

# Zum Sommerfeldeffekt beim selbsttätigen Auswuchten in einer Ebene

B. Ryzhik, T. Amer, H. Duckstein, L. Sperling

*Bei der Methode des selbsttätigen Auswuchtens des starren Rotors in einer Ebene mittels zweier Kugeln oder Rollen allgemeinerer Gestalt, die sich in einem viskosen Medium unter bestimmten Bedingungen infolge der durch die Zentrifugalkräfte erregten Schwingungen kompensatorisch positionieren, kann infolge Dämpfung der Rotorschwingungen der bereits vom einfachen unwuchtigen Rotor und von der Selbstsynchronisation von Unwuchtviibratoren her bekannte Sommerfeldeffekt auftreten. Dabei laufen die Rollen unter Umständen nicht mit der Rotordrehzahl, sondern mit der der Eigenkreisfrequenz der Rotorschwingungen entsprechenden Drehzahl um. Bei hinreichender Erhöhung der Rotordrehzahl erfolgt dann eine sprunghafte Beschleunigung der Rollen bis zur Rotordrehzahl. Dieser Effekt wird analytisch und mittels Computer-Simulation untersucht. Es wird eine Abschätzung für die Grenzwinkelgeschwindigkeit des Rotors gegeben, oberhalb deren die Rollen synchron mit dem Rotor umlaufen.*

## 1 Einleitung

Zur Untersuchung des Sommerfeldeffektes beim selbsttätigen Auswuchten eines starren, statisch unwuchtigen Rotors in einer Ebene mittels zweier rollenförmiger Kompensationselemente, die sich in einem mit einem viskosen Medium gefüllten, kreiszylindrischen Hohlraum frei positionieren können, wird das Modell der Arbeiten Sperling u.a. (1998) und Sperling u.a. (2001) unter Beschränkung auf isotrope Lager zugrunde gelegt. Die Arbeit Duckstein u.a. (1999) enthält für dieses Modell Simulationsergebnisse, für die die Kompensationselemente beim Anlaufvorgang als Folge des sogenannten Sommerfeldeffektes in der Resonanzdrehzahl „hängenbleiben“ und der weiter ansteigenden Rotordrehzahl nicht mehr folgen, so daß der angestrebte Effekt des selbsttätigen Auswuchtens nicht eintreten kann. Geeignete Methoden zur Untersuchung solcher Erscheinungen, speziell auch die Methode der direkten Teilung der Bewegung, wurden über mehrere Jahrzehnte besonders von I. I. Blekhman und seiner Schule entwickelt und aufbereitet und zuletzt in Blekhman (2000) ausführlich dargelegt. Mittels der Methode der direkten Teilung der Bewegung wurde z. B. in Sperling u.a. (2002) das allgemeinere System des statisch und dynamisch unwuchtigen starren Rotors mit zwei entsprechenden Auswuchtebenen zum selbsttätigen Auswuchten analysiert. In dieser Arbeit publizierte Computer-Simulationen weisen auch für dieses System das Auftreten von Erscheinungen im Sinne des Sommerfeldeffektes nach.

In der vorliegenden Arbeit werden zunächst das zu untersuchende Modell nochmals erläutert und die Bewegungsgleichungen angegeben. Es folgt eine systematische Studie zum Sommerfeldeffekt mittels einer Kombination aus analytischen Untersuchungen und Computer-Simulationen. Dabei wird aus methodischen Gründen zunächst der bekannte Fall des unwuchtigen Rotors ohne Kompensationselemente betrachtet. Die weiteren Abschnitte enthalten schrittweise allgemeinere Untersuchungen zum unwuchtfreien Rotor mit einer Rolle, zum unwuchtfreien Rotor mit zwei Rollen und zum unwuchtigen Rotor mit zwei Rollen. Besonderes Augenmerk wird auf die praktisch wichtige Abschätzung der Grenzwinkelgeschwindigkeit des Rotors gerichtet, oberhalb deren das Verbleiben der Kompensationselemente in der kritischen Drehzahl nicht mehr möglich ist, sondern eine Synchronisation mit der Rotordrehzahl eintritt.

## 2 Modell und Bewegungsgleichungen

Wie in Sperling u.a. (2001) wird ein symmetrischer Grundrotor mit der Masse  $m$  und dem auf die Achse durch den Mittelpunkt senkrecht zur Zeichenebene bezogenen Massenträgheitsmoment  $J$  betrachtet, dessen Unwucht durch den zusätzlichen, starr mit ihm verbundenen Massenpunkt der Masse  $m_0$  repräsentiert wird. Die Bewegung wird wieder als eben vorausgesetzt. Demzufolge hat der Rotor drei Freiheitsgrade, für die die Koordinaten  $\varphi_0$  der Rotation um die Bezugsachse von  $J$  sowie  $x$  und  $y$  der ebenen Translation eingeführt werden.

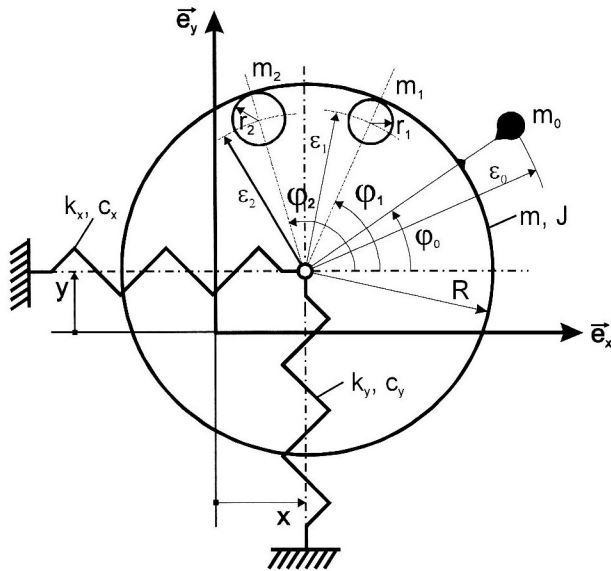


Bild 1. Modell des selbsttätigen Auswuchtens in einer Ebene

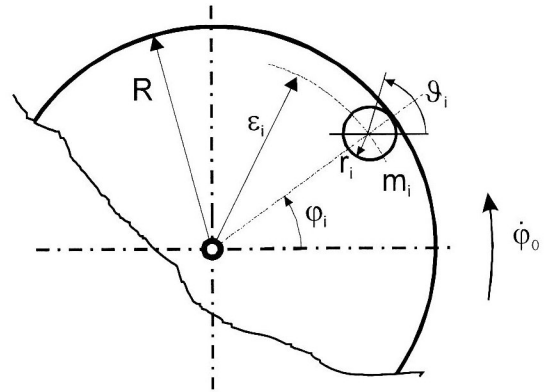


Bild 2. Darstellung eines Kompensationselementes

Für das selbsttätige Auswuchten sind zwei gleiche Rollen vorgesehen, die sich in einem durch eine Kreiszyylinderfläche nach außen abgeschlossenen Hohlraum in einem viskosen Medium so bewegen sollen, daß sie an dieser Fläche ohne zu gleiten abrollen. Für die  $i$ -te Kompensationsrolle ( $i=1,2$ ) beschreibe die Koordinate  $\varphi_i$  die Bewegung des Rollenmittelpunktes auf seiner Kreisbahn. Als Hilfskoordinate wird nach Bild 2 der Absolutwinkel  $\vartheta_i$  der Rotation der Rolle im gleichen Richtungssinn wie  $\varphi_0$  und  $\varphi_i$ ,  $i=1,2$ , eingeführt.

Die Wirkung der viskosen Flüssigkeit auf die  $i$ -te Rolle wird wie in Sharp (1975) näherungsweise durch das Moment

$$\bar{l}_i = -d_i (\dot{\vartheta}_i - \dot{\varphi}_0) \quad (1)$$

erfaßt.

