

Zur inneren Mechanik des Radialreifens

Teil 1. Geschichtete Kompositschale mit globalem Verschiebungsansatz für das Gesamtlaminat

G. M. Kulikov, F. Böhm, A. Duda, R. Wille

Diskutiert werden Theorie und numerischer Lösungsalgorithmus für Probleme der Statik vorgespannter mehrschichtiger anisotroper Rotationsschalen mit Berücksichtigung der quergerichteten Schubdeformationen und der geometrischen Nichtlinearität. Die Schichten der Schale sollen aus linear elastischen anisotropen Materialien bestehen. Als Lösungsfunktionen werden die Verschiebungen der äußeren und der inneren Schalenoberflächen gewählt, was besonders für Problemstellungen der Reifenmechanik zweckmäßig ist. Untersucht wird die Berechnung eines Radialreifens, der durch Innendruck und zusätzlich durch eine über einen Teil der Außenfläche verteilte Normalkraft belastet ist. Es wird gezeigt, daß der lokale Verlauf der quergerichteten Spannungskomponenten über die Dicke des Schichtpakets, welche die hauptsächliche Ursache für die Zerstörung des Radialreifens sind, hinreichend genau mit dem für das Laminat als Ganzes aufgestellten numerischen Algorithmus beschrieben werden kann.

1 Einführung

Zunächst einige Bemerkungen zur Reifenmechanik. Man unterscheidet *äußere Reifenmechanik* als die Mechanik des elastischen Rades, deren rechnerische Charakteristiken auf Messungen oder auf sehr einfachen Modellen beruhen, und *innere Reifenmechanik*, die den Spannungs-Deformations- und den Wärmezustand des Reifens sowie seine Festigkeit und Lebensdauer zum Gegenstand hat. Das Bindeglied zwischen beiden sind die mechanischen Reifencharakteristiken, durch welche die Radsteifigkeiten und damit die Fahreigenschaften des Fahrzeugs bestimmt werden. Der Einfluß der Reifenkonstruktion als Gummi-Kord-Komposit auf die Reifencharakteristiken ist nur durch die innere Reifenmechanik zu erfassen. Sie ermöglicht es, ausgehend von den mechanischen Eigenschaften der Grundelemente Gummimatrix und Kordfäden den Reifen in seinem dynamischen Verhalten auf verschiedenen Modellierungsniveaus (Ringmodell, Schale, 3D-Vielteilchenmodell) zu berechnen (Böhm, 1966; Duda und Wille, 1995; Grigolyuk und Kulikov, 1988). Probleme der äußeren Reifenmechanik werden in dem Artikel Belkin u.a. (1997) berührt.

Die Fragen der inneren Mechanik des Luftreifens im Betriebszustand sind spezifisch und erfordern die Entwicklung einer Theorie für die vorgespannte mehrschichtige Schale. Für die Beurteilung der Festigkeit von Luftreifen spielen die quergerichteten Schub- und Normalspannungen im Laminat eine wesentliche Rolle, die in ihrer Verteilung über die Laminatdicke durch die traditionelle Schalentheorie von Timoshenko/Mindlin nicht hinreichend genau bestimmt werden können. Die in unserem Artikel vorgeschlagenen Varianten dieser Theorie sind frei von diesem Mangel.

Das Problem der Entwicklung einer universellen Programmunterstützung für die Berechnung des Reifens als mehrschichtige Komposit-Rotationsschale mit stark ausgeprägter makroskopischer Inhomogenität der physikalisch-mechanischen Eigenschaften ist noch nicht abschließend gelöst. Der räumliche Charakter der Spannungs- und Deformationsfelder unter den Bedingungen allgemeiner Anisotropie, einer niedrigen Steifigkeit und damit hohen Deformierbarkeit in Richtung der Schalenormalen erfordert eine wesentliche Präzisierung der klassischen Schalentheorie zur Erzielung annehmbarer Ergebnisse (Grigolyuk und Kulikov, 1988; Grigolyuk u.a., 1989; Grigorenko u.a., 1991; Kulikov, 1996; Patel und Kennedy, 1982; Rothert und Gall, 1986).

Gegenwärtig haben sich zwei Grundrichtungen der Berechnung des geometrisch nichtlinearen Verhaltens der mehrschichtigen anisotropen Rotationsschalen mit Berücksichtigung lokaler Effekte herausgebildet. Die erste Richtung (Grigolyuk und Kulikov, 1988; Kulikov, 1996) besteht in der Aufstellung einer diskreten Theorie der geschichteten Schalen auf der Basis voneinander unabhängiger kinematischer und statischer Hypothesen. Die

Ordnung des Systems der entsprechenden lösenden Differentialgleichungen hängt in diesem Fall von der Anzahl der Schichten ab, was die numerische Computerrealisierung bereits bei Aufgaben der Statik sehr erschweren kann. Die zweite Richtung (Grigolyuk u.a., 1989; Patel und Kennedy, 1982; Rothert und Gall, 1986) nutzt die Beziehungen der räumlichen geometrisch nichtlinearen Elastizitätstheorie mit numerischer Realisierung durch die FEM, was für eine wirksame Nutzung der Programme im Rahmen der Versuchs- und Konstruktionspraxis ebenfalls nicht förderlich ist.

Im vorliegenden Artikel wird gezeigt, daß das Problem der Spannungsberechnung mit Berücksichtigung der lokalen Spannungsverteilung über die Schalendicke auch auf der Grundlage einer Theorie mehrschichtiger Schalen vom Typ Timoshenko/Mindlin unter Nutzung des gemischten Variationsprinzips von Hu / Washizu (Washizu, 1982) gelöst werden kann. Letzteres ermöglicht den Aufbau eines innerlich widerspruchsfreien mathematischen Modells der mehrschichtigen anisotropen Schalen. Als unabhängige gesuchte Funktionen werden die Verschiebungen der inneren und äußeren Schalenoberfläche angenommen. Dadurch vereinfacht sich die Formulierung der nichtlinearen Aufgaben der Statik für die geschichtete Kompositschale und auch die Schaffung effektiver numerischer Algorithmen wird möglich, da als gesuchte Größen Funktionen gewählt wurden, mit deren Hilfe die kinematischen Randbedingungen auf der Schaleninnen- und -außenfläche zu formulieren sind.

2 Grundgleichungen der dünnen anisotropen Mehrschichtschale

Wir betrachten eine vorgespannte dünne Schale der Dicke h , welche aus N elastischen anisotropen Schichten der Dicke h_k besteht. In jedem Punkt der Schale soll parallel zur Schalenbezugsfläche eine Fläche der elastischen Symmetrie existieren. Als Bezugsfläche S nehmen wir die innere Fläche in irgendeiner k -ten Schicht oder eine Kontaktfläche zwischen den Schichten an und beziehen diese auf die krummlinigen orthogonalen Koordinaten α_1, α_2 längs der Hauptkrümmungslinien (Bild 1). Die Koordinate $\alpha_3 = z$ in Normalenrichtung zählt positiv in Richtung der äußeren Flächennormalen.

