

# Zur konstitutiven Beschreibung des anisotropen beanspruchungsadaptiven Knochenumbaus

N. Krstin, U. Nackenhorst, R. Lammering

*Seit mehreren Jahren werden von verschiedenen Wissenschaftlergruppen numerische Methoden zur Simulation des beanspruchungsadaptiven Knochenumbaus entwickelt. In der vorliegenden Arbeit werden, aufbauend auf der Theorie des biomechanischen Gleichgewichts, siehe Nackenhorst (1997), Konstitutivgleichungen für das anisotrope Knochenwachstum vorgestellt. Materialtheoretische Untersuchungen führen auf eine energetisch und thermodynamisch konsistente Theorie, anhand derer neben Aussagen bezüglich der Prozeßführung auch wichtige konstitutive Parameter festgelegt werden. Die Beschreibung der Anisotropie wird mit Hilfe des Strukturtenors vorgenommen, womit die Theorie durch geometrische Vermessung der spongiösen Knochenstruktur verifizierbar wird.*

## 1 Einleitung

Die Fähigkeit der Knochen, ihre innere Architektur und äußere Gestalt auch nach dem Heranwachsen den mechanischen Beanspruchungsverhältnissen anzupassen, ist seit mehr als 100 Jahren bekannt, Wolff (1892). Probleme bereitet diese eigentlich sinnvolle Fähigkeit des Organs häufig dann, wenn künstliche Implantate in die Knochen eingebracht werden. Bedingt durch das technologische Design solcher Endoprothesen wird die physiologische Beanspruchung des Knochens beeinträchtigt, und es kommt zu Knochenumbaureaktionen, Huiskes (1993).

Einhergehend mit der Leistungssteigerung und Verbreitung der Microcomputer begannen gegen Ende der 80er Jahre Aktivitäten zur Entwicklung numerischer Simulationsmethoden für die Vorhersage des beanspruchungsadaptiven Knochenumbaus, z.B. Weinans et al. (1991), mit primären Anwendungen auf dem Gebiet der Hüftgelenkendoprothetik. Als Keimzellen dieser numerisch ausgerichteten Forschungen gelten die Arbeitsgruppe um Carter am Department of Mechanical Engineering and Surgery an der Stanford University und die Arbeitsgruppe um Huiskes am Institut für Orthopädie an der Universität von Nijmegen. Die diesbezüglichen Forschungen am Institut für Mechanik an der Universität der Bundeswehr Hamburg wurden 1995 aufgenommen, Schröder (1996). Das primäre Ziel war dabei zunächst die Entwicklung stabiler und effizienter numerischer Algorithmen zur Behandlung des Zweifeldproblems der biomechanischen Interaktion.

Beispielhaft sind in Tabelle 1 drei Theorien dieser Schulen vergleichend gegenübergestellt. Allen Theorien gemeinsam ist die Formulierung einer Evolutionsgleichung für die materielle Dichte, welche die Knochenumbaurate in Abhängigkeit von einem mechanischen Stimulus beschreibt. Knochenumbau findet danach statt, solange dieser mechanische Stimulus von dem homeostatischen Zielwert  $\Psi_Z$  verschieden ist. Die Form der Evolutionsgleichungen in den Theorien nach Beaupré et al. (1990) und Weinans et al. (1994) unterscheiden sich im wesentlichen durch die Wachstumsexponenten, die von den holländischen Forschern verwendet werden. Beide Forschergruppen verwenden eine sogenannte *dead zone*  $w$ , das ist ein Bereich einer tolerierten mechanischen Beanspruchung, in der es zu keiner Knochenumbaureaktion kommt. In der Theorie von Nackenhorst (1997) wurde auf die Einführung dieser *dead zone* verzichtet, um ein von den Anfangsbedingungen und vom Lösungspfad unabhängiges Berechnungsverfahren zu erhalten.

Auch in der Wahl des mechanischen Stimulus unterscheiden sich die Theorien. Während von Beaupré et al. (1990) und Weinans et al. (1994) verschiedene Mittelungsverfahren zur Berücksichtigung mehrerer Lastfälle  $i$  vorgeschlagen werden, verzichtet Nackenhorst (1997) zunächst auch darauf, mit der Begründung, daß diesbezüglich kein ausreichendes Datenmaterial verfügbar sei, und auch die Wirkung der relevanten Muskelkräfte bislang nicht hinreichend erforscht sei. In den Modellen von Weinans et al. und Nackenhorst wird die Verzerrungsenergiegedichte  $\Psi$  als der relevante mechanische Stimulus für die isotrope Beschreibung zugrunde gelegt, Beaupré et al. führen einen sogenannten Gewebespannungsstimulus  $\Psi_b$  ein, mit dem die Beanspruchung auf das wirklich vorhandene Knochenmaterial umgerechnet wird.

