

Probabilistische Design-Methoden und ihre Anwendung bei der strukturmechanischen Auslegung von Turbinenschaufeln

R. Mücke, A. Jocksch

Thermische und mechanische Randbedingungen sowie Materialeigenschaften und geometrische Größen unterliegen in realen Bauteilen einer gewissen Streuung. Während diese bei deterministischen strukturmechanischen Analysen, wie sie heute fast ausschliesslich Verwendung finden, nicht berücksichtigt werden, sondern lediglich eine „Musterantwort“ der Struktur ermittelt wird, können mit probabilistischen Design-Methoden auch die Verteilungsfunktionen der stochastischen Eingangsgrößen in die Strukturanalyse einbezogen werden. Als Resultat erhält man die empirischen Verteilungen der Ergebnisgrößen sowie die Sensitivitäten der stochastischen Modellparameter. Im Beitrag werden mehrere probabilistische Design-Methoden erläutert und deren Anwendbarkeit auf reale komplexe Bauteilberechnungen beurteilt. Am Beispiel einer probabilistischen Analyse der zyklischen Lebensdauer einer Gasturbinenschaufel werden schliesslich die Herausforderungen bei der Anwendung der direkten Monte-Carlo-Simulationsmethode auf reale Bauteile dargestellt sowie die Ergebnisse und die Vorgehensweise kritisch diskutiert.

1 Einleitung

Bei der strukturmechanischen Auslegung von Bauteilen wird meist davon ausgegangen, dass sowohl die strukturmechanischen Zusammenhänge wie auch die Modellparameter durch deterministische Größen beschreibbar sind. In der Realität ist dies aber nicht der Fall. So werden z.B. Materialparameter meist aus Versuchsergebnissen ermittelt, die eine z.T. erhebliche Streuung aufweisen. Typischerweise sind für viskoplastische Dehnungen Streuungen in der Größenordnung von 10-50%, für LCF-Ermüdung von 50-100% (Faktor 2) und für HCF-Ermüdung bis 1000% (Faktor 10) zu erwarten (Lemaitre und Chaboche, 1990). Die Ursachen dafür sind physikalischer und nicht messtechnischer Natur und liegen meist in mikromechanischen Phänomenen (z.B. Gefügeinhomogenitäten, mikrostrukturelle Fehlstellenbewegungen, usw.) begründet, deren Beschreibbarkeit und Simulationsmöglichkeit in realen Bauteilen mit heutigen Methoden an Grenzen stoßen. Als Ergebnis der deterministischen Betrachtung wird daher eine Strukturantwort erhalten, die sich lediglich auf einen möglichen Zustand des Bauteiles bezieht. Abweichungen von dieser „Musterantwort“ werden nicht oder durch zusätzliche Sensitivitätsanalysen ermittelt, die i.a. nur den Einfluss einzelner Eingangsgrößen auf die Strukturantwort widerspiegeln, nicht jedoch auch die gegenseitige Wechselwirkung der Modellparameter berücksichtigen.

Einhergehend mit der rasanten Entwicklung der Computertechnik wurden in den letzten Jahrzehnten in der Strukturmechanik bedeutende Verbesserungen und Erweiterungen der kontinuumsmechanischen Modelle und deren effiziente numerische Umsetzung erreicht. Beispiele dafür sind enorme Fortschritte auf dem Gebiet der Material- und Schädigungsmodelle, aber auch bei der Entwicklung effizienter numerischer Algorithmen zur Lösung großer Gleichungssysteme. Ein Ergebnis dieses Fortschrittes ist es aber auch, dass die Berechnungsmodelle tendenziell immer größer, immer komplexer und damit auch unhandlicher werden, ohne damit in jedem Fall eine qualitativ neue Stufe der Ergebnisaussagefähigkeit zu erreichen. Um dennoch bei der Interpretation der Ergebnisse die jedem Modell innewohnenden Unbestimmtheiten zu berücksichtigen, werden in der Ingenieurpraxis häufig Sicherheitsfaktoren eingeführt, die in ihrer Größenordnung teilweise den Einfluss aufwendig simulierter Effekte übersteigen.

