

Selbsttätiges Auswuchten mittels zweier beliebiger Rollen

L. Sperling, H. Duckstein, B. Ryzhik

Zum selbsttätigen Auswuchten des starren Rotors in einer Ebene mittels zweier Kugeln oder Rollen allgemeinerer Gestalt, die sich in einem viskosen Medium unter bestimmten Bedingungen infolge der durch die Zentrifugalkräfte erregten Schwingungen kompensatorisch positionieren, werden für ein ausführlich diskutiertes Modell die Bewegungsgleichungen hergeleitet. Auf analytischem Wege werden für den im Vergleich zu bisherigen Untersuchungen allgemeineren Fall von Kompensationselementen mit ungleichen Zentrifugalkräften unter Voraussetzung vernachlässigbarer Schwingungsdämpfung die möglichen Paare synchroner Phasenwinkel und ihre Stabilität untersucht. Die Ergebnisse der analytischen Untersuchungen einschließlich der für bestimmte Parameterwerte vorhandenen Stabilität einer speziellen Lösung, die im Falle übereinstimmender Zentrifugalkräfte immer instabil ist, werden durch Computer-Simulation bestätigt.

1 Einleitung

Zum völlig selbsttätigen Auswuchten eines starren Rotors in einer Ebene, d. h., wenn der Rotor nur statisch unwuchtig und die Ebene der Unwucht wenigstens näherungsweise bekannt ist, ohne Eingriff von außen eignen sich unter Umständen mehrere, aber mindestens zwei, rollenförmige Kompensationselemente (z. B. Kugeln oder kreiszylindrische Rollen), die sich in einem mit einem viskosen Medium gefüllten, kreiszylindrischen Hohlraum frei positionieren können (siehe z. B. die Bibliographien in Thearle (1950), Blekhman (2000), Sperling u.a.(1998)). Für geeignet gewählte Parameterwerte können diese Elemente sich dann in bestimmten Drehzahlbereichen, insbesondere in Bereichen überkritischer Drehzahlen, infolge eines bekannten nichtlinearen Synchronisationseffektes selbsttätig völlig kompensatorisch positionieren, d. h. die Primärnunwuchten im Idealfall vollständig ausgleichen. Dieses Verfahren kommt besonders vorteilhaft bei während des Betriebes veränderlichen Unwuchten, wie z. B. bei Wäscheschleudern oder Zentrifugen, zum Einsatz.

Für den speziellen Fall gleichartiger Kompensationselemente, häufig als Massenpunkte idealisiert, und isotroper Lagerung findet man die wichtigsten Eigenschaften des Systems in der angegebenen Literatur. Von Nesterenko (1984) wurde das Problem für die anisotrope Lagerung verallgemeinert. Dieser allgemeinere Fall ist auch in Sperling u.a. (1998) als geeignetes, durch Computer-Simulationen ergänztes Anwendungsbeispiel für die Methode der direkten Bewegungsteilung nach Kapiza behandelt, die von Blekhman (2000) zu einem grundlegenden Verfahren des von ihm „Vibrationsmechanik“ genannten Teilgebietes der Dynamik verallgemeinert wurde.

Sharp (1975) und umfassender Adolffson (1997) analysierten die Stabilität unter Berücksichtigung der Schwingungsdämpfung, wodurch die Resultate erheblich modifiziert werden. In der Arbeit Duckstein u.a. (1999) wurde mittels Computer-Simulationen des Anlaufvorganges gezeigt, daß infolge der Dämpfung ein Hängenbleiben der Kompensationselemente in der kritischen Drehzahl im Sinne des sog. Sommerfeldeffektes möglich ist. Diese Erscheinung wird in Ryzhik u.a. (2001) detaillierter untersucht.

In der vorliegenden Arbeit wird ausführlicher auf die Herleitung der bereits in den Arbeiten Duckstein u.a. (1999) und Sperling u.a. (1998) angegebenen Bewegungsgleichungen des Systems mit Kompensationselementen, die ohne zu gleiten auf kreiszylindrischen Innenflächen der Auswuchteinheit abrollen, einschließlich der Gleichung für den Rotor selbst, eingegangen und die zugrundegelegte Modellvorstellung kommentiert. Auf der Basis der Methode der direkten Bewegungsteilung werden sodann für das System ohne Schwingungsdämpfung die Existenz- und die Stabilitätsbedingungen für Bewegungen der Kompensationselemente synchron mit der Rotordrehzahl aufgestellt und allgemein ausgewertet. Damit werden die bisher bekannten Ergebnisse auf den Fall ungleicher Kompensationselemente verallgemeinert. Ungleiche Kompensationselemente können z. B. realisiert sein in Form von in konzentrischen Kreisbahnen beweglichen Kugeln, wie sie u.a. in dem Patent Taylor (1996) vorgeschlagen werden. Im Falle je einer Kugel in zwei Bahnen kann es möglicherweise von Vorteil sein, daß die Kugeln gleichzeitig die gleiche Phasenlage einnehmen können und sich in ihrer Bewegung nicht gegenseitig behindern. Die Resultate der Existenz- und der Stabilitätsbedingungen werden abschließend durch Computer-Simulation bestätigt.

2 Modell und Bewegungsgleichungen

Der ungewichtete Primärrotor wird nach Bild 1 als zusammengesetzt angenommen aus einem symmetrischen Grundrotor mit der Masse m und dem auf die Achse durch den Mittelpunkt senkrecht zur Zeichenebene bezogenen Massenträgheitsmoment J . Seine Unwucht wird modelliert durch einen starr mit dem Grundrotor verbundenen Massenpunkt der Masse m_0 . Der Primärrotor hat 3 Freiheitsgrade: Rotation um die Bezugsachse von J mit der Koordinate φ_0 und ebene Translation mit den Koordinaten x und y . Um die Bezugsachse von J wirkt ein antreibendes Motormoment $L(\dot{\varphi}_0)$.

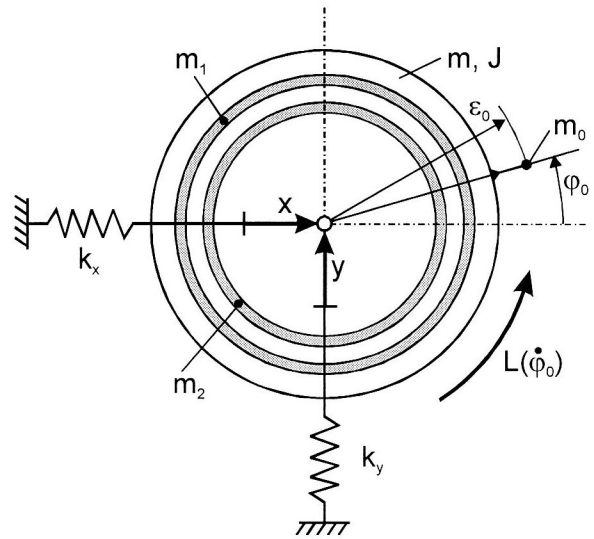


Bild 1. Modell des selbsttätigen Auswuchtens in einer Ebene

Als Kompensationselemente werden zwei Rollen in viskoser Flüssigkeit vorausgesetzt. Als Idealisierung für die Rollen wird vereinfachend angenommen, daß sie ohne zu gleiten an kreiszylindrischen Innenflächen der Auswuchteinrichtung abrollen.