Weiterhin bestehen deutliche Unterschiede in der Formulierung der Konstitutivgleichung, die den Zusammenhang zwischen dem Elastizitätsmodul  $E$  und der materiellen Dichte  $\rho$  beschreibt. Sowohl bezüglich

	Beaupré et al. (1990)	Weinans et al. (1994)	Nackendorst (1997)
Umbaurate	$\dot{\rho} = \begin{cases} k \left( \frac{\Psi_b}{\Psi_z} - (1+w) \right) & \frac{\Psi_b}{\Psi_z} \geq (1+w) \\ 0 & (1-w) < \frac{\Psi_b}{\Psi_z} < (1+w) \\ k \left( \frac{\Psi_b}{\Psi_z} - (1-w) \right) & \frac{\Psi_b}{\Psi_z} \leq (1-w) \end{cases}$	$\dot{\rho} = \begin{cases} k \left( \frac{\Psi}{\Psi_z} - (1+w) \right)^2 & \frac{\Psi}{\Psi_z} \geq (1+w) \\ 0 & (1-w) < \frac{\Psi}{\Psi_z} < (1+w) \\ k \left( \frac{\Psi}{\Psi_z} - (1+w) \right)^3 & \frac{\Psi}{\Psi_z} \leq (1-w) \end{cases}$	$\dot{\rho} = k \left( \frac{\Psi}{\Psi_z} - 1 \right)$
mechanischer Stimulus	Kontinuumsstressstimulus $\Psi = \left( \sum_{day} n_i \bar{\sigma}_i^n \right)^{\frac{1}{n}} \quad \bar{\sigma} = \sqrt{Eu}$ Gewebespannungstimulus $\Psi_b = \left( \frac{\rho_c}{\rho} \right)^2 \Psi$	$\Psi = \frac{u_a}{\rho}$ $u_a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i \quad u_i = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{E} : \boldsymbol{\varepsilon}$	$\Psi = \frac{u}{\rho}$ $u = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{E} : \boldsymbol{\varepsilon}$
Stoffgesetz	$E = \begin{cases} 2014 \rho^{2,5} & \text{für } \rho < 1,2 \text{ g/cm}^3 \\ 1763 \rho^{3,4} & \text{für } \rho \geq 1,2 \text{ g/cm}^3 \end{cases}$	$E = 3790 \rho^3$	$E = E_0 \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^n$ mit $2 \leq n \leq 3$

Tabelle 1: Numerische Umbaumodelle im Vergleich.

der Wahl der Faktoren als auch der Exponenten in dieser Gleichung gibt es in der Fachliteratur verschiedene Formulierungen. Nackendorst (1997) geht darum von einer allgemeinen Form in dimensionsloser Darstellung aus

$$E = E_0 \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^n \quad (1)$$

Dabei wird der Exponent in Anlehnung an Carter und Hayes (1977) zwischen  $n = 2$  und  $3$  gewählt. Mit dieser dimensionslosen Darstellung kann recht anschaulich der Einfluß der Dichte auf die Verzerrungsenergiegedichte (Freie Energie) gezeigt werden. Es gilt

$$\Psi = \frac{1}{2\rho} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2\rho} \boldsymbol{\varepsilon}^T \frac{E}{E_0} \mathbf{C}_0 \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2)$$

wobei die Elastizitätsmatrix  $\mathbf{C}$  durch eine auf den Inertialzustand bezogene Elastizitätsmatrix  $\mathbf{C}_0$  ausgedrückt wird. Mit Gleichung (1) folgt dann die multiplikative Aufspaltung der Verzerrungsenergiegedichte in einen dichteabhängigen und in einen verformungsabhängigen Anteil

$$\Psi = \frac{1}{2\rho_0^n} \rho^{n-1} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C}_0 \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3)$$

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit einer detaillierten Analyse der Konstitutivgleichung (1), wobei eine thermodynamisch konsistente materialtheoretische Betrachtung durchgeführt wird, Skubić (1999). Ähnliche Untersuchungen sind bereits von Cowin und Hegedus (1976) durchgeführt worden. Diese Autoren gehen von dem Modell einer in Flüssigkeit eingebetteten Knochenmatrix aus, und die Bilanzgleichungen werden auf der Grundlage der Theorie der physikalischen Mischungen formuliert. Im Gegensatz dazu wird hier der Knochen als ein inhomogenes einphasiges Kontinuum in einem abgeschlossenen System behandelt.

Ergänzend wird in dieser Arbeit das mechanisch anisotrope Verhalten des Knochenmaterials, insbesondere der Spongiosa-Strukturen, berücksichtigt. Eine erste Theorie zur numerischen Simulation des anisotropen

beanspruchungsadaptiven Knochenumbaus wurde von Jacobs et al. (1997) vorgestellt, wobei Analogien zur Schädigungsmechanik benutzt werden. Das Ergebnis dieser Untersuchungen ist eine Evolutionsgleichung für den Elastizitätstensor

$$\dot{C} \sim \frac{\dot{\rho} \sigma \otimes \sigma}{\rho \sigma \cdot \varepsilon} \quad (4)$$

Der Elastizitätstensor richtet sich demnach entsprechend dem dyadischen Produkt des Spannungstensors  $\sigma$  mit sich selbst aus. Dabei wird für  $\dot{\rho}$  die bekannte Evolutionsgleichung nach Beaupré et al. (1990) (siehe Tabelle 1) verwendet. Als wesentlicher Nachteil dieser Theorie wird die schwierige Verifizierbarkeit angesehen, für die eine Messung der elastischen Konstanten des anisotropen Knochenmaterials erforderlich sein wird. Aus diesem Grunde wird in dieser Arbeit die Beschreibung der Anisotropie in Anlehnung an Cowin (1985) sowie Zysset und Cournier (1996) mit Hilfe des Strukturensors vorgenommen, der die räumliche Anordnung des Materials beschreibt.

