TECHNISCHE MECHANIK, Band 21, Heft 1, (2001), 41-45
Manuskripteingang: 19. März 2000

Zum Problem der Aufgabe von Appell-Hamel

G.E. Ivanov, M.P. Juschkov, S.C. Soltachanov

In dieser Arbeit wird die Möglichkeit der Realisierung des Grenzfalls der Aufgabe von Appell-Hamel betrachtet, und es werden Reaktionen nichtholonomer Bindungen untersucht.

Eine große Bedeutung für die Entwicklung der analytischen Mechanik hatte das Problem von Appell (1911a, 1911b) der Bewegung eines speziellen nichtholonomen Systems (siehe Bild 1a). Diese Aufgabe hat eine lebhafte wissenschaftliche Erörterung hervorgerufen, besonders in der Zeitschrift „Rendiconti del circolo matematico di Palermo" in den Jahren 1911-1912. Eine Reihe von Veröffentlichungen hat dieser Frage E. Delassus gewidmet, am ausführlichsten hat er das Appelsche Problem in Delassus (1912) und in Delassus (1913) betrachtet. Eine große Aufmerksamkeit hat auch G. Hamel dieser Aufgabe geschenkt (Hamel, 1949, SS. 502-505). Bis heute wird die Appell-Hamel-Aufgabe von verschiedenen Wissenschaftlern immer wieder erörtert (siehe z.B. Qiang, 1993; Bahar, 1998).