Die Herleitung der bereits in Duckstein u.a. (1999) und Sperling u.a. (1998) behandelten Bewegungsgleichungen soll hier etwas ausführlicher mittels der Lagrange'schen Bewegungsgleichungen 2. Art erläutert werden.

Für die kinetische Energie des Grundrotors gilt

$$T_G = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} J \dot{\varphi}_0^2, \quad (1)$$

für die kinetische Energie der Primärunwucht (mit $x_0 = x + \varepsilon_0 \cos \varphi_0$, $y_0 = y + \varepsilon_0 \sin \varphi_0$)

$$T_0 = \frac{1}{2} m_0 (\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2) = \frac{1}{2} m_0 [\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \varepsilon_0^2 \dot{\varphi}_0^2 + 2\varepsilon_0 \dot{\varphi}_0 (-\dot{x} \sin \varphi_0 + \dot{y} \cos \varphi_0)]. \quad (2)$$

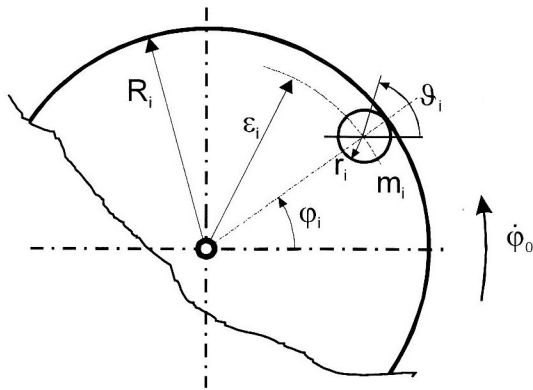


Bild 2. Zur Zwangsbedingung zwischen den Koordinaten eines Kompensationselementes

Für die i -te Kompensationsrolle ($i=1,2$) beschreibe die Koordinate φ_i die Bewegung des Rollenmittelpunktes auf seiner Kreisbahn. Als Hilfskoordinate wird nach Bild 2 der Absolutwinkel ϑ_i der Rotation der Rolle im gleichen Richtungssinn wie φ_0 und φ_i , $i=1,2$, eingeführt.

Dann gelten als Bedingungen des gleitfreien Rollens die Zwangsbedingungen

$$\dot{\vartheta}_i = \frac{1}{r_i} (R_i \dot{\varphi}_0 - \varepsilon_i \dot{\varphi}_i), \quad i=1,2. \quad (3)$$

Setzt man noch für die auf die Achsen durch die Mittelpunkte bezogenen Massenträgheitsmomente

$$J_{Si} = \mu_i m_i r_i^2 \quad (\mu_i = \frac{2}{5} \text{ für eine Kugel}), \quad (4)$$

so erhält man schließlich nach Einsetzen in $T_i = \frac{1}{2} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2) + \frac{1}{2} J_{Si} \dot{\vartheta}_i^2$ für die kinetische Energie der i -ten

Kompensationsrolle den Ausdruck

$$T_i = \frac{1}{2} m_i \left[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \varepsilon_i^2 \dot{\varphi}_i^2 + 2\varepsilon_i \dot{\varphi}_i (-\dot{x} \sin \varphi_i + \dot{y} \cos \varphi_i) \right] + \frac{1}{2} \mu_i m_i (R_i \dot{\varphi}_0 - \varepsilon_i \dot{\varphi}_i)^2. \quad (5)$$

Die gesamte kinetische Energie $T = T_G + T_0 + T_1 + T_2$ läßt sich mit den neuen Bezeichnungen

$$M = m + \sum_{i=0}^2 m_i, \quad J_{00} = J + m_0 \varepsilon_0^2 + \sum_{i=1}^2 \mu_i m_i R_i^2, \quad (6)$$

$$J_{0i} = \mu_i m_i R_i \varepsilon_i, \quad J_{ii} = (1 + \mu_i) m_i \varepsilon_i^2 \quad (7)$$

wie folgt schreiben:

$$T = \frac{1}{2} M (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \sum_{i=0}^2 \left[m_i \varepsilon_i \dot{\varphi}_i (-\dot{x} \sin \varphi_i + \dot{y} \cos \varphi_i) + \frac{1}{2} J_{ii} \dot{\varphi}_i^2 \right] - \sum_{i=1}^2 J_{0i} \dot{\varphi}_0 \dot{\varphi}_i. \quad (8)$$

Als potentielle Energie des Systems soll lediglich die Federenergie

$$U = \frac{1}{2} (k_x x^2 + k_y y^2) \quad (9)$$

berücksichtigt werden, d. h., es wird eine horizontale Anordnung der Auswuchtebene oder die Vernachlässigbarkeit des Einflusses der Gravitation vorausgesetzt.

Die Wirkung des viskosen Mediums auf die i -te Rolle wird nach Sharp (1975) auf die denkbar größte Weise modelliert durch ein auf diese entgegen dem Drehsinn von ϑ_i , also im Uhrzeigersinn, wirkendes, der relativen Winkelgeschwindigkeit proportionales Moment, das sich unter Beachtung der Zwangsbedingung (3) wegen $R_i = \varepsilon_i + r_i$ wie folgt darstellen läßt:

$$\bar{l}_i = d_i (\dot{\vartheta}_i - \dot{\varphi}_0) = d_i \frac{\varepsilon_i}{r_i} (\dot{\varphi}_0 - \dot{\varphi}_i). \quad (10)$$

Mittels Gleichsetzens der virtuellen Arbeiten werden daraus die zu den Koordinaten φ_0 und φ_i gehörigen verallgemeinerten Kräfte (Momente) Q_{0i} und Q_i ermittelt. Die virtuelle Arbeit des inneren Momentes \bar{l}_i lautet unter Beachtung der Zwangsbedingung

$$\delta W_{di} = -\bar{l}_i (\delta \vartheta_i - \delta \varphi_0) = -\bar{l}_i \frac{\varepsilon_i}{r_i} (\delta \varphi_0 - \delta \varphi_i) = Q_{0i} \delta \varphi_0 + Q_i \delta \varphi_i. \quad (11)$$

Daraus folgt nach Einsetzen von \bar{l}_i und Koeffizientenvergleich unmittelbar:

$$Q_{0i} = -\beta_i (\dot{\varphi}_0 - \dot{\varphi}_i), \quad Q_i = \beta_i (\dot{\varphi}_0 - \dot{\varphi}_i) \quad \text{mit} \quad \beta_i = d_i \left(\frac{\varepsilon_i}{r_i} \right)^2. \quad (12)$$

Die Momente werden jeweils positiv im Richtungssinn der zugehörigen Koordinaten gezählt.

Bemerkung:

Während unser Ansatz (10) der textlichen Erläuterung in Sharp (1975) entspricht, wird dort im Gegensatz dazu dann in den Bewegungsgleichungen mit einem Dämpfungsglied entsprechend dem u.E. weniger einleuchtenden Ansatz

$$\bar{l}_i = d_i (\dot{\vartheta}_i - \dot{\varphi}_i) \quad (13)$$

gearbeitet.

Daraus folgt mit der Zwangsbedingung (3) anstelle der Gleichung (10):

$$\bar{l}_i = d_i \left[\frac{R_i}{r_i} \dot{\varphi}_0 - \frac{\varepsilon_i + r_i}{r_i} \dot{\varphi}_i \right] = d_i \frac{R_i}{r_i} (\dot{\varphi}_0 - \dot{\varphi}_i). \quad (14)$$

Für die verallgemeinerten Momente erhalten wir also wieder die Ausdrücke nach (12), nur mit Koeffizienten β_i in der wie folgt geänderten Bedeutung

$$\beta_i = d_i \frac{\varepsilon_i R_i}{r_i^2}. \quad (15)$$

Die Entscheidung zwischen den Ansätzen (10) und (13) hat also keinerlei Einfluß auf die schließliche grundsätzliche Gestalt unserer Bewegungsgleichungen. Die adäquate Festlegung der einem konkreten Modell entsprechenden Werte der Parameter β_i ist ohnehin problematisch.