## 2 Konstitutive Beschreibung des beanspruchungsadaptiven Knochenwachstums

### 2.1 Modell des biomechanischen Gleichgewichts

Ziel der numerischen Simulation des beanspruchungsadaptiven Knochenumbaus ist es, den biomechanischen Gleichgewichtszustand aufzufinden. Gesucht ist also das Gleichgewicht der mechanischen Kräfte, einhergehend mit dem Verschwinden des mechanischen Stimulus, der den Knochenumbau treibt. Dabei wird von dem Leitgedanken ausgegangen, daß Knochen optimale Leichtbaustrukturen sind, die mit einem Minimum an Materialeinsatz ein Maximum an mechanischer Festigkeit aufweisen (Wolffs Transformationsgesetz, Wolff (1892)). Daraus lassen sich Minimalaussagen für die Freie Energie ableiten.

Weiterhin wird die Existenz eines biologischen Potentials vorausgesetzt, so daß das biomechanische Gleichgewicht unabhängig von den Anfangsbedingungen und dem Lösungsweg aufzufinden ist. Dieses biologische Potential stellt die für den Knochenumbau erforderliche Energie bereit.

Im Rahmen dieser Veröffentlichung wird eine materialtheoretische Beschreibung des beanspruchungsadaptiven Knochenumbaus in Konsens mit den thermodynamischen Gesetzen vorgestellt. Es wird also der Versuch unternommen, die Fähigkeit des Knochens, seine Architektur den Beanspruchungsverhältnissen anzupassen, wie eine Materialeigenschaft zu beschreiben. Dabei werden folgende Annahmen vorangestellt:

1. Der Knochenumbau verläuft in Relation zur Strukturmechanik und Thermodynamik langsam ab. Darum werden die Prozesse quasistatisch und isotherm behandelt.
2. Weiterhin wird die Theorie kleiner Verformungen vorausgesetzt.

### 2.2 Bilanzgleichungen des massenveränderlichen Systems

Im lebenden Knochen wird von den Knochenzellen kontinuierlich Material ab- und angebaut. Um der Veränderlichkeit der materiellen Dichte Rechnung zu tragen, müssen die Bilanzgleichungen für ein massenvariantes System formuliert werden.

Die Veränderlichkeit der materiellen Dichte  $\rho$  wirkt sich zunächst in der Massenbilanz aus

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \, dV = \int_V \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_x \cdot (\rho v) \right) dV := \int_V c \, dV \quad (5)$$

Dabei beschreibt  $c$  die Rate der Massenzu- bzw. Massenabnahme im Volumenelement  $dV$ . Da beim Knochenumbau der Materialtransport von einem Ort zum anderen ausgeschlossen werden kann, verschwindet der Divergenzterm  $\nabla_x \cdot (\rho v)$ ,  $c$  beschreibt somit die zeitliche Änderung der materiellen Dichte am Ort  $x$ . Im biomechanischen Gleichgewichtszustand ist  $c$  überall im Körper gleich Null.

Damit nimmt das Reynoldssche Transporttheorem, siehe Malvern (1962), die Form

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho f \, dV = \int_V (\rho \dot{f} + f c) \, dV \quad (6)$$

an, für jede beliebige skalare, vektorielle oder tensorielle Funktion  $f$ .

In der Impulsbilanz

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \mathbf{v} \, dV = \int_V \rho \mathbf{b} \, dV + \int_A \mathbf{t} \, dA \quad (7)$$

wirkt sich die Massenveränderlichkeit entsprechend Gleichung (6) in der Zeitableitung auf der linken Seite aus. Dabei ist  $\mathbf{v}$  die materielle Geschwindigkeit,  $\mathbf{b}$  der Volumenkraftdichtevektor und  $\mathbf{t}$  der Vektor der eingepprägten Oberflächenlasten. Da der Knochen in dieser Arbeit als ein abgeschlossenes System betrachtet wird, treten keine weiteren Kräfte auf der rechten Seite auf, wie z.B. bei der von Cowin und Hegedus (1976) vorgeschlagenen Theorie.

Die Energiebilanz für das biomechanische System wird folgendermaßen formuliert

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \left( u + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) \, dV = \int_V \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{b} \, dV + \int_A \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} \, dA + \int_V \rho r \, dV - \int_A \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \, dA - \int_A \boldsymbol{\ell} \cdot \mathbf{n} \, dA \quad (8)$$

Dabei ist  $u$  die spezifische innere Energie,  $r$  beschreibt die Strahlungswärme und  $\mathbf{q}$  den Wärmeflußvektor. Der Vektor  $\boldsymbol{\ell}$  ist ein biologischer Flußvektor, der die Energieversorgung des Knochens beschreibt. Die ersten beiden Integrale auf der rechten Seite beschreiben die Leistung der mechanischen Kräfte, das dritte und vierte Integral beschreiben die dem System zugeführte thermische Energie, und das letzte Integral beschreibt die biologische Energie, die dem System in einer Zeiteinheit zugeführt wird. Die Einführung von Quelltermen zur Energieversorgung des Knochens in Gleichung (8) ist in diesem Zusammenhang biophysikalisch nicht begründbar. Infolge der zuvor getroffenen Annahme, daß Knochenumbauvorgänge isotherm ablaufen, werden die thermischen Energiequellen im weiteren vernachlässigt.