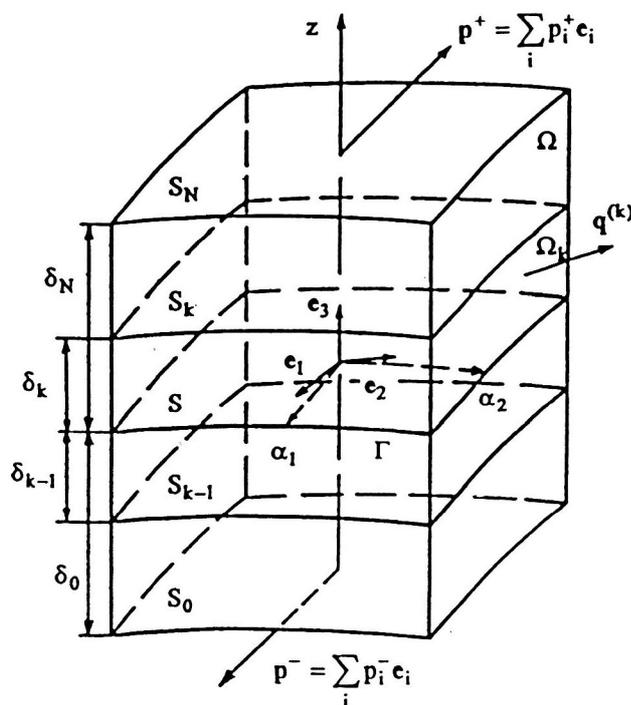


Bild 1. Element einer mehrschichtigen Schale

Bekanntlich (Washizu, 1982) ergeben sich die Gleichgewichtsgleichungen, die Deformations-Verschiebungsbeziehungen, die Gleichungen des verallgemeinerten Hookeschen Gesetzes und die Randbedingungen an den Oberflächen und an den Randflächen der Schale als Eulersche Differentialgleichungen und natürliche Rand-

bedingungen einer Variationsaufgabe. In diesem Sinne betrachten wir das Funktional von Hu / Washizu, welches für die vorgespannte dünne elastische anisotrope Mehrschichtschale endlicher Durchbiegungen in folgender Form dargestellt werden kann (Kulikov, 1997):

$$\begin{aligned}
& \iint_S \sum_{k=1}^N \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} \left\{ \sum_i L_i^{(k)} \delta u_i^{(k)} + \sum_{i \leq j} \left(\sigma_{ij}^{(k)} - \sum_{\lambda \leq m} b_{ij\lambda m}^{(k)} \varepsilon_{\lambda m}^{(k)} \right) \delta \varepsilon_{ij}^{(k)} + \right. \\
& \quad \left. + \left[\varepsilon_{11}^{(k)} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_1^{(k)}}{\partial \alpha_1} - \rho_2 u_2^{(k)} - k_1 u_3^{(k)} - \frac{1}{2} (\Theta_1^{(k)})^2 \right] \delta \sigma_{11}^{(k)} + \right. \\
& \quad \left. + \left[\varepsilon_{22}^{(k)} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_2^{(k)}}{\partial \alpha_2} - \rho_1 u_1^{(k)} - k_2 u_3^{(k)} - \frac{1}{2} (\Theta_2^{(k)})^2 \right] \delta \sigma_{22}^{(k)} + \left(\varepsilon_{12}^{(k)} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_2^{(k)}}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_1^{(k)}}{\partial \alpha_2} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \rho_2 u_1^{(k)} + \rho_1 u_2^{(k)} - \Theta_1^{(k)} \Theta_2^{(k)} \right) \delta \sigma_{12}^{(k)} + \left(\varepsilon_{13}^{(k)} - \frac{\partial u_1^{(k)}}{\partial z} - \Theta_1^{(k)} \right) \delta \sigma_{13}^{(k)} + \right. \\
& \quad \left. + \left(\varepsilon_{23}^{(k)} - \frac{\partial u_2^{(k)}}{\partial z} - \Theta_2^{(k)} \right) \delta \sigma_{23}^{(k)} + \left(\varepsilon_{33}^{(k)} - \frac{\partial u_3^{(k)}}{\partial z} \right) \delta \sigma_{33}^{(k)} \right\} dz dS - \\
& \quad - \iint_{S_N} \sum_i (\sigma_{i3}^{(N)} - p_i^+) \delta u_i^{(N)} dS + \iint_{S_0} \sum_i (\sigma_{i3}^{(1)} - p_i^-) \delta u_i^{(1)} dS + \\
& \quad + \sum_{n=1}^{N-1} \iint_{S_n} \sum_i \left[(\sigma_{i3}^{(n+1)} - \tau_i^{(n)}) \delta u_i^{(n+1)} - (\sigma_{i3}^{(n)} - \tau_i^{(n)}) \delta u_i^{(n)} - (u_i^{(n+1)} - u_i^{(n)}) \delta \tau_i^{(n)} \right] dS - \\
& \quad - \oint_{\Gamma} \sum_{k=1}^N \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} \left[(\sigma_{vv}^{(k)} - q_v^{(k)}) \delta u_v^{(k)} + (\sigma_{vt}^{(k)} - q_t^{(k)}) \delta u_t^{(k)} + (\Sigma_{v3}^{(k)} - q_3^{(k)}) \delta u_3^{(k)} \right] dz ds = 0
\end{aligned} \tag{1}$$

wobei

$$L_\gamma^{(k)} = \frac{1}{A_\gamma} \frac{\partial \sigma_{\gamma\gamma}^{(k)}}{\partial \alpha_\gamma} + \frac{1}{A_\delta} \frac{\partial \sigma_{\gamma\delta}^{(k)}}{\partial \alpha_\delta} + \frac{\partial \sigma_{\gamma 3}^{(k)}}{\partial z} + \rho_\gamma (\sigma_{\gamma\gamma}^{(k)} - \sigma_{\delta\delta}^{(k)}) + 2\rho_\delta \sigma_{\gamma\delta}^{(k)} + k_\gamma \Sigma_{\gamma 3}^{(k)} \quad (\gamma \neq \delta)$$

$$L_3^{(k)} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial \Sigma_{13}^{(k)}}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial \Sigma_{23}^{(k)}}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial \sigma_{33}^{(k)}}{\partial z} + \rho_1 \Sigma_{13}^{(k)} + \rho_2 \Sigma_{23}^{(k)} - k_1 \sigma_{11}^{(k)} - k_2 \sigma_{22}^{(k)}$$

$$\Sigma_{\gamma 3}^{(k)} = \sigma_{\gamma 3}^{(k)} + \Theta_1^{(k)} (\sigma_{1\gamma}^{0(k)} + \sigma_{1\gamma}^{(k)}) + \Theta_2^{(k)} (\sigma_{\gamma 2}^{0(k)} + \sigma_{\gamma 2}^{(k)})$$

$$\Theta_\gamma^{(k)} = \frac{1}{A_\gamma} \frac{\partial u_3^{(k)}}{\partial \alpha_\gamma} - k_\gamma u_{\gamma\gamma}^{(k)} \quad \rho_\gamma = \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_\delta}{\partial \alpha_\gamma} \quad (\gamma \neq \delta)$$

$L_i^{(k)}$ - Differentialoperatoren der geometrisch nichtlinearen räumlichen Elastizitätstheorie; A_α - Lamésche Flächenparameter; $k_\alpha = 1/R_\alpha$ - Krümmungen der Koordinatenlinien; δ_k - Abstand der oberen Grenzfläche der k-ten Schicht von der Bezugsfläche; $u_i^{(k)}$ - Verschiebungen innerhalb der k-ten Schicht; $\varepsilon_{ij}^{(k)}$ - Deformationen in der k-ten Schicht; $\sigma_{\alpha\beta}^{0(k)}$ und $\sigma_{ij}^{(k)}$ - Anfangsspannungen und zusätzliche Spannungen in der k-ten Schicht;

