

# Vibroakustische Sensorik zur aktiven Minimierung der Schallabstrahlung schwingender Strukturen

B. Vogl, S. Herold, F. Wahl

*Für die Entwicklung adaptiver Struktursysteme, die u.a. auf die akustische Verbesserung von Bauteilen abzielen, ist die Kenntnis des Zusammenhangs zwischen dem dynamischen Verhalten und dem dadurch induzierten Luftschallfeld notwendig. In den vergangenen Jahren wurden zahlreiche Untersuchungen zur Ermittlung dieses Zusammenhangs durchgeführt. Eine notwendige Bedingung für die Realisierung eines adaptiven vibroakustischen Systems ist die sensorische Erfassung des entstehenden Luftschallfeldes anhand strukturdynamischer Messgrößen. Da die globale Erfassung der abgestrahlten Schallleistung konventionell nur mit externen Messwertaufnehmern möglich ist (z.B. Mikrophone, Schallintensitäts-sonden) und sich eine solche technische Lösung nur mit sehr hohem Aufwand realisieren lässt, soll hier ein Ansatz vorgestellt werden, der auf strukturapplizierte Sensoren zur Ermittlung der globalen Schallabstrahlung schwingender Strukturen abzielt. Als Sensoren werden piezokeramische Plättchen (PZT-Patches) eingesetzt. Als Maß für die abgestrahlte Schallleistung wird die Volumengeschwindigkeit verwendet, die aus den Sensorsignalen der Patches rekonstruiert wird. Somit entfallen aufwendige akustische Messungen. Ein weiteres Ziel der Arbeit ist die Integration der rekonstruierten Zielfunktion in einen adaptiven Regelkreis.*

## 1 Einleitung

Eine große Herausforderung für die Realisierung von adaptiven Strukturen ist die strukturkonforme Integration von Sensoren, welche eine eindeutige Aussage über das globale akustische Verhalten einer Struktur zulassen. Konventionell werden aktive Systeme, welche auf eine Verbesserung des akustischen Antwortverhaltens auf mechanische Eingangsstörungen hin abzielen, mit externen Sensoren erweitert. Diese Sensoren sind zum Beispiel Mikrophone, die entweder im Nahfeld aber auch im Fernfeld eingerichtet werden und für die Zielfunktion den Schalldruck als die zu regelnde lokale Größe erfassen. Somit ergeben sich für den höheren Frequenzbereich aufgrund der immer kürzer werdenden Schallwellenlängen zumeist nur lokale Verbesserungen. Im tiefen Frequenzbereich können Mikrophone für die Aufnahme des Fehlersignals aufgrund der großen Wellenlängen (z.B. für 100 Hz ist  $\lambda = 3.43$  m) auch global wirksam sein, z.B. wenn die aktiv zu beeinflussende Raumgeometrie kleiner als die Hälfte der geringsten Wellenlänge (und damit der höchsten Frequenz) ist.

Ein weiterer Ansatz, welcher einer strukturkonformen Integration schon sehr nahe kommt, besteht darin, Sensoren auf Strukturen zu applizieren. Dabei wird zumeist auf handelsübliche Sensoren zurückgegriffen, wie z.B. Beschleunigungsaufnehmer oder Dehnungsmessstreifen (DMS). Diese Sensoren lassen auch nur bedingt Aussagen über das globale vibroakustische Verhalten zu. Im Falle der Beschleunigungs- bzw. der Geschwindigkeitsmessung können lokal sehr gute Vibrationsunterdrückungen (Reduktionen der Beschleunigungs- bzw. der Geschwindigkeitsamplituden am Messpunkt des Fehlersignals) erzielt werden, wobei aber die Schallabstrahlung bzw. die emittierte Schallleistung dadurch nicht zwingend in gleichem Maße verringert werden kann. Die direkte Erfassung der integralen oder flächig verteilten Oberflächengeschwindigkeit ist denkbar günstiger, was aber zur Konsequenz hat, dass sehr viele und auch teure konventionelle Messaufnehmer eingesetzt werden müssten.

Deshalb wird hier ein Ansatz vorgestellt, der auf die Applikation von piezokeramischen Sensoren (PZT-Patches) abzielt. Die Idee dabei ist, die Sensoren diskret verteilt auf der zu beeinflussenden Struktur zu applizieren und mittels geeigneter Signalverarbeitung eine mit globaler, vibroakustischer Aussagekraft behaftete Zielfunktion abzubilden. Als Zielfunktion wird die Volumengeschwindigkeit bzw. die Volumenverschiebung herangezogen. Die Volumengeschwindigkeit korreliert im niedrigen Frequenzbereich (unterhalb der kritischen Koinzidenzfrequenz  $f_{krit}$ , bei der die Biegegeschwindigkeit  $c_B$  gleich der Schallgeschwindigkeit  $c_0$  ist) mit der aktiven Schallintensität  $\vec{I}_{act}$  (Johnson und Elliott, 1995) und daher

auch wegen

$$P_{rad} = \int_A \vec{I}_{act} d\vec{A} \quad (1)$$

zur abgestrahlten Schalleistung  $P_{rad}$ . PZT-Keramiken reagieren auf die Verformung einer Strukturoberfläche und liefern ein dazu proportionales Spannungs- bzw. Ladungssignal. Für den Fall einer direkten Ladungsmessung (bzw. Spannungsmessung) ist das Ausgangssignal der Volumenverschiebung proportional, für den Fall einer Strommessung, der Volumengeschwindigkeit (Preumont u.a., 1999). Es gilt daher, einen Zusammenhang zwischen den diskret detektierten Sensorsignalen der Keramiken und einer der beiden Zielfunktionen herzustellen. Ansätze für den Einsatz von PVDF-Folien finden sich in Masson u.a. (1997) und Charette u.a. (1998), für PZT-Patches in Preumont u.a. (1999). In der vorliegenden Arbeit wird lediglich auf die Rekonstruktion der Volumenverschiebung eingegangen.

Im Folgenden soll aufgrund einer allgemeinen Formulierung der Strukturodynamik und der diskreten Sensorik mittels PZT-Keramiken die Volumenverschiebung rekonstruiert werden. Diese Grundlagen werden am Beispiel einer allseitig gelenkig gelagerten Platte theoretisch verifiziert.