Mit diesen Annahmen lautet die Entropieungleichung

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho s \, dV \geq - \int_A \frac{1}{\theta} \boldsymbol{\ell} \cdot \mathbf{n} \, dA \quad (9)$$

mit der spezifischen Entropie  $s$  und der Temperatur  $\theta$ .

Auch in den Gleichungen (8) und (9) kommt die Massenveränderlichkeit in den Zeitableitungen zum Ausdruck.

In klassischer Weise werden unter Zuhilfenahme des Cauchy-Theorems,  $\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ , des Divergenztheorems und des Transporttheorems (6) die Bilanzgleichungen (5), (7), (8) und (9) in die lokale Form überführt. Es folgt aus der Massenbilanz

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = c \quad (10)$$

aus der Impulsbilanz

$$\rho \dot{\mathbf{v}} + c \mathbf{v} = \rho \mathbf{b} + \nabla_x \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (11)$$

und aus der Energiebilanz

$$\rho \dot{u} + c \left( u + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) = \nabla_x \mathbf{v} : \boldsymbol{\sigma} - \nabla_x \cdot \boldsymbol{\ell} \quad (12)$$

wobei in der letzteren eine Reduktion unter Beachtung der Impulsbilanz (11) vorgenommen wurde. Da für diese Betrachtungen die Theorie kleiner Verformungen zugrunde gelegt wurde, wird im weiteren der Geschwindigkeitsgradient durch die Verzerrungsgeschwindigkeit ersetzt

$$\nabla_x \mathbf{v} = \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (13)$$

Für die lokale Form der Entropiebilanz folgt

$$\rho \dot{s} + cs \geq -\nabla_x \cdot \frac{\ell}{\theta} \quad (14)$$

Weitere Umformungen werden mit Hilfe der Legendre Transformation

$$\Psi = u - \theta s \quad (15)$$

vorgenommen, mit der Freien (Helmholtz) Energie  $\Psi$ . Mit Gleichung (15) und Gleichung (12) folgt aus Gleichung (14) die modifizierte Clausius Duhem Ungleichung in der Form

$$-\rho \dot{\Psi} - \rho \dot{\theta} s - c \left( \Psi - \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) + \dot{\epsilon} : \boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{\theta} \nabla_x \theta \cdot \ell \geq 0 \quad (16)$$

Da gemäß der Voraussetzungen nur isotherme Prozesse betrachtet werden sollen, ist der Term mit  $\dot{\theta}$  vernachlässigbar, und auch der Term mit dem Temperaturgradienten  $\nabla_x \theta$  kann unter der Annahme einer homogenen Temperaturverteilung vernachlässigt werden. Weiterhin ist es plausibel, auch den Term  $c \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$  aus den weiteren Betrachtungen auszuschließen. Dieser beschreibt die kinetische Energie der hinzugefügten, bzw. entfernten Masse, und da der Knochenumbau in Relation zur Bewegungsdynamik langsam abläuft, ist dieser Anteil vernachlässigbar klein. Damit verbleibt die reduzierte Form der modifizierten Clausius Duhem Ungleichung

$$-\rho \dot{\Psi} - c\Psi + \dot{\epsilon} : \boldsymbol{\sigma} \geq 0 \quad (17)$$

### 2.3 Strukturtensor zur Beschreibung der Anisotropie

Zur Beschreibung der mechanischen Anisotropie poröser Medien und somit auch des spongiösen Knochens hat sich der Strukturtensor  $\mathbf{H}$  als geeignet erwiesen, Cowin (1985). Der Strukturtensor ist durch Messung direkt zu bestimmen und beschreibt den Volumenanteil der Matrix und die Orientierung des Materials, siehe Harrigan und Mann (1984). Der Zusammenhang zwischen den elastischen Konstanten und dem Strukturtensor ist von Cowin (1985) hergeleitet worden. Eine vereinfachte Darstellung dieses Zusammenhangs wurde von Zysset und Curnier (1996) vorgeschlagen, wobei diese Theorie streng genommen nur für einen Exponenten von  $n = 2$  in der Konstitutivgleichung (1) gültig ist, siehe Cowin (1998). Der Theorie von Zysset und Curnier folgend, wobei hier ein Vorgriff auf die weiter unten beschriebenen Erkenntnisse bezüglich des Exponenten  $n$  gemacht wird, kann dann der Elastizitätstensor durch einen isotropen Referenzzustand und die Koordinaten des Strukturensors in folgender Weise dargestellt werden

$$C_{ijkl} = \lambda_0 H_{ij} H_{kl} + \mu_0 (H_{ki} H_{lj} + H_{li} H_{kj}) \quad (18)$$

Dabei sind  $\lambda_0$  und  $\mu_0$  die Laméschen Konstanten des isotropen Referenzzustandes. In matrizieller Darstellung kann Gleichung (18) in der Form

$$\mathbf{C} = \mathbf{H}^T \mathbf{C}_0 \mathbf{H} \quad (19)$$

angeschrieben werden, wobei die Matrix  $\mathbf{C}_0$  den isotropen Referenzzustand repräsentiert. Die Matrix  $\mathbf{H}$  beschreibt den Strukturtensor, und die Matrix  $\mathbf{C}$  ist die anisotrope Elastizitätsmatrix. Damit ist die Freie Energie für ein anisotropes, linear elastisches Material in der Form

$$\Psi = \frac{1}{2\rho} \boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{H}^T \mathbf{C}_0 \mathbf{H} \boldsymbol{\epsilon} \quad (20)$$

anzugeben, vergl. auch Gleichung (2).