$b_{ij\lambda m}^{(k)}$ - Steifigkeiten der k-ten Schicht; p_i^- und p_i^+ - äußere Flächenbelastungen auf der Schaleninnenfläche S_0 und der Schalenaußenfläche S_N (Bild 1); $q_v^{(k)}$, $q_t^{(k)}$, $q_3^{(k)}$ - äußere Flächenlasten auf der seitlichen Randfläche Ω_k der k-ten Schicht in den Richtungen v , t (normal und tangential zur Randkurve Γ) und z ; $\tau_i^{(n)}$ - Spannungen in den Trennflächen S_n zwischen den Schichten. Hier und im folgenden sind $k = 1, 2, \dots, N$; $n = 1, 2, \dots, N-1$; $i, j, \lambda, m = 1, 2, 3$; $\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2$.

Für das Gesamtlaminat verwenden wir die *modifizierte kinematische Hypothese von Timoshenko* der linearen Verteilung der Tangentialverschiebungen über die Laminatdicke:

$$u_\alpha^{(k)} = N^-(z)v_\alpha^- + N^+(z)v_\alpha^+ \quad u_3^{(k)} = v_3 \quad (2)$$

$$N^-(z) = (\delta_N - z)/h \quad N^+(z) = (z - \delta_0)/h$$

v_α^- , v_α^+ - Tangentialverschiebungen der Schaleninnen- und -außenfläche; $N^-(z)$, $N^+(z)$ - lineare Formfunktionen der Schale.

Für die Deformationen verwenden wir als unabhängige Approximation die Annahme einer linearen Verteilung der tangentialen und Schubdeformationen über die Laminatdicke:

$$\epsilon_{\alpha\beta}^{(k)} = N^-(z)E_{\alpha\beta}^- + N^+(z)E_{\alpha\beta}^+ \quad \epsilon_{\alpha 3}^{(k)} = N^-(z)E_{\alpha 3}^- + N^+(z)E_{\alpha 3}^+ \quad \epsilon_{33}^{(k)} = 0 \quad (3)$$

$E_{\alpha\beta}^-$, $E_{\alpha 3}^-$ und $E_{\alpha\beta}^+$, $E_{\alpha 3}^+$ - tangentiale Deformationen und Querschubdeformationen in der inneren und äußeren Schalenfläche. Die unabhängige Approximation für die quergerichteten Schubdeformationen $\epsilon_{\alpha 3}^{(k)}$ bringt einen formalen Widerspruch in die Schalentheorie, der dadurch behoben wird, daß die entsprechenden Elastizitätsbeziehungen im Mittel über die Laminatdicke erfüllt sind; siehe im weiteren die Gln. (4) und (8).

Für die Nutzung des Variationsprinzips von Hu / Washizu werden die Spannungsergebnisse eingeführt:

$$H_{\alpha\beta}^\pm = \sum_{k=l_{\delta_{k-1}}}^N \delta_k \int \sigma_{\alpha\beta}^{(k)} N^\pm(z) dz \quad H_{\alpha 3}^\pm = \sum_{k=l_{\delta_{k-1}}}^N \delta_k \int \sigma_{\alpha 3}^{(k)} N^\pm(z) dz \quad (4)$$

Die Verschiebungen (2) und Deformationen (3) werden in die Variationsgleichung (1) eingeführt. Indem die Verschiebungen v_α^\pm , v_3 , die Deformationen $E_{\alpha\beta}^\pm$, $E_{\alpha 3}^\pm$ und die Spannungsergebnisse $H_{\alpha\beta}^\pm$, $H_{\alpha 3}^\pm$ als unabhängige Funktionalvariablen angesehen und die Näherungsformeln

$$\Theta_\gamma^{(k)} \Theta_\delta^{(k)} \approx N^-(z)\theta_\gamma^- \theta_\delta^- + N^+(z)\theta_\gamma^+ \theta_\delta^+ \quad \theta_\gamma^\pm = k_\gamma v_\gamma^\pm - \frac{1}{A_\gamma} \frac{\partial v_3}{\partial \alpha_\gamma} \quad (5)$$

verwendet werden, erhalten wir nach einigen Umformungen die Ausgangsbeziehungen der hier verwendeten Theorievariante für die mehrschichtige anisotrope Schale:

(a) Gleichungen der geometrisch nichtlinearen räumlichen Elastizitätstheorie für die k-te Schicht der Schale:

$$L_i^{(k)} = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (6)$$

(b) Deformationsbeziehungen:

$$E_{\gamma\gamma}^\pm = \frac{1}{A_\gamma} \frac{\partial v_\gamma^\pm}{\partial \alpha_\gamma} + \rho_\delta v_\delta^\pm + k_\gamma v_3 + \frac{1}{2} (\theta_\gamma^\pm)^2 \quad (\gamma \neq \delta) \quad E_{\gamma 3}^\pm = \beta_\gamma - \theta_\gamma^\pm \quad (7)$$

$$E_{12}^\pm = \frac{1}{A_1} \frac{\partial v_2^\pm}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial v_1^\pm}{\partial \alpha_2} - \rho_2 v_1^\pm - \rho_1 v_2^\pm + \theta_1^\pm \theta_2^\pm \quad \beta_\gamma = \frac{1}{h} (v_\gamma^+ - v_\gamma^-)$$

(c) Elastizitätsbeziehungen für die Spannungsresultierenden:

$$\begin{aligned} H_{\alpha\beta}^- &= \sum_{\gamma \leq \delta} \left(A_{\alpha\beta\gamma\delta}^{00} E_{\gamma\delta}^- + A_{\alpha\beta\gamma\delta}^{01} E_{\gamma\delta}^+ \right) & H_{\alpha\beta}^+ &= \sum_{\gamma \leq \delta} \left(A_{\alpha\beta\gamma\delta}^{01} E_{\gamma\delta}^- + A_{\alpha\beta\gamma\delta}^{11} E_{\gamma\delta}^+ \right) \\ H_{\alpha 3}^- &= \sum_{\gamma} \left(A_{\alpha 3\gamma 3}^{00} E_{\gamma 3}^- + A_{\alpha 3\gamma 3}^{01} E_{\gamma 3}^+ \right) & H_{\alpha 3}^+ &= \sum_{\gamma} \left(A_{\alpha 3\gamma 3}^{01} E_{\gamma 3}^- + A_{\alpha 3\gamma 3}^{11} E_{\gamma 3}^+ \right) \end{aligned} \quad (8)$$

$A_{\alpha\beta\gamma\delta}^{pq}$ und $A_{\alpha 3\gamma 3}^{pq}$ - Tangential- und Quersteifigkeiten der Schale.

$$A_{\alpha i \gamma j}^{pq} = \sum_{k=1}^N b_{\alpha i \gamma j}^{(k)} \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} \left[N^-(z) \right]^{2-p-q} \left[N^+(z) \right]^{p+q} dz \quad (p, q = 0, 1)$$