## 2 Strukturdynamik verteilter Systeme

Für die Herleitung der gesuchten Zielfunktion wird von der Differentialgleichung für kontinuierliche Systeme wie Balken, Platten, Schalen u.ä. ausgegangen (Lyon, 1987)

$$\underbrace{\rho(x) \cdot \ddot{w}(x, t)}_a + \underbrace{r(x) \cdot \dot{w}(x, t)}_b + \underbrace{\Lambda \cdot w(x, t)}_c = \underbrace{f(x, t)}_d \quad (2)$$

In der beschriebenen Gleichgewichtsbedingung aus Trägheitskräften ( $a$ ), Dämpfungskräften ( $b$ ), den elastischen Rückstellkräften ( $c$ ) und der äußeren Belastung ( $d$ ) steht  $x$  für die allgemeine räumliche Koordinate ( $(x) \equiv (x, y, z)$ ),  $\rho(x)$  für die Massendichte,  $r(x)$  für den Dämpfungskoeffizient,  $w(x, t)$  für die Verschiebung,  $f(x, t)$  für die verteilte Belastung und  $\Lambda$  für den Differentialoperator, der z.B. für eine isotrope Platte mit konstanter Dicke wie folgt definiert ist

$$\Lambda = N\Delta\Delta = N\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}\right) \quad (3)$$

In Gleichung (3) steht  $\Delta$  für den Laplace-Operator und  $N$  beschreibt die Plattensteifigkeit (Szabo, 1985). Für die Lösung der Differentialgleichung Gleichung (2) bietet es sich an, eine Entwicklung nach Eigenfunktionen  $\phi_k$  vorzunehmen, wobei die Eigenfunktionen  $\phi_k$  die Lösung des Eigenwertproblems für eine dämpfungsfreie Schwingung

$$\frac{1}{\rho}\Lambda\phi_k = \omega_k^2\phi_k \quad (4)$$

darstellen. Die Annahme der dämpfungsfreien Schwingung hat sich für eine Vielzahl technischer Aufgabenstellungen schwach gedämpfter Systeme als sinnvoll erwiesen. Man erhält die Lösungen von Gleichung (2) entsprechend

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k(x) \cdot q_k(t) \quad (5)$$

Die generalisierten Koordinaten  $q_k(t)$  lassen sich aus Gleichung (2) berechnen. Dies wird im Folgenden noch gezeigt. Durch Multiplikation von Gleichung (2) mit einer beliebigen Eigenfunktion  $\phi_l$  und anschließender Integration über die allgemeine räumliche Koordinate  $x$  ergibt sich

$$\int \phi_l \Lambda \phi_k dx = \omega_k^2 \int \phi_l \rho \phi_k dx \quad (6)$$

Vertauscht man nun die Indizes der Eigenfunktionen und wiederholt den letzten Vorgang, so erhält man

$$\int \phi_k \Lambda \phi_l dx = \omega_l^2 \int \phi_k \rho \phi_l dx \quad (7)$$

Die anschließende Subtraktion der Gleichung (7) von Gleichung (6) führt zu

$$\int [\phi_l \Lambda \phi_k - \phi_k \Lambda \phi_l] dx = (\omega_k^2 - \omega_l^2) \int \rho \phi_l \phi_k dx \quad (8)$$

In Gleichung (8) ist nach Collatz (1963) der Differenzialoperator für die beiden Systeme *selbstadjungiert*. Somit verschwindet der linke Term in Gleichung (8), und es resultieren die bekannten Orthogonalitätsbeziehungen der Eigenfunktionen

$$(\omega_k^2 - \omega_l^2) \int \rho \phi_l \phi_k dx = 0 \quad (9)$$

beziehungsweise

$$\int \rho \phi_l \phi_k dx = \begin{cases} = 0 & \text{für } k \neq l \\ \neq 0 & \text{für } k = l \end{cases} \quad (10)$$

Die Normierung der Eigenfunktionen  $\phi_k$  kann beliebig geschehen, da Gleichung (5) für alle Faktoren  $C \cdot \phi_k$  erfüllt ist. Für die in dieser Arbeit untersuchten vibroakustischen Phänomene bietet sich die Normierung der Eigenfunktionen auf die Gesamtmasse  $M$  einer schwingenden Struktur an. Dieser Ansatz entstammt der *Statistischen Energieanalyse* (SEA). Folglich ergeben sich die Orthonormierungsbedingungen zu

$$\frac{1}{M} \int \rho \phi_l \phi_k dx = \delta_{k,l} = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq l \\ 1 & \text{für } k = l \end{cases} \quad (11)$$

$\delta_{k,l}$  bezeichnet das *Kroneckersche Symbol*. Aus Gleichung (3) ergibt sich schlussfolgernd mit Gleichung (11)

$$\frac{1}{M} \int \phi_l \Lambda \phi_k dx = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq l \\ \omega_k^2 & \text{für } k = l \end{cases} \quad (12)$$

Durch Einsetzen von Gleichung (5) in Gleichung (2), anschließender Multiplikation mit  $\frac{1}{M} \phi_k(x)$  und Integration über die allgemeine räumliche Koordinate  $x$  ergibt sich

$$\begin{aligned} \left[ \frac{1}{M} \int \rho(x) \phi_l(x) \sum \phi_k(x) dx \right] \ddot{q}_k(t) &+ \left[ \frac{1}{M} \int r(x) \phi_l(x) \sum \phi_k(x) dx \right] \dot{q}_k(t) \\ + \left[ \frac{1}{M} \int \phi_l(x) \Lambda \sum \phi_k(x) dx \right] q_k(t) &= \frac{1}{M} \int \phi_l(x) f(x, t) dx \end{aligned} \quad (13)$$

Mit den Orthonormierungsbeziehungen Gleichung (11) und Gleichung (12) und der Annahme, dass der Dämpfungskoeffizient  $r(x)$  proportional zur Massendichte  $\rho(x)$  ist

$$r(x) \sim \rho(x) \quad (14)$$

kann ein entkoppeltes Gleichungssystem formuliert werden. Die Annahme der proportionalen Dämpfung ist gerechtfertigt, da sich die Ergebnisse mit Gleichung (14) nicht wesentlich von der exakten Lösung für schwach gedämpfte Systeme unterscheiden. Es entstehen die entkoppelten Gleichungen

$$\ddot{q}_r(t) + C_r \dot{q}_r(t) + \omega_r^2 q_r(t) = \frac{1}{M} \int \phi_r(x) f(x, t) dx \quad r = 1, 2, 3, \dots, i \quad (15)$$

Der Proportionalitätsfaktor  $C_r$  wird in der Vibroakustik gesetzt zu

$$C_r = \omega_r \eta_r \quad (16)$$

Dabei entspricht  $\eta_r$  dem modalen Verlustfaktor. Es resultiert das entkoppelte Gleichungssystem zu

$$\ddot{q}_r(t) + \omega_r \eta_r \dot{q}_r(t) + \omega_r^2 q_r(t) = p_r(x, t) \quad (17)$$

Dabei entspricht die rechte Seite der modalen Belastung nach Gleichung (15). Im nächsten Schritt wird eine diskrete Kraftanregung  $F(x_E)$  am Erregerpunkt  $x_E$  eingeführt. Nach Hurty und Rubinstein (1964) kann der Ansatz einer *separablen* Kraftfunktion gemacht werden, so dass gilt

$$f(x, t) = f(x) \cdot e^{j\omega t} \quad (18)$$

Eingesetzt in die rechte Seite von Gleichung (15) folgt

$$\frac{1}{M} \int \phi_r(x) f(x) dx \cdot e^{j\omega t} = \frac{1}{M} \phi_r(x_E) \underbrace{\int f(x) dx}_{F(x_E)} \cdot e^{j\omega t} \quad (19)$$