Wirken auf den Primärrotor außerdem noch ein äußeres Dämpfungsmoment $-\bar{\beta}_0 \dot{\varphi}_0$ sowie äußere Dämpfungskräfte $-c_x \dot{x}$ in x -Richtung sowie $-c_y \dot{y}$ in y -Richtung ein, so erhält man unter Berücksichtigung des in der Umgebung der stationären Drehzahl linearisierten Antriebsmomentes des Rotors

$$L(\dot{\varphi}_0) = L_0 - \bar{\beta}_0 \dot{\varphi}_0 \quad (16)$$

nach der Lagrangeschen Vorschrift mit

$$\beta_0 = \bar{\beta}_0 + \bar{\beta}_0 + \sum_{i=1}^2 \beta_i \quad (17)$$

die folgenden Bewegungsgleichungen des Systems:

$$\begin{aligned} M\ddot{x} + c_x \dot{x} + k_x x &= \sum_{i=0}^2 m_i \varepsilon_i (\dot{\varphi}_i^2 \cos \varphi_i + \ddot{\varphi}_i \sin \varphi_i), \\ M\ddot{y} + c_y \dot{y} + k_y y &= \sum_{i=0}^2 m_i \varepsilon_i (\dot{\varphi}_i^2 \sin \varphi_i - \ddot{\varphi}_i \cos \varphi_i), \\ J_{00} \ddot{\varphi}_0 - \sum_{i=1}^2 J_{0i} \ddot{\varphi}_i + \beta_0 \dot{\varphi}_0 - \sum_{i=1}^2 \beta_i \dot{\varphi}_i - m_0 \varepsilon_0 (\ddot{x} \sin \varphi_0 - \ddot{y} \cos \varphi_0) &= L_0, \\ -J_{0i} \ddot{\varphi}_0 + J_{ii} \ddot{\varphi}_i - \beta_i \dot{\varphi}_0 + \beta_i \dot{\varphi}_i - m_i \varepsilon_i (\ddot{x} \sin \varphi_i - \ddot{y} \cos \varphi_i) &= 0, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (18)$$

3 Analytische Näherungslösung mittels der Methode der direkten Bewegungsteilung

Es wird die Gültigkeit der einschränkenden Annahmen

$$\varphi_0(t) = \Omega t, \quad (19)$$

$$c_x = 0, \quad c_y = 0 \quad (20)$$

vorausgesetzt. Gemäß der Methode der direkten Bewegungsteilung suchen wir die Lösung der 4. und der 5. Gleichung des Systems (18) mittels des Ansatzes

$$\varphi_i(t) = \Omega t + \alpha_i(t) + \xi_i(t, \Omega t), \quad i = 1, 2, \quad (21)$$

$$\dot{\alpha}_i(t) \ll \Omega, \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \xi_i(t, \Omega t) d(\Omega t) = 0. \quad (22)$$

Entsprechend unserer Zielstellung, stationäre Bewegungszustände mit der mittleren Winkelgeschwindigkeit bzw. Kreisfrequenz Ω und im Mittel konstanten Phasen α_i , $i = 1, 2$, zu analysieren, setzen wir in den ersten beiden Gleichungen des Systems (18) näherungsweise

$$\varphi_i(t) = \varphi_i^0(t) = \Omega t + \alpha_i, \quad \alpha_i = \text{const}. \quad (23)$$

Damit folgt

$$M\ddot{x}^0 + k_x x^0 = \sum_{i=0}^2 f_i \cos(\Omega t + \alpha_i), \quad M\ddot{y}^0 + k_y y^0 = \sum_{i=0}^2 f_i \sin(\Omega t + \alpha_i) \quad (24)$$

mit $\alpha_0 = 0$ und den Zentrifugalkräften

$$f_i = m_i \varepsilon_i \Omega^2. \quad (25)$$

Das System (24) hat die stationäre Lösung

$$x^0 = A_{xx} \sum_{i=0}^2 f_i \cos(\Omega t + \alpha_i), \quad y^0 = A_{yy} \sum_{i=0}^2 f_i \sin(\Omega t + \alpha_i) \quad (26)$$

mit den harmonischen Einflußkoeffizienten und Eigenkreisfrequenzen

$$A_{xx} = \frac{1}{M(\omega_x^2 - \Omega^2)}, \quad A_{yy} = \frac{1}{M(\omega_y^2 - \Omega^2)}, \quad (27)$$

$$\omega_x = \sqrt{\frac{k_x}{M}}, \quad \omega_y = \sqrt{\frac{k_y}{M}}. \quad (28)$$

Damit nehmen die in den letzten beiden Bewegungsgleichungen des Systems (18) enthaltenen, von den Schwingungen auf die Rollenbewegung zurückwirkenden Momente die folgende Gestalt an:

$$B_i = B_i^0 = -m_i \varepsilon_i [\ddot{x}^0 \sin(\Omega t + \alpha_i) - \ddot{y}^0 \cos(\Omega t + \alpha_i)], \quad (29)$$

$$B_i^0 = \frac{1}{2} f_i \sum_{k=0}^2 f_k [(A_{xx} - A_{yy}) \sin(2\Omega t + \alpha_i + \alpha_k) + (A_{xx} + A_{yy}) \sin(\alpha_i - \alpha_k)]. \quad (30)$$

Die Mittelung der letzten beiden Gleichungen des Systems (18) unter Beachtung des Ansatzes (21), (22), d. h. ihre Integration über eine Periode der „schnellen Zeit“ Ωt , liefert mit dem sogenannten Vibrationsmoment (oder nach K. Magnus Rüttelrichtmoment)

$$V_i = \int_0^{2\pi} B_i^0 d(\Omega t) = \frac{1}{2} f_i \sum_{k=0}^2 f_k (A_{xx} + A_{yy}) \sin(\alpha_i - \alpha_k) \quad (31)$$

für die langsamen Phasenänderungen der beiden Kompensationselemente relativ zur Primärwucht die Gleichungen

$$J_{11}\ddot{\alpha}_1 + \beta_1\dot{\alpha}_1 + \frac{1}{2}(A_{xx} + A_{yy}) f_1 [f_0 \sin \alpha_1 + f_2 \sin(\alpha_1 - \alpha_2)] = 0, \quad (32)$$

$$J_{22}\ddot{\alpha}_2 + \beta_2\dot{\alpha}_2 + \frac{1}{2}(A_{xx} + A_{yy}) f_2 [f_0 \sin \alpha_2 - f_1 \sin(\alpha_1 - \alpha_2)] = 0. \quad (33)$$

4 Existenzbedingungen für synchrone Zustände

Synchrone Zustände entsprechen konstanten Lösungen α_1^*, α_2^* der Differentialgleichungen (32) und (33). Es gelten also die folgenden Existenzbedingungen für synchrone Zustände:

$$f_0 \sin \alpha_1^* + f_2 \sin(\alpha_1^* - \alpha_2^*) = 0, \quad (34)$$

$$f_0 \sin \alpha_2^* - f_1 \sin(\alpha_1^* - \alpha_2^*) = 0. \quad (35)$$

Es existieren zwei Typen von Lösungen.

