastungsende von der materiellen Anisotropie nicht

mehr zu unterscheiden. Sie kann deshalb als eine materielle oder mikrostrukturelle Anisotropie behandelt werden.

Zur Beschreibung mikrostruktureller Anisotropie, die sich mit der Deformation des Materials nicht weiterentwickelt, werden im Allgemeinen Struktur- oder Materialtensoren verwendet, siehe Doyle und Ericksen (1956), Spencer (1984), Boehler (1987). Letzterer verwendet z. B. die Materialtensoren

$$\mathbf{m}_{ij} = (\mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_j), \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (17)$$

wobei $(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3)$ drei orthonormale Eulersche Vektoren bezeichnen, d. h. $\|\mathbf{n}_i\| = 1$ und $\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_j = \delta_{ij}$. Der Strukturtensor ist im Allgemeinen ortsabhängig, d. h. $\mathbf{m}_{ij} = \mathbf{m}_{ij}(\mathbf{x})$. Der entsprechende Lagrangesche Materialtensor $\mathbf{M}_{ij} = \mathbf{R}^T \star \mathbf{m}_{ij}(\mathbf{x})$, der aus der Rückwärtsdrehung von \mathbf{m}_{ij} entsteht, wird üblicherweise als zeitunabhängig angesehen.

Durch die Aufnahme von $\mathbf{m} = \mathbf{m}_{11}$ in das elastische Potential, in die Fließbedingung und in das Fließpotential lässt sich ein in \mathbf{n}_1 -Richtung faserverstärktes Material modellieren. Für ein orthotropes Material verwendet man die Menge $\mathbf{m} = \{\mathbf{m}_{11}, \mathbf{m}_{22}, \mathbf{m}_{33}\}$. Die vollständigen Ergebnisse für die hier genannten Fälle können z. B. der Arbeit von Spencer (1984) entnommen werden.

Zur Berücksichtigung der Schädigung wird hier ein (Eulerscher) symmetrischer, positiv semi-definiter Tensor zweiter Stufe \mathbf{d} als Schädigungsparameter eingeführt. Die Strukturtenoren in Gleichung (17) stellen ein Basissystem dar. Der Schädigungstensor kann in der Form

$$\mathbf{d} = d_{ij} \mathbf{m}_{ij} \quad (18)$$

angegeben werden, wobei d_{ij} die Komponenten des Schädigungstensors bezüglich (17) darstellen. Der Schädigungstensor kann deshalb als ein allgemeiner und sich mit der Deformation entwickelnder Materialtensor angesehen werden.

Aus dieser Interpretation folgt z. B., dass zur Beschreibung von schädigungsinduzierter Anisotropie auf Ergebnisse zurückgegriffen werden kann, die mit Strukturtenoren und zur Modellierung von faserverstärkten Werkstoffen hergeleitet wurden. Die im Folgenden vorgestellte Schädigungsmodellierung geschieht deshalb in Anlehnung an die Arbeiten von Spencer (1984) und Boehler (1987a, 1987b). Damit lässt sich auch auf natürliche Weise eine Beziehung für die Transformation des Schädigungstensors zwischen den verschiedenen Konfigurationen angeben.

Der Tensor enthält zusätzlich zu dem trivialen Fall $\mathbf{d} = \mathbf{0}$, in dem das Material defektfrei ist, zwei wichtige Sonderfälle: der erste liegt vor, wenn sich die Schädigung so entwickelt, dass nur eine Komponente des Schädigungstensors, z. B. $d_{11} = d$, von Null verschieden ist. Es gilt dann

$$\mathbf{d} = d(\mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_1). \quad (19)$$

Diese Form entspricht dem vektoriellen Schädigungsparameter und dem Strukturtensor zur Modellierung von transversaler Isotropie. Im zweiten Sonderfall entspricht er dem Kugeltensor

$$\mathbf{d} = d\mathbf{1}. \quad (20)$$

In diesem Fall liegt dann isotrope Schädigung vor.

Ändert sich die Belastungsrichtung z. B. von Zug auf Druck kann die Schädigung inaktiv werden, da sich die Mikrodefekte schließen. Im geschlossenen Zustand beeinflussen die Mikrodefekte die elastische Eigenschaft des Materials nicht mehr. Zur Modellierung dieses Effektes bzw. Berechnung des aktiven Anteils \mathbf{d}^+ des Schädigungstensors \mathbf{d} wird hier nach Ortiz (1985) - siehe auch Hansen und Schreyer (1995) sowie Qi und Bertram (1997, 1998, 1999) - vorgegangen mit dem Unterscheid, dass wir für die Spektraldarstellungen aufgrund der eindeutigen Definition Eigenprojektionen verwenden. Im Folgenden ist mit Schädigungsvariable oder -tensor immer der aktive Anteil der Schädigungsvariable gemeint und zur Vereinfachung der Notation wird \mathbf{d} für \mathbf{d}^+ verwendet.

5.3 Konstitutive Gleichungen

Zur Herleitung der konstitutiven Gleichungen und der thermodynamischen Einschränkungen auf die Materialkonstanten und -funktionen wird der Schädigungsparameter \mathbf{d} zusätzlich zu den Variablen $\boldsymbol{\alpha}$ und κ zur Beschreibung einer kinematischen bzw. einer isotropen Verfestigung als eine interne Zustandsvariable betrachtet

$$\mathbf{a} = \{\boldsymbol{\alpha}, \kappa, \mathbf{d}\}. \quad (21)$$

Die spezifische freie Enthalpie (das Gibbsche Potential) Φ wird als eine eindeutige Funktion der Spannung $\boldsymbol{\pi}$ und der internen Zustandsvariablen \mathbf{a} angenommen. Für isotherme Prozesse können wir dann (Lehmann, 1989) von der folgenden additiven Zerlegung von Φ ausgehen

$$\Phi = \Phi^e(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{d}) + \Phi^i(\mathbf{a}). \quad (22)$$

Φ^e bezeichnet hierin den reversiblen Anteil der freien Enthalpie und Φ^i den inelastischen Anteil. Φ^e hängt von der Spannung und der Schädigungsvariablen ab. Mit Gleichung (10) sowie (15) und nach einem Standard-Verfahren von Coleman und Noll (1963) erhält man die (hyper)elastische Beziehung

$$\mathbf{h}^e = \frac{1}{2} \ln \mathbf{B}^e = \frac{\partial \Sigma}{\partial \boldsymbol{\pi}} \quad (23)$$

und die Dissipations-Ungleichung

$$\boldsymbol{\pi} : \mathbf{D}^{ei} + \rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{a}} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{a}}^{\text{Log}} \geq 0, \quad (24)$$

wobei $\Sigma = \rho_0 \Phi^e$ das komplementäre hyperelastische Potential bezeichnet und ρ_0 Dichte des Materials in der Referenzkonfiguration.

Aus der hyperelastischen Form (23) des elastischen Stoffgesetzes kann man im Allgemeinen nur den (linken) Strecktensor \mathbf{V}^e bestimmen und demzufolge den Deformationsgradienten nicht eindeutig festlegen. Nach Lemma A in Xiao u.a. (2000) lässt sich der Deformationsgradient $\mathbf{F}^+(t)$ eindeutig bestimmen, falls $\mathbf{V}^+(t)$, die Verzerrungsgeschwindigkeit $\mathbf{D}^+(t)$ und der Anfangswert $\mathbf{F}^+(0)$ von \mathbf{F} vorgegeben sind. Hier soll deshalb zur eindeutigen Festlegung von \mathbf{F}^e zusätzlich zu (23) die konstitutive Beziehung für die Verzerrungsgeschwindigkeit \mathbf{D}^e (Ratenform des elastischen Stoffgesetzes) angegeben werden. Auf den elastisch-inelastischen Anteil der Verzerrungsgeschwindigkeit kommen wir dann in Abschnitt 5.5 zurück.