Die Integration der Belastungsverteilung  $f(x)$  in Gleichung (19) führt zur diskreten Kraft  $F(x_E)$  am gedachten Erregerpunkt. Somit entsteht ein entkoppeltes Gleichungssystem mit diskreter Kraftanregung

$$\ddot{q}_r(t) + \omega_r \eta_r \dot{q}_r(t) + \omega_r^2 q_r(t) = \frac{1}{M} \phi_r(x_E) \cdot F(x_E) \cdot e^{j\omega t} \quad (20)$$

Für den Lösungsansatz der inhomogenen linearen Differenzialgleichung 2. Ordnung wählt man

$$q_r(t) = Q_r(\omega) \cdot e^{j\omega t} \quad (21)$$

Durch Einsetzen von Gleichung (21) in Gleichung (20) ergibt sich die Lösung für  $Q_r(\omega)$  zu

$$Q_r(\omega) = \frac{\frac{1}{M} \phi_r(x_E) \cdot F(x_E)}{(-\omega^2 + j\omega \omega_r \eta_r + \omega_r^2)} \quad (22)$$

Um die Lösung für die Verteilung der Verschiebung  $w(x, t)$  zu erhalten, wird der Ansatz gewählt

$$w(x, t) = W(x, \omega) \cdot e^{j\omega t} \quad (23)$$

Mit Gleichung (5), Gleichung (21) und Gleichung (23) ergibt sich folgender Ausdruck

$$W(x, \omega) = \sum_r \phi_r(x) \cdot Q_r(\omega) \quad (24)$$

Setzt man nun Gleichung (22) ein, liegt die Verteilung der Verschiebung über der allgemeinen räumlichen Koordinate  $x$  im Frequenzbereich vor

$$W(x, \omega) = \frac{1}{M} \sum_r \frac{\phi_r(x) \cdot \phi_r(x_E)}{(-\omega^2 + j\omega \omega_r \eta_r + \omega_r^2)} \cdot F(x_E) \quad (25)$$

Die gesuchte Volumenverschiebung wird berechnet, indem man die Verschiebung über die gesamte Strukturgeometrie integriert. Es folgt

$$W_{vol}(\omega) = \frac{1}{M} \int_x \left\{ \sum_r \frac{\phi_r(x) \cdot \phi_r(x_E)}{(-\omega^2 + j\omega \omega_r \eta_r + \omega_r^2)} \cdot F(x_E) \right\} dx \quad (26)$$

Um die Volumengeschwindigkeit zu erhalten, wird Gleichung (26) einmal nach der Zeit differenziert. Im Frequenzbereich entspricht das einer Multiplikation mit  $j\omega$ , so dass sich  $V_{vol}(\omega)$  ergibt zu

$$V_{vol}(\omega) = \frac{j\omega}{M} \int_x \left\{ \sum_r \frac{\phi_r(x) \cdot \phi_r(x_E)}{(-\omega^2 + j\omega \omega_r \eta_r + \omega_r^2)} \cdot F(x_E) \right\} dx \quad (27)$$

Die hier dargestellten vibroakustischen Zielfunktionen lassen sich durch die in der Strukturodynamik bekannten Übertragungsfunktionen **Rezeptanz** bzw. **Admittanz** beschreiben. Somit wird sich Experimentelle Modalanalyse (EMA) anbieten, um die Zielfunktionen auch experimentell zu ermitteln.

Die Rezeptanz ergibt sich als Quotient aus der Verschiebungsverteilung und der diskreten Kraftanregung zu

$$H^W(x, x_E, \omega) = \frac{W(x, \omega)}{F(x_E, \omega)} = \frac{1}{M} \sum_r \frac{\phi_r(x) \cdot \phi_r(x_E)}{(-\omega^2 + j\omega\omega_r\eta_r + \omega_r^2)} \quad (28)$$

Die Admittanz ergibt sich analog als Quotient aus der Geschwindigkeitsverteilung und der diskreten Kraftanregung zu

$$H^V(x, x_E, \omega) = \frac{V(x, \omega)}{F(x_E, \omega)} = \frac{j\omega}{M} \sum_r \frac{\phi_r(x) \cdot \phi_r(x_E)}{(-\omega^2 + j\omega\omega_r\eta_r + \omega_r^2)} \quad (29)$$

Nun liegen alle allgemeinen strukturdynamischen Definitionen vor, um im Folgenden für ebene und isotrope (dünne) Strukturen die gesuchten vibroakustischen Zielfunktionen zu ermitteln.

### 3 Diskrete PZT-Sensorik

Der zweite Teil zur Rekonstruktion der Zielfunktion besteht darin, eine bestimmte Anzahl von PZT-Patches auf einer Struktur zu applizieren und die von der diskret verteilten Sensorik erzeugten Signale zu berechnen. Nach Preumont (1997) berechnet sich die Ausgangsspannung einer Piezokeramik nach folgender Vorschrift, wenn angenommen werden kann, dass sich die piezoelektrischen Ladungskonstanten  $d_{31}$  und  $d_{32}$  isotrop über die Fläche verhalten (d.h.  $d_{31} = d_{32}$ )

$$U_{out} = \frac{d_{31}}{C_r} \cdot \frac{E_p}{1 - \nu_p} \cdot \left\{ \int_0^{l_y} \int_0^{l_x} (\varepsilon_x + \varepsilon_y) dx dy + \frac{h + h_p}{2} \int_0^{l_y} \int_0^{l_x} (\kappa_x + \kappa_y) dx dy \right\} \quad (30)$$

Die piezokeramischen Parameter in Gleichung (30) sind:  $d_{31}$  für die piezoelektrische Ladungskonstante,  $C_r$  für die Kapazität,  $E_p$  für den Elastizitätsmodul,  $\nu_p$  für die Poissonsche Zahl und  $h_p$  für die Dicke. Die Dehnungen  $\varepsilon_{x,y}$  ergeben sich hauptsächlich aufgrund von Längsschwingungen in der Plattenebene (Membranschwingungen). Im vorliegenden Beispiel werden Keramikplättchen eingesetzt, die wesentlich dünner als die schwingende Struktur und ausreichend von der neutralen Faser entfernt sind (Hebelarm). Deshalb wird für die Berechnung der Ausgangsspannung in Gleichung (30) lediglich der Krümmungsanteil aufgrund von Biegeschwingungen herangezogen

$$U_{out} = \frac{d_{31}}{C_r} \cdot \frac{E_p}{1 - \nu_p} \cdot \frac{h + h_p}{2} \int_0^{l_y} \int_0^{l_x} (\kappa_x + \kappa_y) dx dy \quad (31)$$

In Gleichung (31) sind die Krümmungen  $\kappa_x$  und  $\kappa_y$  als zweite partielle Ableitung der Verschiebung  $w(x, y)$  nach den Ortskoordinaten zu verstehen, also

$$\kappa_x = \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} \quad \text{bzw.} \quad \kappa_y = \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} \quad (32)$$