1. Lösungstyp: Annahme $\sin(\alpha_1^* - \alpha_2^*) \neq 0$

Die Addition der mit f_1 bzw. f_2 multiplizierten Gleichungen (34) und (35) liefert

$$f_1 \sin \alpha_1^* + f_2 \sin \alpha_2^* = 0. \quad (36)$$

Unter Beachtung der Gleichung (36) erhält man aus Gleichung (34) auch

$$f_0 + f_1 \cos \alpha_1^* + f_2 \cos \alpha_2^* = 0. \quad (37)$$

Die Gleichungen (36) und (37) sind die *Gleichgewichtsbedingungen* zwischen den drei Zentrifugalkräften, also die *Gleichungen der vollständigen Kompensation* der primären Unwucht.

Durch geeignetes Umstellen und Quadrieren der Gleichungen (36) und (37) findet man die Gleichungen

$$f_0^2 + 2f_0f_1 \cos \alpha_1^* + f_1^2 = f_2^2, \quad f_0^2 + 2f_0f_2 \cos \alpha_2^* + f_2^2 = f_1^2, \quad (38)$$

woher folgt

$$\cos \alpha_1^* = -\frac{f_0^2 + f_1^2 - f_2^2}{2f_0f_1}, \quad \cos \alpha_2^* = -\frac{f_0^2 - f_1^2 + f_2^2}{2f_0f_2}. \quad (39)$$

Reelle Lösungen der Gleichungen (39) existieren daher nur für

$$\begin{aligned} |f_0^2 + f_1^2 - f_2^2| \leq 2f_0f_1 \quad \text{und} \quad |f_0^2 - f_1^2 + f_2^2| \leq 2f_0f_2 \quad \text{bzw.} \\ (f_0 - f_1)^2 \leq f_2^2 \leq (f_0 + f_1)^2 \quad \text{und} \quad (f_0 - f_2)^2 \leq f_1^2 \leq (f_0 + f_2)^2. \end{aligned} \quad (40)$$

Diese Bedingungen bedeuten aber nichts anderes als die Dreiecksungleichung für das Krafteck des Kräftegleichgewichtes

$$f_0 \leq f_1 + f_2, \quad f_1 \leq f_2 + f_0, \quad f_2 \leq f_0 + f_1. \quad (41)$$

Es seien γ_1 und γ_2 die Hauptwerte der Funktionen

$$\gamma_1 = \arccos \frac{f_0^2 + f_1^2 - f_2^2}{2f_0f_1}, \quad \gamma_2 = \arccos \frac{f_0^2 - f_1^2 + f_2^2}{2f_0f_2}, \quad (42)$$

d. h., es gelte $0 \leq \gamma_1 \leq \pi$, $0 \leq \gamma_2 \leq \pi$ bzw. $\sin \gamma_1 \geq 0$, $\sin \gamma_2 \geq 0$. Damit existieren wegen Gleichung (36) nur die Lösungen

$$\alpha_1^* = \pi - \gamma_1, \quad \alpha_2^* = \pi + \gamma_2 \quad (43)$$

und

$$\alpha_1^* = \pi + \gamma_1, \quad \alpha_2^* = \pi - \gamma_2. \quad (44)$$

2. Lösungstyp: Annahme $\sin(\alpha_1^* - \alpha_2^*) = 0$

Aus den Gleichungen (34) und (35) folgen die Lösungen

$$\alpha_1^* = 0, \quad \alpha_2^* = 0, \quad (45)$$

$$\alpha_1^* = \pi, \quad \alpha_2^* = \pi, \quad (46)$$

$$\alpha_1^* = 0, \quad \alpha_2^* = \pi, \quad (47)$$

$$\alpha_1^* = \pi, \quad \alpha_2^* = 0. \quad (48)$$

5 Stabilitätsbedingungen für synchrone Zustände

Für die folgenden Stabilitätsaussagen ist allein das Vorzeichen von $A_{xx} + A_{yy}$ maßgebend. Setzen wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit $\omega_x < \omega_y$ voraus, so gilt

$$A_{xx} + A_{yy} > 0 \quad \text{für} \quad \Omega^2 < \omega_x^2 \quad \text{oder} \quad \frac{1}{2}(\omega_x^2 + \omega_y^2) < \Omega^2 < \omega_y^2, \quad (49)$$

$$A_{xx} + A_{yy} < 0 \quad \text{für} \quad \omega_x^2 < \Omega^2 < \frac{1}{2}(\omega_x^2 + \omega_y^2) \quad \text{oder} \quad \omega_y^2 < \Omega^2. \quad (50)$$

Es sei bemerkt, daß alle Aussagen der vorliegenden Arbeit bis auf die konkrete Gestalt der harmonischen Einflußkoeffizienten gültig bleiben, wenn das Modell hinsichtlich der Schwingungen allgemeiner ist. So könnte z. B. in vertikaler Richtung anstelle der festen Lagerung der Feder mit der Steifigkeit k_y noch ein das Fundament berücksichtigender Feder-Masse-Schwinger angekoppelt werden.

Im folgenden sind die Lösungen (43) bis (48) auf ihre Stabilität zu untersuchen.

Aus den Bewegungsgleichungen (32) und (33) für die langsamen Phasenänderungen erhält man die Gleichungen der gestörten Bewegungen (Gleichungen in den Variationen)

$$\begin{bmatrix} J_{11} & 0 \\ 0 & J_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\bar{\alpha}}_1 \\ \ddot{\bar{\alpha}}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\bar{\alpha}}_1 \\ \dot{\bar{\alpha}}_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{K}} \begin{bmatrix} \bar{\alpha}_1 \\ \bar{\alpha}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (51)$$

mit

$$\bar{\mathbf{K}} = (A_{xx} + A_{yy}) \begin{bmatrix} f_0 f_1 \cos \alpha_1^* + f_1 f_2 \cos(\alpha_1^* - \alpha_2^*) & -f_1 f_2 \cos(\alpha_1^* - \alpha_2^*) \\ -f_1 f_2 \cos(\alpha_1^* - \alpha_2^*) & f_0 f_2 \cos \alpha_2^* + f_1 f_2 \cos(\alpha_1^* - \alpha_2^*) \end{bmatrix}.$$

Unter der Voraussetzung vollständiger Dämpfung ist eine Lösung α_1^*, α_2^* genau dann asymptotisch stabil, wenn die Fesselungsmatrix $\bar{\mathbf{K}}/2$ positiv definit ist. Wegen $f_i > 0, i=1,2$, läßt sich diese Stabilitätsbedingung etwas vereinfacht wie folgt angeben:

$$\mathbf{K} = (A_{xx} + A_{yy}) \begin{bmatrix} f_0 \cos \alpha_1^* + f_2 \cos(\alpha_1^* - \alpha_2^*) & -f_2 \cos(\alpha_1^* - \alpha_2^*) \\ -f_1 \cos(\alpha_1^* - \alpha_2^*) & f_0 \cos \alpha_2^* + f_1 \cos(\alpha_1^* - \alpha_2^*) \end{bmatrix} > \mathbf{0} \quad (52)$$

1. Lösungstyp

Aus den Gleichungen (36) und (37) lassen sich die Beziehungen

$$f_0 \cos \alpha_1^* + f_2 \cos(\alpha_1^* - \alpha_2^*) = -f_1, \quad (53)$$

$$f_0 \cos \alpha_2^* + f_1 \cos(\alpha_1^* - \alpha_2^*) = -f_2 \quad (54)$$

herleiten.