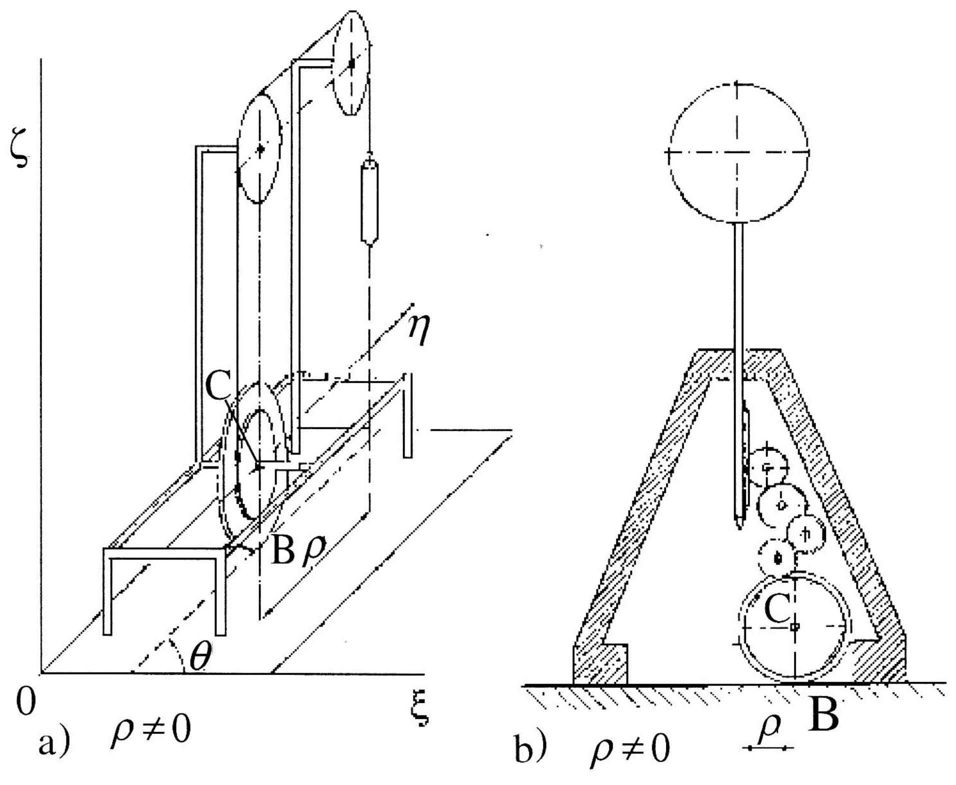

Bild 1. Problem von Appell, nichtentarteter Fall

In dem Appell-Hamel-Problem wird die Bewegung einer Kreisscheibe mit Schneide auf der horizontalen Ebene $O\xi\eta$ betrachtet. Die horizontale Achse der Scheibe geht durch ihren Mittelpunkt C und ist in einem masselosen Rahmen befestigt, dessen Stützstangen auf der horizontalen Ebene reibungsfrei gleiten können (Bild 1a). (*Hinweis:* Der Einfachheit halber ist der Winkel θ, der bei der Bewegung beliebige Werte annehmen kann, in den Bildern 1 und 2 als rechter Winkel eingezeichnet.) Der Rahmen verhindert das Umkippen der Scheibe. Fest mit der Scheibe ist eine mit ihr koaxiale Trommel verbunden. Auf die Trommel ist ein undehnbares Seil gewickelt, das durch zwei am Rahmen befestigte Rollen umgelenkt wird. An das Seilende ist eine Masse m gehängt, deren Absenkung das Rollen der Kreisscheibe hervorruft. Die Bahn der Absenkung der Masse ist um die Distanz ρ von dem Berührungspunkt B der Scheibe mit der horizontalen Ebene entfernt. Es wird angenommen, daß am Rahmen eine zu BC parallele glatte Führung befestigt ist, die das Schaukeln der Masse verhindert. Die Scheibe und die Trommel haben die Radien a und b.

Wir bezeichnen den Winkel zwischen der Ebene des Rollens der Scheibe und der Achse $O\xi$ mit θ, den Winkel der Rotation der Scheibe um ihre Achse mit φ, die Koordinaten der Masse m mit x, y, z und die Koordinaten des Punktes B mit ξ, η. Zwischen den Koordinaten bestehen die offensichtlichen Beziehungen

$$x = \xi + \rho\cos\theta \qquad y = \eta + \rho\sin\theta \tag{1}$$

Die Bewegung des Systems unterliegt den linearen nichtholonomen Bindungen

$$\dot{\xi} = a\dot{\varphi}\cos\theta \qquad \dot{\eta} = a\dot{\varphi}\sin\theta \tag{2}$$

$$\dot{z} = b\dot{\varphi} \tag{3}$$

Unter der Berücksichtigung der Bindungsgleichungen (2) und (3) stellt G. Hamel die von ihm vorgelegten Bewegungsgleichungen des betrachteten Systems auf (Hamel, 1949). Ferner betrachtet er den Grenzfall für $\rho \to 0$. In diesem Fall muß man die Änderung nur der Koordinaten x, y, z der Masse m untersuchen, wobei die nichtlineare nichtholonome Bindung

$$\varphi^1 \equiv \dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \frac{a^2}{b^2}\dot{z}^2 = 0 \tag{4}$$

entsteht. Einen analogen Grenzübergang betrachtete auch P. Appell unter Einführung eines Parameters α, der das Verhältnis des auf den Durchmesser bezogenen Trägheitsmomentes der Kreisscheibe zur Größe ρ darstellt.

Am ausführlichsten und vollständigsten betrachteten die Appell-Hamel-Aufgabe Yu.I. Neimark und N.A. Fufaev in ihrer Arbeit (Neimark und Fufaev, 1964), die auch in dem Buch von Neimark und Fufaev (1967) enthalten ist, welches zur klassischen Monographie der nichtholonomen Mechanik wurde. Sie bemerken (SS. 227, 228), daß „...das von P. Appell und G. Hamel betrachtete System mit nichtlinearen nichtholonomen Bindungen sich aus dem nichtholonomen System mit linearen Bindungen vermittels des Grenzübergangs $\rho \to 0$ ergibt. Bei diesem Grenzübergang erfolgt eine Reduktion der Ordnung des Differentialgleichungssystems, d.h. seine Entartung. Deshalb ist es nicht von vornherein klar, ob die Bewegungen des Grenzsystems ($\rho = 0$) mit den Grenzbewegungen des nichtentarteten Systems für $\rho \to 0$ übereinstimmen. In diesem Zusammenhang bleibt die Frage offen, inwieweit die Bewegungsgleichungen des entarteten Systems die Bewegung des ursprünglichen Systems mit verschwindend kleinem ρ beschreiben." Von den Autoren wurde „eine Untersuchung durchgeführt, die auf dem Studium der Bewegungen des nichtentarteten Systems für $\rho > 0$ und $\rho < 0$, der Grenzbewegungen des nichtentarteten Systems für $|\rho| \to 0$ sowie der Bewegungen des entarteten Systems beruht. Aus dieser Untersuchung folgt, daß sich die Bewegungen des entarteten Systems erheblich von den Grenzbewegungen unterscheiden und folglich das Beispiel des nichtholonomen Systems mit nichtlinearen nichtholonomen Bindungen unkorrekt ist."