(d) Randbedingungen an der Schalenaußenfläche S_N :

$$\sigma_{i3}^{(N)} = p_i^+ \quad (9)$$

(e) Randbedingungen an der Schaleninnenfläche S_0 :

$$\sigma_{i3}^{(1)} = p_i^- \quad (10)$$

(f) Stetigkeitsbedingungen in den Schichttrennflächen S_n :

$$\sigma_{i3}^{(n)} = \sigma_{i3}^{(n+1)} \quad (11)$$

(g) natürliche Randbedingungen auf der Randkontur $\Gamma \subset S$:

$$\left(H_{vv}^\pm - \hat{H}_{vv}^\pm \right) \delta v_v^\pm = 0 \quad \left(H_{vt}^\pm - \hat{H}_{vt}^\pm \right) \delta v_t^\pm = 0 \quad \left(R_{v3} - \hat{T}_{v3} \right) \delta v_3 = 0 \quad (12)$$

mit den Beziehungen

$$\begin{aligned} \hat{H}_{vv}^\pm &= \sum_{k=1}^N \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} q_v^{(k)} N^\pm(z) dz & \hat{H}_{vt}^\pm &= \sum_{k=1}^N \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} q_t^{(k)} N^\pm(z) dz \\ \hat{T}_{v3} &= \sum_{k=1}^N \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} q_3^{(k)} dz & R_{v3} &= \sum_{k=1}^N \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} \Sigma_{v3}^{(k)} dz \end{aligned} \quad (13)$$

$$\Sigma_{v3}^{(k)} = \sigma_{v3}^{(k)} - \left(N^-(z)\theta_v^- + N^+(z)\theta_v^+ \right) \left(\sigma_{vv}^{0(k)} + \sigma_{vv}^{(k)} \right) - \left(N^-(z)\theta_t^- + N^+(z)\theta_t^+ \right) \left(\sigma_{vt}^{0(k)} + \sigma_{vt}^{(k)} \right)$$

Wir weisen darauf hin, daß die Näherung (5) faktisch bedeutet, daß in der vorgestellten geometrisch nichtlinearen Theorie die Tangentialdeformationen über die Schalendicke einen linearen Verlauf haben, was mit der Annahme (3) übereinstimmt. Das widerspricht nicht der Allgemeinheit der Theorie und stellt eine natürliche Voraussetzung für dünnwandige Schalenkonstruktionen dar.

Die Gleichgewichtsgleichungen der mehrschichtigen anisotropen Schale erhalten wir durch Multiplikation der beiden ersten Gleichungen der räumlichen Elastizitätstheorie (6) mit den Formfunktionen $N^-(z)$, $N^+(z)$ und nachfolgende Integration zusammen mit der dritten Gleichung (6) über die Koordinate z von δ_0 bis δ_N mit Berücksichtigung der Beziehungen (9) - (11). Diese Prozedur erfolgt in Übereinstimmung mit der gemischten Variationsgleichung (1). Das Ergebnis sind die 5 nichtlinearen Differentialgleichungen

$$\frac{1}{A_\gamma} \frac{\partial H_{\gamma\gamma}^\pm}{\partial \alpha_\gamma} + \frac{1}{A_\delta} \frac{\partial H_{\gamma\delta}^\pm}{\partial \alpha_\delta} + \rho_\gamma (H_{\gamma\gamma}^\pm - H_{\delta\delta}^\pm) + 2\rho_\delta H_{\gamma\delta}^\pm + k_\gamma S_{\gamma 3}^\pm \mp \frac{1}{h} T_{\gamma 3} \pm p_\gamma^\pm = 0 \quad (\gamma \neq \delta) \quad (14)$$

$$\frac{1}{A_1} \frac{\partial R_{13}}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial R_{23}}{\partial \alpha_2} + \rho_1 R_{13} + \rho_2 R_{23} - k_1 T_{11} - k_2 T_{22} - p_3^- + p_3^+ = 0$$

$T_{\alpha\alpha}$, $T_{\alpha 3}$ - innere Kräfte der klassischen Schalentheorie; $R_{\alpha 3}$, $S_{\alpha 3}$ - verallgemeinerte Spannungsergebnisse in Querrichtung:

$$\begin{aligned} T_{\alpha\alpha} &= \sum_{k=1}^N \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} \sigma_{\alpha\alpha}^{(k)} dz & T_{\alpha 3} &= \sum_{k=1}^N \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} \sigma_{\alpha 3}^{(k)} dz \\ R_{\alpha 3} &= \sum_{k=1}^N \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} \Sigma_{\alpha 3}^{(k)} dz & S_{\alpha 3}^\pm &= \sum_{k=1}^N \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} \Sigma_{\alpha 3}^{(k)} N^\pm(z) dz \end{aligned} \quad (15)$$

$$\Sigma_{\alpha 3}^{(k)} = \sigma_{\alpha 3}^{(k)} - (N^-(z)\theta_1^- + N^+(z)\theta_1^+) (\sigma_{1\alpha}^{0(k)} + \sigma_{1\alpha}^{(k)}) - (N^-(z)\theta_2^- + N^+(z)\theta_2^+) (\sigma_{\alpha 2}^{0(k)} + \sigma_{\alpha 2}^{(k)})$$

Wie gesagt, eine Hauptschwierigkeit bei der Berechnung von Luftreifen ist die Bestimmung der quergerichteten Schub- und Normalspannungen, die maßgeblich sind für die Zerstörung des Gürtels durch Ablösung des Kords von der Gummimatrix. Diese Komponenten des Spannungstensors können bestimmt werden durch Integration der Gleichungen der räumlichen Elastizitätstheorie (6). Auch hier gibt es keinen Widerspruch. Obwohl bei der Herleitung der Elastizitätsbeziehungen (8) für die quergerichteten Normalspannungen $\sigma_{33}^{(k)} \ll \sigma_{\alpha\beta}^{(k)}$ angenommen wurde, so bedeutet doch die Kleinheit dieser Spannungen keineswegs, daß man sie bei Berechnung stark inhomogener und anisotroper Schalen gleich Null setzen darf. Im Gegenteil, die Kenntnis des Verlaufs der Spannungen $\sigma_{33}^{(k)}$ ist von prinzipieller Bedeutung für den Reifenkonstrukteur.

Daher integrieren wir die Gleichungen der räumlichen Elastizitätstheorie (6) über die normalgerichtete Koordinate von δ_0 bis z und berücksichtigen die Randbedingungen (10) und die Stetigkeitsbedingungen (11). Nach einigen Umformungen kommen wir zu den folgenden Formeln für die Bestimmung der quergerichteten Komponenten des Spannungstensors

$$\begin{aligned} \sigma_{\gamma 3}^{(k)} &= p_\gamma^- - \frac{1}{A_\gamma} \frac{\partial Q_{\gamma\gamma}^{(k)}}{\partial \alpha_\gamma} - \frac{1}{A_\delta} \frac{\partial Q_{\gamma\delta}^{(k)}}{\partial \alpha_\delta} - \rho_\gamma (Q_{\gamma\gamma}^{(k)} - Q_{\delta\delta}^{(k)}) - 2\rho_\delta Q_{\gamma\delta}^{(k)} - k_\gamma P_{\gamma 3}^{(k)} \quad (\gamma \neq \delta) \\ \sigma_{33}^{(k)} &= p_3^- - \frac{1}{A_1} \frac{\partial P_{13}^{(k)}}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial P_{23}^{(k)}}{\partial \alpha_2} - \rho_1 P_{13}^{(k)} - \rho_2 P_{23}^{(k)} + k_1 Q_{11}^{(k)} + k_2 Q_{22}^{(k)} \end{aligned} \quad (16)$$

wobei

$$Q_{\alpha\beta}^{(k)} = \sum_{n=1}^{k-1} \int_{\delta_{n-1}}^{\delta_n} \sigma_{\alpha\beta}^{(n)} dz + \int_{\delta_{k-1}}^z \sigma_{\alpha\beta}^{(k)} dz \quad P_{\alpha 3}^{(k)} = \sum_{n=1}^{k-1} \int_{\delta_{n-1}}^z \Sigma_{\alpha 3}^{(n)} dz + \int_{\delta_{k-1}}^z \Sigma_{\alpha 3}^{(k)} dz$$