Damit vereinfacht sich die Stabilitätsbedingung (52) wie folgt:

$$\mathbf{K} = (A_{xx} + A_{yy}) \begin{bmatrix} -f_1 & -f_2 \cos(\alpha_1^* - \alpha_2^*) \\ -f_1 \cos(\alpha_1^* - \alpha_2^*) & -f_2 \end{bmatrix} > \mathbf{0}. \quad (55)$$

Nach dem Satz von Sylvester ist dafür notwendig und hinreichend, daß die beiden Hauptabschnittsdeterminanten positiv sind:

$$-(A_{xx} + A_{yy}) f_1 > 0, \quad (56)$$

$$(A_{xx} + A_{yy})^2 f_1 f_2 [1 - \cos^2(\alpha_1^* - \alpha_2^*)] = (A_{xx} + A_{yy})^2 f_1 f_2 \sin^2(\alpha_1^* - \alpha_2^*) > 0. \quad (57)$$

Da die zweite Bedingung für den ersten Lösungstyp in jedem Falle erfüllt ist, gilt:

Die bei Gültigkeit der Dreiecksungleichung (41) existierenden *Kompensations-Lösungen* (43) und (44) (siehe Bild 3) sind asymptotisch stabil unter der Bedingung

$$A_{xx} + A_{yy} < 0, \quad (58)$$

d. h. nach den Gleichungen (49) und (50) im Frequenzbereich oberhalb der größeren Eigenfrequenz und in einem gewissen Frequenzbereich oberhalb der kleineren Eigenfrequenz.

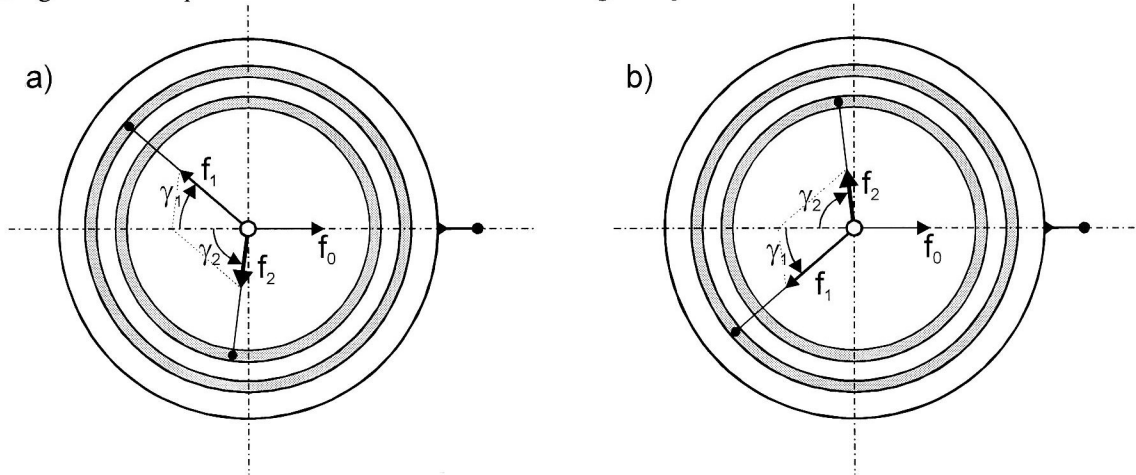


Bild 3: Kräftespiel für die Phasenwinkel a) nach Gleichung (43), b) nach Gleichung (44)

2. Lösungstyp

Für die Lösung (45) nimmt die Matrix \mathbf{K} die folgende Gestalt an:

$$\mathbf{K} = (A_{xx} + A_{yy}) \begin{bmatrix} f_0 + f_2 & -f_2 \\ -f_1 & f_0 + f_1 \end{bmatrix} > \mathbf{0}. \quad (59)$$

Daraus folgen nach dem Satz von Sylvester die Bedingungen

$$(A_{xx} + A_{yy})(f_0 + f_2) > 0, \quad (60)$$

$$(A_{xx} + A_{yy})^2 f_0 (f_0 + f_1 + f_2) > 0. \quad (61)$$

Da die zweite Bedingung in jedem Falle erfüllt ist, gilt:

Die die Primäruntwucht maximal verstärkende Lösung (45) (siehe Bild 4) ist unabhängig von der Größe der Kompensationsuntwuchten asymptotisch stabil unter der Bedingung

$$A_{xx} + A_{yy} > 0, \quad (62)$$

d. h. nach den Gleichungen (49) und (50) im Frequenzbereich unterhalb der kleineren Eigenfrequenz und in einem gewissen Frequenzbereich unterhalb der größeren Eigenfrequenz.

Für die Lösung (46) nimmt die Matrix \mathbf{K} die folgende Gestalt an:

$$\mathbf{K} = (A_{xx} + A_{yy}) \begin{bmatrix} -f_0 + f_2 & -f_2 \\ -f_1 & -f_0 + f_1 \end{bmatrix} > \mathbf{0}. \quad (63)$$

Daraus folgen nach dem Satz von Sylvester die Bedingungen

$$(A_{xx} + A_{yy})(-f_0 + f_2) > 0, \quad (64)$$

$$(A_{xx} + A_{yy})^2 f_0 (f_0 - f_1 - f_2) > 0. \quad (65)$$

Die zweite Bedingung bedeutet eine Aussage hinsichtlich der Größe der Kompensationsuntwuchten:

$$f_1 + f_2 < f_0. \quad (66)$$

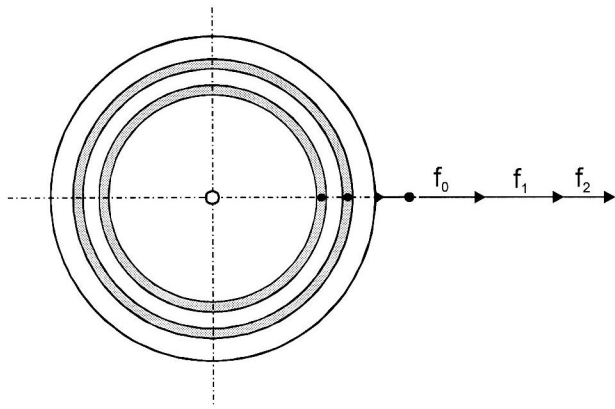


Bild 4: Kräftefeld für die Phasenwinkel nach Gleichung (45)

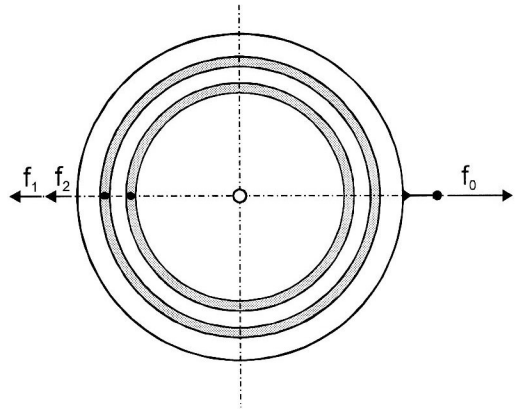


Bild 5: Kräftefeld für die Phasenwinkel nach Gleichung (46)

Damit ist die Dreiecksungleichung (41) verletzt und keine vollständige Kompensation möglich. Ist Bedingung (66) erfüllt, so folgt aus der ersten Bedingung wieder die Bedingung (58), d. h., in den gleichen Frequenzbereichen, in denen bei Erfüllung der Dreiecksungleichung die Kompensationslösung stabil ist, ist jetzt die Lösung (46) stabil, und die *Kompensationsunwuchten verringern die Primärnunwucht in maximal möglichem Ausmaß* (siehe Bild 5).