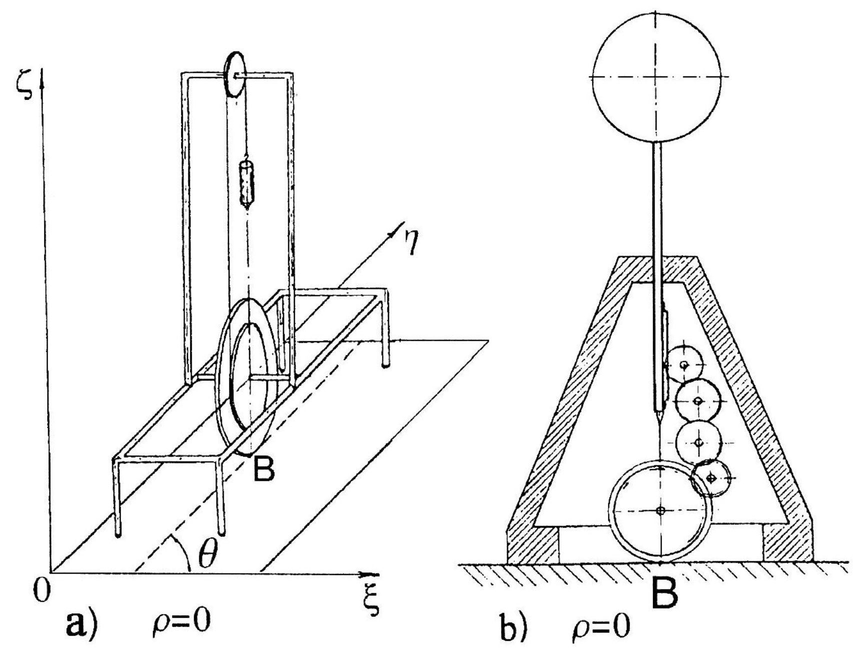

Bild 2. Problem von Appell, entarteter Grenzfall

Unter Benutzung des angegebenen Grenzübergangs haben P. Appell und G. Hamel also die Untersuchung des ursprünglichen Systems durch die Untersuchung des entarteten Systems ersetzt. Wir werden die Bewegung des erhaltenen entarteten Systems als eine selbständige Aufgabe der Mechanik betrachten: Es liegt eine Masse m mit den Koordinaten x, y, z vor, die der nichtlinearen nichtholonomen Bindung (4) unterworfen ist. Wir bemerken, daß der Fall der exakten Erfüllung der Bedingung $\rho = 0$ im Modell von P. Appell und im entsprechenden Modell, das von Novoselov (1961) vorgelegt wurde, bei dem die Masse mit der Kreisscheibe über einen Satz trägheitsloser Zahnräder verbunden ist (siehe Bild 1b), technisch leicht realisierbar ist (siehe Bilder 2a, b). Aber auch bei $\rho = 0$ bleibt in den betrachteten Modellen die Erfüllung der Bindungsgleichungen (2) wesentlich, aus denen sich in diesem Fall die folgende Bedingung ergibt, die für Geschwindigkeitsprojektionen der Masse m gelten muß:

$$\dot{y} = \dot{x} \tan\theta \tag{5}$$

Hier ist berücksichtigt, daß wir bei $\rho = 0$ nach den Formeln (1) $\dot{x} = \dot{\xi}$, $\dot{y} = \dot{\eta}$ haben. Die Bindungsgleichung (5) wird bei der Betrachtung des entarteten Systems nicht mehr berücksichtigt. Es wird lediglich die Bindung (4) eingeführt, bei der die Geschwindigkeit des Zentrums der Kreisscheibe eine beliebige Richtung haben kann. Das bedeutet, daß die Berücksichtigung nur der Bindung (4) die Bewegung der Kreisscheibe durch die Bewegung einer Kugel ersetzt.
Auch bei der Untersuchung des entarteten Systems müßte man also die Erfüllung der Bindungsgleichung (5) fordern, d.h. neben den Koordinaten x, y, z auch die Änderungen der Variablen θ verfolgen. Die Vernachlässigung der Massen der Kreisscheibe, des Rahmens und der Rollen hat die Entartung des Systems zur Folge, und deshalb erweist sich die Variable θ als „masselose" Koordinate. Wenn man diese Koordinate außer Betracht läßt, dann gelingt es nicht, durch die Bewegung der masselosen Kugel die Bewegung der masselosen Kreisscheibe zu beschreiben.
Es ist ziemlich schwer, sich eine technische Realisierung vorzustellen, wenn die Geschwindigkeit der Absenkung des Gewichts mit der Geschwindigkeit des Mittelpunktes der Kugel durch ein undehnbares Seil oder ein System von Zahnrädern verbunden ist. Jedoch kann man die Bewegung der Masse m mit den Koordinaten x, y, z untersuchen, falls nur die Bindungsgleichung (4) erfüllt wird, indem man dieser Bewegung die folgende Steuerungsaufgabe gegenüberstellt: Die Bewegung eines materiellen Punktes mit der Masse m muß auf die Weise erfolgen, daß sich nach der Formel (4) seine vertikale Geschwindigkeit proportional zur Geschwindigkeit der Bewegung seiner Spur auf der horizontalen Ebene ändert. Die Realisierung einer solchen Aufgabe ist mit Hilfe der modernen technischen Mittel durchaus möglich. Wir wollen die Maggischen Gleichungen und die Lagrangeschen Gleichungen erster Art herleiten, und zwar für eine solche Aufgabenstellung.
So haben wir eine Aufgabe der räumlichen Bewegung eines materiellen Punktes, welcher der nichtlinearen nichtholonomen Bindung (4) unterliegt. In unserem Fall sind die verallgemeinerten Koordinaten

$$q^1 = x \qquad q^2 = y \qquad q^3 = z \tag{6}$$

Wir führen neue nichtholonome Variablen ein:

$$v_*^1 = \dot{x} \qquad v_*^2 = \dot{y} \qquad v_*^3 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \frac{a^2}{b^2}\dot{z}^2 \tag{7}$$

Die Gleichungen von Maggi in der Appell-Hamel-Aufgabe haben die Form (Poljachov u.a., 2000):

$$\begin{aligned}
(MW_1 - Q_1)\frac{\partial \dot{q}^1}{\partial v_*^1} + (MW_2 - Q_2)\frac{\partial \dot{q}^2}{\partial v_*^1} + (MW_3 - Q_3)\frac{\partial \dot{q}^3}{\partial v_*^1} &= 0 \\
(MW_1 - Q_1)\frac{\partial \dot{q}^1}{\partial v_*^2} + (MW_2 - Q_2)\frac{\partial \dot{q}^2}{\partial v_*^2} + (MW_3 - Q_3)\frac{\partial \dot{q}^3}{\partial v_*^2} &= 0 \\
(MW_1 - Q_1)\frac{\partial \dot{q}^1}{\partial v_*^3} + (MW_2 - Q_2)\frac{\partial \dot{q}^2}{\partial v_*^3} + (MW_3 - Q_3)\frac{\partial \dot{q}^3}{\partial v_*^3} &= \Lambda
\end{aligned} \tag{8}$$

In diesen Gleichungen kommen die Ableitungen $\dfrac{\partial \dot{q}^\sigma}{\partial v_*^\rho}$ mit $\sigma, \rho = \overline{1,3}$ vor, für deren Berechnung man die zu (7) inverse Transformation kennen muß. Es ist jedoch schwierig, diese Transformation zu finden, weil die betrachtete nichtholonome Bindung (4) nichtlinear ist. Deshalb werden wir zur Bestimmung der erforderlichen Ableitungen folgendermaßen vorgehen. Wir berechnen die Matrix

$$(\alpha_\sigma^\rho) = \left(\frac{\partial v_*^\rho}{\partial \dot{q}^\sigma}\right) \qquad \sigma, \rho = \overline{1{,}3}$$