Für die auf die Achsen durch die Mittelpunkte bezogenen Massenträgheitsmomente der Auswuchttrollen gelte

$$J_{Si} = \mu_i m_i r_i^2. \quad (2)$$

Es werden die folgenden neuen Bezeichnungen eingeführt:

$$\beta_i = d_i \left( \frac{\varepsilon_i}{r_i} \right)^2, \quad (3)$$

$$M = m + \sum_{i=0}^2 m_i, \quad J_{00} = J + m_0 \varepsilon_0^2 + \sum_{i=1}^2 \mu_i m_i R^2, \quad (4)$$

$$J_{0i} = \mu_i m_i R \varepsilon_i, \quad J_{ii} = (1 + \mu_i) m_i \varepsilon_i^2.$$

Wirken auf den Primärrotor unter Voraussetzung der Isotropie der Lager außerdem noch Federkräfte  $-kx$  und  $-ky$ , Dämpfungskräfte  $-c\dot{x}$  und  $-c\dot{y}$ , ein äußeres Dämpfungsmoment  $-\bar{\beta}_0 \dot{\varphi}_0$  sowie ein in der Umgebung der stationären Drehzahl linearisiertes Antriebsmoment

$$L(\dot{\varphi}_0) = L_0 - \bar{\beta}_0 \dot{\varphi}_0, \quad (5)$$

so ergeben sich unter Vernachlässigung eventueller Gewichtskräfte mit der weiteren Abkürzung

$$\beta_0 = \bar{\beta}_0 + \bar{\bar{\beta}}_0 + \sum_{i=1}^2 \beta_i \quad (6)$$

die folgenden Bewegungsgleichungen des Systems (siehe auch Sperling u.a. (2001)):

$$\begin{aligned} M\ddot{x} + c\dot{x} + kx &= \sum_{i=0}^2 m_i \varepsilon_i (\dot{\varphi}_i^2 \cos \varphi_i + \ddot{\varphi}_i \sin \varphi_i), \\ M\ddot{y} + c\dot{y} + ky &= \sum_{i=0}^2 m_i \varepsilon_i (\dot{\varphi}_i^2 \sin \varphi_i - \ddot{\varphi}_i \cos \varphi_i), \\ J_{00}\ddot{\varphi}_0 - \sum_{i=1}^2 J_{0i}\ddot{\varphi}_i + \beta_0\dot{\varphi}_0 - \sum_{i=1}^2 \beta_i\dot{\varphi}_i - m_0\varepsilon_0(\ddot{x} \sin \varphi_0 - \ddot{y} \cos \varphi_0) &= L_0, \\ -J_{0i}\ddot{\varphi}_0 + J_{ii}\ddot{\varphi}_i - \beta_i\dot{\varphi}_0 + \beta_i\dot{\varphi}_i - m_i\varepsilon_i(\ddot{x} \sin \varphi_i - \ddot{y} \cos \varphi_i) &= 0, \quad i=1,2. \end{aligned} \quad (7)$$

### 3 Untersuchung des Sommerfeldeffektes

#### 3.1 Rotor mit Unwucht ohne Kompensationsrollen

Sind keine Kompensationsrollen vorhanden, so gilt in den ersten beiden Gleichungen (7)  $m_1 = m_2 = 0$ , die letzten beiden Gleichungen entfallen, und die dritte Gleichung wird zu

$$J_{00}\ddot{\varphi}_0 + \beta_0\dot{\varphi}_0 + B_0 = \beta_0\Omega \quad (8)$$

mit dem von den Schwingungen auf den Rotor zurückwirkenden Moment

$$B_0 = -m_0\varepsilon_0(\ddot{x} \sin \varphi_0 - \ddot{y} \cos \varphi_0) \quad (9)$$

und der Nennwinkelgeschwindigkeit

$$\Omega = \frac{L_0}{\beta_0}. \quad (10)$$

Dieses Gleichungssystem ist ein Spezialfall der Gleichungen für die Bewegung eines anisotropen Schwingers mit zwei translatorischen Freiheitsgraden, das einen angetriebenen Unwuchttrotor trägt, dessen Achse senkrecht zur Ebene der Schwingungen angeordnet ist. Diese Gleichungen wurden z. B. von Sperling u.a. (1998) zur Untersuchung des Sommerfeldeffektes mittels der Näherungs-Methode der direkten Teilung der Bewegung analytisch gelöst. Es wurde der orthotrope Fall unterschiedlicher Federsteifigkeiten in den beiden Schwingungsrichtungen behandelt. Mittels einer Zeitmittelung des Momentes  $B_0$  über eine Umdrehung wurde dabei im Sinne der genannten Lösungs-Methode das sog. Vibrationsmoment  $V_0$  bestimmt, das für den Sommerfeldeffekt verantwortlich ist.

Im Unterschied zu dieser Untersuchung wird hier *Isotropie* der Lagerung vorausgesetzt, wodurch sich die analytische Untersuchung vereinfacht.

Als Vorbereitung für die in den folgenden Abschnitten zu behandelnden komplexeren Fälle sollen in diesem Abschnitt die bekannten Gesetzmäßigkeiten für den unwuchtbehafteten Rotor ohne Kompensationsrollen ausführlich erörtert werden.

Wir suchen eine stationäre Lösung mit

$$\Omega = \text{const.}, \quad \varphi_0 = \omega_0 t, \quad \omega_0 = \text{const.} \quad (11)$$

Damit wird aus den rechten Seiten der ersten beiden Gleichungen (7) in der vorliegenden speziellen Version eine harmonische Zwangserregung. Als stationäre Lösung erhalten wir

$$x = A_0 \cos(\omega_0 t - \psi_0), \quad y = A_0 \sin(\omega_0 t - \psi_0) \quad (12)$$

mit

$$A_0 = \frac{m_0 \varepsilon_0 \omega_0^2}{\sqrt{M^2 (\omega_{krit}^2 - \omega_0^2)^2 + c^2 \omega_0^2}}, \quad \psi_0 = \arctan \frac{c \omega_0}{M (\omega_{krit}^2 - \omega_0^2)} \quad (13)$$

mit der Eigenkreisfrequenz  $\omega_{krit} = \sqrt{\frac{k}{M}}$ .

Nach (9) mit (11) und (12) ergibt sich das von den Schwingungen auf die Rotorachse zurückwirkende Moment

$$B_0 = m_0 \varepsilon_0 \omega_0^2 A_0 \sin \psi_0, \quad (14)$$

das hier infolge der vorausgesetzten Isotropie konstant und so, da sich eine Mittelung erübrigt, mit dem Vibrationsmoment  $V_0$  identisch ist.

Nach Einsetzen der Ausdrücke (13) erhalten wir für das Vibrationsmoment die Beziehung:

$$V_0 = \frac{m_0^2 \varepsilon_0^2 c \omega_0^5}{M^2 (\omega_{krit}^2 - \omega_0^2)^2 + c^2 \omega_0^2}, \quad (15)$$

und aus der Gleichung (8) folgt die Gleichung 5. Grades zur Bestimmung von  $\omega_0$

$$\beta_0 \omega_0 + V_0 = \beta_0 \omega_0 + \frac{m_0^2 \varepsilon_0^2 c \omega_0^5}{M^2 (\omega_{krit}^2 - \omega_0^2)^2 + c^2 \omega_0^2} = \beta_0 \Omega. \quad (16)$$

Die Gleichung (16) kann invers als lineare Bestimmungsgleichung für  $\Omega$  bei gegebenem  $\omega_0$  aufgefaßt und so leicht graphisch dargestellt werden.

Für die in Tabelle 1 aufgeführten Parameterwerte zeigt Bild 3 die Funktion  $\omega_0 = \omega_0(\Omega)$ . In einem gewissen überkritischen Wertebereich von  $\Omega$  existieren 3 Lösungen für  $\omega_0$ ; unterhalb und oberhalb dieses Bereiches existiert jeweils nur 1 Lösung. Von den 3 Lösungen entspricht die 2. Lösung einer instabilen Bewegung. Wird  $L_0$  und damit  $\Omega$  bei im übrigen konstanten Parametern langsam, d. h. quasistatisch, erhöht, so erfolgt bei dem resonanznahen, größten  $\Omega$ -Wert, für den 3 Lösungen existieren, ein sprunghafter Anstieg von der kleinsten zur größten Lösung für  $\omega_0$ . Dieser Grenzwert soll als  $\Omega_{gr}$  bezeichnet werden.

Zur näherungsweisen Bestimmung von  $\Omega_{gr}$  setzen wir in (16) wegen der Resonanznähe  $\omega_0 = \omega_{krit}$ , und es folgt:

$$\Omega_{gr} \approx \omega_{krit} \left[ 1 + \frac{(m_0 \varepsilon_0 \omega_{krit})^2}{\beta_0 c} \right]. \quad (17)$$

Durch eine Vergrößerung sowohl der Viskosität  $\beta_0$  des Mediums als auch der Dämpfungskonstante  $c$  der Lagerung läßt sich also eine Verringerung von  $\Omega_{gr}$  und damit eine Entschärfung des Sommerfeldeffektes erreichen. Für die oben angegebenen Parameterwerte ergibt sich die Grenzwinkelgeschwindigkeit  $\Omega_{gr} = 383.5 \text{ s}^{-1}$ .