Für die folgenden Überlegungen ist es zweckmäßig, den Strukturtensor in seinen deviatorischen und hydrostatischen Anteil zu zerlegen

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^{(d)} + \mathbf{H}^{(h)} \quad (21)$$

Dabei beschreibt der hydrostatische Anteil die materielle Dichte

$$\mathbf{H}^{(h)} = \varrho \mathbf{I} \quad \text{mit} \quad \varrho = \frac{1}{3} \text{sp} \mathbf{H} \quad (22)$$

Der deviatorische Anteil beschreibt die räumliche Anordnung des porösen Materials, z.B. der Spongiosa. Bei einem rein isotropen Materialverhalten ist  $\mathbf{H} = \mathbf{H}^{(h)}$ , dann folgt mit Gleichung (22) aus Gleichung (20), daß die anisotrope Theorie in die Theorie des isotropen Knochenumbaus übergeht, wenn der Exponent der Konstitutivgleichung (1) zu  $n = 2$  gewählt wird.

#### 2.4 Konstitutive Theorie des anisotropen Knochenumbaus

Im folgenden soll eine konstitutive Theorie für den beanspruchungsadaptiven Knochenumbau entwickelt werden, bei der auch das anisotrope Wachstum einbezogen wird. Mit den Prinzipien der Materialtheorie und den für die Modellbildung getroffenen Annahmen (Abschnitt 2.1) ist die Freie Energie als eine Funktion des Verzerrungstensors, der materiellen Dichte und des Deviators des Struktur tensors auszudrücken.

$$\Psi = \tilde{\Psi}(\boldsymbol{\varepsilon}, \varrho, \mathbf{H}^{(d)}) \quad (23)$$

Dann folgt für deren Zeitableitung

$$\dot{\Psi} = \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \varrho} \dot{\varrho} + \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \mathbf{H}^{(d)}} : \dot{\mathbf{H}}^{(d)} \quad (24)$$

und damit aus Gleichung (17) die Beziehung

$$\left( \boldsymbol{\sigma} - \varrho \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \left( \varrho \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \varrho} + \tilde{\Psi} \right) \dot{\varrho} - \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \mathbf{H}^{(d)}} : \dot{\mathbf{H}}^{(d)} \geq 0 \quad (25)$$

Unter der Annahme, daß es mindestens einen Prozeß gibt, bei dem  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ ,  $\dot{\varrho}$  und  $\dot{\mathbf{H}}^{(d)}$  unabhängig voneinander sind, können die einzelnen Terme isoliert betrachtet werden. Für den Fall des vollständigen Knochenumbaus folgt aus der ersten Klammer das elastische Stoffgesetz

$$\boldsymbol{\sigma} = \varrho \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (26)$$

Aus dem zweiten Term

$$\left( \varrho \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \varrho} + \tilde{\Psi} \right) \dot{\varrho} \leq 0 \quad (27)$$

lassen sich nun wichtige Schlüsse für die Konstitutivgleichung und den Prozeßablauf folgern. Zunächst einmal gilt

$$\frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \varrho} \leq 0 \quad , \quad \text{weil} \quad \frac{\tilde{\Psi}}{\varrho} \geq 0$$

D.h., beim Anbau vom Material ( $\partial \varrho > 0$ ) wird die freie Energie verringert und somit gleichzeitig die Beanspruchung des Materials kleiner. Wenn Material abgebaut wird ( $\partial \varrho < 0$ ), vergrößert sich die freie Energie, und es erfolgt eine größere Beanspruchung des Materials.

Weiterhin kann Gleichung (27) für  $\dot{\varrho} \neq 0$  nur dann zu Null werden, wenn  $\tilde{\Psi}$  linear in  $\varrho$  ist. Diese Erkenntnis führt unmittelbar zu dem Schluß, daß der Exponent in der Konstitutivgleichung (1)  $n = 2$  sein muß. Diese Aussage ist auch durch eine statistische Analyse mehrerer experimenteller Studien zur Beschreibung der mechanischen Eigenschaften von Knochenmaterial belegt, Rice et al. (1988).

Der dritte Term in Gleichung (25)

$$\varrho \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \mathbf{H}^{(d)}} : \dot{\mathbf{H}}^{(d)} \leq 0 \quad (28)$$

liefert weitere Aussagen über die Prozeßführung. Die Rate des deviatorischen Anteils des Struktur tensors beschreibt die Drehung des Material tensors in das optimale Hauptachsensystem, in dem die Freie Energie ein Minimum annimmt. Bei Annäherung an dieses optimale Hauptachsensystem ist  $\partial \mathbf{H}^{(d)}$  positiv definiert, gleichzeitig wird damit  $\tilde{\Psi}$  minimiert ( $\partial \tilde{\Psi} < 0$ ).