Nach den Formeln (7) haben wir:

$$\begin{array}{lll} \alpha_1^1 = 1 & \alpha_2^1 = 0 & \alpha_3^1 = 0 \\ \alpha_1^2 = 0 & \alpha_2^2 = 1 & \alpha_3^2 = 0 \\ \alpha_1^3 = 2\dot{x} & \alpha_2^3 = 2\dot{y} & \alpha_3^3 = -2a^2b^{-2}\dot{z} \end{array}$$

Wenn wir nun die zur Matrix (α_σ^ρ) inverse Matrix (β_ρ^σ) bestimmen, dann erhalten wir

$$\begin{array}{llll} \beta_1^1 = 1 & \beta_2^1 = 0 & \beta_3^1 = 0 & \\ \beta_1^2 = 0 & \beta_2^2 = 1 & \beta_3^2 = 0 & \\ \beta_1^3 = h^2\dot{x}/\dot{z} & \beta_2^3 = h^2\dot{y}/\dot{z} & \beta_3^3 = -h^2/(2\dot{z}) & h^2 = b^2/a^2 \end{array} \tag{9}$$

Es ist wichtig, daß $(\beta_\rho^\sigma) = \left(\frac{\partial \dot{q}^\sigma}{\partial v_*^\rho}\right)$ gilt.

In der betrachteten Aufgabe haben wir

$$T = m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)/2 \qquad \Pi = mgz$$

Deshalb können wir unter Berücksichtigung der Formel (9) die Maggischen Gleichungen (8) aufstellen:

$$m\ddot{x} + (m\ddot{z} + mg)(h^2\dot{x}/\dot{z}) = 0 \tag{10}$$

$$m\ddot{y} + (m\ddot{z} + mg)(h^2\dot{y}/\dot{z}) = 0 \tag{11}$$

$$(m\ddot{z} + mg)(-h^2/(2\dot{z})) = \Lambda \tag{12}$$

Wenn man jetzt die Lagrangeschen Gleichungen erster Art

$$m\ddot{x} = \Lambda 2\dot{x} \qquad m\ddot{y} = \Lambda 2\dot{y} \qquad m\ddot{z} = -mg + \Lambda(-2\dot{z}/h^2) \tag{13}$$

aufschreibt, dann ist leicht zu sehen, daß sie eine Linearkombination der Gleichungen (10), (11) und (12) darstellen.

Die Lagrangeschen Gleichungen erster Art (13) muß man zusammen mit der Bindungsgleichung (4) lösen, wobei das Vorhandensein der Reaktion Λ unter den Unbekannten die Lösung etwas verkompliziert. Im Unterschied dazu erweist sich das Auffinden der Bewegung selbst aus den Gleichungen (4), (10) und (11) als einfacher. Danach kann man die Reaktion aus der Gleichung (12) bestimmen. Die Art der Reaktion kann man übrigens unter Verwendung der Maggischen Gleichungen auch in dem ursprünglichen krummlinigen Koordinatensystem (6) erhalten. In der Tat haben wir im Falle der idealen nichtholonomen Bindung (4):

$$\mathbf{R} = \mathbf{N} = \Lambda\nabla'\varphi^1 = \Lambda\frac{\partial\varphi^1}{\partial\dot{q}^\tau}\mathbf{e}^\tau = (m\ddot{z} + mg)(-h^2/\dot{z})(\dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} - h^{-2}\dot{z}\mathbf{k}) \tag{14}$$