Bild		3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22																			
Rotor	Masse	$m = 1 \text{ kg}$																																						
	Massenträgheitsmoment	$J = 0.0054 \text{ kgm}^2$																																						
Lagerung	Steifigkeit	$k = 15830 \text{ Nm}^{-1}$																																						
	Dämpfung	$c = 15 \text{ Nsm}^{-1}$										$c = 10 \text{ Nsm}^{-1}$					$c = 15 \text{ Nsm}^{-1}$					$c = 10 \text{ Nsm}^{-1}$																		
Antrieb	Antriebsmoment	$L_0 = 2.5 \text{ Nm}$																																						
	Dämpfungskoeffizient	$\beta_0 = 0.005 \text{ Nms}$																																						
	Nennwinkelgeschwindigkeit	$\Omega = 500 \text{ s}^{-1}$																																						
Rotoruntwucht	Masse	$m_0 = 0.05 \text{ kg}$					Nicht vorhanden										$m_0 = 0.005 \text{ kg}$																							
	Exzentrizität	$\varepsilon_0 = 0.065 \text{ m}$					Nicht vorhanden										$\varepsilon_0 = 0.065 \text{ m}$																							
Kompensationsrollen	Masse	Nicht vorhanden					$m_1 = 0.005 \text{ kg}$										$m_1 = m_2 = m_e = 0.0025 \text{ kg}$																							
	Exzentrizität	Nicht vorhanden					$\varepsilon_1 = 0.065 \text{ m}$										$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_e = 0.065 \text{ m}$																							
	Dämpfungskoeffizient	Nicht vorhanden					$\beta_1 = 0.00005 \text{ Nms}$										$\beta_1 = \beta_2 = \beta_e = 0.000025 \text{ Nms}$																							
Gesamtsystem	Eigenkreisfrequenz	$\omega_{krit} = 122.8 \text{ s}^{-1}$					$\omega_{krit} = 125.5 \text{ s}^{-1}$										$\omega_{krit} = 125.2 \text{ s}^{-1}$																							
	Grenzwinkelgeschwindigkeit	$\Omega_{gr} = 383.5 \text{ s}^{-1}$					$\omega_{ogr} = 403.9 \text{ s}^{-1}$										$\omega_{ogr} = 403.9 \text{ s}^{-1}$					$\omega_{ogr} = 543.1 \text{ s}^{-1}$					$\omega_{ogr} = 383.3 \text{ s}^{-1}$					$\omega_{ogr} = 251.9 \text{ s}^{-1}$					$\omega_{ogr} = 510.8 \text{ s}^{-1}$			

Tabelle 1. Parameterwerte für die durchgeführten Simulationsrechnungen und ihre Zuordnung zu den Bildern

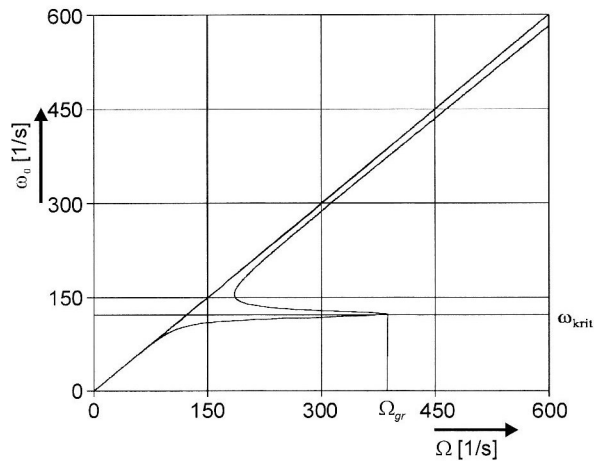


Bild 3. Stationäre Winkelgeschwindigkeit  $\omega_0$  des Rotors in Abhängigkeit von der Nennwinkelgeschwindigkeit  $\Omega$

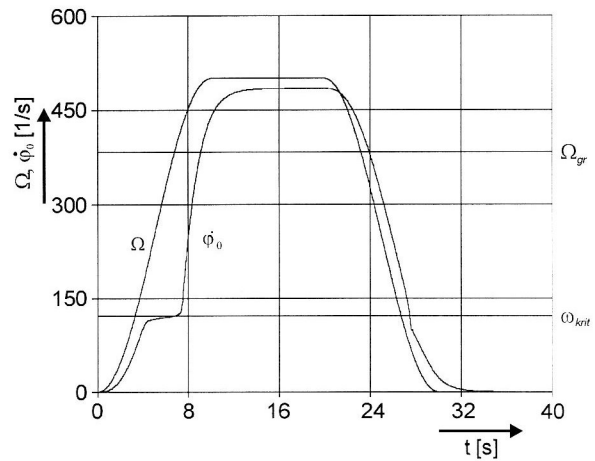


Bild 4. Zeitlicher Verlauf von Nenn- und Rotorwinkelgeschwindigkeit

Für  $\omega_0 \gg \omega_{krit}$  und  $\Omega \gg \omega_{krit}$  folgt dagegen näherungsweise aus (16):

$$\tilde{\omega}_0 \approx \frac{\Omega}{1 + \frac{m_0^2 \mathcal{G}_0}{M^2}} \approx \Omega \left( 1 - \frac{m_0^2 \mathcal{G}_0}{M^2} \right) \quad (18)$$

mit dem „Dämpfungsverhältnis“  $\mathcal{G}_0 = \frac{\varepsilon_0^2 c}{\beta_0}$ . Für die gegebenen Parameterwerte gilt hier  $\mathcal{G}_0 = 12.675$ . Der

näherungsweise lineare Charakter der Funktion  $\omega_0 = \omega_0(\Omega)$  ist in Bild 3 gut zu erkennen. Wegen  $\frac{m_0^2}{M^2} \ll 1$  folgt aus Beziehung (18) bei einem Dämpfungsverhältnis in der Größenordnung 1 näherungsweise auch

$$\tilde{\omega}_0 \approx \Omega. \quad (19)$$

Verringert man die Nennwinkelgeschwindigkeit  $\Omega$ , beginnend mit einem Wert  $\Omega > \Omega_{gr}$ , quasistatisch, so erfolgt bei dem  $\Omega$ -Wert, der den Bereich, in dem für  $\omega_0$  drei Lösungen existieren, nach unten begrenzt, ebenfalls ein Sprung zur kleinsten Lösung.

Unter Nutzung der Programmiersprache Advanced Continuous Simulation Language (ACSL) wurden für die in Tabelle 1 angegebenen Parameterwerte Computer-Simulationen für transiente und stationäre Bewegungen durchgeführt. Entsprechend Bild 4 wurde die Nennwinkelgeschwindigkeit  $\Omega$  (bei konstantem Wert  $\beta_0$  näherungsweise mittels der statischen Motorkennlinie) zunächst gemäß einer Sinoide von Null bis zu einem oberhalb  $\Omega_{gr}$  liegenden Maximalwert vergrößert (Anlaufvorgang), sodann über eine bestimmte Zeitspanne konstant gehalten und schließlich wieder bis zum Stillstand verringert (Bremsvorgang). Der aus der Lösung des vollständigen Gleichungssystems entsprechend (8) resultierende Graph der Funktion  $\dot{\phi}_0(t)$  zeigt in der ersten Phase sehr gut den Sommerfeldeffekt, gekennzeichnet durch ein längeres Verweilen in Resonanznähe. Es folgen ein kurzzeitiger starker Anstieg und nach einer stationären Phase der Bremsvorgang, wobei die sprunghafte Verringerung nach Unterschreiten der Resonanzdrehzahl nur schwach ausgeprägt ist.

Bild 5 zeigt die resultierende Schwingungsamplitude in Abhängigkeit von der Zeit. Während sich die Resonanzverstärkung der Schwingungen beim Anlaufvorgang infolge des Sommerfeldeffektes in einem größeren Zeitbereich sehr deutlich abzeichnet, erfolgt nach dem starken kurzzeitigen Drehzahlanstieg eine drastische Verringerung der Amplituden. Während des Bremsvorganges ist wieder eine Resonanzüberhöhung zu

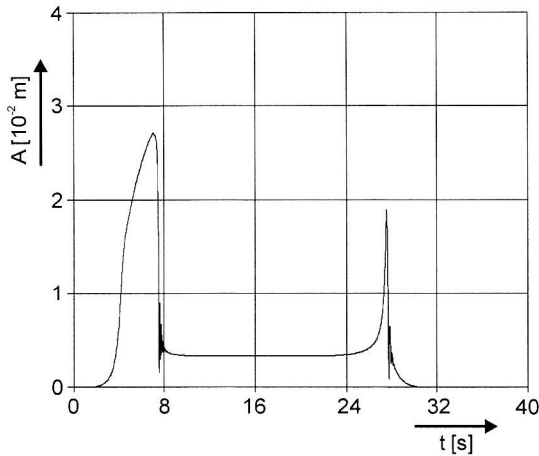


Bild 5. Zeitlicher Verlauf der resultierenden Schwingungsamplitude

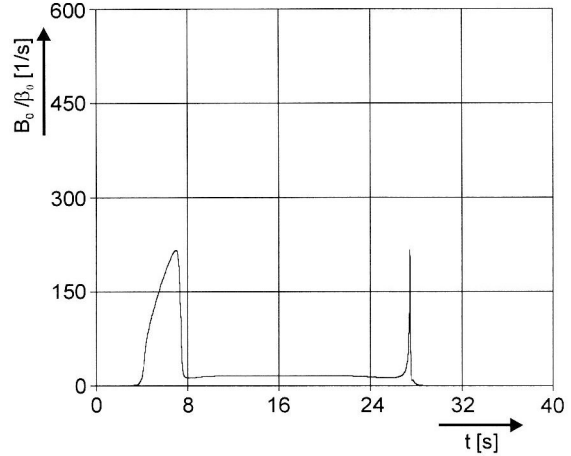


Bild 6. Zeitlicher Verlauf des auf  $\beta_0$  bezogenen Vibrationsmomentes

beobachten, die allerdings schwächer und deutlich kurzzeitiger ausfällt als beim Anlaufvorgang. Bild 6 zeigt das Vibrationsmoment  $V_0(t) = B_0(t)$ , bezogen auf  $\beta_0$ , nach Gleichung (14) als Funktion der Zeit. Nach Gleichung (8) ist es in Wechselwirkung mit dem Trägheitsglied  $J_{00}\ddot{\varphi}_0$  die Ursache der Differenz zwischen Nenndrehzahl und realer Drehzahl.