Geht man nun dazu über, die einzelnen Sensorsignale für die gleichartigen PZT-Patches zu ermitteln, so ist ausschließlich der Ort und die Größe der Patches nach Gleichung (31) von Bedeutung. Es ergeben sich die einzelnen Sensorspannungen zu

$$U_{out,i} = \frac{d_{31}}{C_p} \cdot \frac{E_p}{1 - \nu_p} \cdot \frac{h + h_p}{2} \cdot \int_{y_{i,A}}^{y_{i,E}} \int_{x_{i,A}}^{x_{i,E}} (\kappa_x + \kappa_y) dx dy \quad (33)$$

Die örtlichen Integrationsgrenzen ergeben sich aus den Elektrodenabmessungen, die im untersuchten Fall

gleich den Patchabmessungen sind. Die Indices  $i, A$  bzw.  $i, E$  in Gleichung (33) bezeichnen jeweils den Anfang und das Ende der örtlichen Integrationsgrenzen für die einzelnen rechteckförmigen Patches.

Die Erfassung der Spannungssignale (bzw. Ladungssignale) ist nur für die Rekonstruktion der Volumenverschiebung geeignet. Die Nachbildung der Volumengeschwindigkeit erfordert die Bedingung eines dazu äquivalentem Sensorsignals. Dies ist dann aufgrund des differenzierenden Zusammenhangs zwischen Weg und Geschwindigkeit ein Stromsignal (zeitliche Ableitung der Ladung). Im folgenden Kapitel wird aus Gründen der Analogie nur auf die Rekonstruktion der Volumenverschiebung eingegangen.

#### 4 Rekonstruktion der Zielfunktion

Zur Rekonstruktion der Volumenverschiebung wird ein *Least-Mean-Square* Algorithmus (LMS) verwendet, der die Koeffizienten  $\alpha_i$  der einzelnen Sensorsignale  $U_{out,i}$  berechnet. Die Koeffizienten sind als Verstärkungsfaktoren zu verstehen, welche für eine experimentelle Verifikation über einen digitalen Signalprozessor eingestellt werden können. Somit ergibt sich als Zielfunktion ein aus  $i$  Einzelsignalen zusammengesetztes und gewichtetes Summsignal

$$U_{out,sum} = \sum_i \alpha_i \cdot U_{out,i} \quad (34)$$

Ähnliche Ansätze zur Rekonstruktion dieser Zielfunktion finden sich in Preumont u.a. (1999). Dort wird ein *Adaptive Linear Combiner* (ALC) eingesetzt, der die Koeffizienten der diskret verteilten Sensoren errechnet. Preumont u.a. (1999) weisen für spätere Untersuchungen außerdem auf den Einsatz eines neuronalen Netzwerkes hin.

Da die Zielfunktion und auch die diskreten Sensorspannungen komplexe Größen sind, würden auch die Verstärkungsfaktoren als komplexe Größen resultieren. Für eine technische Realisierung können die Koeffizienten allerdings nur reellwertig sein, was bedeutet, dass die Koeffizienten auch reellwertig ermittelt werden müssen. Zur Berechnung der Verstärkungsfaktoren wird die analytische Funktion  $W_{vol}$  und die  $i$   $U_{out}$  zunächst für  $j$  Stützstellen diskretisiert. Es ergibt sich ein lineares Gleichungssystem mit komplexen Elementen in Matrixschreibweise

$$\mathbf{U}_{out} \cdot \alpha = \mathbf{W}_{vol} \quad (35)$$

Im nächsten Schritt werden aus der Matrix für die Sensorspannungen und aus dem Vektor für die Zielfunktion jeweils Realteil und Imaginärteil herausgetrennt und in eine neue Matrix bzw. in einen neuen Vektor in folgender Weise eingetragen

$$\begin{pmatrix} U_{11}^{(\Re)} & U_{12}^{(\Re)} & \dots & U_{1i}^{(\Re)} \\ U_{21}^{(\Re)} & U_{22}^{(\Re)} & \dots & U_{2i}^{(\Re)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_{j1}^{(\Re)} & U_{j2}^{(\Re)} & \dots & U_{ji}^{(\Re)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_{11}^{(\Im)} & U_{12}^{(\Im)} & \dots & U_{1i}^{(\Im)} \\ U_{21}^{(\Im)} & U_{22}^{(\Im)} & \dots & U_{2i}^{(\Im)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_{j1}^{(\Im)} & U_{j2}^{(\Im)} & \dots & U_{ji}^{(\Im)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{vol,1}^{(\Re)} \\ W_{vol,2}^{(\Re)} \\ \vdots \\ W_{vol,j}^{(\Re)} \\ \dots \\ W_{vol,1}^{(\Im)} \\ W_{vol,2}^{(\Im)} \\ \vdots \\ W_{vol,j}^{(\Im)} \end{pmatrix} \quad (36)$$

Es ist zu sehen, dass die neu entstandene Matrix  $\mathbf{U}_{out}$  und auch der neu gebildete Vektor  $\mathbf{W}_{vol}$  doppelt so viele Elemente enthalten, da der Imaginärteil an den Realteil angehängt wurde. Somit können Realteil und Imaginärteil in einem Schritt durch  $i$  reelle Verstärkungsfaktoren für  $j$  Stützstellen durch einen LMS-Algorithmus approximiert werden. Anschließend werden die komplexen Spannungssignale  $U_{out,i}$  mit den ermittelten reellwertigen  $\alpha_i$  multipliziert und gemäß Gleichung (34) aufsummiert. Das daraus resultierende diskrete Spektrum wird dann mit der komplexen Zielfunktion verglichen und bewertet. Die Güte der Rekonstruktion hängt von mehreren Parametern ab. Zum einen vom zu beeinflussenden Frequenzbereich, in dem eine bestimmte Anzahl von Eigenschwingformen enthalten ist, zum anderen

von der Anzahl der verwendeten Sensoren. Die örtliche Verteilung der Sensoren zur Optimierung der Verstärkungssignale soll nicht Thema dieser Arbeit sein. Im nächsten Kapitel wird die Rekonstruktion der Volumenverschiebung an einem Beispiel gezeigt.