Entsprechend den Beziehungen

$$Q_{\alpha\beta}^{(N)}(\delta_N) = H_{\alpha\beta}^- + H_{\alpha\beta}^+ = T_{\alpha\beta} \quad P_{\alpha 3}^{(N)}(\delta_N) = S_{\alpha 3}^- + S_{\alpha 3}^+ = R_{\alpha 3}$$

und den Schalengleichgewichtsgleichungen (14), (15) ergeben sich aus (16) die Randbedingungen für die Spannungen (9).

Auf diese Weise gelingt es, eine innerlich widerspruchsfreie geometrisch nichtlineare Theorie der vorgespannten geschichteten anisotropen Schalen aufzustellen, nach der die lokale Verteilung der quergerichteten

Spannungskomponenten $\sigma_{\alpha 3}^{(k)}$, $\sigma_{33}^{(k)}$ über die Dicke des Schichtpakets bestimmt werden kann. Ein Vorzug der hier dargelegten Theorievariante vom Timoshenko/Mindlin-Typ besteht darin, daß die Gleichungen der räumlichen Elastizitätstheorie (6) punktweise in jeder Schicht mit der für dünne Schalen üblichen Genauigkeit erfüllt werden.

3 Numerischer Lösungsalgorithmus

Wir betrachten die Berechnung eines Radialreifens unter der Wirkung des Innendruckes p_0 und der zusätzlichen Normalbelastung $p_3^+ = q$, die auf einem Teil der Reifenaußenfläche wirkt (Bild 2). Die Berechnung des durch Innendruck beanspruchten Reifens erfolgt in geometrisch nichtlinearer Form nach Methoden, die von Grigolyuk und Kulikov (1988) entwickelt wurden. Danach wird der vorgespannte Reifen auf die Wirkung lokaler nicht-rotationssymmetrischer Belastungen nach geometrisch linearen Ansätzen untersucht.

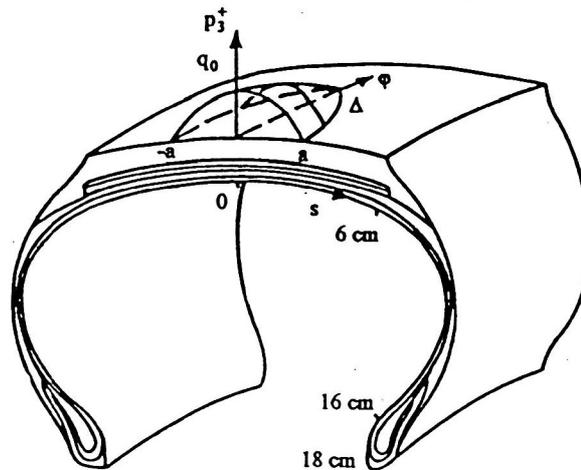


Bild 2. PKW-Radialreifen 175/70R13

Die gesuchten Funktionen wie die äußere Belastung p_3^+ werden in Fourierreihen in Richtung der Umfangskoordinate $\alpha_2 = \varphi$ entwickelt. Das durch die Zerlegung in Sinus- und Kosinusfunktionen erhaltene System linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\frac{dY}{ds} = A(s) Y + b(s) \quad (s = \alpha_1) \quad (17)$$

wird nach einer Methode der diskreten Orthogonalisierung gelöst (Grigolyuk und Kulikov, 1988). Wichtig ist der Hinweis, daß das System (17) die Ordnung 20 hat, da wegen Berücksichtigung der Anisotropie die symmetrischen und antisymmetrischen Komponenten in den Fourierreihen des Lösungsvektors Y miteinander gekoppelt sind. Dieser Fakt erschwert die numerische Realisierung des Algorithmus beträchtlich.

Ein weiteres Problem ist die Nichteindeutigkeit der Zusammenfassung der einzelnen Schichten des Reifens zu einem Querschnittspaket. Wir erläutern das am Beispiel des PKW-Reifens 175/70R13. Der Laufteil dieses Reifens besteht aus einer in Meridianrichtung bewehrten Karkass-Schicht und zwei kreuzweise armierten Gürtelschichten. Die übrigen Schichten sind aus Gummi. Möglich sind zwei Varianten des Berechnungsschemas. In der Schichtungsvariante I (Bild 3a) haben wir eine 5-schichtige Schale, da hier $h_1^I > d_c$, h_3^I und $h_4^I > d_b$; in der (zutreffenderen) Schichtungsvariante II (Bild 3b) wird eine 7-schichtige Schale untersucht, da hier $h_2^{II} = d_c$, $h_4^{II} = h_6^{II} = d_b$ ist, wobei d_c , d_b die Korddurchmesser in der Karkasse (carcas) und im Gürtel (breaker) sind.

Wir illustrieren die Vorgehensweise am Beispiel der Bestimmung der klassischen Membrankräfte $T_{\alpha\beta}$ aus (15). Wenn als Bezugsfläche die innere Reifenfläche angenommen wird, dann können diese nach folgender Formel berechnet werden:

$$\begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{12} \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{I-} \begin{bmatrix} E_{11}^- \\ E_{22}^- \\ E_{12}^- \end{bmatrix} + \mathbf{A}^{I+} \begin{bmatrix} E_{11}^+ \\ E_{22}^+ \\ E_{12}^+ \end{bmatrix} \quad (18)$$

mit

$$\mathbf{A}^{I-} = \sum_{k=1}^N \mathbf{b}^{(k)I} \int_{\delta_{k-1}^I}^{\delta_k^I} N^-(z) dz \quad \mathbf{A}^{I+} = \sum_{k=1}^N \mathbf{b}^{(k)I} \int_{\delta_{k-1}^I}^{\delta_k^I} N^+(z) dz \quad (I \Leftrightarrow II)$$

$$N^-(z) = (h-z)/h$$

$$N^+(z) = z/h$$

$\mathbf{b}^{(k)I}$, $\mathbf{b}^{(k)II}$ - Steifigkeitsmatrizen der k-ten Reifenschicht bei den Schichtungsvarianten I und II, die beide durch die elastischen Kenngrößen der individuellen k-ten Gummi-Kord-Schicht $E_1^{(k)I}$, $E_2^{(k)I}$, $G_{12}^{(k)I}$, $G_{23}^{(k)I}$, $\nu_{12}^{(k)I}$, $\nu_{23}^{(k)I}$ ($I \Leftrightarrow II$) nach bekannten Formeln der Mechanik der Komposite (Malmeisters u.a., 1977) berechnet werden. Dabei ist offensichtlich, daß je größer der Unterschied zwischen der Dicke der individuellen Gummi-Kord-Schicht und dem Korddurchmesser ist, desto größer die Abweichungen bei der Berechnung der Steifigkeit der verstärkten Schichten sein werden. Das wiederum liegt daran, daß bei der Berechnung der effektiven Kennwerte der makroskopisch inhomogenen Schicht die Kompositsteifigkeiten über die Dicke „verschmiert“ werden.