Wenn wir den Zusammenhang (12) zwischen der Log-Rate und der Green-Naghdi-Rate verwenden, kann das elastische Stoffgesetz (23) in der Form

$$\mathbf{D}^e = \overline{(\partial \Sigma / \partial \boldsymbol{\pi})}^{\circ \text{R}} + (\partial \Sigma / \partial \boldsymbol{\pi}) \boldsymbol{\Omega}^{\text{LR}} - \boldsymbol{\Omega}^{\text{LR}} (\partial \Sigma / \partial \boldsymbol{\pi}) \quad (25)$$

angegeben werden. In einem Bezugssystem, das sich mit dem Polar-Spin dreht, bleiben die Materialsymmetrien aufgrund der Deformation unverändert. Folglich kann von der Kettenregel in der Form

$$\overline{(\partial \Sigma / \partial \boldsymbol{\pi})}^{\circ \text{R}} = \mathbb{D} : \overset{\circ}{\boldsymbol{\pi}}^{\text{R}} + [\partial^2 \Sigma / (\partial \boldsymbol{\pi} \partial \mathbf{d})] : \overset{\circ}{\mathbf{d}}^{\text{R}} \quad (\mathbb{D} = \partial^2 \Sigma / (\partial \boldsymbol{\pi} \partial \boldsymbol{\pi})) \quad (26)$$

Gebrauch gemacht werden und für die elastische Verzerrungsgeschwindigkeit folgt die Beziehung

$$\mathbf{D}^e = \mathbf{D}^{e0} + \mathbf{D}^{ed} \quad (27)$$

mit

$$\mathbf{D}^{e0} = \mathbb{D} : \overset{\circ}{\boldsymbol{\pi}}^{\text{R}} + (\mathbb{D} : \boldsymbol{\pi}) \boldsymbol{\Omega}^{\text{LR}} - \boldsymbol{\Omega}^{\text{LR}} (\mathbb{D} : \boldsymbol{\pi}), \quad \mathbf{D}^{ed} = [\partial^2 \Sigma / (\partial \boldsymbol{\pi} \partial \mathbf{d})] : \overset{\circ}{\mathbf{d}}^{\text{R}}. \quad (28)$$

Der Anteil \mathbf{D}^{e0} der Verzerrungsgeschwindigkeit ist dabei rein elastisch, und der Anteil \mathbf{D}^{ed} ist schädigungsinduziert. Folglich unterscheidet sich die Beziehung (27) von der Gleichung (35) in Xiao u.a. (2000) nur durch das zweite Glied auf der rechten Seite, das hier als Folge der Schädigung auftritt.

5.4 Gibbssches Potential und Dissipationspotential

Nach dem Prinzip der materiellen Objektivität bleibt das komplementäre hyperelastische Potential Σ bei einer Beobachtertransformation unverändert. Der Spannungstensor $\boldsymbol{\pi}$ und der Schädigungstensor \mathbf{d} sind objektive Eulersche Tensoren. Σ muss deshalb für jeden beliebigen orthogonalen Drehtensor \mathbf{Q} der Invarianzbedingung

$$\Sigma(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{d}) = \Sigma(\mathbf{Q} \star \boldsymbol{\pi}, \mathbf{Q} \star \mathbf{d}) \quad (29)$$

genügen. Das hyperelastische Potential Σ ist also eine isotrope Tensorfunktion von $\boldsymbol{\pi}$ und \mathbf{d} und ist nach dem Darstellungssatz für isotrope Tensorfunktionen eine Funktion der 10 Grundinvarianten (Gleichung (11.22) in Truesdell und Noll, 1965). Daraus lässt sich unter Berücksichtigung nur linearer Terme in \mathbf{d} die Näherungsfunktion

$$2\Sigma = \eta_1 (\text{tr}(\boldsymbol{\pi}))^2 + 2\eta_2 \text{tr}(\boldsymbol{\pi}^2) + 2\eta_3 \text{tr}(\boldsymbol{\pi}) \text{tr}(\boldsymbol{\pi} \mathbf{d}) + 4\eta_4 \text{tr}(\boldsymbol{\pi}^2 \mathbf{d}) \quad (30)$$

für Σ konstruieren. Hier bezeichnen $\eta_1 - \eta_4$ Ansatzfreiwerte, die im Allgemeinen Funktion der Grundinvarianten von $\boldsymbol{\pi}$ und \mathbf{d} sind. Daraus folgt für den Nachgiebigkeitstensor die Beziehung

$$\mathbb{D}_{ijkl} = \eta_1 \delta_{ij} \delta_{kl} + \eta_2 (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + \eta_3 (\delta_{ij} d_{kl} + \delta_{kl} d_{ij}) + \eta_4 (\delta_{ik} d_{jl} + \delta_{il} d_{jk} + \delta_{jk} d_{il} + \delta_{jl} d_{ik}). \quad (31)$$

Es wird hier angenommen, dass das ungeschädigte Material isotrop und mikrodefektfrei ist. Die additive Aufspaltung des Nachgiebigkeitstensors

$$\mathbb{D} = \mathbb{D}^0 + \mathbb{D}^d, \quad (32)$$

$$\mathbb{D}^0 = \eta_1 \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\eta_2 \mathbf{I}, \quad \mathbb{D}_{ijkl}^d = \eta_3 (\delta_{ij} d_{kl} + \delta_{kl} d_{ij}) + \eta_4 (\delta_{ik} d_{jl} + \delta_{il} d_{jk} + \delta_{jk} d_{il} + \delta_{jl} d_{ik}) \quad (33)$$

in einen ungeschädigten oder isotropen Anteil \mathbb{D}^0 und einen schädigungsinduzierten Anteil \mathbb{D}^d ist durch mikromechanische Modelle z. B. von Budiansky und O'Connell (1976) oder Horii und Nemat-Nasser (1983) motiviert. Hier bezeichnet \mathbf{I} den symmetrischen Einheitstensor vierter Stufe. Der Anteil \mathbb{D}^0 des Nachgiebigkeitstensors ist die Inverse des Elastizitätstensors

$$\mathbb{C}^0 = \lambda^0 \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu^0 \mathbf{I} \quad (34)$$

des ungeschädigten Materials. λ^0 und μ^0 bezeichnen die Laméschen Konstanten des ungeschädigten Materials. Zwischen λ^0 und μ^0 und η_1 und η_2 bestehen deshalb die folgenden Zusammenhänge

$$\eta_1 = \frac{-\lambda^0}{2\mu^0(3\lambda^0 + 2\mu^0)}, \quad \eta_2 = \frac{1}{4\mu^0}. \quad \text{bzw.} \quad \mu^0 = \frac{1}{4\eta_2}, \quad \lambda^0 = \frac{-\eta_1}{\eta_2(1 + 6\eta_1)}. \quad (35)$$

Die zwei verbleibenden Materialparameter η_3 und η_4 müssen aus Experimenten bestimmt werden. Beachtet man dabei die Tatsache, dass die Schädigung die Steifigkeit einer Struktur verringert (d. h. die Nachgiebigkeit vergrößert), kann davon ausgegangen werden, dass η_3 und η_4 positive Konstanten sein müssen

$$\eta_3 \geq 0, \quad \eta_4 \geq 0. \quad (36)$$

Die Ungleichungen in (36) ergeben sich auch aus der Überlegung, dass für eine vorgegebene Spannung $\boldsymbol{\pi}$ das komplementäre hyperelastische Potential eines geschädigten Materials größer als das eines ungeschädigten ist. Die Ungleichungen (36) sind thermodynamisch konsistent und Folgerungen aus dem 2. Hauptsatz der Thermodynamik.