## 5 Die gelenkig gelagerte Platte als analytisches Beispiel

In diesem Kapitel werden die theoretischen Vorbetrachtungen auf eine allseitig gelenkig gelagerte Platte angewandt und die Gültigkeit der obigen Aussagen gezeigt. Für die analytischen Berechnungen werden folgende Werte zugrunde gelegt:

Grösse	Formelzeichen	Wert	Einheit
Abmessung in x-Richtung	$l_x$	0.900	m
Abmessung in y-Richtung	$l_y$	0.600	m
Abmessung in z-Richtung	$h$	0.004	m
Elastizitätsmodul	$E$	$0.71 \cdot 10^{11}$	N/m <sup>2</sup>
Poissonsche Zahl	$\nu$	0.30	-
Dichte	$\rho$	$2.7 \cdot 10^3$	kg/m <sup>3</sup>
Dämpfung	$\eta$	0.01	-

Tabelle 1: Eingabeparameter für die Platte

Grösse	Formelzeichen	Wert	Einheit
Abmessung in x-Richtung	$l_{x,p}$	0.0050	m
Abmessung in y-Richtung	$l_{y,p}$	0.0025	m
Abmessung in z-Richtung	$h_p$	0.0002	m
Elastizitätsmodul	$E_p$	$6.3 \cdot 10^{10}$	N/m <sup>2</sup>
Poissonsche Zahl	$\nu_p$	0.35	-
Piezoelektrische Ladungskonstante	$d_{31}$	$-2.75 \cdot 10^{-10}$	m/V
Kapazität	$C_r$	$1.0 \cdot 10^{-7}$	F

Tabelle 2: Eingabeparameter für die Piezokeramiken

Für die Herleitungen werden lediglich die Biegeschwingungen in Betracht gezogen. Die allgemeine räumliche Koordinate  $x$  wird auf zwei Dimensionen beschränkt, also

$$(x) \rightarrow (x, y) \quad (37)$$

Die Parameter der Platte werden als konstant angenommen. Mit Kenntnis des Elastizitätsmoduls  $E$  und der Poissonschen Zahl  $\nu$  kann die Plattensteifigkeit  $N$  berechnet und in den Differenzialoperator  $\Lambda$  in Gleichung (4) eingesetzt werden. Folgender Zusammenhang gilt

$$N = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (38)$$

Nach Hurty und Rubinstein (1964) lassen sich die Eigenfunktionen in Gleichung (4), welche die Differenzialgleichung, die Randbedingungen und auch die Orthonormierungsbedingungen erfüllen, wie hinreichend bekannt ist, darstellen

$$\phi_{mn}(x, y) = 2 \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{l_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{l_y}\right) \quad (39)$$

Die Laufparameter  $m$  und  $n$  sind beliebige Ganzzahlige und repräsentieren die Anzahl der Schwingungsbäuche in x- bzw. in y-Richtung. Diese Eigenfunktionen, welche im Weiteren als (*Eigen-*)*Moden* oder (*Eigen-*)*Schwingformen* bezeichnet werden, stellen die geometrische Verschiebungsverteilung der Struktur dar. Die berechneten Schwingformen sind in Bild 1 dargestellt. Außerdem können mit Kenntnis der

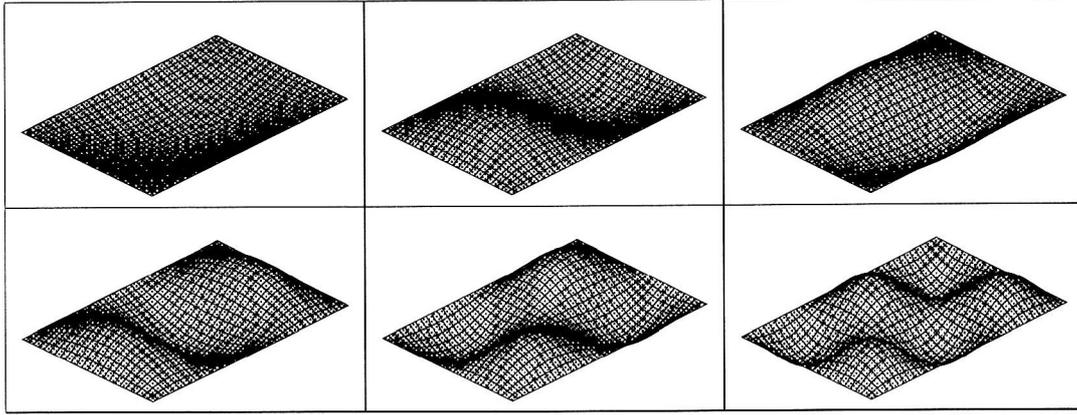


Bild 1: Analytisch berechnete Modenformen für verschiedene Werte von  $m$  und  $n$ :  $\phi_{11}$ ,  $\phi_{21}$ ,  $\phi_{12}$ ,  $\phi_{31}$ ,  $\phi_{22}$ ,  $\phi_{32}$

Dichte  $\rho$  die Eigenkreisfrequenzen  $\omega_{mn}$  ermittelt werden

$$\omega_{mn} = \sqrt{\frac{N}{h\rho} \left[ \left( \frac{m\pi}{l_x} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{l_y} \right)^2 \right]} \quad (40)$$

Unter Verwendung der allgemeinen Formulierungen ergeben sich folgende wichtige Funktionen: Die Admittanz wird für eine Punktkraftanregung  $F(x_E, y_E)$  nach Gleichung (29) beschrieben mit

$$H^V(x, y, x_E, y_E, \omega) = \frac{j\omega}{M} \sum_r \frac{\phi_r(x, y) \cdot \phi_r(x_E, y_E)}{(-\omega^2 + j\omega\omega_r\eta_r + \omega_r^2)} \quad (41)$$

Für die Volumenverschiebung nach Gleichung (26) ergibt sich

$$W_{vol}(\omega) = \frac{1}{M} \cdot \int_0^{l_y} \int_0^{l_x} \left\{ \sum_r \frac{\phi_r(x, y) \cdot \phi_r(x_E, y_E)}{(-\omega^2 + j\omega\omega_r\eta_r + \omega_r^2)} \cdot F(x_E, y_E, \omega) \right\} dx dy \quad (42)$$

und für die Volumengeschwindigkeit nach Gleichung (27) entsprechend

$$V_{vol}(\omega) = \frac{j\omega}{M} \cdot \int_0^{l_y} \int_0^{l_x} \left\{ \sum_r \frac{\phi_r(x, y) \cdot \phi_r(x_E, y_E)}{(-\omega^2 + j\omega\omega_r\eta_r + \omega_r^2)} \cdot F(x_E, y_E, \omega) \right\} dx dy \quad (43)$$

Die Berechnung der Dynamik mit den Werten von Tabelle 1 führt zu den ersten Eigenfrequenzen (nach Gleichung (40)) und den Schwingformen (nach Gleichung (39)). Die Ergebnisse sind in Tabelle 3 dargestellt. Es ist zu sehen, dass sich die Schwingformen für eine gelenkig gelagerte Rechteckplatte in drei grundsätzlich verschiedene Kategorien einteilen lassen, welche in  $x$ - bzw. in  $y$ -Richtung eine jeweils unterschiedliche Anzahl von Schwingungsbäuchen besitzen:

- ungerade-ungerade: In  $x$ - bzw.  $y$ -Richtung liegt jeweils eine ungerade Anzahl von Schwingungsbäuchen vor. Insgesamt besitzt diese Form eine ungerade Anzahl von Schwingungsbäuchen. In Deffayet und Nelson (1988) werden diese Schwingformen auch als **monopole-type** bezeichnet.
- ungerade-gerade bzw. gerade-ungerade: In  $x$ - bzw.  $y$ -Richtung liegt eine ungerade Anzahl von Schwingungsbäuchen vor, in  $y$ - bzw.  $x$ -Richtung eine gerade Anzahl. Insgesamt besitzt diese Form eine gerade Anzahl von Schwingungsbäuchen. In Deffayet und Nelson (1988) werden diese Schwingformen auch als **dipole-type** bezeichnet. Der Unterschied der beiden Formen ist umso größer, je stärker das Kantenlängenverhältnis  $l_x/l_y$  von 1, d.h. einer quadratischen Geometrie, abweicht.
- gerade-gerade: In  $x$ - bzw.  $y$ -Richtung liegt jeweils eine gerade Anzahl von Schwingungsbäuchen vor. Insgesamt besitzt diese Form eine gerade Anzahl von Schwingungsbäuchen. In Deffayet und

Nr.	Eigenfrequenz in [Hz]	Modenform [m,n]
1	39.1	(1, 1)
2	75.2	(2, 1)
3	120.4	(1, 2)
4	135.4	(3, 1)
5	156.5	(2, 2)
6	216.7	(3, 2)
7	219.7	(4, 1)
8	255.8	(1, 3)
9	291.9	(2, 3)
10	300.5	(4, 2)
11	328.0	(5, 1)
12	352.1	(3, 3)
13	409.3	(5, 2)
14	436.4	(4, 3)
15	445.4	(1, 4)

Tabelle 3: Eigenfrequenzen und Schwingformen

Nelson (1988) werden diese Schwingformen auch als **quadrupole-type** bezeichnet.

Um die Phänomene der Schallabstrahlung zu verstehen, sollte man die Schwingformen getrennt betrachten. In Jakob (1999) ist die Bewertung der verschiedenen Schwingformen anhand des modalen Abstrahlgrades  $\sigma_{mn}$  beschrieben. Man kann sich leicht vorstellen, dass benachbarte Schwingungsbäuche gegenphasig schwingen und sich näherungsweise ausgleichen. Dieser Druckausgleich benachbarter Felder im akustischen Nahfeld wird in der Literatur mit **hydrodynamischer Kurzschluss** bezeichnet (Cremer und Heckl, 1996). Kommt es zum vollständigen Druckausgleich, wird keine Leistung in das akustische Fernfeld transportiert. Dieses Phänomen tritt in der Natur aber nicht auf, da die Randbedingungen dazu nie optimal vorliegen. Geometrische Unstetigkeiten oder fertigungstechnische Fehler usw. sorgen für veränderte Abstrahlungsbedingungen, so dass ein Kurzschluss nie vollständig auftreten kann. Trotzdem kann man für den Fall einer schwingenden Rechteckplatte sagen, dass die gerade-gerade-Form am wenigsten in das akustische Fernfeld abstrahlt, die ungerade-gerade- bzw. gerade-ungerade-Form etwas mehr und die ungerade-ungerade-Form am meisten. Für den Mode  $\phi_{11}$  schwingt die Platte konphas über der gesamten Geometrie und transportiert somit die meiste Leistung ins akustische Fernfeld. Ungerade-ungerade-Modenformen höherer Ordnungszahlen  $m$  und  $n$  ( $m, n = 3, 5, 7..$ ) tragen immer weniger zum Leistungstransport bei, da die gleichphasig schwingenden Randbereiche immer kleiner werden. Ähnlich verhält es sich mit der *dipole-type*-Form.

Insgesamt ist zu erwarten, dass im Frequenzgang der Zielfunktion vor allem die ungeraden-ungeraden-Formen zum Tragen kommen. Mit Kenntnis der Eigenmoden kann jetzt für eine beliebige Strukturangeregung die Systemantwort (z.B. die Geschwindigkeit in Normalenrichtung) berechnet werden. Die Verknüpfung beider wird über die entsprechende Übertragungsfunktion hergestellt (z.B. die Admittanz). Für die Kraftanregung wird ein idealer Einheitsimpuls angenommen. Die Koordinaten für den Erregerpunkt werden auf  $x_E = l_x(1 - 1/\pi)$  und  $y_E = l_y(1 - 1/\pi)$  gelegt, so dass alle Eigenformen gleichzeitig angeregt werden können. Dies gilt allerdings nur für eine allseitig gelenkig gelagerte Platte, da sich die Modenformen ausschließlich aus Sinusschwingungen zusammensetzen und somit am gewählten Erregerpunkt keine Knotenlinie liegen kann. Da die Admittanz analytisch als Funktion über die gesamte Plattengeometrie vorliegt, kann die Zielfunktion  $W_{vol}$  nach Gleichung (42) ermittelt werden. Das Spektrum ist in Bild 2 zu sehen. Zur Vereinfachung wurde die modale Dämpfung als konstant angenommen. Die fünf Frequenzspitzen sind eindeutig den ungerade-ungerade-Formen  $\phi_{11}$ ,  $\phi_{13}$ ,  $\phi_{31}$ ,  $\phi_{51}$  und  $\phi_{33}$  zuzuordnen. Die zweite Zielfunktion  $V_{vol}$ , für die keine Rekonstruktion durchgeführt wird, ist ebenfalls abgebildet. Außerdem ist die integrale Sensorspannung, d.h. das Signal eines gedachten Flächensensors der Plattenabmessungen  $l_x$  und  $l_y$ , nach Gleichung (31) berechnet und dargestellt worden.

Es ist zu erkennen, dass sich die integrale Sensorspannung nicht nur quantitativ von den Zielfunktionen unterscheidet, sondern auch qualitativ kein linearer Zusammenhang besteht. Somit können die Zielfunktionen nicht durch ein PZT-Signal mit einem konstanten Verstärkungsfaktor  $\alpha$  nachgebildet werden. Aus diesem Grund werden verschiedene Patch-Kombinationen und Anordnungen untersucht und mit Hilfe von

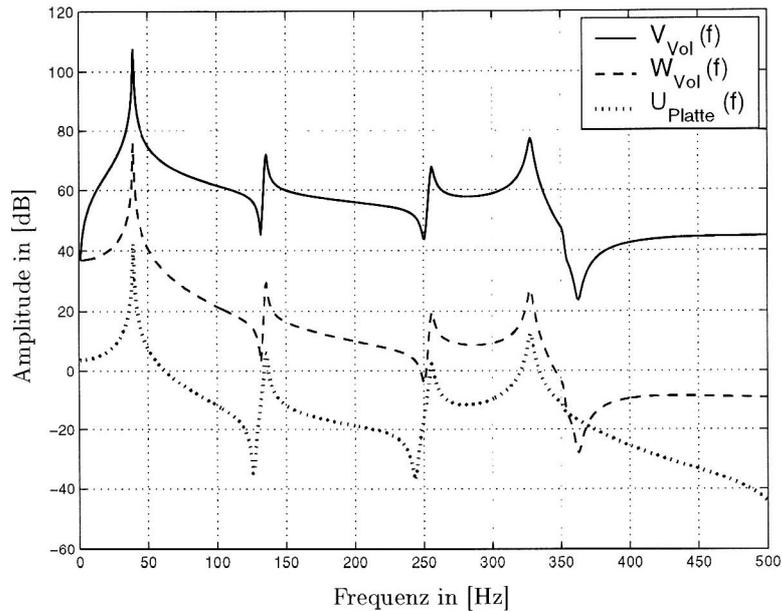


Bild 2: Spektren:  $V_{vol}$ : Volumengeschwindigkeit,  $W_{vol}$ : Volumenverschiebung,  $U_{Platte}$ : integrale Sensorspannung