### 3.2 Rotor ohne Unwucht mit einer Kompensationsrolle

Ist der Rotor selbst unwuchtfrei und ist nur eine Rolle vorhanden, so gilt in den ersten beiden Gleichungen des Systems (7)  $m_0 = m_2 = 0$ . Die übrigen Gleichungen nehmen die folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned} J_{00}\ddot{\varphi}_0 - J_{01}\ddot{\varphi}_1 + \beta_0\dot{\varphi}_0 - \beta_1\dot{\varphi}_1 &= \beta_0\Omega, \\ -J_{01}\ddot{\varphi}_0 + J_{11}\ddot{\varphi}_1 - \beta_1\dot{\varphi}_0 + \beta_1\dot{\varphi}_1 + B_1 &= 0, \\ B_1 &= -m_1\varepsilon_1(\ddot{x}\sin\varphi_1 - \ddot{y}\cos\varphi_1). \end{aligned} \quad (20)$$

Wir suchen nun stationäre Lösungen mit

$$\Omega = \text{const.}, \quad \dot{\varphi}_0 = \omega_0 = \text{const.}, \quad \varphi_1 = \omega_1 t, \quad \omega_1 = \text{const.} \quad (21)$$

Damit folgt aus der ersten Gleichung (20)

$$\beta_0\omega_0 - \beta_1\omega_1 = \beta_0\Omega. \quad (22)$$

Die übrigen Gleichungen werden dann, wenn außerdem der Index 1 durch den Index 0 und die Winkelgeschwindigkeit  $\omega_0$  durch  $\Omega$  ersetzt wird, mit den Gleichungen von Abschnitt 3.1 identisch. Daher können die prinzipiellen Betrachtungen alle vom Abschnitt 3.1 übernommen werden, und wir erhalten anstelle der Gleichungen (15) und (16) die Beziehungen

$$V_1 = \frac{m_1^2 \varepsilon_1^2 c \omega_1^5}{M^2 (\omega_{krit}^2 - \omega_1^2)^2 + c^2 \omega_1^2}, \quad (23)$$

$$\beta_1\omega_1 + V_1 = \beta_1\omega_1 + \frac{m_1^2 \varepsilon_1^2 c \omega_1^5}{M^2 (\omega_{krit}^2 - \omega_1^2)^2 + c^2 \omega_1^2} = \beta_1\omega_0. \quad (24)$$

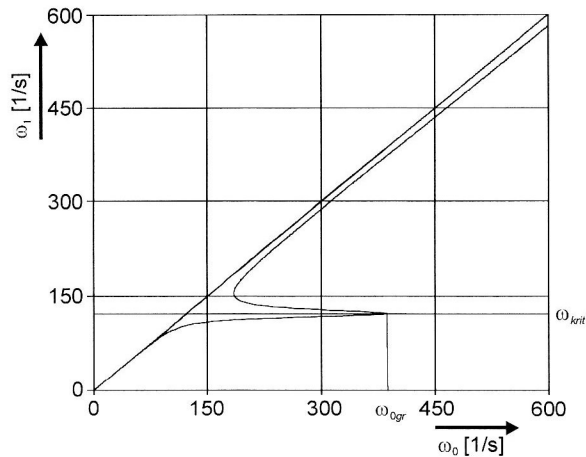


Bild 7. Zusammenhang zwischen den stationären Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_1$  der Rolle und  $\omega_0$  des Rotors

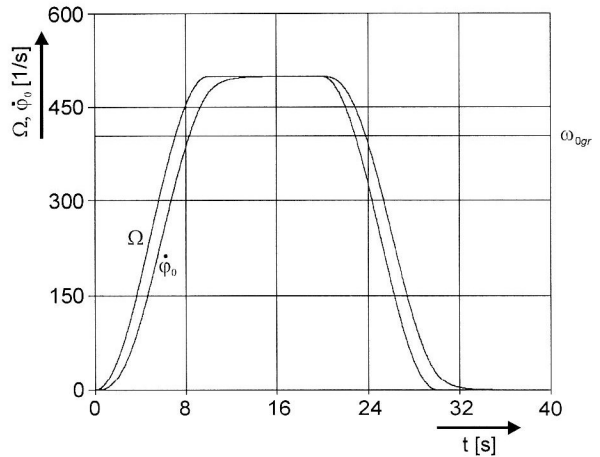


Bild 8. Zeitlicher Verlauf von Nenn- und Rotorwinkelgeschwindigkeit

Für die Parameterwerte nach Tabelle 1 zeigt Bild 7 die Funktion  $\omega_1 = \omega_1(\omega_0)$ . Im Unterschied zu  $\Omega$  in Gleichung (16) und Bild 3 ist  $\omega_0$  hier jedoch nicht a priori bekannt, sondern gemäß Gleichung (22) von  $\omega_1$  abhängig. Nach Einsetzen dieser Beziehung ergibt sich für die Ermittlung von  $\omega_1 = \omega_1(\Omega)$  die Gleichung

$$\beta_1 \left( 1 - \frac{\beta_1}{\beta_0} \right) \omega_1 + \frac{m_1^2 \varepsilon_1^2 c \omega_1^5}{M^2 (\omega_{krit}^2 - \omega_1^2)^2 + c^2 \omega_1^2} = \beta_1 \Omega. \quad (25)$$

Ist die meistens zutreffende Bedingung  $\beta_1 \ll \beta_0$  erfüllt, so vereinfachen sich die Beziehungen (22) und (25) näherungsweise, und es gilt entsprechend Beziehung (17) mit  $\Omega_{gr}$  in analoger Bedeutung unter Beachtung von Beziehung (22)

$$\Omega_{gr} \approx \omega_{0gr} \approx \omega_{krit} \left[ 1 + \frac{(m_1 \varepsilon_1 \omega_{krit})^2}{\beta_1 c} \right]. \quad (26)$$

Für  $\omega_1 \gg \omega_{krit}$  und  $\omega_0 \gg \omega_{krit}$  folgt analog Gleichung (18) näherungsweise aus Gleichung (24):

$$\tilde{\omega}_1 \approx \frac{\omega_0}{1 + \frac{m_1^2 \mathcal{G}_1}{M^2}} \approx \omega_0 \left( 1 - \frac{m_1^2 \mathcal{G}_1}{M^2} \right) \quad (27)$$

mit dem „Dämpfungsverhältnis“  $\mathcal{G}_1 = \frac{\varepsilon_1^2 c}{\beta_1}$ . Wegen  $\frac{m_1^2}{M^2} \ll 1$  ergibt sich daraus bei einem Dämpfungsverhältnis in der Größenordnung 1 näherungsweise auch

$$\tilde{\omega}_1 \approx \omega_0 \approx \Omega. \quad (28)$$

Bild 8 zeigt, daß  $\Omega$  mit einem zeitlichen Verlauf analog Abschnitt 3.1 wieder so vorgegeben ist, daß die Grenzwinkelgeschwindigkeit überschritten wird. Da die Bedingung  $\beta_1 \ll \beta_0$  hier erfüllt ist, ist die Differenz zwischen der simulierten Rotorwinkelgeschwindigkeit  $\dot{\varphi}_0$  und  $\Omega$  im mittleren stationären Bereich ( $\dot{\varphi}_0 = \omega_0 = const.$ ) ebenfalls vernachlässigbar klein. In den transienten Bewegungsphasen ist der Verlauf von  $\dot{\varphi}_0$  gegenüber dem von  $\Omega$  infolge der Wirkung der Trägheitsglieder zeitlich versetzt. Die in den Bildern 9 bis 11 dargestellten Verläufe sind entsprechend den Bildern 4 bis 6 zu interpretieren.