Mit Gleichung (30) folgt aus (23) die hyperelastische Beziehung

$$\mathbf{h}^e = \mathbb{D} : \boldsymbol{\pi}, \quad \boldsymbol{\pi} = \mathbb{C} : \mathbf{h}^e. \quad (37)$$

Für isotropes Material und isotrope Schädigung entspricht die Spannung $\boldsymbol{\pi}$ dem Kirchhoffschen Spannungstensor $\boldsymbol{\tau}$ und ist deswegen mit \mathbf{h}^e koaxial. In diesem Fall lässt sich das elastische Stoffgesetz in der

Form

$$\boldsymbol{\pi} = \lambda \text{tr}(\ln \mathbf{V}^e) \mathbf{1} + 2\mu \ln \mathbf{V}^e = \sum_{\sigma=1}^n \left[\left(k - \frac{2}{3}\mu \right) \ln J^e + \mu \ln \chi_{\sigma}^e \right] \mathbf{B}_{\sigma}^e \quad (38)$$

angeben, wobei $k = \lambda + 2/3\mu$ hier den Kompressionsmodul des geschädigten Materials bezeichnet. χ_{σ}^e sind die Eigenwerte von \mathbf{B}^e und \mathbf{B}_{σ}^e die entsprechenden orthonormalen Eigenprojektionen. Die Gleichung (38) ohne Schädigung ($k \mapsto k^0, \dots$) geht auf Hencky zurück. Sie ist zur Beschreibung von großen (moderaten elastischen) Formänderungen unter Anderem von Anand (1986), Bathe (1996) und Schieck und Stumpf (1995) verwendet worden.

Im Allgemeinen hängt der inelastische Anteil Φ^i des Gibbsschen Potentials Φ von der Schädigungsvariable und den Verfestigungsvariablen ab. Nach Lehmann (1989) wird der Einfachheit halber davon ausgegangen, dass Φ^i nicht explizit von der Schädigungsvariable abhängt. Für Φ^i wird deshalb das folgende Potential verwendet

$$-\rho_0 \Phi^i = H_{\text{kin}} \frac{1}{2} \boldsymbol{\alpha} : \boldsymbol{\alpha} + K(\kappa), \quad (39)$$

wobei H_{kin} den kinematischen Verfestigungsmodul bezeichnet. Man beachte, dass $\boldsymbol{\alpha}$ und κ Funktionen der Schädigungsvariable sind. Eine implizite Abhängigkeit des inelastischen Anteils des Gibbsschen Potentials von der Schädigungsvariable ist demnach gegeben. Aus (39) und (30) erhalten wir die arbeitskonjugierten Größen zu den Zustandsvariablen als

$$\mathbf{Y} = \eta_3 \text{tr}(\boldsymbol{\pi}) \boldsymbol{\pi} + 2\eta_4 \boldsymbol{\pi}^2, \quad \mathbf{X} = -H_{\text{kin}} \boldsymbol{\alpha}, \quad K' = \rho_0 \partial K(\kappa) / \partial \kappa. \quad (40)$$

Der elastische Bereich \mathbb{E}_{σ} wird vom inelastischen Bereich im Spannungsraum durch eine konvexe Fläche, die Fließfläche $F = 0$, getrennt. Der elastische Bereich wird also definiert als

$$\mathbb{E}_{\sigma} = \{(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{a}) : F(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{a}) \leq 0\}, \quad (41)$$

wobei \mathbf{a} die internen Zustandsvariablen bezeichnet. Die Fließfläche stellt im Spannungsraum eine Hyperfläche mit Ursprung bei \mathbf{X} dar. Mit der Interpretation des Schädigungsparameters als eines sich entwickelnden Strukturtenors und durch eine analoge Vorgehensweise wie zur Herleitung des Nachgiebigkeitstensors erhält man die folgende anisotrope Fließbedingung

$$F = \pi_{eq} - \pi_0 \cdot m - K'(\kappa), \quad (42)$$

$$\pi_{eq} = \|\bar{\boldsymbol{\pi}}\|_{\mathbf{A}} = \sqrt{\bar{\boldsymbol{\pi}} : \mathbf{A} : \bar{\boldsymbol{\pi}}}, \quad \bar{\boldsymbol{\pi}} = \boldsymbol{\pi} - \mathbf{X}, \quad m = (b_0 + b_1 I_3)^{\frac{1}{2}}, \quad I_3 = \det(\mathbf{d}), \quad (43)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^0 + \mathbf{A}^d, \quad (44)$$

$$\mathbf{A}^0 = a_1 \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2a_2 \mathbb{I}, \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{ijkl}^d = & a_3 \delta_{ij} d_{kl} + a_4 \delta_{kl} d_{ij} + a_5 (\delta_{ik} d_{jl} + \delta_{il} d_{jk} + \delta_{jk} d_{il} + \delta_{jl} d_{ik}) + a_6 (d_{ij} d_{kl}) \\ & + (a_7 \delta_{ij} d_{kl}^2 + a_8 d_{ij}^2 \delta_{kl}) + a_9 (\delta_{jk} d_{il}^2 + \delta_{ik} d_{jl}^2 + \delta_{jl} d_{ik}^2 + \delta_{il} d_{jk}^2). \end{aligned} \quad (46)$$

Hierin sind a_1 bis a_9 sowie b_0 und b_1 Ansatzfreiwerte, die im Allgemeinen Funktionen der Invarianten von $\bar{\boldsymbol{\pi}}$ und \mathbf{d} sind. π_0 ist die Anfangsfließspannung, eine Materialkonstante. Diese Aufspaltung des Anisotropietensors entspricht prinzipiell der Zerlegung des Nachgiebigkeitstensors und ist dadurch motiviert worden. Für die Fließbedingung des anfänglich isotropen Materials gilt

$$F_0 = \frac{3}{2} \pi'_{ij} \pi'_{ij} - \pi_0^2, \quad (47)$$

mit π' als Deviator von π . Damit ergeben sich die Materialkonstanten für den isotropen Anteil \mathbf{A}^0 von \mathbf{A} als

$$a_1 = -0,5, \quad a_2 = 0,75 \quad (48)$$

und damit

$$\mathbf{A}^0 = \frac{3}{2}(\mathbb{I} - \frac{1}{3}\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}). \quad (49)$$

Der isotrope Anteil \mathbf{A}^0 von \mathbf{A} ist – bis auf den Vorfaktor $\frac{3}{2}$ – der deviatorische Projektionstensor vierter Stufe. Er projiziert den symmetrischen Spannungstensor π auf $\frac{3}{2}\pi'$.