### 3 Das mathematische Modell

Für die numerische Simulation des beanspruchungsadaptiven Knochenumbaus wird das folgende mathematische Modell zugrunde gelegt. Zunächst wird die Zielfunktion

$$\mathcal{Z} := \tilde{\Psi}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{H}) - \Psi_Z = 0 \quad (29)$$

formuliert. Mit dieser Zielfunktion wird gefordert, daß im biomechanischen Gleichgewichtszustand die Freie Energie  $\tilde{\Psi}$  nach Gleichung (20) in jedem Punkt den Zielwert  $\Psi_Z$  annimmt.

Neben der Berechnung der mechanischen Gleichgewichtsbedingung unter Beachtung der Randbedingungen, auf deren Details im Rahmen dieser Arbeit nicht weiter eingegangen wird, wird für die Berechnung des Struktur tensors in Analogie zum Druckerschen Postulat in der Plastizitätstheorie eine Evolutionsgleichung formuliert

$$\dot{\mathbf{H}} = -k \frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (30)$$

wobei hier angenommen wurde, daß die Spannung den mechanischen Stimulus für den gerichteten Knochenumbau auslöst. Der Faktor  $k$  wird mit Hilfe einer return mapping Strategie bestimmt, siehe Crisfield (1991), so daß im Rahmen einer inkrementellen Berechnungsstrategie die Änderungsraten des Struktur tensors nach der Gleichung

$$\frac{\Delta H_i}{\|\mathbf{H}\|} = \Delta \tau \left( \frac{\tilde{\Psi}}{\Psi_Z} - 1 \right) \begin{cases} \frac{\varepsilon_i}{\|\boldsymbol{\varepsilon}\|} & \text{für } \tilde{\Psi} > \Psi_Z \\ \left( 1 - \frac{\varepsilon_i}{\|\boldsymbol{\varepsilon}\|} \right) & \text{für } \tilde{\Psi} < \Psi_Z \end{cases} \quad (31)$$

berechnet werden. Dabei sind  $H_i$  die Hauptwerte des Struktur tensors. Der Faktor  $\Delta \tau$  bezeichnet die Zeitschrittweite der numerischen Berechnung, die bislang jedoch nicht mit der realen Zeit, in der die Knochenumbauprozesse ablaufen, korreliert ist.

Neben den Hauptwerten des Struktur tensors werden noch die Hauptrichtungen  $\phi_{H_i}$  benötigt. Diese lassen sich aus Extremalbedingungen für die Freie Energie gewinnen. Die Freie Energie anisotroper, linear elastischer Materialien nimmt nur dann Extremaleigenschaften an, wenn die Hauptachsen des Spannungstensors  $\phi_{\sigma_i}$  und des Verzerrungstensors  $\phi_{\varepsilon_i}$  kollinear sind. Daraus folgt, daß auch die Hauptachsen des Struktur tensors mit diesen kollinear sein müssen, Cowin (1994)

$$\phi_{\sigma_i} \cdot \phi_{\varepsilon_j} = \phi_{\sigma_i} \cdot \phi_{H_j} = \phi_{\varepsilon_i} \cdot \phi_{H_j} = \delta_{ij} \quad (32)$$

Im Rahmen der inkrementellen Berechnungsstrategie sind also die Hauptrichtungen des Struktur tensors denen des Spannungs- oder Verzerrungstensors nachzuführen, wobei den Anmerkungen zu Gleichung (28) wichtige Hinweise für das Design stabiler Algorithmen zu entnehmen sind.

### 4 Numerisches Testbeispiel

Zur Überprüfung der Plausibilität und der richtigen Implementierung in ein Finite Element Programm wurde zunächst ein einfaches Testbeispiel untersucht. Das Bild 1a zeigt das Berechnungsmodell eines Kreiszyllinders, der durch Innendruck belastet ist. Die Randbedingungen erlauben eine unbehinderte radiale und axiale Dehnung.

Die berechnete Dichteverteilung ist in Bild 1b dargestellt. Mit den gewählten Modellparametern ist das System in der Lage, die Last allein über den inneren Ring der Diskretisierung abzutragen. Die materielle Dichte für den äußeren Ring ist nahezu vollständig abgebaut.