Ein Ausweg aus dieser Situation ist die Anwendung probabilistischer Design-Methoden, bei denen die Streuungen ausgewählter Modellparameter von vornherein Berücksichtigung finden. Voraussetzungen dafür sind eine stochastische Beschreibung signifikanter Modellparameter sowie die Parametrisierung des Berechnungsmodells bezüglich dieser stochastischen Variablen. Wie später erläutert, wird die Anwendbarkeit bestimmter probabilistischer Verfahren auf reale Bauteile durch eine massive Parallelisierung des Berechnungsprozesses deutlich erweitert.

Als Ergebnis probabilistischer Analysen erhält man die empirischen Verteilungsfunktionen ausgewählter Analyseergebnisse sowie die Sensitivitäten der stochastischen Modellparameter. Daraus ergeben sich wichtige Hinweise bezüglich Robustheit und Stabilität des untersuchten Strukturverhaltens.

Da es heute vergleichsweise wenig Literatur zu probabilistischen Design-Methoden gibt, werden in diesem Beitrag zunächst die Grundbegriffe probabilistischer Auslegeverfahren zusammenfassend dargestellt. Für ergänzende Hinweise dazu siehe auch (Reh, 1993). Anschliessend werden drei Verfahren vorgestellt und deren Vor- und Nachteile unter dem Gesichtspunkt ihrer Anwendbarkeit in realen Bauteilanalysen beurteilt. Es wird dann die Anwendung der direkten Monte-Carlo-Simulationsmethode am Beispiel einer Lebensdaueranalyse einer Turbinenschaufel demonstriert. Abschliessend wird die beschriebene Vorgehensweise kritisch diskutiert und die Notwendigkeit eines verbesserten stochastischen Modells begründet.

2 Grundbegriffe stochastischer Auslegeverfahren

In stochastischen Auslegeverfahren wird zwischen deterministischen und stochastischen Modellparametern unterschieden. Die stochastischen Modellparameter, auch stochastische Variablen genannt, werden durch Zufallsvariablen mit einer bestimmten Verteilungsfunktion beschrieben und in einem Vektor \mathbf{b}

$$\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_{n_b})^T \quad (1)$$

zusammengefasst. Typische stochastische Variablen sind

- geometrische Parameter, deren Streuung meist durch Guss- und Bearbeitungstoleranzen angegeben ist,
- Parameter in den konstitutiven Gesetzen (z.B. Elastizitätsmodul, thermischer Ausdehnungskoeffizient, Verfestigungsparameter),
- Parameter der Materialbeanspruchbarkeit (z.B. Elastizitätsgrenze, Zugfestigkeit, Parameter der Low Cycle (LCF) und High Cycle (HCF) Ermüdungsfestigkeit) sowie
- Belastungen, wobei zwischen stochastischen Belastungen (z.B. Windlasten, Erdbebenanregungen, thermoakustische Anregungen) und unbestimmten Belastungen, d.h. im gewissen Grade unbekannt oder schwierig präzise vorhersagbare Belastungen, unterschieden werden soll.

Neben stochastischen Variablen, die von einem zum anderen Bauteil variieren, können auch Zufallsfelder beschrieben werden, die die Streuung eines Parameters innerhalb eines Bauteiles angeben (z.B. eine ortsabhängige Materialbeanspruchbarkeit infolge von Gussfehlern). Für die Behandlung von Zufallsfeldern werden diese, ähnlich wie bei Finite-Element-Methoden, diskretisiert und damit eine Transformation der kontinuierlichen Parameter in diskrete, i.a. korrelierte stochastische Variablen ermöglicht, siehe dazu z.B. (Kleiber und Hien, 1992) und (Reh, 1993).