Zur Bestimmung der verbleibenden Parameter greifen wir auf ein bestehendes Schädigungsmodell zurück. Von Gurson (1977) wurde eine Fließbedingung für isotrope Schädigung entwickelt. Diese auf mikromechanischer Basis entwickelte Fließbedingung ist z. B. erfolgreich zur Modellierung von Lokalisierung, Scherbandbildung und Makrorissbildung in metallischen Werkstoffen eingesetzt worden (siehe Needleman und Tvergaard (1984), Tvergaard (1982)). Deswegen wird zur Bestimmung der verbleibenden Materialkonstanten $a_3 - a_9$ eine Übereinstimmung der hier hergeleiteten Fließbedingung mit der Fließbedingung von Gurson (1977)

$$F_G = \frac{3}{2}\pi'_{ij}\pi'_{ij} + 2q_1 f \pi_0^2 \cosh \left[\frac{q_2 \pi_{kk}}{2\pi_0} \right] - \pi_0^2 [1 + (q_3 f)^2], \quad q_1 = 1,5; \quad q_2 = 1,0; \quad q_3 = 1,5 \quad (50)$$

bei isotroper Schädigung verlangt. f ist hier der Porenvolumenanteil. Für die Beschreibung großer Formänderungen ist hier eine weitere Modifikation vorgenommen worden, indem die Cauchysche Spannung σ durch die Kirchhoffsche Spannung π ersetzt wurde. Für isotrope Schädigung ergibt sich keine Änderung der Materialsymmetrien, und der Schädigungstensor ist ein Kugeltensor, siehe Gleichung (20). Als eine weitere Annahme wird für isotrope Schädigung d als Porenvolumenanteil f interpretiert:

$$f = d. \quad (51)$$

Man erhält, wenn man in (50) das Hyperbelkosinusglied durch seine Potenzreihenentwicklung ersetzt (Voyiadjis und Kattan, 1992), die Näherung

$$F_G = F_0 + 2q_1 f \pi_0^2 \left[1 + \frac{\pi_{kk}^2}{8\pi_0^2} \right] - \pi_0^2 q_3^2 f^2. \quad (52)$$

Mit Gleichung (20) ergibt sich die Vereinfachung

$$F = \frac{3}{2}\pi'_{ij}\pi'_{ij} + d [(2a_3 + 2da_7)(\text{tr}(\pi))^2 + 4a_5 \text{tr}(\pi^2)] + d^2 [a_6 + 4a_9] \text{tr}(\pi^2) - \pi_0^2 (b_0 + b_1 d^3) \quad (53)$$

für die Fließfunktion (42). Für ein isotrop vorgeschädigtes Material, das einer eindimensionalen Belastung unterliegt, folgt aus der Fließbedingung (50) die Beziehung

$$F_G = \pi^2 + 2q_1 g \left[1 + \frac{\pi^2}{8g} \right] - \pi_0^2 (1 + q_1^2 f^2) = 0 \quad (54)$$

bzw.

$$\pi^2 = w_1(f) \pi_0^2, \quad w_1(f) = [1 - 2q_1 f + q_1^2 f^2][1 + 1/4q_1 f]^{-1}. \quad (55)$$

Für die weiteren Betrachtungen wird a_6 gleich Null gesetzt. Für den gleichen Fall folgt aus (42) die Beziehung

$$F = \pi^2 + (2a_3 + 4a_5) f \pi^2 + (2a_7 + 4a_9) f^2 \pi^2 - \pi_0^2 (b_0 + b_1 d^3) = 0, \quad (56)$$

die auch nach dem Quadrat der Spannung umgeformt werden kann:

$$\pi^2 = w_2(f) \pi_0^2, \quad w_2(f) = [b_0 + b_1 f^3][1 + (2a_3 + 4a_5) f + (2a_7 + 4a_9) f^2]^{-1}. \quad (57)$$

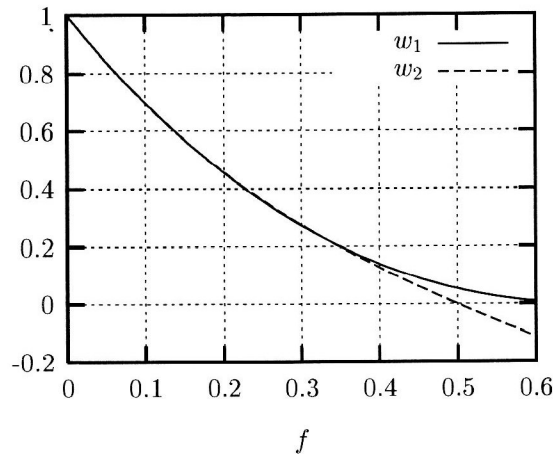


Bild 2: Wichtungsfunktionen w_1 und w_2

Damit beide Fließfunktionen die gleiche Fließspannung aufweisen, müssen die Konstanten in der Wichtungsfunktion w_2 so bestimmt werden, dass w_1 mit w_2 übereinstimmt. Für den folgenden Satz von Materialkonstanten

$$a_3 = -0,50; \quad a_5 = 1,08; \quad a_7 = -2,25; \quad a_9 = 3,51; \quad b_0 = 1,00; \quad b_1 = -8,00 \quad (58)$$

stimmt die Funktion w_2 mit der Funktion w_1 gut überein (siehe Bild 2). Die Materialkonstanten b_0 und b_1 sind so gewählt, dass die Funktion $w_2(d)$ für isotrope Schädigung und für einen Porenvolumenanteil von $d = 0,5$ verschwindet. In Bild 3 sind für den Sonderfall des ebenen Spannungszustands die Fließbedingung F_G von Gurson (1977) – durchgezogene Linie – und die hier hergeleitete Fließbedingung F – gebrochene Linie – für einen Porenvolumenanteil von $f = 0,10$ und $f = 0,15$ dargestellt. Die Bilder zeigen eine zufriedenstellende Übereinstimmung. In den Bildern wird zusätzlich die Fließfläche des ungeschädigten Materials zum Vergleich dargestellt. Es ist klar erkennbar, dass sich bei isotroper Schädigung die Form

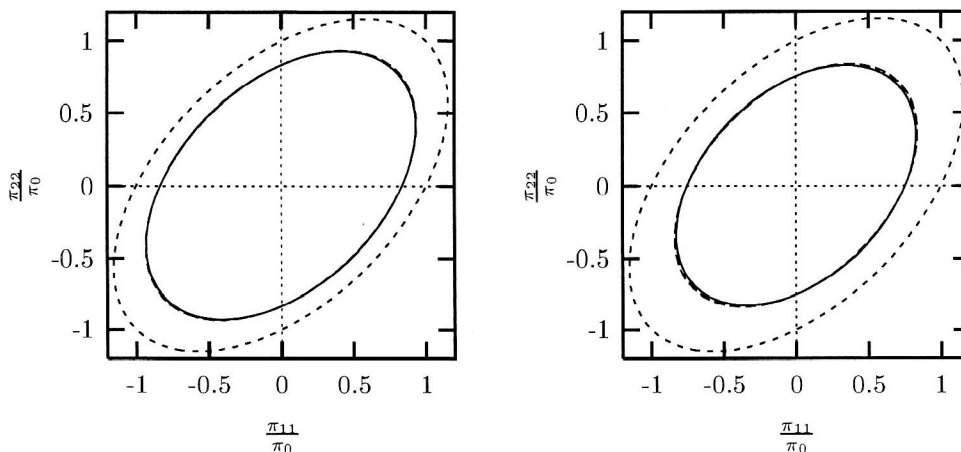


Bild 3: F_G und F bei einem Porenvolumenanteil von $f = 0,10$ (links) und $f = 0,15$ (rechts)