Diese Aussage gilt auch im Sonderfall übereinstimmender Kompensationsunwuchten, $f_1 = f_2$.

Für die Lösung (47) nimmt die Matrix \mathbf{K} die folgende Gestalt an:

$$\mathbf{K} = (A_{xx} + A_{yy}) \begin{bmatrix} f_0 - f_2 & f_2 \\ f_1 & -f_0 - f_1 \end{bmatrix} > \mathbf{0}. \quad (67)$$

Daraus folgen nach dem Satz von Sylvester die Bedingungen

$$(A_{xx} + A_{yy})(f_0 - f_2) > 0, \quad (68)$$

$$(A_{xx} + A_{yy})^2 f_0 (-f_0 - f_1 + f_2) > 0. \quad (69)$$

Die zweite Bedingung bedeutet wie bei der Lösung (46) eine Aussage hinsichtlich der Größe der Kompensationsunwuchten:

$$f_0 + f_1 < f_2. \quad (70)$$

Damit ist wieder die Dreiecksungleichung (41) verletzt und keine vollständige Kompensation möglich. Ist Bedingung (70) erfüllt, so folgt aus der ersten Bedingung wieder die Bedingung (58), d. h., in den gleichen Frequenzbereichen, in denen bei Erfüllung der Dreiecksungleichung die Kompensationslösung stabil ist,

ist jetzt die Lösung (47) stabil, und die *Kompensationsunwuchten positionieren sich so, daß die resultierende Unwucht minimal wird* (siehe Bild 6).

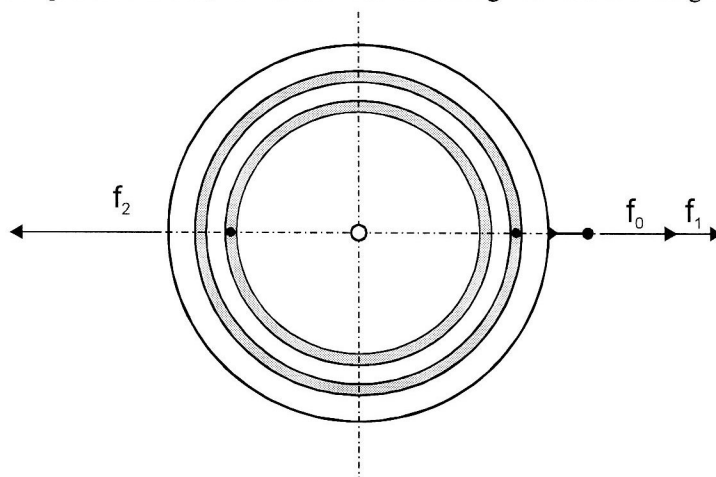


Bild 6: Kräftefeld nach Gleichung (47)

Nach Vertauschen der Indizes 1 und 2 können alle Aussagen zur Lösung (47) unmittelbar auf die Lösung (48) übertragen werden.

Im Sonderfall übereinstimmender Kompensationsunwuchten, $f_1 = f_2$, können die Ungleichung (70) und die daraus durch Vertauschen der Indizes 1 und 2 hervorgehende Ungleichung nicht erfüllt werden, und die Lösungen (47) und (48) sind immer instabil.

Bemerkung:

Im Falle ungleicher Kompensationselemente, angenommen $f_1 < f_2$, ist eine vollständige Kompensation natürlich nur möglich, wenn f_0 hinreichend groß ist, d. h., wenn im Gegensatz zur Ungleichung (70) die Bedingung $f_0 > f_2 - f_1$ erfüllt ist. Die Differenz der Zentrifugalkräfte der Kompensationselemente ist also nach oben durch die zulässige Restunwucht begrenzt.

6 Simulation

Die Ergebnisse der aufgeführten analytischen Untersuchungen sollen im folgenden durch entsprechende numerische Simulationen, die mittels der Simulationssprache ACSL (**A**dvanced **C**ontinuous **S**imulation **L**anguage) durchgeführt wurden, verifiziert werden. Es wird ein Rotormodell mit der Masse $m = 1 \text{ kg}$ und den Eigenkreisfrequenzen $\omega_x = 62,5 \text{ rad/s}$ und $\omega_y = 125,1 \text{ rad/s}$ ($\omega_0 = \sqrt{0,5(\omega_x^2 + \omega_y^2)} = 98,9 \text{ rad/s}$) verwendet.

Für die Existenz synchroner Zustände gibt es 3 Varianten der Relationen zwischen den Fliehkräften f_0, f_1 und f_2 , denen in Abhängigkeit von den Rotorwinkelgeschwindigkeiten instabile oder asymptotisch stabile Positionen der Kompensationselemente zuzuordnen sind:

1. $f_0 < f_1 + f_2$, $f_1 < f_0 + f_2$, $f_2 < f_0 + f_1$,
2. $f_0 > f_1 + f_2$,
3. $f_1 > f_0 + f_2$ (der Fall $f_2 > f_0 + f_1$ ist völlig identisch und wird nicht gesondert betrachtet).

Zur Überprüfung der sich einstellenden Winkellagen der Kompensationselemente und ihrer Stabilität wurden eine primäre Unwucht von $U_0 = 0,0001 \text{ kgm}$ ($f_0 = U_0 \Omega^2$) und die folgenden 3 Kombinationen von Ausgleichsunwuchten angenommen:

1. $U_1 = 0,00012 \text{ kgm}$, $U_2 = 0,00008 \text{ kgm}$,
2. $U_1 = 0,00002 \text{ kgm}$, $U_2 = 0,00004 \text{ kgm}$,
3. $U_1 = 0,0002 \text{ kgm}$, $U_2 = 0,00005 \text{ kgm}$.

Die daraus resultierenden möglichen Phasenwinkel und ihre Stabilität sind in den Tabellen 1 bis 3 für die jeweiligen Frequenzbereiche aufgeführt.

Zur Bestimmung der möglichen Phasenwinkel der Kompensationselemente und ihrer Stabilität wurden 4 charakteristische Rotorwinkelgeschwindigkeiten gewählt (jeweils eine in den 4 erwähnten Bereichen) und mit unterschiedlichen Anfangsbedingungen hinsichtlich der Lage der Kompensationselemente Simulationen durchgeführt. Die Winkelgeschwindigkeit des Rotors wurde während der Simulation nicht verändert.

Zur Untersuchung der Stabilität der gefundenen analytischen Lösungen wurden als Anfangslagen für die Kompensationselemente jene Phasenlagen gewählt, die diesen analytischen Lösungen entsprechen, und nach dem Hinzufügen kleiner Störungen die sich ergebenden Bewegungen beobachtet.

Die Simulationen bestätigten alle oben angegebenen analytischen Lösungen. In jeder der 4 Rotorgeschwindigkeitsbereiche und für alle 3 Kombinationen der Unwuchtparameter ergaben sich mit den theoretischen Vorhersagen übereinstimmende Phasenwinkel der Kompensationselemente. Die Stabilitätstests zeigten, daß bei kleinen Abweichungen von den instabilen Lösungen, deren maximale Größe hauptsächlich von der Rotorgeschwindigkeit und den Dämpfungsparametern β_1 und β_2 abhängig ist, die Kompensationselemente in den Ausgangslagen bezüglich des Rotors verbleiben, daß aber bei Vergrößerung der Abweichung die Rollen immer in eine den analytischen Untersuchungen entsprechende stabile Phasenlage wandern und dort verbleiben. Dieser Prozeß der Bewegung der Rollen von einer instabilen Phasenlage zu einer stabilen ist in den Bildern 7 bis 10 dargestellt.