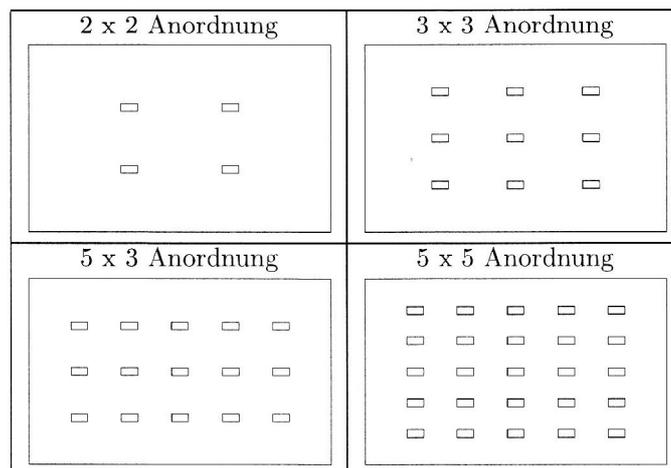


Bild 3: Gleich verteilte Patch-Kombinationen auf der Platte

diskreten Verstärkungsfaktoren  $\alpha_i$  für die Einzelsignale zu einem resultierenden Sensorsignal verknüpft. Die  $\alpha_i$  werden dabei durch den LMS-Algorithmus bestimmt. Der LMS-Algorithmus zielt darauf ab, das definierte Spektrum (Zielfunktion) mit möglichst minimalem Fehler zu approximieren. Ergibt sich nahezu vollständige Übereinstimmung mit der Zielfunktion, kann auf eine Optimierung bezüglich der Lage der Patches verzichtet werden. Aufgrund der vorliegenden Randbedingung (allseitig gelenkig gelagert) kann angenommen werden, dass sich eine geometrische Gleichverteilung der Patches auf der Struktur anbietet (siehe Bild 3), wobei aber noch einige Anmerkungen gemacht werden sollen. Eine gleich verteilte  $p \times q$  Anordnung der Patches führt bei den vorliegenden Randbedingungen zu folgenden Einschränkungen: Schwingformen mit der  $(m, n)$ -Verteilung von  $(k(p + 1), n)$  bzw.  $(m, k(q + 1))$  mit  $p, q, k = 1, 2, \dots, i$  können nicht detektiert werden. Die Patches lägen für diese Schwingformen stets in einer Knotenlinie. Eine bessere Lage wäre deswegen auf den  $\pi$ -Bruchteilen der Kantenlängen  $l_x$  und  $l_y$  zu finden (wie auch der gewählte Erregerpunkt), da hier keine Knoten auftauchen können. Jedoch gilt diese Tatsache nur für die allseitig gelenkig gelagerte Platte.

Im Frequenzbereich bis 500 Hz ist die modale Superposition der ersten 20 Moden zu sehen. Die einzelnen Sensorsignale liefern je nach deren Lage unterschiedliche Signale. Ein Patch in der Mitte der Platte detektiert z.B. nur alle ungerade-ungerade-Moden, da diese immer einen Schwingungsbauch in der Plattenmitte aufweisen und somit eine Verformung der Struktur erfasst wird. Die beiden anderen Kategorien können nicht detektiert werden. Würde man jedoch nur ein Patch in der Mitte der Platte applizieren,

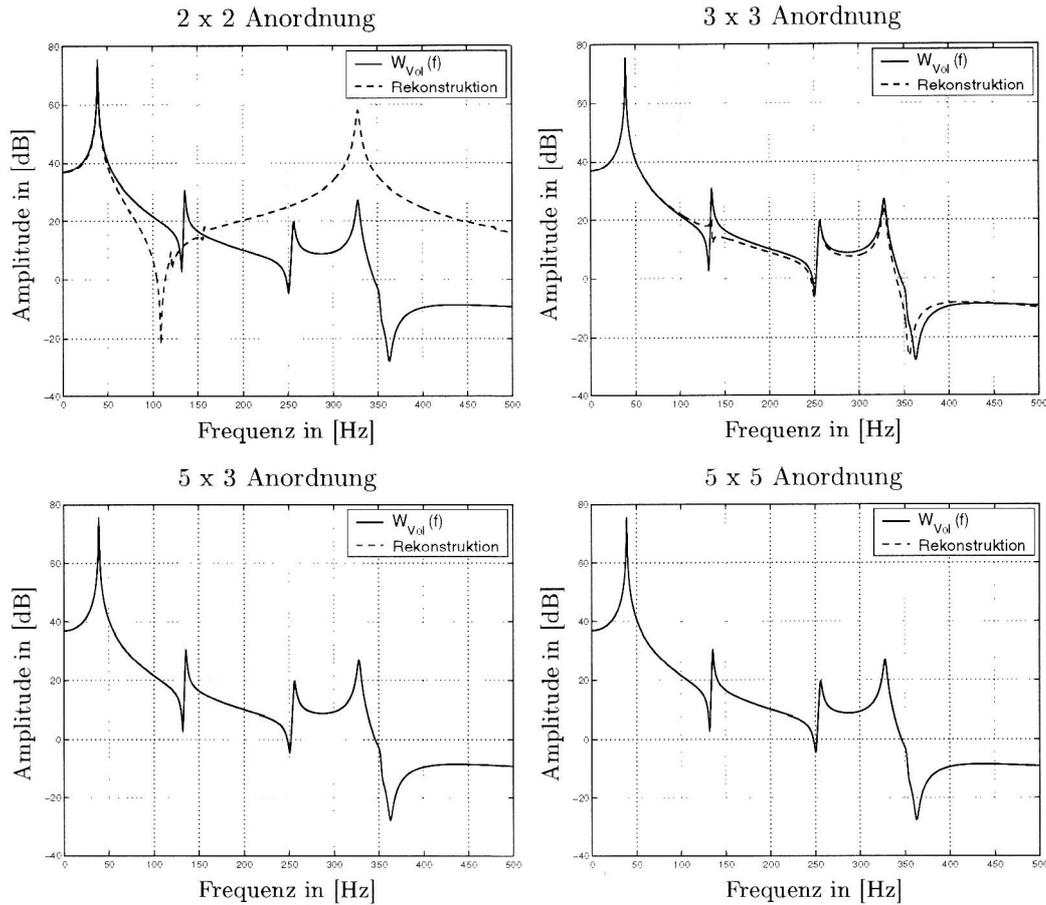


Bild 4: Rekonstruktionen der Zielfunktion  $W_{vol}$  für verschiedene Sensoranordnungen