der Fließfläche nicht ändert. Fließen tritt zwar in allen Richtungen früher auf, was einer Schwächung des Materials entspricht, die Hauptachsen der Ellipse werden durch die Schädigung aber nicht verändert und die Symmetrie der Fließkurve bezüglich der Gerade $\pi_1 = \pi_2$ bleibt erhalten. Der Fall, dass nur die Komponente d_{11} des Schädigungstensors von Null verschieden ist, ist in Bild 4 dargestellt. Man sieht, dass sich die Hauptachsen der Fließellipse aufgrund der anisotropen Schädigung ändern und dass durch die Materialschwächung Fließen in π_1 -Richtung früher auftritt als in π_2 -Richtung. Die Fließkurve hat auch ihre Symmetrie bezüglich der Geraden $\pi_1 = \pi_2$ verloren.

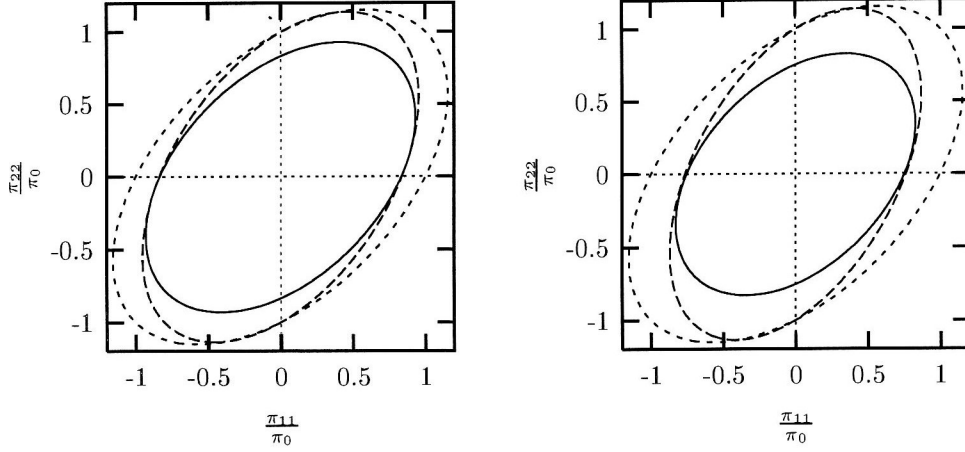


Bild 4: F für $d_{11} = 0,10$ (links) und $d_{11} = 0,15$ (rechts). Alle anderen Komponenten sind Null.

5.5 Evolutionsgleichungen

Für die Entwicklung der inelastischen Verzerrungen und der Verfestigungsvariablen werden Evolutionsgleichungen vom Typ der assoziierten Plastizität verwendet

$$\mathbf{D}^{\text{ei}} = \lambda \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\pi}} = \lambda \frac{\mathbf{A} : \bar{\boldsymbol{\pi}}}{\|\bar{\boldsymbol{\pi}}\|_{\mathbf{A}}}, \quad \dot{\kappa} = \|\mathbf{D}^{\text{ei}}\|_{\mathbf{A}^{-1}} = \lambda, \quad \overset{\circ}{\mathbf{X}}^{\text{Log}} = H_{\text{kin}} \mathbf{D}^{\text{ei}}. \quad (59)$$

Der Parameter λ wird aus der Konsistenzbedingung $\dot{F} = 0$ bestimmt und erfüllt die Be- und Entlastungsbedingung

$$\lambda \geq 0, \quad F \leq 0, \quad \lambda F = 0. \quad (60)$$

Gleichung (59)₂ stellt die durch \mathbf{A}^{-1} induzierte Norm von \mathbf{D}^{ei} dar. Im schädigungsfreien Fall entspricht diese Norm der Rate der plastischen Vergleichsdehnung. Aus der additiven Aufspaltung des Anisotropietensors \mathbf{A} ergibt sich mit der Fließregel (59)₁ eine additive Aufspaltung von \mathbf{D}^{ei} in einen isotropen rein elastisch-plastischen Anteil \mathbf{D}^{ep} und einen schädigungsinduzierten Anteil \mathbf{D}^{ed} :

$$\mathbf{D}^{\text{ei}} = \mathbf{D}^{\text{ep}} + \mathbf{D}^{\text{ed}}, \quad \mathbf{D}^{\text{ep}} = \lambda \frac{\mathbf{A}^0 : \bar{\boldsymbol{\pi}}}{\|\bar{\boldsymbol{\pi}}\|_{\mathbf{A}}}, \quad \mathbf{D}^{\text{ed}} = \lambda \frac{\mathbf{A}^{\text{d}} : \bar{\boldsymbol{\pi}}}{\|\bar{\boldsymbol{\pi}}\|_{\mathbf{A}}}. \quad (61)$$

Der Anteil \mathbf{D}^{ep} stellt den Gestaltänderungsanteil von \mathbf{D}^{ei} dar und \mathbf{D}^{ed} den Volumenänderungsanteil von \mathbf{D}^{ei} . Wegen

$$(\mathbf{1} : \mathbf{A}^0)_{kl} = 0 \quad (62)$$

ist die Spur des isotropen Anteils \mathbf{D}^{ep} gleich Null, d. h. dieser Anteil ist isochor. Im Allgemeinen verschwindet die Spur der inelastischen Verzerrungsgeschwindigkeit aber nur, wenn der Schädigungstensor Null ist und keine Schädigungsentwicklung vorliegt. Demnach ist inelastisches Materialverhalten immer mit einer Volumenänderung verbunden, und die Inkompessibilität der klassischen Plastizitätstheorie liegt nur dann vor, wenn weder Schädigung noch Schädigungsentwicklung auftreten.

Experimentelle Untersuchungen von z. B. Cordebois und Sidoroff (1979) und Feldmüller (1991) haben gezeigt, dass Schädigung bei metallischen Werkstoffen erst bei (großen) plastischen Formänderungen auftreten. Für duktile Schädigung kann deshalb für die Evolutionsgleichung der Schädigungsvariablen von der folgenden tensoriellen Funktion ausgegangen werden

$$\overset{\circ}{\mathbf{d}}^{\text{Log}} = \lambda \bar{\mathbf{d}}(\mathbf{Y}; \boldsymbol{\pi}, \mathbf{a}, \dots). \quad (63)$$

Feldmüller (1991) schlägt zur Modellierung von isotroper Schädigung die Beziehung

$$\dot{d} = \eta \|\mathbf{D}^{\text{ei}}\|_{\mathbf{I}} \quad (64)$$

als Ansatz für die Entwicklungsgleichung einer skalarwertigen Schädigungsvariablen d vor. η ist dabei eine von der Schädigung und von der Temperatur abhängige Materialfunktion. In Tvergaard (1982) und Needleman und Tvergaard (1984) wird die Evolutionsgleichung \dot{f} für die skalarwertige Schädigungsvariable in zwei Anteile aufgeteilt: einen Entstehungs- und einen Wachstumsanteil. Der Wachstumsanteil \dot{f}_{growth} von \dot{f} ergibt sich aus der Inkompressibilität des Matrixmaterials und ist direkt proportional zur Spur von \mathbf{D}^{ei}

$$\dot{f}_{\text{growth}} = (1 - f)\text{tr}(\mathbf{D}^{\text{ei}}). \quad (65)$$

Die Verbindung von Schädigung mit plastischer Formänderung in diesen Ansätzen ist offensichtlich. Der Ansatz (63) kann deshalb als eine Verallgemeinerung dieser isotropen Modelle verstanden werden.