Um stationäre Lösungen simulieren zu können, wurde die Lagerung des Rotors als nicht dämpfungsfrei ($c_x, c_y \neq 0$) angenommen. Deshalb unterscheiden sich die sich einstellenden Phasenlagen der Kompensationselemente leicht von den in den Gleichungen (45) bis (48) angegebenen analytischen Lösungen.

Phasenwinkel \ Frequenzbereich	$\Omega^2 < \omega_x^2$	$\omega_x^2 < \Omega^2 < \omega_0^2$	$\omega_0^2 < \Omega^2 < \omega_y^2$	$\omega_y^2 < \Omega^2$
$\alpha_1^* = \pi - \gamma_1 = 2.42 \quad (139^\circ)$ $\alpha_2^* = \pi + \gamma_2 = 4.59 \quad (263^\circ)$	instabil	asymptotisch stabil	instabil	asymptotisch stabil
$\alpha_1^* = \pi + \gamma_1 = 3.86 \quad (221^\circ)$ $\alpha_2^* = \pi - \gamma_2 = 1.70 \quad (97^\circ)$	instabil	asymptotisch stabil	instabil	asymptotisch stabil
$\alpha_1^* = 0, \quad \alpha_2^* = 0$	asymptotisch stabil	instabil	asymptotisch stabil	instabil
$\alpha_1^* = \pi, \quad \alpha_2^* = \pi$	instabil	instabil	instabil	instabil
$\alpha_1^* = \pi, \quad \alpha_2^* = 0$	instabil	instabil	instabil	instabil
$\alpha_1^* = 0, \quad \alpha_2^* = \pi$	instabil	instabil	instabil	instabil

Tabelle 1. Phasenwinkel für den Fall $U_1 = 0.00012 \text{ kg m}$, $U_2 = 0.00008 \text{ kg m}$

Phasenwinkel \ Frequenzbereich	$\Omega^2 < \omega_x^2$	$\omega_x^2 < \Omega^2 < \omega_0^2$	$\omega_0^2 < \Omega^2 < \omega_y^2$	$\omega_y^2 < \Omega^2$
$\alpha_1^* = 0, \quad \alpha_2^* = 0$	asymptotisch stabil	instabil	asymptotisch stabil	instabil
$\alpha_1^* = \pi, \quad \alpha_2^* = \pi$	instabil	asymptotisch stabil	instabil	asymptotisch stabil
$\alpha_1^* = \pi, \quad \alpha_2^* = 0$	instabil	instabil	instabil	instabil
$\alpha_1^* = 0, \quad \alpha_2^* = \pi$	instabil	instabil	instabil	instabil

Tabelle 2. Phasenwinkel für den Fall $U_1 = 0.00002 \text{ kg m}$, $U_2 = 0.00004 \text{ kg m}$

Phasenwinkel \ Frequenzbereich	$\Omega^2 < \omega_x^2$	$\omega_x^2 < \Omega^2 < \omega_0^2$	$\omega_0^2 < \Omega^2 < \omega_y^2$	$\omega_y^2 < \Omega^2$
$\alpha_1^* = 0, \quad \alpha_2^* = 0$	asymptotisch stabil	instabil	asymptotisch stabil	instabil
$\alpha_1^* = \pi, \quad \alpha_2^* = \pi$	instabil	instabil	instabil	instabil
$\alpha_1^* = \pi, \quad \alpha_2^* = 0$	instabil	instabil	instabil	instabil
$\alpha_1^* = 0, \quad \alpha_2^* = \pi$	instabil	asymptotisch stabil	instabil	asymptotisch stabil

Tabelle 3. Phasenwinkel für den Fall $U_1 = 0.0002 \text{ kg m}$, $U_2 = 0.00005 \text{ kg m}$

Die Art und Weise sowie die Dauer der Bewegung der Kompensationselemente von einer instabilen zu einer stabilen Winkellage sind ebenfalls hauptsächlich von der Rotorgeschwindigkeit und den Dämpfungsparametern β_1 und β_2 abhängig. In den Rotorgeschwindigkeitsbereichen $\Omega < \omega_x$, $\omega_x < \Omega < \omega_0$ und $\omega_0 < \Omega < \omega_y$ ist der Einfluß der Rotorgeschwindigkeit relativ groß. Je größer die Rotorgeschwindigkeit ist, desto schneller bewegen

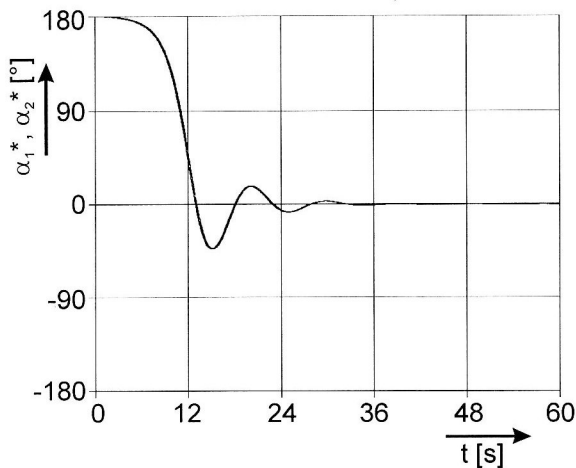


Bild 7. Bewegung der Kompensationselemente von den instabilen Positionen $\alpha_1^* = \pi, \alpha_2^* = \pi$ zu den stabilen $\alpha_1^* = 0, \alpha_2^* = 0$ für den Fall $\Omega = 40 \text{ rad/s}$,
 $U_1 = 0,00012 \text{ kgm}, U_2 = 0,00008 \text{ kgm}$

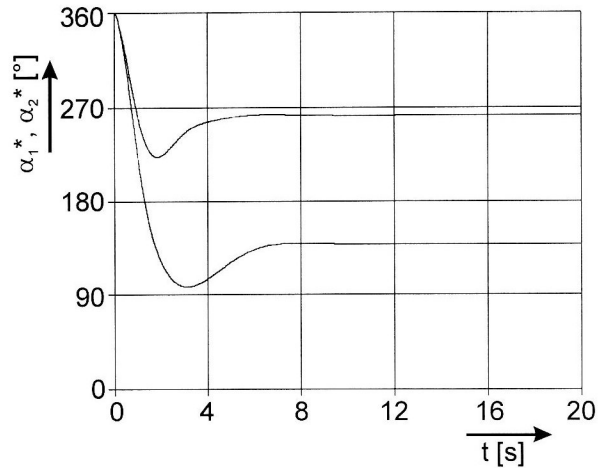


Bild 8. Bewegung der Kompensationselemente von den instabilen Positionen $\alpha_1^* = 0, \alpha_2^* = 0$ zu den stabilen $\alpha_1^* = 139^\circ, \alpha_2^* = 263^\circ$ für den Fall $\Omega = 80 \text{ rad/s}$,
 $U_1 = 0,00012 \text{ kgm}, U_2 = 0,00008 \text{ kgm}$