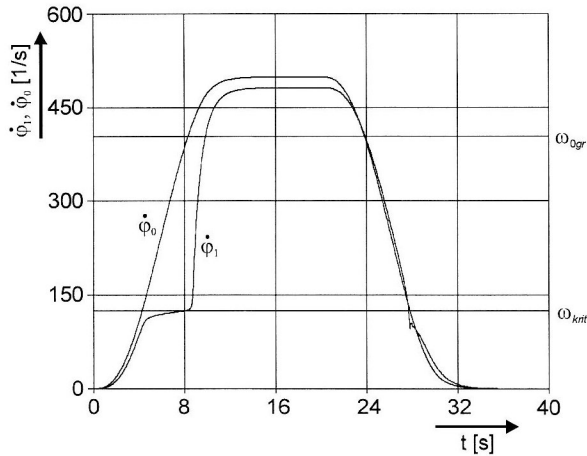


Bild 9. Zeitlicher Verlauf von Rotor- und Rollenwinkelgeschwindigkeit

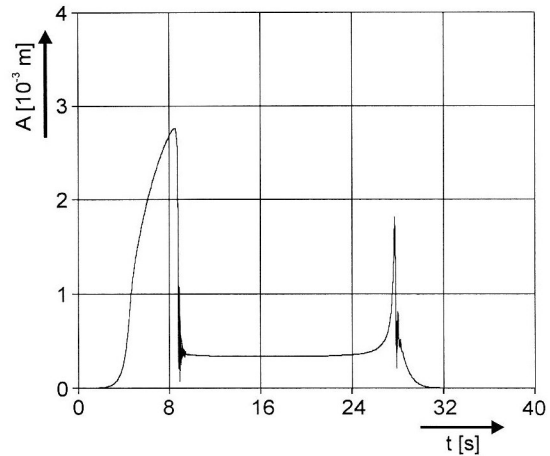


Bild 10. Zeitlicher Verlauf der resultierenden Schwingungamplitude

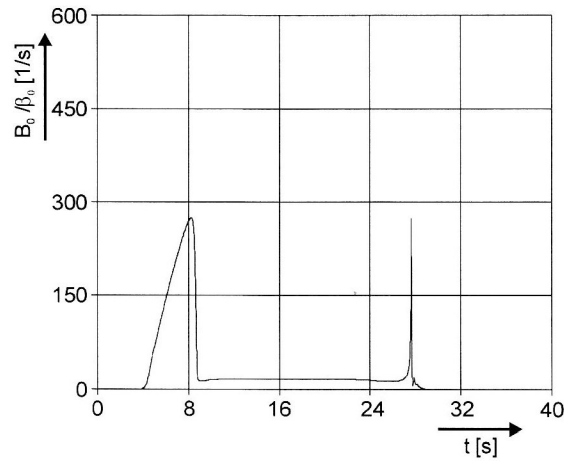


Bild 11. Zeitlicher Verlauf des auf  $\beta_0$  bezogenen Vibrationsmomentes

### 3.3 Rotor ohne Unwucht mit zwei Kompensationsrollen

Der im Abschnitt 3.2 behandelte Fall wird verallgemeinert, indem anstelle einer Kompensationsrolle zwei identische Rollen mit den einheitlichen Parametern

$$m_1 = m_2 = m_e, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_e, \quad \beta_1 = \beta_2 = \beta_e, \quad J_{11} = J_{22} = J_{ee}, \quad J_{01} = J_{02} = J_{0e} \quad (29)$$

vorausgesetzt werden. Dann gilt in den ersten beiden Gleichungen des Systems (7)  $m_0 = 0$ , und die übrigen Gleichungen haben die folgende Gestalt

$$\begin{aligned} J_{00}\ddot{\varphi}_0 - J_{0e}(\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2) + \beta_0\dot{\varphi}_0 - \beta_e(\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) &= \beta_0\Omega, \\ -J_{0e}\ddot{\varphi}_0 + J_{ee}\ddot{\varphi}_i - \beta_e\dot{\varphi}_0 + \beta_e\dot{\varphi}_i + B_i &= 0, \\ B_i &= -m_e\varepsilon_e(\ddot{x}\sin\varphi_i - \ddot{y}\cos\varphi_i), \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (30)$$

In Verallgemeinerung des Ansatzes (21) werden jetzt stationäre Lösungen des Typs

$$\Omega = \text{const.}, \quad \dot{\varphi}_0 = \omega_0 = \text{const.}, \quad \varphi_i = \omega_e t + \alpha_i, \quad \omega_e = \text{const.}, \quad i = 1, 2 \quad (31)$$

gesucht.

Nach Einsetzen der stationären Lösungen der ersten beiden Gleichungen des Systems (7) erhält man

$$B_i = V_i = -m_e \varepsilon_e [\ddot{x} \sin(\omega_e t + \alpha_i) - \ddot{y} \cos(\omega_e t + \alpha_i)] = m_e \varepsilon_e \omega_e^2 A_e \sum_{k=1}^2 \sin(\alpha_i - \alpha_k + \psi_e), \quad (32)$$

$$V_i = \frac{m_e^2 \varepsilon_e^2 \omega_e^4}{M^2 (\omega_{krit}^2 - \omega_e^2)^2 + c^2 \omega_e^2} \sum_{k=1}^2 [c \omega_e \cos(\alpha_i - \alpha_k) + M (\omega_{krit}^2 - \omega_e^2) \sin(\alpha_i - \alpha_k)]. \quad (33)$$

Analog Abschnitt 3.2 liefern die Gleichungen des Systems (30) mit der Winkeldifferenz  $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$  dann für die drei Unbekannten  $\omega_0$ ,  $\omega_e$ ,  $\alpha$  die Bestimmungsgleichungen

$$\begin{aligned} \beta_0 \omega_0 - 2\beta_e \omega_e &= \beta_0 \Omega, \\ \beta_e \omega_e + \frac{m_e^2 \varepsilon_e^2 \omega_e^4}{M^2 (\omega_{krit}^2 - \omega_e^2)^2 + c^2 \omega_e^2} \{c \omega_e [1 + \cos \alpha] + M (\omega_{krit}^2 - \omega_e^2) \sin \alpha\} &= \beta_e \omega_0, \\ \beta_e \omega_e + \frac{m_e^2 \varepsilon_e^2 \omega_e^4}{M^2 (\omega_{krit}^2 - \omega_e^2)^2 + c^2 \omega_e^2} \{c \omega_e [1 + \cos \alpha] - M (\omega_{krit}^2 - \omega_e^2) \sin \alpha\} &= \beta_e \omega_0. \end{aligned} \quad (34)$$

Unter der Voraussetzung  $\omega_e \neq \omega_{krit}$  folgt aus den letzten beiden Gleichungen

$$\sin \alpha = 0, \quad \beta_e \omega_e + \frac{m_e^2 \varepsilon_e^2 \omega_e^4}{M^2 (\omega_{krit}^2 - \omega_e^2)^2 + c^2 \omega_e^2} c \omega_e [1 + \cos \alpha] = \beta_e \omega_0. \quad (35)$$

Für die Phasendifferenz existieren also zwei Lösungen:

1. Lösung:  $\alpha = 0$

Diese Lösung ist bekanntlich (siehe z. B. Sperling u.a. (2001), Sperling u.a. (1998)), zumindest in hinreichender Entfernung von der Resonanzstelle, im unterkritischen Frequenzbereich stabil. Mit dieser Lösung folgt anstelle der Beziehung (24) aus der Gleichung (35)

$$\beta_e \omega_e + 2 \frac{m_e^2 \varepsilon_e^2 c \omega_e^5}{M^2 (\omega_{krit}^2 - \omega_e^2)^2 + c^2 \omega_e^2} = \beta_e \omega_0, \quad (36)$$

während die erste Gleichung (34) der Gleichung (22) entspricht.

Bis auf die Bezeichnungen unterscheiden sich diese Beziehungen also von denen des Rotors mit einer Kompensationsrolle nur um den Faktor 2 bei dem Term des Vibrationsmomentes, so daß auch die Beziehungen (25) bis (28) des vorigen Abschnittes und ihre Interpretation sinngemäß gelten.

2. Lösung:  $\alpha = \pi$

In hinreichender Entfernung von der Resonanzstelle ist diese stationäre Lösung im überkritischen Frequenzbereich stabil. Für diese Lösung verschwinden nach den Gleichungen (34) die Vibrationsmomente, und es folgt

$$\omega_e = \omega_0 = \frac{\beta_0}{\beta_0 - 2\beta_e} \Omega. \quad (37)$$

Analog Bild 9 zeigt Bild 12 die Zeitverläufe der Rotor- und der Rollenwinkelgeschwindigkeiten. Da die Grenzwinkelgeschwindigkeit wieder überschritten wird, folgen beide Rollen nach einem vorläufigen Verharren in der Resonanzdrehzahl entsprechend dem Sommerfeldeffekt schließlich der Rotorwinkelgeschwindigkeit.