Der Schädigungstensor muss positiv semi-definit sein, da eine Heilung des Materials ausgeschlossen wird. Die Evolutionsfunktion für die Schädigungsvariable muss demzufolge auch positiv semi-definit sein. Hier wird angenommen, dass die Entwicklung der Schädigungsvariablen tensoriell von \mathbf{Y}^+ , $\boldsymbol{\pi}$ und \mathbf{d} abhängt. Der Einfachheit halber wird der Ansatz auf die folgende lineare Form beschränkt

$$\mathring{\mathbf{d}}^{\text{Log}} = \lambda [\beta_1 \mathbf{1} + \beta_2 \mathbf{Y}^+], \quad (66)$$

wobei β_1 und β_2 Ansatzfreiwerte bezeichnen. \mathbf{Y}^+ ist die positive Projektion von \mathbf{Y} . Damit der Schädigungstensor positiv semi-definit bleibt, muss

$$\beta_1 \geq 0, \quad \beta_2 \geq 0 \quad (67)$$

gelten. Die konkreten Formen dieser Materialfunktionen sind (auch) aus Experimenten zu bestimmen. Man beachte, dass man mit

$$\beta_2 = 0, \quad \lambda\beta_1 = \eta \|\mathbf{D}^{\text{ei}}\|_{\mathbf{I}} \quad (68)$$

das Modell von Feldmüller (1991) erhält und mit

$$\beta_2 = 0, \quad \lambda\beta_1 = \dot{f}_{\text{growth}} \quad (69)$$

das Modell von Gurson (1977). Mit zunehmender Deformation wird die Schädigung anisotrop, und man kann Evolutionsgleichungen in der Form (68) oder (69) nur für die Anfangsphase der Deformation verwenden.

Mit Hilfe von Gleichung (13) ergeben sich aus den Evolutionsgleichungen für κ , \mathbf{X} , \mathbf{d} und \mathbf{h} äquivalente Integralformen. Die Integralform für \mathbf{D} z. B. lautet

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}^e + \mathbf{h}^{\text{ei}}, \quad (70)$$

mit

$$\mathbf{h}^e = (\mathbf{R}^{\text{Log}})^{\text{T}} \star \int_0^t \mathbf{R}^{\text{Log}} \star [\mathbf{D}^e] ds, \quad \mathbf{h}^{\text{ei}} = (\mathbf{R}^{\text{Log}})^{\text{T}} \star \int_0^t \mathbf{R}^{\text{Log}} \star \left[\lambda \frac{\mathbf{A} : \boldsymbol{\pi}}{\|\boldsymbol{\pi}\|_{\mathbf{A}}} \right] ds. \quad (71)$$

Der räumliche Henckysche Dehnungstensor \mathbf{h} setzt sich demnach aus einem elastischen Anteil \mathbf{h}^e und einem elastisch-inelastischen Anteil \mathbf{h}^{ei} zusammen. Man beachte, dass das Integral der Verzerrungsgeschwindigkeit über die Zeit nur in speziellen Fällen wie z. B. Deformationen, bei denen die Hauptverzerrungsachsen sich mit der Zeit nicht ändern, ein Verzerrungsmaß ergibt. Es ist eine Eigenschaft der Log-Rate bzw. Log-Rotation, dass die mitrotierende Zeitintegration der Verzerrungsgeschwindigkeit genau den räumlichen Hencky Dehnungstensor ergibt.

ELASTISCHE SPANNUNGS-DEHNUNGS-BEZIEHUNG	
• HYPERELASTISCHE FORM	$\mathbf{h}^e = (\partial \Sigma) / (\partial \boldsymbol{\pi})$
• RATENFORM	$\mathbf{D}^e = \overline{(\partial \Sigma / \partial \boldsymbol{\pi})}^{\text{Log}}$
ELASTISCHER BEREICH	
	$\mathbb{E}_\sigma := \{(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{a}) : F \leq 0\}$
	$F = \ \boldsymbol{\pi}\ _{\mathbf{A}} - \pi_0 \cdot m - K'(\kappa)$
FLIESSREGEL	
	$\mathbf{D}^{\text{ei}} = \lambda \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\pi}} = \lambda \frac{\mathbf{A} : \bar{\boldsymbol{\pi}}}{\ \bar{\boldsymbol{\pi}}\ _{\mathbf{A}}}$
EVOLUTIONSGLEICHUNGEN	
	$\dot{\kappa} = \ \mathbf{D}^{\text{ei}}\ _{\mathbf{A}^{-1}} = \lambda$
	$\overset{\circ}{\mathbf{X}}^{\text{Log}} = H_{\text{kin}} \mathbf{D}^{\text{ei}}$
	$\overset{\circ}{\mathbf{d}}^{\text{Log}} = \lambda [\beta_1 \mathbf{1} + \beta_2 \mathbf{Y}^+]$
KONSISTENZBEDINGUNG	
	$\lambda \dot{F} = 0$
KUHN-TUCKER-BEDINGUNG	
	$\lambda \geq 0, \quad F \leq 0, \quad \lambda F = 0$

Tabelle 1: Finites anisotropes Schädigungsmodell

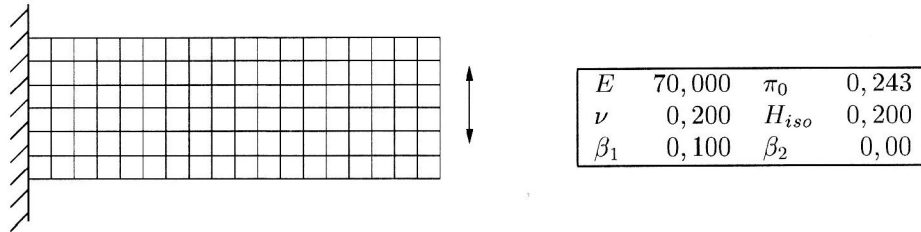


Bild 5: Geometrie, Randbedingungen, Diskretisierung und Materialparameter

Mit obigen Evolutionsgleichungen erhalten wir aus der Dissipations-Ungleichung (24) die Einschränkungen (36) für die Materialkonstanten η_3 und η_4 und die Bedingung

$$0 \leq m \leq 1 \quad (72)$$

für die Funktion m . Das Modell ist in Tabelle 1 zusammengefasst.

6 Beispiel

Die numerische Umsetzung des Materialmodells ist in Bruhns und Bongmba (2001) gezeigt worden. Ausgangspunkt ist die Ratenform des Prinzips der virtuellen Arbeit, die die Lie-Ableitung des Kirchhoffschen Spannungstensors beinhaltet. Der benötigte Zusammenhang zwischen der Lie-Ableitung des Kirchhoffschen Spannungstensors und der verwendeten logarithmischen Rate ist dort hergeleitet worden. Damit sind für isotropes Verhalten die Materialmoduli, die zur Berechnung des materiellen Anteils der Steifigkeitsmatrix benötigt werden, in geschlossener Form angegeben worden. Um die konstitutiven Gleichungen zu integrieren, wurde die operator-split Methode und als return-mapping-Verfahren der cutting-plane Algorithmus verwendet. Mit Lemma A aus Xiao u.a. (2000) erfolgt die Integration des Stoffgesetzes kinematisch konsistent.