Laut dieser Formel ist die horizontale Reaktion der Bindung (4) in die zur horizontalen Geschwindigkeitskomponente der Masse m entgegengesetzte Richtung gerichtet, was für die Bewegung einer Kugel charakteristisch ist. Wenn man aber auch die nichtholonome Bindung (5) in Betracht zieht, die der Bequemlichkeit halber in der Form

$$\varphi^2 \equiv \dot{y} - \dot{x}\tan\theta = 0 \tag{15}$$

geschrieben wird, dann muß man neben der Reaktion **R**, die durch die Formel (14) gegeben ist, wegen des Vorhandenseins der Bindung (15) auch die Reaktion

$$\mathbf{R}^* = \Lambda^* \mathbf{V}' \varphi^2 = \Lambda^*(-\tan\theta \mathbf{i} + \mathbf{j})$$

berücksichtigen. Diese Reaktion gewährleistet die Erfüllung der Bindungsgleichung (15) und ist charakteristisch für die Bewegung der Kreisscheibe.
Im Falle der masselosen Koordinate θ geht der Wert dieses Winkels bei $\rho = 0$ nicht in das System der Bewegungsgleichungen ein, weshalb es in diesem Falle natürlicher ist, vom Rollen der Kugel zu sprechen und nicht vom Rollen der Kreisscheibe. Man könnte bei $\rho = 0$ auch vom Rollen einer masselosen Kreisscheibe sprechen. Es muß dann aber ein Mechanismus existieren, der die Scheibe zwingt, sich auf entsprechende Weise zu orientieren. Die Unbestimmtheit in der Bestimmung des Winkels θ kann man aufheben, indem man entweder bei masselosen Kreisscheiben, Rahmen, Rollen $\rho \neq 0$ erfüllt oder bei $\rho = 0$ irgendeine dieser Massen berücksichtigt. Anstelle der Berücksichtigung ihrer Massen wäre es möglich, nicht den materiellen Punkt der Masse m zu betrachten, sondern einen Körper gleicher Masse, der sich beim Absenken in der oben erwähnten Führung zusammen mit dem Rahmen um die Achse BC dreht.

Literatur

1. Appell, P.: Exemple de mouvement d'un systéme assujetti a une liason exprimée par une relation linéaire entre les composantes de la vitesse. Rendiconti del circolo matematico di Palermo, V. 32, (1911a), 48-50.

2. Appell, P.: Sur les liaisons exprimées par des relations non linéaires entre les vitesses. Comptes Rendus, T. CLII, (1911b), 1197-1200.

3. Bahar, L.Y.: A non-linear non holonomic formulation of the Appell-Hamel problem. Int. J. Non-Linear Mech., 33, 1, (1998), 67-83.

4. Delassus, E.: Sur les liaisons et les mouvement des systmées matériels. Ann. scientif de l'Ecole normal, supérieure, Paris, V. 29, N3, (1912).

5. Delassus, E.: Dynamique des systémes matériels. Paris, (1913).

6. Hamel, G.: Theoretische Mechanik. Eine einheitliche Einführung in die gesamte Mechanik. Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, (1949).

7. Neimark, Yu.I.; Fufaev, N.A.: Über Bewegungsgleichungen von Systemen mit nichtlinearen nichtholonomen Bindungen. In Russisch, PMM, B. 28, N1, (1964), 51-59.

8. Neimark, Yu.I.; Fufaev, N.A.: Dynamik nichtholonomer Systeme. In Russisch, Nauka-Verlag, Moskau, (1967).

9. Novoselov, V.S.: Extremalität des Prinzips von Hamilton-Ostrogradskii in der nichtholonomen Mechanik. In Russisch, Nachrichten der Leningrader Universität, N13, 3, (1961), 121-130.

10. Poljachov, N.N.; Zegzhda, S.A.; Juschkov, M.P.: Theoretische Mechanik. Verlag Vysschaja Schkola, (2000).

11. Qiang Yuan Ge.: On Chetayev's conditions. Zhongquo kexue jishu daxue xuebao, Journ. China Univ., Sci. and Technol., V. 23, N2, (1993), 175-182.

Anschrift: Dipl.-Ing. G.E. Ivanov, Prof. M.P. Juschkov, Dr. S.H. Soltachanov, Fakultät für Mathematik und Mechanik, Staatsuniversität St. Petersburg, Bibliotheksplatz 2, Stary Peterhof, RUS-198504 Sankt-Petersburg