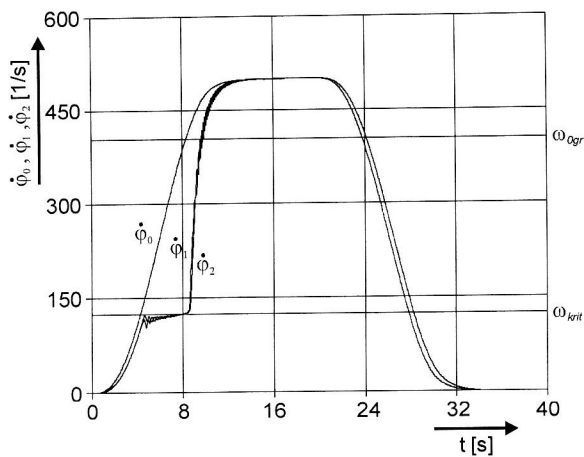


Bild 12. Zeitlicher Verlauf der Rotor- und der Rollenwinkelgeschwindigkeiten,  $\dot{\phi}_{\max} > \omega_{0gr}$ ,  $\alpha(0) = 179^\circ$

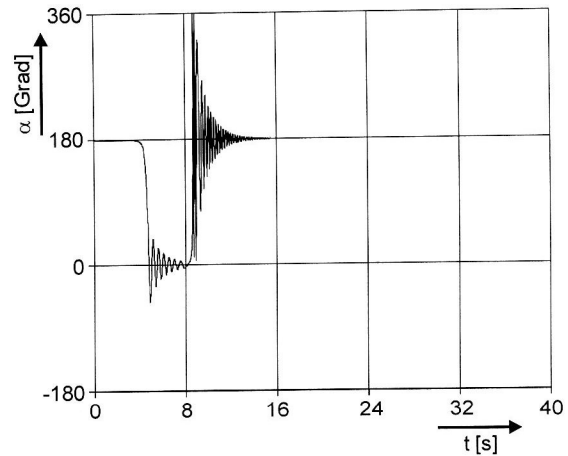


Bild 13. Zeitlicher Verlauf der Phasendifferenz,  $\dot{\phi}_{\max} > \omega_{0gr}$ ,  $\alpha(0) = 179^\circ$

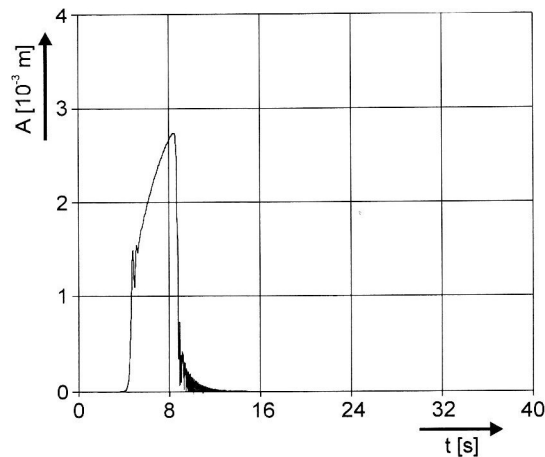


Bild 14. Zeitlicher Verlauf der resultierenden Schwingungsamplitude,  $\dot{\phi}_{\max} > \omega_{0gr}$ ,  $\alpha(0) = 179^\circ$

Im Gegensatz zu Bild 9 stimmen Rotor- und Rollenwinkelgeschwindigkeiten während der für eine bestimmte Zeitdauer konstanten Maximalwerte genau überein. Das ist bedingt durch den hier stabilen Wert der Phasendifferenz  $\pi$  der Rollen, den der in Bild 13 dargestellte Verlauf bestätigt; denn bei dieser Phasendifferenz kompensieren sich die Zentrifugalkräfte völlig gegenseitig. Infolgedessen unterscheidet sich auch der zeitliche Verlauf der Schwingungsamplituden in Bild 14 von dem Verlauf nach Bild 10 prinzipiell dadurch, daß die Amplituden nach dem typischen Aufklingen im Resonanzgebiet völlig verschwinden.

In ihren Details sind die Simulationsergebnisse von der Anfangsphase abhängig. Bei der Simulation, deren Ergebnisse in den Bildern 12 bis 14 wiedergegeben sind, wurde sie zu  $\alpha(t=0) = 179^\circ$  gewählt. Wie Bild 13 zeigt, beginnt erst nach einer gewissen Zeit ein deutliches Einschwingen auf den im unterkritischen Bereich stabilen Wert 0. Im Zusammenhang mit der sprunghaftigen Vergrößerung der Winkelgeschwindigkeiten ist der Übergang zu der nun stabilen Phasendifferenz  $\pi$  wiederum von starken Schwingungen begleitet. Entsprechende Schwingungen sind auch bei den Winkelgeschwindigkeiten (Bild 12) und bei den Amplituden der Rotorschwingungen (Bild 14), zu beobachten. Bild 13 zeigt, daß in der Endphase, analog der Verzögerung des Überganges vom Anfangswert der Phasendifferenz zu dem stabilen Wert 0, ein Übergang zu dem hier wieder stabilen Wert 0 bis zum Ende nicht feststellbar ist, ebensowenig wie ein entsprechendes Anwachsen der Schwingungsamplituden in Bild 14 im Unterschied zu Bild 10.

Weitere Simulationen mit der Anfangsphasendifferenz 0 lieferten weitgehend analoge, hier nicht wiedergegebene Ergebnisse, die sich von den Bildern 12 bis 14 vor allem durch das Fehlen der überlagerten Schwingungen vor dem Sprung in den überkritischen Bereich unterschieden.

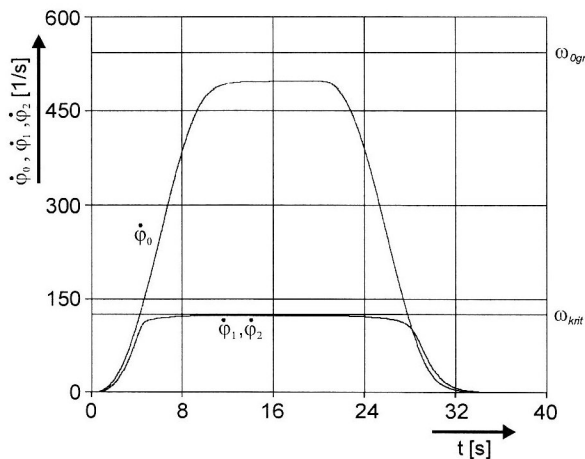


Bild 15. Zeitlicher Verlauf der Rotor- und der Rollenwinkelgeschwindigkeiten,  $\dot{\phi}_{\max} < \omega_{0gr}$ ,  $\alpha(0) = 0^\circ$

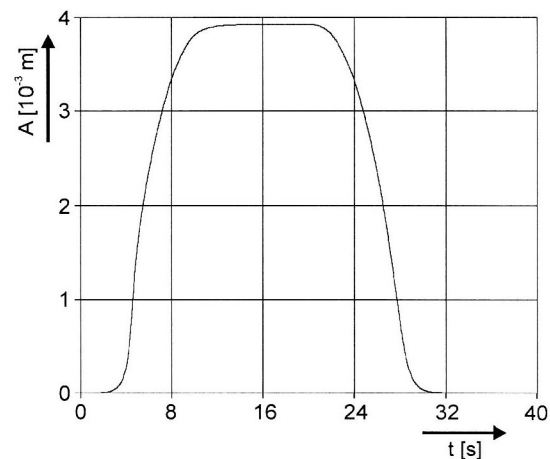


Bild 16. Zeitlicher Verlauf der resultierenden Schwingungsamplitude,  $\dot{\phi}_{\max} < \omega_{0gr}$ ,  $\alpha(0) = 0^\circ$

Die Bilder 15 und 16 zeigen Simulationsergebnisse für einen Winkelgeschwindigkeitsverlauf des Rotors, der die Grenzwinkelgeschwindigkeit nicht überschreitet. Dabei gelangt die Winkelgeschwindigkeit der Rollen nicht über die Eigenkreisfrequenz der Rotorschwingungen hinaus, und diese erfolgen während des stationären Zustandes mit großer konstanter Amplitude.

### 3.4 Rotor mit Unwucht und zwei Kompensationsrollen

Es gelten nun die ersten beiden Gleichungen des Systems (7) in vollständiger Form. Die Gleichungen (30) werden erweitert zu dem System

$$\begin{aligned} J_{00}\ddot{\phi}_0 - J_{0e}(\ddot{\phi}_1 + \ddot{\phi}_2) + \beta_0\dot{\phi}_0 - \beta_e(\dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2) - m_0\varepsilon_0(\ddot{x}\sin\varphi_0 - \ddot{y}\cos\varphi_0) &= \beta_0\Omega, \\ -J_{0e}\ddot{\phi}_0 + J_{ee}\ddot{\phi}_i - \beta_e\dot{\phi}_0 + \beta_e\dot{\phi}_i + B_i &= 0, \\ B_i &= -m_e\varepsilon_e(\ddot{x}\sin\varphi_i - \ddot{y}\cos\varphi_i), \end{aligned} \quad i = 1,2, \quad (38)$$

wobei weiterhin die Gültigkeit der Beziehungen (29) vorausgesetzt wird.

Wir betrachten stationäre Bewegungen mit  $\omega_0$  und  $\omega_e$  als im allgemeinen unterschiedlichen mittleren Winkelgeschwindigkeiten von Rotor und Rollen. Im Gegensatz zu den bisherigen Untersuchungen folgen daraus zwei Erregerfrequenzen der Rotorschwingungen, und es ist eine Modifizierung der analytischen Untersuchung notwendig. Die den folgenden Entwicklungen zugrunde liegenden Annahmen und Vernachlässigungen sind durch die vorliegenden Simulationsergebnisse gerechtfertigt. Sie sollten daher ohne weitere Überprüfung nur auf vergleichbare Parameterverhältnisse übertragen werden.