Als numerisches Beispiel wird hier der Kragbalken in Bild 5 betrachtet. Der Balken hat eine Länge von 20 eine Höhe von 6 und eine Dicke von 1. Der Balken ist am linken Ende eingespannt, und wird belastet, indem am rechten Ende die vertikale Verschiebung zyklisch vorgeschrieben wird. Das verwendete Netz aus 18×6 Elementen und die Materialparameter sind im Bild 5 angegeben. Hier wird lineare Verfestigung angenommen. Für die Verfestigungsfunktion gilt demnach $K'(\kappa) = H_{\text{iso}} \kappa$, wobei H_{iso} den isotropen Verfestigungsmodul bezeichnet.

Die Kraft-Verschiebungs-Kurve für den rechten, oberen Knoten ist in Bild 6 dargestellt. Die durchge-

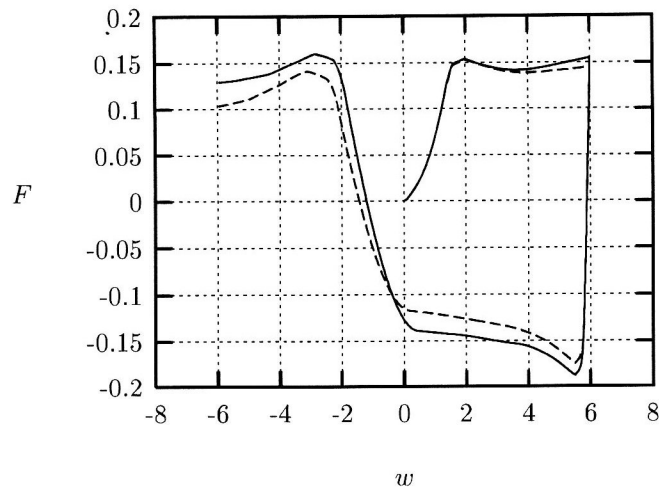


Bild 6: Kraft F über der Verschiebung w (— ohne Schädigung, - - - mit Schädigung)

zogene Linie steht für die Berechnung ohne Schädigung und die gebrochene Linie für die Berechnung mit Schädigung. Die Entfestigung des Materials aufgrund der Schädigung überträgt sich auf das Strukturverhalten und ist hier deutlich zu erkennen. Mit dem Materialmodell von Simo (1992) wurde dieses Problem von Auricchio und Taylor (1999) ebenfalls behandelt. Die Kurve für die elastoplastische Berechnung ohne Schädigung stimmt qualitativ mit der Kurve aus Auricchio und Taylor (1999) überein. Um die Belastungsamplitude von 6 zu erreichen, wurden insgesamt 250 gleiche Zeitschritte verwendet. Durchschnittlich wurden 6 Iterationen pro Zeitschritt benötigt. Das Konvergenzverhalten für einen charakteristischen Zeitschritt ist in Tabelle 2 angegeben.

Iteration	Residual Norm	Energy Norm
1	1.6120140E+00	5.6005142E-02
2	2.1857094E-02	5.2952016E-05
3	8.7267394E-03	3.4027211E-06
4	2.2693239E-03	1.1048662E-07
5	1.0694405E-04	2.3411271E-10
6	5.3240565E-07	3.0073779E-15
7	5.6003696E-12	1.4655195E-24

Tabelle 2: Konvergenzverhalten

Danksagung

Die Autoren bedanken sich bei Prof. Dr.-Ing. O. T. Bruhns, Dr. H. Xiao und Dr.-Ing. A. Meyers für die fruchtbaren Diskussionen und wertvollen Anregungen sowie bei der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) für die finanzielle Unterstützung im Rahmen der Projekte A4 und B1 des Sonderforschungsbereiches SFB 398 an der Ruhr-Universität Bochum.

Literatur

1. Anand, L.: Moderate deformations in extension-torsion of incompressible isotropic elastic materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 34(3), (1986), 293–304.
2. Auricchio, F.; Taylor, R. L.: A return-map algorithm for general associative isotropic elasto-plastic materials in large deformation regimes. *International Journal of Plasticity*, 15, (1999), 1359–1378.
3. Bathe, K.-J.: *Finite Element Procedures*. Prentice-Hall, New Jersey, (1996).
4. Betten, J.: Net-stress analysis in creep mechanics. *Ingenieur-Archiv*, 52, (1982), 405–419.
5. Boehler, J. P.: Introduction to the invariant formulation of anisotropic constitutive equations, (1987a), 13–30. in: Boehler, J. P. (Hrsg.): *Applications of Tensor Functions in Solid Mechanics*, Number 292 in CISM Courses and Lectures, Springer-Verlag, (1987).

6. Boehler, J. P.: Physical motivation, (1987b), 3–11 in: Boehler, J. P. (Hrsg.): Applications of Tensor Functions in Solid Mechanics, Number 292 in CISM Courses and Lectures, Springer-Verlag, (1987).
7. Boehler, J. P.: . Representation for isotropic and anisotropic non-polynomial tensor functions, (1987c), 31–53 in: Boehler, J. P. (Hrsg.): Applications of Tensor Functions in Solid Mechanics, Number 292 in CISM Courses and Lectures, Springer-Verlag, (1987).
8. Bruhns, O. T.; Xiao, H.; Meyers, A.: A self-consistent Eulerian rate type model for finite deformation elastoplasticity with isotropic damage. *International Journal of Solids and Structures*, 38(4), (2000), 657–683.
9. Bruhns, O. T.; Bongmba, C. N.: On the numerical implementation of a finite strain anisotropic damage model based upon the logarithmic rate. *European Journal of Finite Elements*, 10(2,3,4), (2001), 385–400.
10. Budiansky, B.; O’Connell R. J.: Elastic moduli of a cracked solid. *International Journal of Solids and Structures*, 12, (1976), 81–97.
11. Chaboche, J.-L.: Continuum damage mechanics: Part I - General concepts, part II - Damage growth, crack initiation, and crack growth. *Journal of Applied Mechanics*, 55, (1988), 59–72.
12. Chaboche, J. L.: Thermodynamically founded CDM models for creep and other conditions, (1998) in: Altenbach, H. and Skrzypek, J. (Hrsg.): Modelling of Creep and Damage Processes in Materials and Structures, Number 399 in CISM Courses and Lectures, Springer-Verlag, (1998).
13. Chow, C. L.; Wang, J.: An anisotropic theory of elasticity for continuum damage mechanics. *International Journal of Fracture*, 33, (1987), 3–16.
14. Coleman, B. D.; Noll, W.: The thermodynamics of elastic materials with heat conduction and viscosity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 13, (1963), 167–178.
15. Cordebois, J. P.; Sidoroff, F.: Damage induced elastic anisotropy, (1979), 761–774 in: Boehler, J. P. (Hrsg.): Mechanical Behavior of Anisotropic Solids, Number 295 in CNRS, Martinus Nijhoff Publishers, (1979).
16. Davison, L.; Stevens, A. L.; Kipp, M. E.: Theory of spall damage accumulation in ductile metals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 25, (1977), 11–28.
17. Doyle, T. C.; Ericksen, J. L.: Nonlinear Elasticity. Number 4 in *Advances in Applied Mechanics*. Academic Press, New York, (1956).
18. Dragon, A.; Mróz, Z.: A continuum model for plastic-brittle behaviour of rock and concrete. *International Journal of Engineering Science*, 17, (1979), 121–137.
19. Feldmüller, A.: Ein thermoplastisches Stoffgesetz isotrop geschädigter Kontinua. *Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik*, Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, (1991).
20. Gurson, A. L.: Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: Part I - Yield criteria and flow rules for porous ductile media. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 99, (1977), 2–15.
21. Hansen, N. R.; Schreyer, H. L.: Damage deactivation. *Journal of Applied Mechanics*, 62, (1995), 450–458.
22. Horii, H.; Nemat-Nasser S.: Overall moduli of solids with microcracks: Load-induced anisotropy. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 31(2), (1983), 155–171.
23. Ju, J. W.: Isotropic and anisotropic damage variables in continuum damage mechanics. *Journal of Engineering Mechanics*, 116(12), (1990), 2764–2770.
24. Kachanov, L. M.: On the time to failure under creep conditions. *Isw. AN SSSR. Otd Techn. Nauk*, 8, (1958), 26–31.
25. Kröner, E.: Allgemeine Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigen-spannungen. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 4, (1960), 273–334.
26. Leckie, F. A.; Hayhurst, D. R.: Creep rupture of structures. *Proceedings of the Royal Society of London A*, 340, (1974), 323–347.