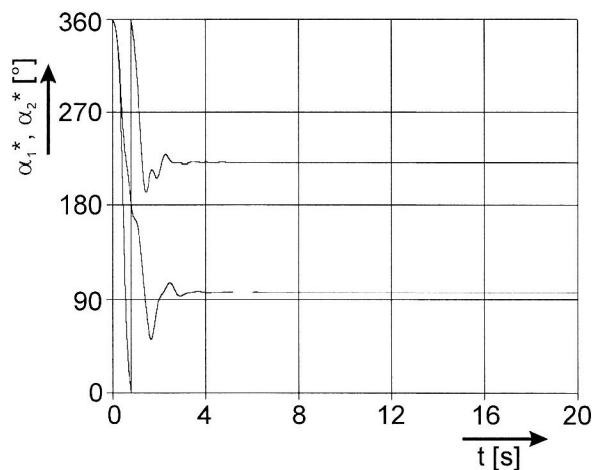


Bild 9. Bewegung der Kompensationselemente von den instabilen Positionen $\alpha_1^* = 0, \alpha_2^* = 0$ zu den stabilen $\alpha_1^* = 221^\circ, \alpha_2^* = 97^\circ$ für den Fall $\Omega = 300 \text{ rad/s}$,
 $U_1 = 0,00012 \text{ kgm}, U_2 = 0,00008 \text{ kgm}$

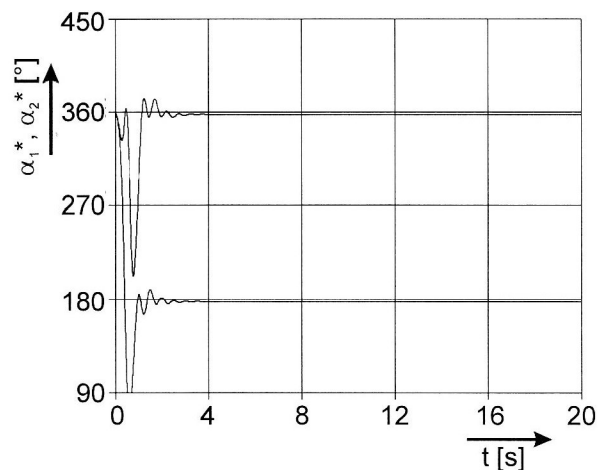


Bild 10. Bewegung der Kompensationselemente von den instabilen Positionen $\alpha_1^* = 0, \alpha_2^* = 0$ zu den stabilen $\alpha_1^* = \pi, \alpha_2^* = 0$ für den Fall $\Omega = 300 \text{ rad/s}$,
 $U_1 = 0,0002 \text{ kgm}, U_2 = 0,00005 \text{ kgm}$

sich die Kompensationselemente von einer instabilen zu einer stabilen Position. In dem Bereich $\Omega > \omega$, ist dieser Einfluß nur für Rotorgeschwindigkeiten nahe der unteren Grenze ω , dieses Bereiches signifikant, für höhere Rotorgeschwindigkeiten ist die Zeitdauer des Synchronisationsprozesses praktisch unabhängig von diesem Parameter. Für vergleichsweise kleine Dämpfungsparameter β_1 und β_2 entstehen einige Schwingungen um die stabile Phasenlage, die die Zeitdauer des Synchronisationsprozesses verlängern. Für größere Dämpfungsparameter verschwinden diese Schwingungen, aber die Dauer bis zur Einnahme der Endpositionen erhöht sich durch die langsame Bewegung der Kompensationselemente relativ zum Rotor. Dazwischen existiert somit offensichtlich ein Optimum mit einer minimalen Zeitdauer für die Synchronisation.

7 Ausblick

Für das der vorliegenden Arbeit zugrundegelegte Modell wird analytisch (unter Vernachlässigung der Schwingungsdämpfung) und mittels Computersimulation gezeigt, daß aus der Menge synchroner Lösungen, d. h. Lösungen mit konstanten Phasen der Kompensationselemente, die hinsichtlich einer Minimierung der Gesamtunwucht günstigsten jeweils stabil sind, wenn die Summe der harmonischen Einflußkoeffizienten negativ ist, während bei einem positiven Wert dieser Summe die Primärunwucht maximal verstärkt wird. Im Falle ungleicher Zentrifugalkräfte der Ausgleichselemente ist im ersten Fall u.U. eine Phasierung mit diametral gegenüberliegenden Kompensationselementen asymptotisch stabil, die im Falle gleicher Zentrifugalkräfte immer instabil ist.

Diese prinzipiellen Ergebnisse stellen sozusagen das Skelett der notwendigen Kenntnisse für die Anwendung dieses Auswuchtverfahrens dar, das durch die eingehende Analyse weiterer Einflüsse, insbesondere der Schwingungsdämpfung und der Viskosität des die Kompensationselemente enthaltenden Mediums, ergänzt werden muß. Das gilt sowohl für stationäre wie für transiente Bewegungen. In der Umgebung der Resonanzstellen treten dabei Erscheinungen auf, die dem Sommerfeldeffekt entsprechen. Beispiele zu diesem Effekt werden in Ryzhik u.a. (2001) untersucht.

Darüber hinaus sind experimentelle Untersuchungen vorgesehen. Damit sollen die Berechtigung der der Berechnung zugrundegelegten Idealisierungen und die Gültigkeit der Ergebnisse der Berechnungen überprüft werden.

Die Arbeit entstand im Rahmen eines von der Deutschen Forschungsgemeinschaft geförderten Forschungsprojektes (Sp 462/7-1) zum Thema „Selbsttätiges Auswuchten starrer Rotoren“.

Literatur

1. Adolfsson, J.: A Study of Stability in Autobalancing Systems using Multiple Correction Masses, Licentiate Thesis, Dep. of Mech., Royal Inst. of Techn., Stockholm (1997), 53.
2. Blekhman, I.: Vibrational Mechanics, World Scientific, Singapore New Jersey London Hong Kong, (2000), 509.
3. Duckstein, H.; Sperling, L.; Merten, F.: Zum Anlaufproblem beim automatischen Wuchten, ZAMM 79, Supplement (1999), 285-286.
4. Nesterenko, V. P.: Automatischer Ausgleich der statischen Unwucht eines Rotors mit anisotropen Lagern (russ.), Mašinovedenie, No. 1, (1984), 24-25.
5. Ryzhik, B., Duckstein, H., Sperling, L.: Zum Sommerfeldeffekt beim selbsttätigen Auswuchten in einer Ebene, Technische Mechanik, 21, 4, (2001), 297-312.
6. Sharp, R. S.: An Analysis of a Self-balancing System for Rigid Rotors, J. Mechanical Engineering Science, 17, 4, (1975), 186-189.
7. Sperling, L., Merten, F., Duckstein, H.: Analytical and Numerical Investigations of Rotation-Vibration-Phenomena, Proc. XXVI Summer Schools, St. Petersburg (Red.: Indeitsev, D. A., Zeitlin, M. G.), (1998), 145-159.
8. Taylor, G. R.: Europäisches Patent EP 0 640 192 B1, (1996), 20.
9. Thearle, E. L.: Automatic Dynamic Balancers, Machine Design, (1950), August 119-124, October 103-106, 152, November 149-153.

Anschrift: Professor Dr.-Ing. habil. Lutz Sperling, Dr.-Ing. Henner Duckstein, Dr.-Ing. Boris Ryzhik, Institut für Mechanik, Otto-von-Guericke Universität, Postfach 4120, 39016 Magdeburg, Germany