Definieren wir den Zeitnullpunkt durch das Verschwinden der Phase der Primärunwucht, so betrachten wir nun näherungsweise stationäre Bewegungen des Typs

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \omega_0 t + \xi_0(qt), & \omega_0 &= \text{const.}, & q &= \omega_0 - \omega_e, \\ \varphi_i &= \omega_e t + \alpha_i + \xi_i(qt), & \omega_e &= \text{const.}, & \alpha_i &= \text{const.}, & i &= 1,2 \end{aligned} \quad (39)$$

mit  $\xi_0(qt)$  und  $\xi_i(qt)$  als harmonischen Funktionen mit der Kreisfrequenz  $q$ . Abschätzungen anhand der Simulationsergebnisse zeigen, daß diese Anteile bei der Berechnung der stationären Lösungen der ersten beiden Gleichungen (7) vernachlässigt werden dürfen.



Aus diesen stationären Lösungen erhält man für  $i = 0, 1, 2$  mit  $A_1 = A_2 = A_e$ ,  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_e$ ,  $\alpha_0 = 0$ ,  $\psi_1 = \psi_2 = \psi_e$  für die aus den Schwingungen resultierenden Momente

$$B_i = m_i \varepsilon_i \sum_{k=0}^2 \omega_k^2 A_k [\sin(\omega_i t + \alpha_i) \cos(\omega_k t + \alpha_k - \psi_k) - \cos(\omega_i t + \alpha_i) \sin(\omega_k t + \alpha_k - \psi_k)], \quad i = 0, 1, 2,$$

d. h.

$$\begin{aligned} B_0 &= m_0 \varepsilon_0 \left[ \omega_0^2 A_0 \sin \psi_0 + \omega_e^2 A_e \sum_{k=1}^2 \sin(qt - \alpha_k + \psi_e) \right], \\ B_i &= m_e \varepsilon_e \left[ \omega_e^2 A_e \sum_{k=1}^2 \sin(\alpha_i - \alpha_k + \psi_e) - \omega_0^2 A_0 \sin(qt - \alpha_i - \psi_0) \right], \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (40)$$

Bestimmen wir als Vibrationsmomente die Mittelwerte

$$V_i = \int_0^{2\pi} B_i d(qt), \quad (41)$$

so erhalten wir wieder die Ausdrücke (14) und (32).

Damit ergibt sich zur Bestimmung der Mittelwerte der Winkelgeschwindigkeiten von Rotor und Rollen,  $\omega_0$  und  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_e$ , sowie der mittleren Phasendifferenz  $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$  ein Gleichungssystem, das sich vom Gleichungssystem (34) nur wie folgt in der ersten Gleichung unterscheidet:

$$\beta_0 \omega_0 - 2\beta_e \omega_e + V_0 = \beta_0 \omega_0 - 2\beta_e \omega_e + \frac{m_0^2 \varepsilon_0^2 c \omega_0^5}{M^2 (\omega_{krit}^2 - \omega_0^2)^2 + c^2 \omega_0^2} = \beta_0 \Omega. \quad (42)$$

Aus der zweiten und der dritten Gleichung folgt wie im Abschnitt 3.3 für den unterkritischen Frequenzbereich die Gleichung (36). Mit den Gleichungen (42) und (36) hat man ein kompliziertes Gleichungssystem zur Bestimmung der Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_0$  und  $\omega_e$ . Gilt jedoch  $\beta_0 \gg \beta_e$  und ist in (42) auch das Vibrationsmoment klein gegen  $\beta_0 \omega_0$ , so folgt  $\omega_0 \approx \Omega$ , und wir erhalten schließlich wieder eine Bestimmungsgleichung für  $\omega_e$  vom gleichen Typ wie in den anderen Abschnitten:

$$\beta_e \omega_e + 2 \frac{m_e^2 \varepsilon_e^2 c \omega_e^5}{M^2 (\omega_{krit}^2 - \omega_e^2)^2 + c^2 \omega_e^2} \approx \beta_e \Omega. \quad (43)$$

Der vorliegende Fall des Rotors mit Primärnunwucht und zwei Kompensationsrollen ist der für die Praxis des selbsttätigen Auswuchtens relevante Fall. Die in den Bildern 17 bis 22 dargestellten Simulationsergebnisse sind deshalb auch von praktischer Wichtigkeit. Es wurde jeweils ein Unwuchtverhältnis  $m_0 \varepsilon_0 = 2 m_e \varepsilon_e$  zugrunde gelegt. Die Grenzwinkelgeschwindigkeit wurde auf der Basis der Gleichung (43) entsprechend Gleichung (26) bestimmt.

In den Bildern 17 bis 20 wurde wieder eine maximale Rotorwinkelgeschwindigkeit oberhalb der Grenzwinkelgeschwindigkeit gewählt. Die Verläufe der Rotor- und der Rollenwinkelgeschwindigkeiten und der resultierenden Schwingungsamplituden in den Bildern 17 und 18 unterscheiden sich von den entsprechenden Verläufen des Abschnittes 3.3 durch die größere Intensität der als Störungen überlagerten Schwingungen. Diese größere Intensität verursacht auch einen rascheren Übergang zu den jeweils stabilen mittleren Phasenverhältnissen. Deshalb tritt hier wie beim Rotor mit einer Rolle (Abschnitt 3.2) auch im Bremsbereich wieder das typische Aufklingen der Rotorschwingungen auf.

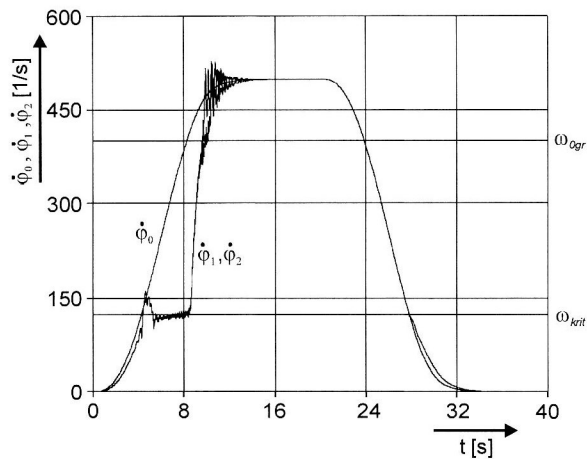


Bild 17. Zeitlicher Verlauf der Rotor- und der Rollenwinkelgeschwindigkeiten,  $\dot{\varphi}_{\max} > \omega_{0gr}$ ,  $\alpha(0) = 0^\circ$

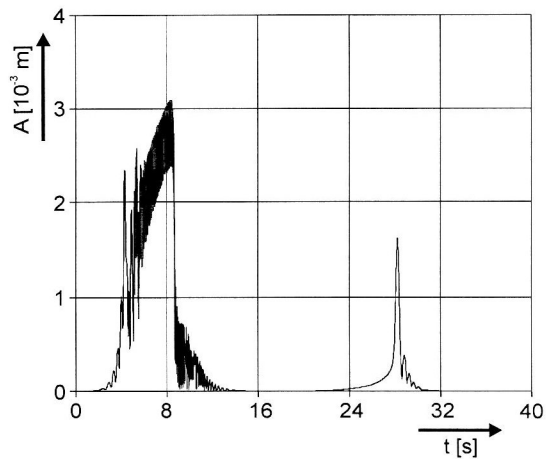


Bild 18. Zeitlicher Verlauf der resultierenden Schwingungamplitude,  $\dot{\varphi}_{\max} > \omega_{0gr}$ ,  $\alpha(0) = 0^\circ$

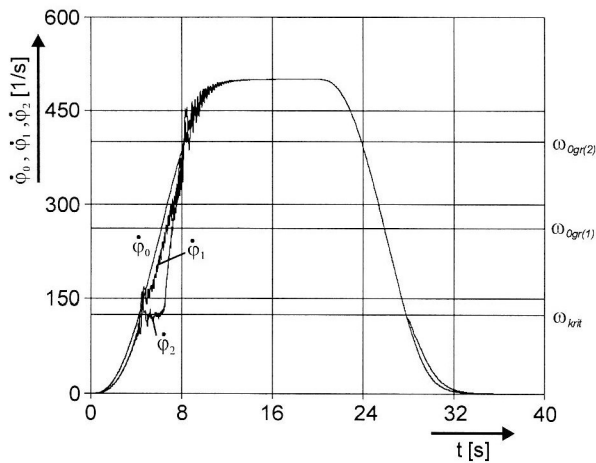


Bild 19. Zeitlicher Verlauf der Rotor- und der Rollenwinkelgeschwindigkeiten,  $\dot{\varphi}_{\max} > \omega_{0gr}$ ,  $\alpha(0) = 179^\circ$