27. Lee, E. H.: Elastic-plastic deformation at finite strains. *Journal of Applied Mechanics*, 36, (1969), 1–6.
28. Lehmann, T.: Some thermodynamical considerations on inelastic deformations including damage processes. *Acta Mechanica*, 79, (1989), 1–24.
29. Lemaitre, J.: A continuous damage mechanics model for ductile fracture. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 107, (1985a), 83–89.
30. Lemaitre, J.: Coupled elasto–plasticity and damage constitutive equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 51, (1985b), 31–49.
31. Lemaitre, J.; Chaboche, J. L.: Aspects phénoménologiques de la rupture par endommagement. *J. Méc. Appl.*, 2(3), (1978), 317–365.
32. Lemaitre, J.; Chaboche, J.-L.: *Mechanics of Solid Materials*. Cambridge University Press, Cambridge, (1990).
33. Marsden, J. E.; Hughes, T. J. R.: *Mathematical Foundations of Elasticity*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, (1983).
34. Murakami, S.: Mechanical modeling of material damage. *Journal of Applied Mechanics*, 55, (1988), 280–286.
35. Murakami, S.; Ohno, N.: A continuum theory of creep and creep damage, (1981), 422–444 in: Ponter, A. R. S. and Hayhurst, D. R. (Hrsg.): *Creep in Structures*. Springer-Verlag, (1981).
36. Naghdi, P. M.: A critical review of the state of finite plasticity. *Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP)*, 41, (1990), 315–394.
37. Needleman, A.; Tvergaard, V.: An analysis of ductile rupture in notched bars. *International Journal of Solids and Structures*, 32(6), (1984), 461–490.
38. Ortiz, M.: Constitutive theory for the inelastic behavior of concrete. *Mechanics of Materials*, 4, (1985), 67–93.
39. Qi, W.; Bertram, A.: Anisotropic creep damage modeling of single crystal superalloys. *Technische Mechanik*, 17(4), (1997), 313–322.
40. Qi, W.; Bertram, A.: Damage modeling of the single crystal superalloy SRR99 under monotonous creep. *Computational Materials Science*, 13, (1998), 132–141.
41. Qi, W.; Bertram, A.: Anisotropic continuum damage modeling for single crystals at high temperatures. *International Journal of Plasticity*, 15, (1999), 1197–1215.
42. Rabier, P. J.: Some remarks on damage theory. *International Journal of Engineering Science*, 27(1), (1989), 29–54.
43. Schieck, B.; Stumpf, H.: The appropriate corotational rate, exact formula for the plastic spin and constitutive model for finite elastoplasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 32(24), (1995), 3643–3667.
44. Sidoroff, F.: Description of anisotropic damage application to elasticity, (1981), 237–244 in: Hult, J. and Lemaitre, J. (Hrsg.): *Physical Non-Linearities in Structural Analysis*, Springer-Verlag, (1981).
45. Simo, J. C.: Algorithms for static and dynamic multiplicative plasticity that preserve the classical return mapping schemes of the infinitesimal theory. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 99, (1992), 61–112.
46. Simo, J. C.; Hughes, T. J. R.: *Computational Inelasticity*, Volume 7 of *Interdisciplinary Applied Mathematics*. Springer, New York, (1998).
47. Spencer, A. J. M.: Constitutive theory for strongly anisotropic solids, (1984), 1–32 in: Spencer, A. J. M. (Hrsg.): *Continuum Theory of the Mechanics of Fibre-Reinforced Composites*, Number 282 in *CISM Courses and Lectures*, Springer-Verlag, (1984).
48. Truesdell, C.; Noll, W.: The non-linear field theories of mechanics, (1965) in: Flügge, S. (Hrsg.): *Handbuch der Physik*, Volume III/3. Springer-Verlag, Berlin, 1965.
49. Tvergaard, V.: Ductile fracture by cavity nucleation between larger voids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 30(4), (1982), 265–286.

50. Voyiadjis, G. Z.; Kattan, P. I.: A plasticity-damage theory for large deformation of solids-I. Theoretical formulation. *International Journal of Engineering Science*, 30(9), (1992), 1089–1108.
51. Xiao, H.; Bruhns, O. T.; Meyers, A.: Hypo-elasticity model based upon the logarithmic stress rate. *Journal of Elasticity*, 47, (1997a), 51–68.
52. Xiao, H.; Bruhns, O. T.; Meyers, A.: Logarithmic strain, logarithmic spin and logarithmic rate. *Acta Mechanica*, 124, (1997b), 89–105.
53. Xiao, H.; Bruhns, O. T.; Meyers, A.: Direct relationship between the Lagrangean logarithmic strain and the Lagrangean stretching and the Lagrangean Kirchhoff stress. *Mechanics Research Communications*, 25(1), (1998a), 59–67.
54. Xiao, H.; Bruhns, O. T.; Meyers, A.: Objective corotational rates and unified work-conjugacy relation between Eulerian and Lagrangean strain and stress measures. *Archives of Mechanics*, 50(6), (1998b), 1015–1045.
55. Xiao, H.; Bruhns, O. T.; Meyers, A.: On objective corotational rates and their defining spin tensors. *International Journal of Solids and Structures*, 35(30), (1998c), 4001–4014.
56. Xiao, H.; Bruhns, O. T.; Meyers, A.: A consistent finite elastoplasticity theory combining additive and multiplicative decomposition of the stretching and the deformation gradient. *International Journal of Plasticity*, 16(2), (2000), 143–177.

Anschrift: Dr.-Ing. N. C. Bongmba und Dr.-Ing. H. Schütte, Ruhr-Universität Bochum, Institut für Mechanik, Lehrstuhl für Technische Mechanik, D-44780 Bochum, [bongmba,schuette]@tm.bi.ruhr-uni-bochum.de