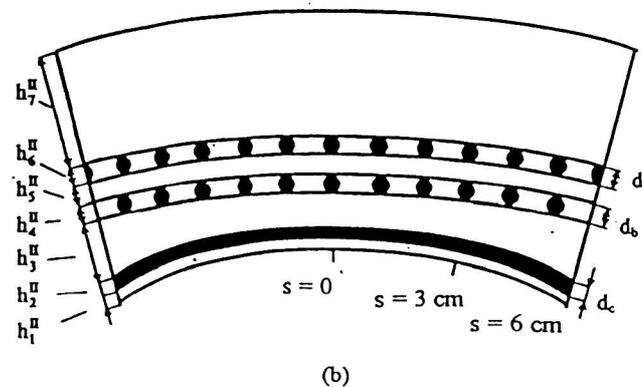
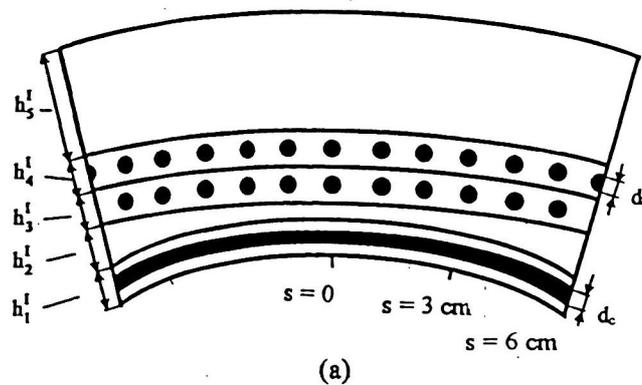


Bild 3. Gürtelzone des PKW-Radialreifens 175/70R13; (a) Schichtungsvariante I ($N = 5$); (b) Schichtungsvariante II ($N = 7$)

4 Ergebnisse numerischer Berechnungen

Als Beispiel wählen wir die Berechnung des PKW-Reifens 175/70R13 für eine Radialbelastung mit 4000 N. Nach vorhandenen Meßwerten hat bei dieser Belastung und dem Innendruck $p_0 = 0,2 \text{ MPa}$ die Kontaktfläche eine Größe von etwa 164 cm^2 . Wir nehmen an, daß die Kontaktfläche die Form einer Ellipse hat, d.h.

$$\frac{s^2}{a^2} + \frac{\varphi^2}{\Delta^2} \leq 1$$

wobei $a = 6 \text{ cm}$, $\Delta = 0,3 \text{ rad}$ (Bild 2). Aufgrund von Meßwerten kann die Verteilung des Kontaktdruckes näherungsweise angenommen werden zu

$$p_3^+ = -q_0 \sqrt{1 - \frac{s^2}{a^2} - \frac{\varphi^2}{\Delta^2}}$$

wobei $q_0 = 0,36 \text{ MPa}$. Als Bezugsfläche S wurde die innere Reifenoberfläche S_0 gewählt.

Die Bilder 4a - f zeigen die Verteilung der quergerichteten Spannungen σ_{i3}^I und σ_{i3}^{II} über die Reifendicke in der Gürtelzone bei $s = 3 \text{ cm}$ für die beiden Varianten I und II. Die Spannungsverläufe sind für drei Werte der Umfangskoordinate $\varphi = 0^\circ, 10^\circ, 20^\circ$ angegeben. In der betrachteten Zone hat der Reifen 5 Schichten: die in meridionaler Richtung mit Textilkord bewehrte einschichtige Karkasse; zwei durch Metallkorde bewehrte Gürtelschichten mit den Winkeln $\psi = \pm 70^\circ$ zwischen Kord- und Meridianrichtung; die Gummizwischenschicht zwischen Karkasse und Gürtel; den Protetektor im Bereich $0,46 \text{ cm} \leq z \leq 1,62 \text{ cm}$. Die Rechnungen zeigen, daß die Spannungen im Protetektor für beide Varianten praktisch gleich sind - daher sind in den Bildern 4a - f die Spannungsverteilungen nur für den Bereich $0 \leq z \leq 0,46 \text{ cm}$ dargestellt. Aus diesen Bildern erkennt man, daß die Schichtungsvariante II zu genaueren Ergebnissen wegen der höheren Steifigkeit der verstärkten Schichten führt. Diese Variante ist aber numerisch aufwendiger und daher für die praktische Nutzung nicht zu empfehlen.

Wie man sieht, sind die Schubspannungen σ_{23}^{II} in den Gürtelschichten vergleichbar mit den Spannungen σ_{i3}^{II} , und an den Kontaktflächen des Gürtels übertreffen sie sogar deren Maximalwerte. Das deutet auf den wesentlichen Einfluß des Anisotropieeffektes beim Spannungszustand des Radialreifens hin. Wir verweisen auf die Verletzung der Symmetrie bei $\varphi = 10^\circ$ und $\varphi = 20^\circ$. Auf diesen Sachverhalt, der mit der Nutzung der kreuzweisen Armierung in der Gürtelkonstruktion zusammenhängt, wurde schon frühzeitig in der Literatur über Luftschiffbau (Haas, 1913) wie auch in Grigolyuk und Kulikov (1988); Patel und Kennedy (1982) hingewiesen. Hier gilt, wie festgestellt wurde, die Antisymmetriebeziehung $\sigma_{\alpha 3}^{(k)}(s, \varphi) = -\sigma_{\alpha 3}^{(k)}(-s, -\varphi)$; die übrigen Spannungskomponenten sind bezüglich s und φ zentralsymmetrisch.

Der Vergleich mit FEM-Ergebnissen an der TU Berlin (Feng, 1995) zeigt, daß durch die hier beschriebene Theorievariante nach Timoshenko/Mindlin ähnliche Ergebnisse erzielt werden, wie mit Hilfe der FEM bei Anwendung mehrerer Schichtvektoren. Man kann davon ausgehen, daß durch die hier vorgestellte Variante der Schalentheorie die maximalen Schubspannungen zwischen den beiden Gürtellagen bzw. zwischen Gürtel und Karkasse gut wiedergegeben werden und bei orthotropem Schichtaufbau entkoppelte Anteile der Verformungsenergie auftreten.

Literatur

1. Belkin A.E., Bukhin B.L., Mukhin O.N., Narskaya N.L.: Some models and methods of pneumatic tire mechanics. Tyre Models for Vehicle Dynamic Analysis. Edited by F. Böhm and H.-P. Willumeit (1997), 250-271.
2. Böhm F.: Zur Mechanik des Luftreifens. Habilitationsschrift, TH Stuttgart (1966), 120 S.
3. Duda A., Wille R.: Contact between multilayered shell and deformable continuum. Riga, 9th Int. Conf. on Mechanics of Composite Materials, MCM-95, Oct 17-20, (1995).