Für die Auswertung der Simulationsergebnisse muss der Begriff des „Bauteilversagens“ definiert werden. Dazu wird eine Versagensfunktion $g(\mathbf{b}, \mathbf{u})$ eingeführt wobei

$$\begin{aligned} g(\mathbf{b}, \mathbf{u}) \leq 0 & \quad \text{den Versagensbereich und} \\ g(\mathbf{b}, \mathbf{u}) > 0 & \quad \text{den sicheren Bereich} \end{aligned}$$

charakterisieren. Die Grenze $g(\mathbf{b}, \mathbf{u}) = 0$ wird im Raum der stochastischen Variablen \mathbf{b} durch die $(n_b - 1)$ -dimensionale Hyperfläche beschrieben.

Ein typisches Beispiel für eine Versagensfunktion in Form eines Spannungskriteriums ist

$$g(\mathbf{b}, \mathbf{u}) = \sigma_{krit} - \sigma_{V,FEM}(\mathbf{b}, \mathbf{u}) \quad (2)$$

wobei σ_{krit} eine aus einachsigen Zugversuchen ermittelte kritische Beanspruchbarkeit des Werkstoffes und $\sigma_{V,FEM}(\mathbf{b}, \mathbf{u})$ die durch die Strukturanalyse, i.a. basierend auf der Finite-Element-Methode, berechnete Vergleichsspannung (z.B. nach v. Mises) bezeichnen. Die Ausfallwahrscheinlichkeit P_f des Bauteils ergibt sich dann aus

$$P_f = P[g(\mathbf{b}, \mathbf{u}) \leq 0] = \int_{g(\mathbf{b}, \mathbf{u}) \leq 0} f_b(\mathbf{b}) db_1 db_2 \dots db_{n_b} \quad (3)$$

Ferner lässt sich für stochastisch unabhängige Variablen die gemeinsame Verteilungsdichtefunktion $f_b(\mathbf{b})$ aus dem Produkt der Verteilungsdichtefunktionen der einzelnen stochastischen Variablen entwickeln, d.h. es gilt

$$f_b(\mathbf{b}) = f_1(b_1) \cdot f_2(b_2) \cdot \dots \cdot f_{n_b}(b_{n_b}) \quad (4)$$

3 Probabilistische Design-Methoden

Eine zentrale Aufgabe bei der Anwendung probabilistischer Design-Methoden ist die Berechnung des Versagensintegrals (3). Eine analytische Lösung ist i.a. nicht möglich, da einerseits das Integrationsgebiet $g(\mathbf{b}, \mathbf{u}) \leq 0$ sehr komplex sein kann und andererseits die Versagensfunktion $g(\mathbf{b}, \mathbf{u})$ nicht explizit gegeben ist, sondern mit Finite-Element-Methoden nur punktweise (für bestimmte \mathbf{b}) ermittelt wird. Im folgenden werden nun drei probabilistische Methoden vorgestellt, die sich im wesentlichen in der Art und Weise der Auswertung des Versagensintegrals unterscheiden.

Zuverlässigkeitsverfahren

Bei der Anwendung von Zuverlässigkeitsverfahren wird die Versagensfunktion $g(\mathbf{b}, \mathbf{u})$ im Designpunkt durch eine Taylorreihenentwicklung approximiert und diese nach dem ersten oder zweiten Glied abgebrochen. Dazu werden zunächst die stochastischen Variablen in standard-normalverteilte, nicht korrelierte Variablen \mathbf{r} transformiert. Im Raum der \mathbf{r} -Variablen ist der Designpunkt dann dadurch gekennzeichnet, dass der Abstand zwischen dem Ursprung $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ und der Versagensfläche $g(\mathbf{b}(\mathbf{r}), \mathbf{u}(\mathbf{r})) = 0$ ein Minimum annimmt. Das Auffinden des Designpunktes stellt damit ein Optimierungsproblem der Form

$$\text{Min} \{ f(\mathbf{r}) = \mathbf{r}^T \mathbf{r} \mid g(\mathbf{b}(\mathbf{r}), \mathbf{u}(\mathbf{r})) = 0 \} \quad \forall \mathbf{r} \in \mathfrak{R}^{n_b} \quad (5)$$

dar, welches iterativ gelöst werden muss.