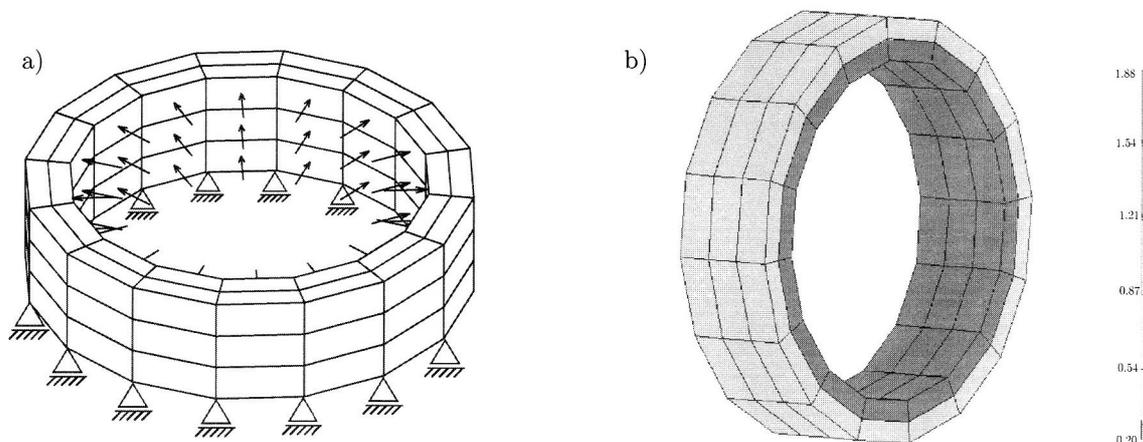


Bild 1: Testbeispiel zur Berechnung des anisotropen beanspruchungsadaptiven Knochenumbaus. a) Finite Element Modell. b) Verteilung der materiellen Dichte in der biomechanischen Gleichgewichtskonfiguration.

Die strukturelle Anordnung des Materials ist in Bild 2 dargestellt. Gezeigt sind hier die Hauptwerte des Strukturtenors sowie deren Hauptrichtungen. Der größte Hauptwert tritt erwartungsgemäß in Umfangsrichtung auf. Entsprechend ist dem mittleren Hauptwert eine radiale und dem kleinsten Hauptwert eine axiale Ausrichtung des Material zuzuordnen.

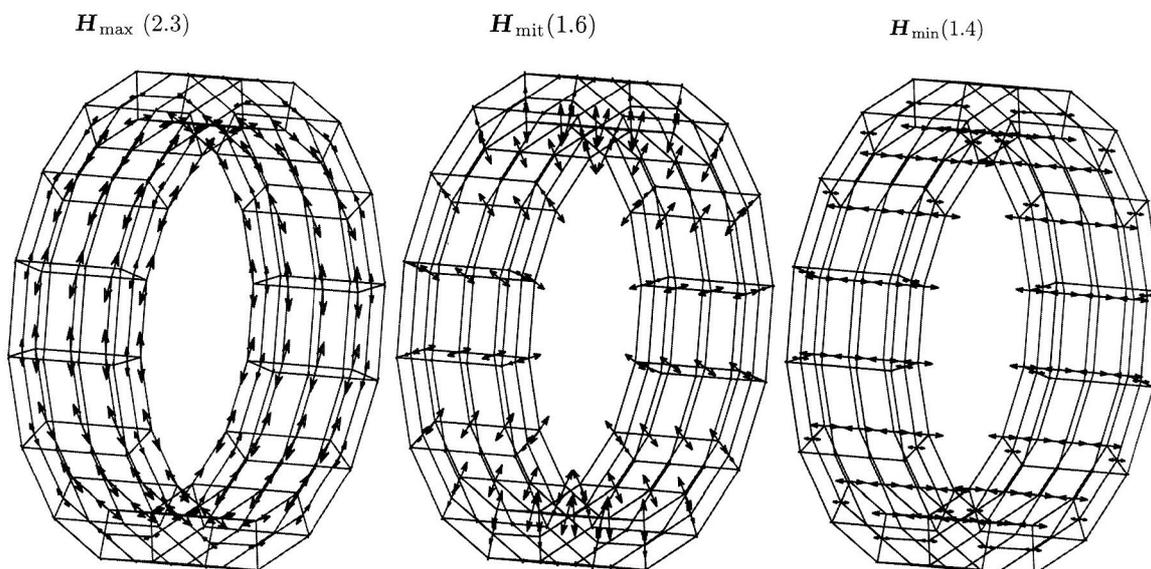


Bild 2: Orientierung des Materials dargestellt mit den Hauptwerten des Strukturtenors.

## 5 Zusammenfassung

In der letzten Dekade wurden numerische Verfahren zur Simulation des beanspruchungsadaptiven Knochenumbaus entwickelt, so daß heute stabile und effiziente Algorithmen zur Berechnung des biomechanischen Interaktionsproblems bereit stehen. Heute wird weltweit intensiv daran geforscht, die Modellbildung zu verfeinern. So konzentrieren sich Arbeiten auf die Ermittlung von relevanten Lastkollektiven, z.B. Bergmann et al. (1993), und die Berechnung der zugehörigen Muskelkräfte, z.B. Duda et al. (1997), die als wichtige Randbedingungen in die Simulation eingehen. Auch bezüglich der ablaufenden Prozesse, die zum Knochenumbau führen, existieren heute nur recht unkonkrete Vorstellungen. Diese Arbeit soll einen Beitrag dazu liefern, dieses Wissen voranzutreiben, indem eine thermodynamisch konsistente Theorie für den beanspruchungsadaptiven Knochenumbau vorgestellt wurde.

Ausgehend von der energetischen Annahme, daß der biomechanische Gleichgewichtszustand auch für anisotropes elastisches Materialverhalten durch ein Minimum der Freien Energie beschrieben ist, werden die Bilanzgleichungen für das massenveränderliche, aber dennoch abgeschlossene System formuliert. Darauf aufbauend werden im Rahmen einer materialtheoretischen Betrachtung Restriktionen für die Konstitutivgleichungen und den Prozeßablauf entwickelt, wobei quasistatische und isotherme Prozesse zugrunde gelegt werden. Ein wichtiges Teilergebnis dieser theoretischen Untersuchungen ist, daß der Zusammenhang zwischen dem Elastizitätsmodul und der materiellen Dichte durch eine quadratische Funktion beschrieben ist.