4. Feng K.: Statische Berechnung des Gürtelreifens unter besonderer Berücksichtigung der kordverstärkten Lagen. Diss. TU Berlin 1995, Fortschr.-Ber. VDI Reihe 12, Nr. 258, VDI-Verlag (1995), 150 S.
5. Grigolyuk E.I., Kulikov G.M.: Mehrschichtige armierte Schalen. Berechnung von Luftreifen. Moskau, Masinstroenie (1988), 288 S. (russ.).
6. Grigolyuk E.I., Kulikov G.M., Nosatenko P. Ya.: Comparative analysis of two approaches to more accurate calculation of laminate shells made of composite materials. Mechanics of Composite Materials 24, 6 (1989), 804-810.
7. Grigorenko Ya.M., Vasilenko A.T., Pankratova N.D.: Aufgaben der Elastizitätstheorie für nichthomogene Körper. Kiev, Naukova dumka (1991), 216 S.
8. Haas R.: Stoffdehnung und Hüllenform: Beitrag zur Konstruktion von Ballonhüllen. Dissertation an der Königlich-Technischen Hochschule zu Berlin (1913), 106 S.
9. Kulikov G.M.: Computational models for multilayered composite shells with application to tires. Tire Science and Technology 24, 1, (1996), 11-38.

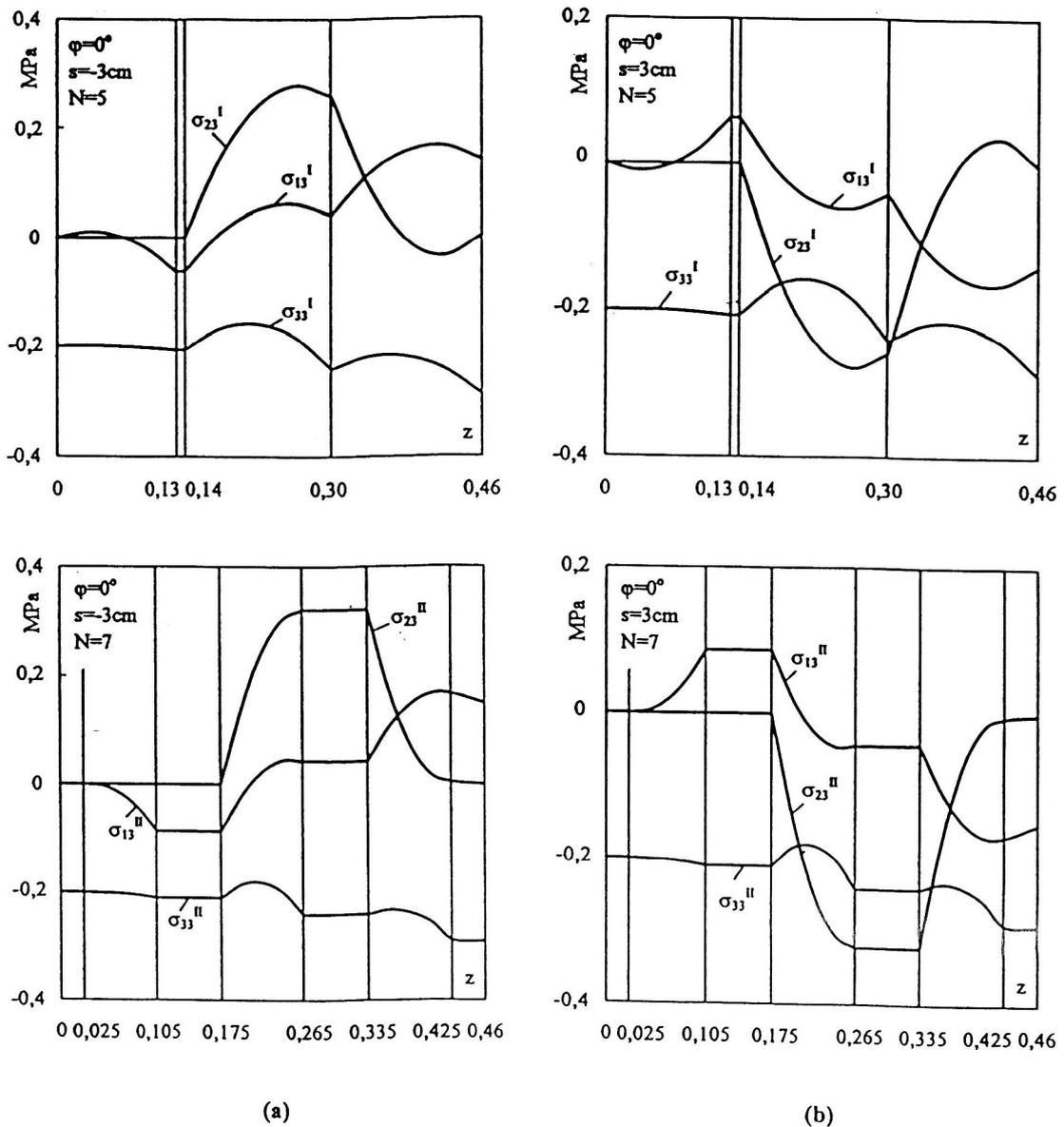
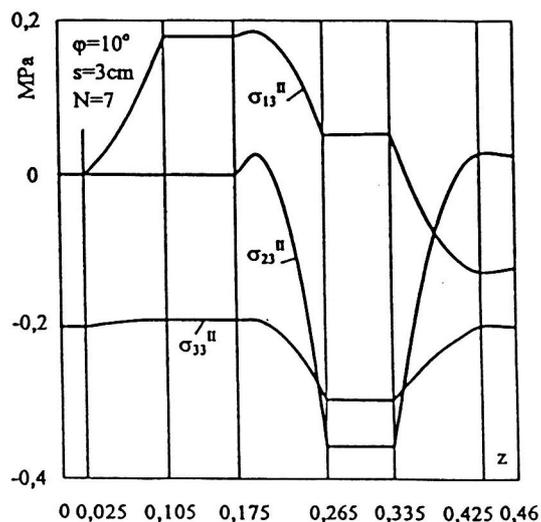
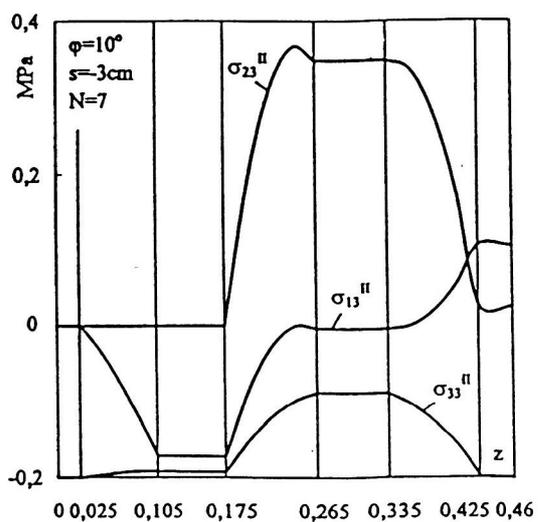
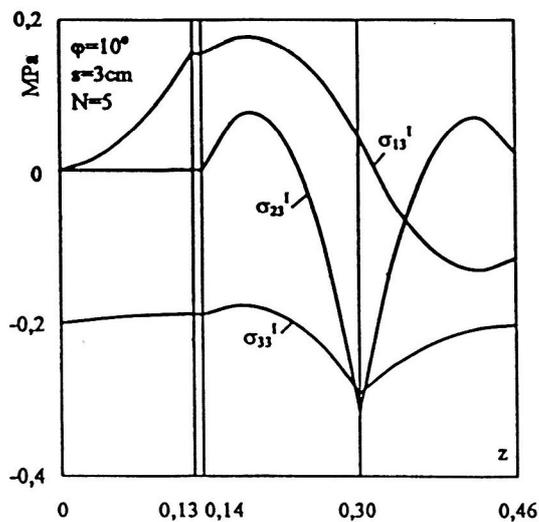
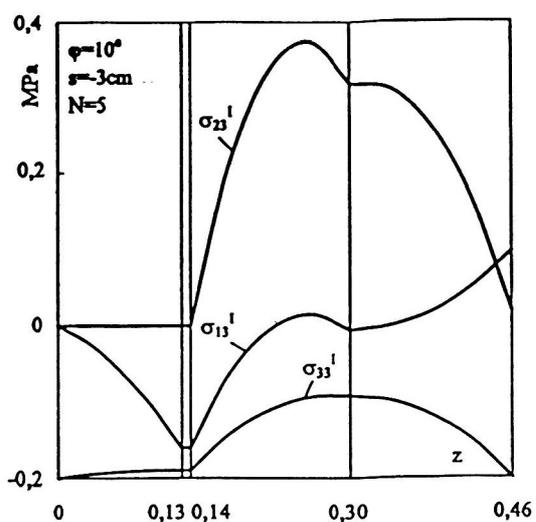