Ein zentrales Problem bei der Anwendung von Zuverlässigkeitsverfahren ist die effiziente Berechnung der Sensitivitäten erster, eventuell auch zweiter Ordnung, $\frac{\partial g(\mathbf{b}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{b}}$ und $\frac{\partial}{\partial \mathbf{b}} \left(\frac{\partial g(\mathbf{b}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{b}} \right)$, die für die Taylorreihenentwicklung und die Lösung des Optimierungsproblems notwendig sind. Dafür stehen analytische, semianalytische sowie numerische Methoden zur Verfügung (Haftka und Adelman, 1989). Während numerische Verfahren (numerische Bildung des Differenzenquotienten) mit einem grossen Berechnungsaufwand verbunden sind, zeigen die analytischen und semianalytischen Verfahren gewisse Einschränkungen in der Anwendbarkeit. Bei analytischen Methoden, z.B., werden jene Grössen in der Variationsformulierung, die von den stochastischen Variablen abhängen, in einer Taylorreihe entwickelt und diese nach dem ersten oder zweiten Glied abgebrochen. Als Ergebnis erhält man nach Kleiber und Hien (1992) ein sogenanntes stochastisches Variationsprinzip mit Termen 0-ter, 1-ter und 2-ter Ordnung, das die Grundlage einer erweiterten Finite-Element-Diskretisierung darstellt. Diese Methode setzt damit einen wesentlichen Eingriff in die verwendete Finite-Element-Software voraus. Ferner können als stochastische Variablen nur jene verwendet werden, deren Sensitivitäten bereits in der Variationsformulierung berücksichtigt wurden. Unter dem Gesichtspunkt einer universellen Anwendbarkeit in einer schon vorhandenen Software-Umgebung sind den analytischen Verfahren der Sensitivitätsanalyse daher enge Grenzen gesetzt.

Es soll in diesem Zusammenhang auf eine ähnliche Problematik bei gradientenbasierenden Optimierungsmethoden hingewiesen werden. Das Hauptproblem ist auch dort die effiziente Ermittlung der Sensitivitäten der Zielfunktionen bezüglich der Designvariablen, siehe auch (Mücke, 1999). Eine Kombination von Optimierungsmethoden und Zuverlässigkeitsverfahren weist daher gewisse Synergien auf.

Antwortflächenverfahren

Bei den Antwortflächenverfahren (surface response methods) wird die Versagensfunktion durch einen vorgegebenen Funktionenansatz approximiert. Dabei finden häufig quadratische Polynome der Form

$$g(\mathbf{b}, \mathbf{u}) \approx \tilde{g}(\mathbf{b}, \mathbf{u}) = c_0(\mathbf{u}) + \sum_{i=1}^{n_b} c_i(\mathbf{u}) b_i + \sum_{i=1}^{n_b} \sum_{j=1}^{n_b} c_{ij}(\mathbf{u}) b_i b_j \quad (6)$$

Verwendung, wobei die Koeffizienten $c_0(\mathbf{u})$, $c_i(\mathbf{u})$ und $c_{ij}(\mathbf{u})$ mit $c_{ij}(\mathbf{u}) = c_{ji}(\mathbf{u})$ aus Ergebnissen „numerischer Experimente“ (d.h. aus Finite-Element-Analysen) nach einem bestimmten Versuchsplan ermittelt werden. Das Problem dieser Vorgehensweise besteht allerdings darin, dass im Interesse einer hinreichend genauen Approximation der Versagensfunktion das Zentrum des Versuchsplanes möglichst in unmittelbare Nähe der Versagensfläche $g(\mathbf{b}, \mathbf{u}) = 0$ zu legen ist, Bild 1. Da die Versagensfläche i.a. a-priori nicht bekannt und eine Extrapolation der Versagensfunktion über den Versuchsplan hinaus problematisch ist, ist ein iteratives Vorgehen notwendig.