könnte aufgrund des nicht linearen Zusammenhangs zwischen Volumenverschiebung und des einzelnen Sensorsignals die Zielfunktion nicht besonders gut nachgebildet werden. Der LMS-Algorithmus findet nur für den (1,1)-Mode (der im übrigen an jeder Position detektiert würde, da die Platte hier konphaschwingt) eine exakte Lösung. Dies lässt sich damit begründen, dass diese Schwingform absolut dominant (ca. 50 dB höher als das nächste, größte lokale Maximum) in der integralen Zielfunktion ist. Die restlichen ungerade-ungerade-Moden würden zwar detektiert werden, aber nach der LMS-Annäherung quantitativ noch sehr stark von den tatsächlichen Werten abweichen. Somit muss die Anzahl der Patches soweit erhöht werden, dass der LMS-Algorithmus eine gute Näherungslösung für alle einbezogenen Moden findet. Für den vorliegenden Fall wurden deshalb verschiedene Kombinationen und Anordnungen der Patches untersucht, um diese Phänomene zu demonstrieren. In Bild 4 ist zu sehen, dass eine  $2 \times 2$  Anordnung aufgrund der wenigen Linearkoeffizienten auch nur den (1,1)-Mode exakt rekonstruiert. Die  $2 \times 2$  Anordnung kann keine  $(k(2+1), n)$ - bzw.  $(m, k(2+1))$ -Moden erfassen. In der Rekonstruktion ist zu sehen, dass z.B. der (3,1)-Mode bei 135.4 Hz nicht nachgebildet werden kann. Ebenso verhält es sich mit den Schwingformen (1,3) und (3,3). Die anderen Schwingformen (2,3) und (3,2) der gerade-ungerade- bzw. ungerade-gerade-Kategorie lassen sich ebenfalls nicht detektieren. Trotzdem weist diese LMS-Approximation den geringsten quadratischen Fehler im untersuchten Frequenzbereich auf. Erhöht man nun die Anzahl der Sensoren auf  $3 \times 3$ , kann das Spektrum deutlich besser angenähert werden. Die  $5 \times 3$  Anordnung bietet optimale Übereinstimmung. Hier können alle Formen (1..5,1..3) erkannt werden. Schwingformen höherer Ordnung kommen im Frequenzbereich bis 500 Hz zwar vor ( $\phi_{14}$ ,  $\phi_{61}$  und  $\phi_{24}$ , in Tabelle 3 nur z. T. dargestellt), können aber weder von den Sensoren erfasst werden, noch haben sie einen Einfluss auf die Volumenverschiebung. Somit werden diese Moden bei der Rekonstruktion nicht berücksichtigt. Die Grenze der  $5 \times 3$  Anordnung liegt also in der einbezogenen Anzahl der Schwingformen und deren Charakteristik. Eine Erhöhung führt zwar zum gleichen Ergebnis ( $5 \times 5$  Anordnung), stellt aber unnötigen Aufwand dar.

## 6 Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, dass sich die global aussagekräftige Zielfunktion Volumenverschiebung durch Linearkombination diskreter Sensorsignale beliebig genau rekonstruieren lässt. Die Güte der Rekonstruktion hängt zum einen von der Anzahl und der Lage der PZT-Patches und zum anderen von dem repräsentativen Frequenzbereich ab (miteinbezogene Moden), sofern man von der Höhe der Verstärkungsfaktoren absieht. Optimierungen bezüglich Lage und Anzahl der PZT-Patches könnten in weiteren Arbeiten durchgeführt werden. Die hier vorgestellte allseitig gelenkig gelagerte Platte kann allerdings nur als Grundlage für weitere Untersuchungen dienen. Zukünftige Arbeiten zielen deswegen darauf ab, die theoretischen Vorbetrachtungen auf fest eingespannte Platten zu übertragen. Die feste Einspannung kann in einem Experiment gut nachgebildet werden. Somit wird die Theorie auf ein numerisches Beispiel (FEM) übertragen und anhand eines Experiments verifiziert und bewertet. Die analytische Beschreibung der numerisch ermittelten Modalvektoren für eine fest eingespannte Platte kann nur mittels geeigneter Approximationsverfahren durchgeführt werden (z.B. zweidimensionale Polynomansätze). Zur Ermittlung der Admittanz im Experiment wird die Experimentelle Modalanalyse (FMA) eingesetzt. Die Implementierung der vibroakustischen Sensorik in einen adaptiven Regelkreis soll die zukünftige Arbeit abschließen.

### Literatur

1. Charette, F.; Berry, A.; Giugou, C.: Active Control of sound radiation from a plate using a polyvinylidene fluoride volume displacement sensor. *Journal of the Acoustical Society of America*, 103(3):1493-1503, März (1998).
2. Collatz, L.: *Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen*. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., 2. Auflage. Leipzig, (1963).
3. Cremer, L.; Heckl, M.: *Körperschall - Physikalische Grundlagen und technische Anwendungen*. Springer-Verlag, (1996).
4. Deffayet, C.; Nelson, P.A.: Active Control of low-frequency harmonic sound radiated by a finite panel. *Journal of the Acoustical Society of America*, 84(6):2192-2199, (1988).
5. Hurty, W.C.; Rubinstein, M.F.: *Dynamics of Structures*. Prentice-Hall, Inc., London, (1964).
6. Jakob, A.: *Aktive Minderung der Schallabstrahlung schwingender Platten*. Dissertation, Technische Universität Berlin, VDI-Verlag, Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 11, Nr. 280, Juni (1999).
7. Johnson, M.E.; Elliott, S.J.: Active Control of Sound Radiation Using Volume Velocity Cancellation. *Journal of the Acoustical Society of America*, 98(4):2174-2186, (1995).
8. Lyon, R. H.: *Machinery Noise and Diagnostics*. Butterworth-Heinemann, (1987).
9. Masson, P.; Berry, A.; Nicolas, J.: Active structural acoustic control using strain sensing. *Journal of the Acoustical Society of America*, 102(3):1588-1599, September (1997).
10. Preumont, A.: *Vibration Control of Active Structures - An Introduction*. Kluwer Academic Publishers, (1997).
11. Preumont, A.; Francois, A.; Dubru, S.: Piezoelectric Array Sensing for Real-Time, Broad-Band Sound Radiation Measurement. *Journal of Vibration and Acoustics*, 121:446-452, Oktober (1999).
12. Szabo, I.: *Höhere Technische Mechanik*. Springer-Verlag, (1985).

---

*Anschrift:* Dipl.-Ing. Bernd Vogl, Dipl.-Ing. Sven Herold und Dr.-Ing. Friedrich Wahl, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, Institut für Mechanik, Lehrstuhl für Adaptronik, Universitätsplatz 2, 39106 Magdeburg, Germany. e-mail: bernd.vogl@mb.uni-magdeburg.de