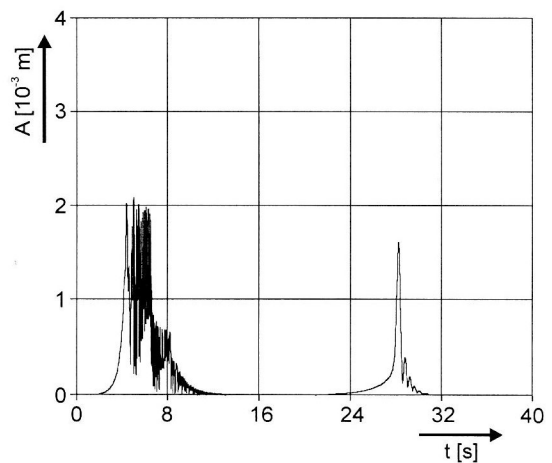


Bild 20. Zeitlicher Verlauf der resultierenden Schwingungamplitude,  $\dot{\varphi}_{\max} > \omega_{0gr}$ ,  $\alpha(0) = 179^\circ$

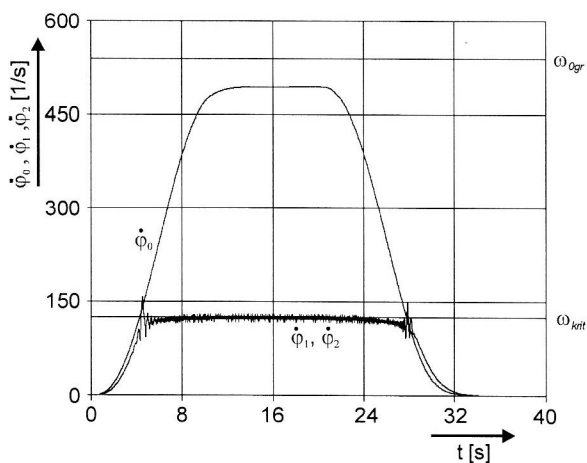


Bild 21. Zeitlicher Verlauf der Rotor- und der Rollenwinkelgeschwindigkeiten,  $\dot{\varphi}_{\max} < \omega_{0gr}$ ,  $\alpha(0) = 0^\circ$

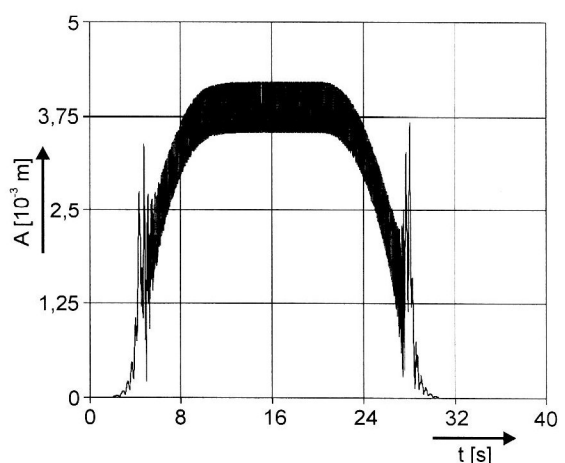


Bild 22. Zeitlicher Verlauf der resultierenden Schwingungamplitude,  $\dot{\varphi}_{\max} < \omega_{0gr}$ ,  $\alpha(0) = 0^\circ$

Allein durch Variation der Anfangsbedingungen können in der Simulation unterschiedliche Varianten der Zeitverläufe erzeugt werden. Für die Verläufe der Bilder 19 und 20 wurde im Vergleich zu denen der Bilder 17 und 18 nur die Anfangsphasendifferenz geändert. Infolge der überlagerten Schwingungen folgt hier zufällig eine der Rollen ohne erkennbaren Sommerfeldeffekt dem Rotor. Infolgedessen verringert sich die Grenzwinkelgeschwindigkeit für die andere Rolle insofern, als in den Gleichungen (43) und (26) der Faktor 2 entfällt, und diese Rolle verläßt deshalb den Resonanzbereich deutlich früher als beide Rollen im Fall des Bildes 17. Besonders, wenn  $\omega_{0gr}$  nur wenig größer als  $\omega_{krit}$  ist, ist es in Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen möglich, daß der Sommerfeldeffekt auf Grund der Störschwingungen bei beiden Rollen nicht in Erscheinung tritt.

In den Bildern 21 und 22 sind die Verläufe der Winkelgeschwindigkeiten und der Amplituden der Rotorschwingungen für eine maximale Rotorwinkelgeschwindigkeit unterhalb der Grenzwinkelgeschwindigkeit dargestellt. Diese unterscheiden sich von den entsprechenden Verläufen in den Bildern 15 und 16 durch die Überlagerung intensiver Störschwingungen. Der Ansatz (39) gestattet auch eine Abschätzung der Amplituden der überlagerten Störschwingungen  $\xi_0(qt)$  und  $\xi_i(qt)$ ,  $i = 1, 2$ , worauf hier jedoch verzichtet werden soll.

Die hier vorgestellten Simulationsergebnisse machen deutlich, daß die Größe der Grenzwinkelgeschwindigkeit beim Verfahren des selbsttätigen Auswuchtens deutlich überschritten werden sollte. Die dargelegten analytischen Entwicklungen gestatten eine Abschätzung dieser für die Praxis wichtigen Kenngröße.

#### 4 Zusammenfassung

Über eine stufenweise Verallgemeinerung des bekannten Verhaltens des statisch unwichtigen Rotors bei transienten Bewegungen wird in der vorliegenden Arbeit schließlich ein starrer statisch unwichtiger Rotor mit einer Einrichtung zum selbsttätigen Auswuchten, die zwei in einem viskosen Medium an der Innenfläche einer kreiszylindrischen Fläche frei bewegliche Rollen enthält, hinsichtlich des Sommerfeldeffektes untersucht. Auf der Grundlage der Resultate analytischer Näherungen wird eine Reihe von mittels Computer-Simulationen bestimmten Zeitverläufen wiedergegeben und interpretiert. Als eine wichtige Kenngröße erweist sich dabei die Grenzwinkelgeschwindigkeit des Rotors, unterhalb deren die Rollen typischerweise mit der der Resonanzfrequenz entsprechenden kritischen Drehzahl des Rotors umlaufen, während oberhalb dieser Drehzahl eine Synchronisation der Drehzahlen und eine kompensatorische Phasierung eintreten. Die Grenzwinkelgeschwindigkeit verringert sich mit steigender Viskosität des Mediums und zunehmender Schwingungsdämpfung, so daß der Sommerfeldeffekt weniger intensiv ausgeprägt ist. Der Anstieg der Rollengeschwindigkeit nach Überschreiten der Grenzdrehzahl erfolgt sprunghaft. Bei den transienten Bewegungsphasen und bei stationären Bewegungen im unterkritischen Frequenzbereich sind die Zeitverläufe von häufig intensiven Störschwingungen überlagert. Diese Störschwingungen sind auch die Ursache für das Auftreten in bestimmter Weise modifizierter Bewegungsverläufe.

Bei der Bewertung der Resultate muß die Unsicherheit besonders hinsichtlich der Modellierung des Einflusses des viskosen Mediums auf die Rollen, hinsichtlich der Voraussetzung ihres gleitfreien Abrollens und hinsichtlich der Zahlenwerte für die Viskosität sowie für die Schwingungsdämpfung hervorgehoben werden. Es ist vorgesehen, die Ergebnisse mittels experimenteller Untersuchungen zu überprüfen. Außerdem sollen weitere Untersuchungen hinsichtlich des Sommerfeldeffektes für den starren Rotor mit zwei Auswuchteinrichtungen vorgenommen werden.

*Die Arbeit entstand im Rahmen eines von der Deutschen Forschungsgemeinschaft geförderten Forschungsprojektes (Sp 462/7-1) zum Thema „Selbsttätiges Auswuchten starrer Rotoren“.*

## Literatur

1. Blekhman, I.: Vibrational Mechanics, World Scientific, Singapore New Jersey London Hong Kong, (2000), 509.
2. Duckstein, H.; Sperling, L.; Merten, F.: Zum Anlaufproblem beim automatischen Wuchten, ZAMM 79, Supplement (1999), 285-286.
3. Sharp, R. S.: An Analysis of a Self-balancing System for Rigid Rotors, J. Mechanical Engineering Science, 17, 4, (1975), 186-189.
4. Sperling, L., Duckstein, H., Ryzhik, B.: Selbsttätiges Auswuchten mittels zweier beliebiger Rollen. Technische Mechanik, 21, 4, (2001), 283-295.
5. Sperling, L., Merten, F., Duckstein, H.: Analytical and Numerical Investigations of Rotation-Vibration-Phenomena, Proc. XXVI Summer Schools, St. Petersburg (Red.: Indeitsev, D. A., Zeitlin, M. G.), (1998), 145-159.
6. Sperling, L., Ryzhik, B., Linz, Ch., Duckstein, H.: Simulation of Two-Plane Automatic Balancing of a Rigid Rotor. Mathematics and Computers in Simulation, 58/4-6, (2002), 351-365.

---

*Anschrift:* Dr.-Ing. Boris Ryzhik, Dr.-Ing. Tarek Amer, Dr.-Ing. Henner Duckstein, Professor Dr.-Ing. habil. Lutz Sperling, Institut für Mechanik, Otto-von-Guericke Universität, Postfach 4120, 39016 Magdeburg, Germany