Bild 4

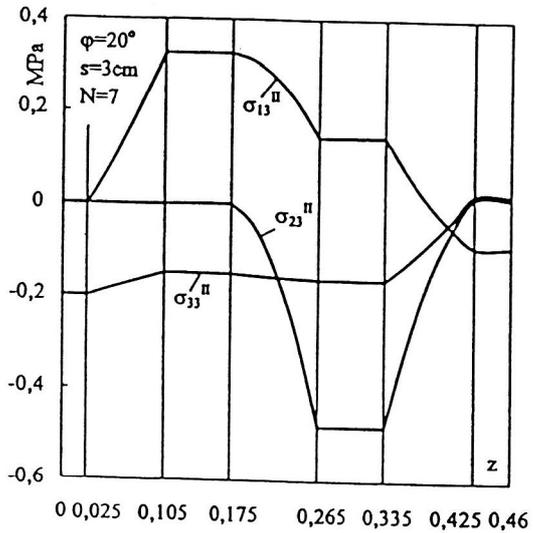
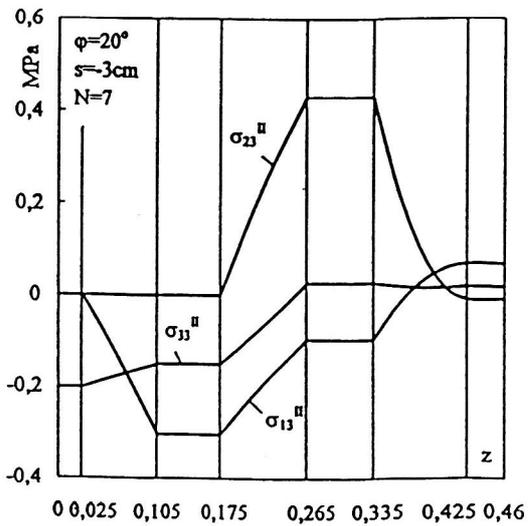
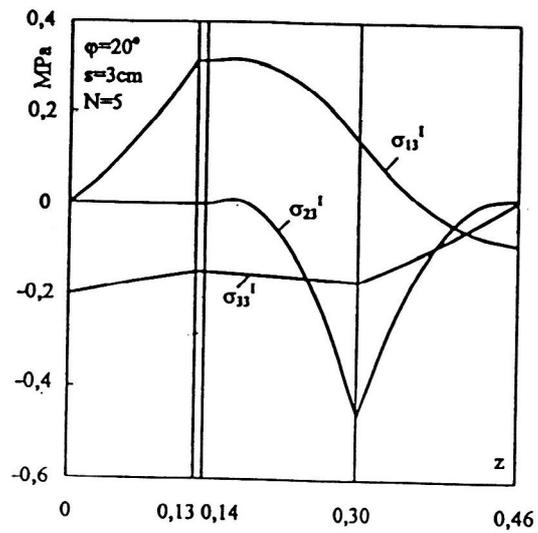
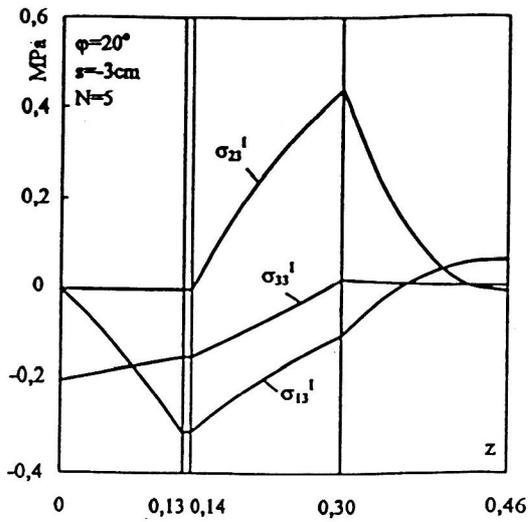
10. Kulikov G.M.: Variational equation for the nonlinear multilayered anisotropic shell of variable thickness. Trans. TU Tambov 3, 1-2, (1997), 119-126.
11. Malmeisters A., Tamuzs V., Teters G.: Mechanik der Polymerwerkstoffe. Berlin, Akademie-Verlag (1977), 597 S.
12. Patel H.P., Kennedy R.H.: Nonlinear finite element analysis for composite structures of axisymmetric geometry and loading. Computers and Structures 15, 1, (1982), 79-84.
13. Rothert H., Gall R.: On the three-dimensional computation of steel-belted tires. Tire Science and Technology 14, 2, (1986), 116-124.
14. Washizu K.: Variational Methods in Elasticity and Plasticity. Oxford, Pergamon Press, Third edition (1982).



(c)

(d)

Bild 4



(e)

(f)

Bild 4. Verteilung der quergerichteten Spannungen σ_{13}^I (Schichtungsvariante I) und σ_{13}^{II} (Schichtungsvariante II) über die Querschnittsdicke an den Stellen $s = \pm 3$ cm ;
 (a), (b) bei $\varphi = 0^\circ$; (c), (d) bei $\varphi = 10^\circ$; (e), (f) bei $\varphi = 20^\circ$

Dieser Artikel (Teil I) ist Ergebnis einer durch den internationalen Fonds INTAS / RFBR (Projekt 95-525) geförderten Zusammenarbeit.

Adressen: Professor Dr. Gennadi Kulikov, Dept. of Applied Mathematics and Mechanics, Tambov State Technical University, Sovetskaya Street 106, RU-392620 Tambov; Professor Dr. techn. Friedrich Böhm, Professor Dr. sc. techn. Albert Duda, Dr. rer. nat. Ralf Wille, Institut für Mechanik, Technische Universität Berlin, Sekretariat MS 4, Einsteinufer 5/7, D-10587 Berlin