Zur Beschreibung der Anisotropie wird auf den Strukturtensor zurückgegriffen, wobei die vereinfachte Beschreibung von Zysset und Cournier (1996) durch die materialtheoretischen Überlegungen gerechtfertigt wird. Die Strukturtensor-Beschreibung ermöglicht eine Verifikation der Theorie, z.B. durch optische Vermessung spongiöser Knochenstrukturen.

Ein Berechnungsmodell wird in Analogie zur technischen Plastizitätstheorie entwickelt. Ausgehend von einer Zielfunktion werden Evolutionsgleichungen für die Hauptwerte des Strukturensors und deren Hauptrichtungen formuliert. Erste Berechnungsstudien anhand einfacher Modellstrukturen belegen die Praktikabilität der vorgeschlagenen Vorgehensweise.

## 6 Literatur

1. Beaupré, G. S.; Orr, T. E. and Carter, D. R.: An approach for time-dependent bone modeling and remodeling — application: a preliminary remodeling simulation, *J. of Orthopaedic Research*, 8, (1990), 662–670.
2. Bergmann, G.; Graichen, F. and Rohlmann, A.: Hip joint loading during walking and running, measured in two patients, *J. of Biomechanics*, 26, 8, (1993), 996–990.
3. Carter, D. R. and Hayes, W. C.: The compressive behaviour of bone as two-phase porous structure, *J. of Bone Joint Surgery*, 59, (1977), 954–962.
4. Cowin, S. C. and Hegedus, D. H.: Bone Remodeling I: Theory of adaptive elasticity, *J. of Elasticity*, 6, (1976), 313–326.
5. Cowin, S. C.: The relationship between the elasticity tensor and the fabric tensor, *Mechanics of Materials*, 4, (1985), 137–147.
6. Cowin, S. C.: Optimization of the strain energy density in linear anisotropic elasticity, *J. of Elasticity*, 34, (1994), 45–68.
7. Cowin, S. C.: Imposing thermodynamic restrictions on the elastic constant–fabric tensor relationship, *J. of Biomechanics*, 31, (1998), 759–762.
8. Crisfield, M. A.: *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*, Wiley & Sons, Chichester, (1991).
9. Duda, G. N.; Schneider, E. and Chao, E. Y. S.: Internal forces and moments in the femur during walking, *J. of Biomechanics*, 30, 9, (1997), 933–941.

10. Harrigan, T. P. and Mann, R. W.: Characterization of microstructural anisotropy in orthotropic materials using a second rank tensor, *J. of Material Science*, 19, (1984), 761–767.
11. Huiskes, R.: Failed innovation in total hip replacement, *Acta Orthopaedica Scandinavia*, (1993), 699–716.
12. Jacobs, C. R.; Simo, J. C.; Beaupre, G. S. and Carter, D. R.: Adaptive bone remodeling incorporating simultaneous density and anisotropy considerations, *J. of Biomechanics*, 6, (1997), 603–613.
13. Malvern, L. E.: Introduction to the mechanics of a continuous medium, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, (1969).
14. Nackenhorst, U.: Numerical Simulation of Stress Stimulated Bone Remodeling, *Technische Mechanik*, 17, 1, (1997), 31–40.
15. Rice, J. C.; Cowin, S. C. and Bowman, J. A.: On the dependence of elasticity and strength of cancellous bone, *J. Biomech. Engg.*, 21, (1988), 155–168.
16. Schröder, U.: Numerische Simulation des spannungsinduzierten Knochenumbaus mit der Finite Element Methode am Beispiel mit Schaftendoprothesen versorgter Femura, Diplomarbeit, Institut für Mechanik, Universität der Bundeswehr Hamburg, 1996.
17. Skubić, N. (heute Krstin, N.): Zur konstitutiven Beschreibung des anisotropen beanspruchungsadaptiven Knochenwachstums, Diplomarbeit, Institut für Mechanik, Universität der Bundeswehr Hamburg, (1999).
18. Weinans, H.; Huiskes, R.; Verdonschot, N. and van Rietbergen, B.: The effect of adaptive bone remodeling threshold levels on resorption around noncemented hip stems, *Advances in Bioengineering*, 20, (1991), 303–306.
19. Weinans, H.; Huiskes, R. and Grootenboer, H. J.: Effects of fit and bonding characteristics of femoral stems on adaptive bone remodeling, *J. of Biomech. Engineering*, 116, (1994), 393–400.
20. Wolff, J.: Das Gesetz der Transformation der Knochen. Hirschwald Berlin, (1892).
21. Zysset, P. K. and Cournier, A.: An alternative model for anisotropic elasticity based on fabric tensors, *J. of Biomechanics*, 12, (1996), 243–250.

---

*Anschrift:* Prof. Dr.-Ing. Rolf Lammering, Dr.-Ing. Udo Nackenhorst, Dipl. Phys. Nataša Krstin;  
 Institut für Mechanik, Universität der Bundeswehr Hamburg, Holstenhofweg 85, D-22043 Hamburg