Mit der approximierten Versagensfunktion kann das Versagensintegral durch numerische Methoden, z.B. eine Monte-Carlo-Simulation, effizient berechnet werden.

Direkte Monte-Carlo-Simulationsmethoden

Bei den direkten Monte-Carlo-Simulationsmethoden werden den stochastischen Variablen Zufallsgrößen mit vorgegebenen Verteilungsfunktionen zugewiesen und mit den so generierten Parametersätzen n_{sim} voneinander unabhängige Finite-Element-Simulationen durchgeführt. Im Gegensatz zu den Antwortflächenverfahren, bei denen die Simulationen systematisch durchgeführt werden, sind bei der direkten Monte-Carlo-Simulationsmethode bereits die Parameter des Strukturmodells stochastisch verteilt, Bild 1. Als Ergebnis stehen n_{sim} Lösungen der strukturmechanischen Gleichungen zur Verfügung, die statistisch ausgewertet werden, siehe Bild 2. Dazu wird die Indikatorfunktion

$$I(g^{(s)}(\mathbf{b}, \mathbf{u}) \leq 0) = \begin{cases} 1, & \text{für } g \leq 0 \\ 0, & \text{für } g > 0 \end{cases} \quad (7)$$

eingeführt und damit die Anzahl n_f derjenigen Analyseergebnisse ermittelt, die ein Versagen der Struktur vorhersagen. Die Versagenswahrscheinlichkeit P_f kann dann aus

$$P_f = \frac{1}{n_{sim}} \sum_{s=1}^{n_{sim}} I(g^{(s)}(\mathbf{b}, \mathbf{u}) \leq 0) = \frac{n_f}{n_{sim}} \quad (8)$$

bestimmt werden.

Die Ergebnisse der Strukturanalysen bilden ein sogenanntes Meta-Modell (Marczyk, 1999), aus dem wichtige Hinweise über die Robustheit der Struktur abgeleitet werden können. So lässt beispielsweise eine wenig kompakte oder sogar nichtzusammenhängende „Wolke“ der Strukturantwort die Schlussfolgerung zu, dass starke Nichtlinearitäten, wie z.B. bei einem Stabilitätsproblem, die Strukturantwort wesentlich beeinflussen.

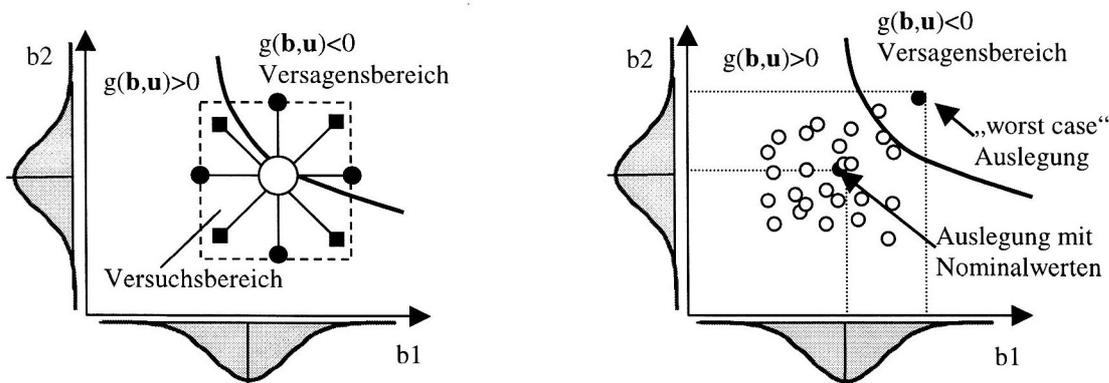


Bild 1: Antwortflächenverfahren (links) und direkte Monte-Carlo-Simulationsmethode (rechts).

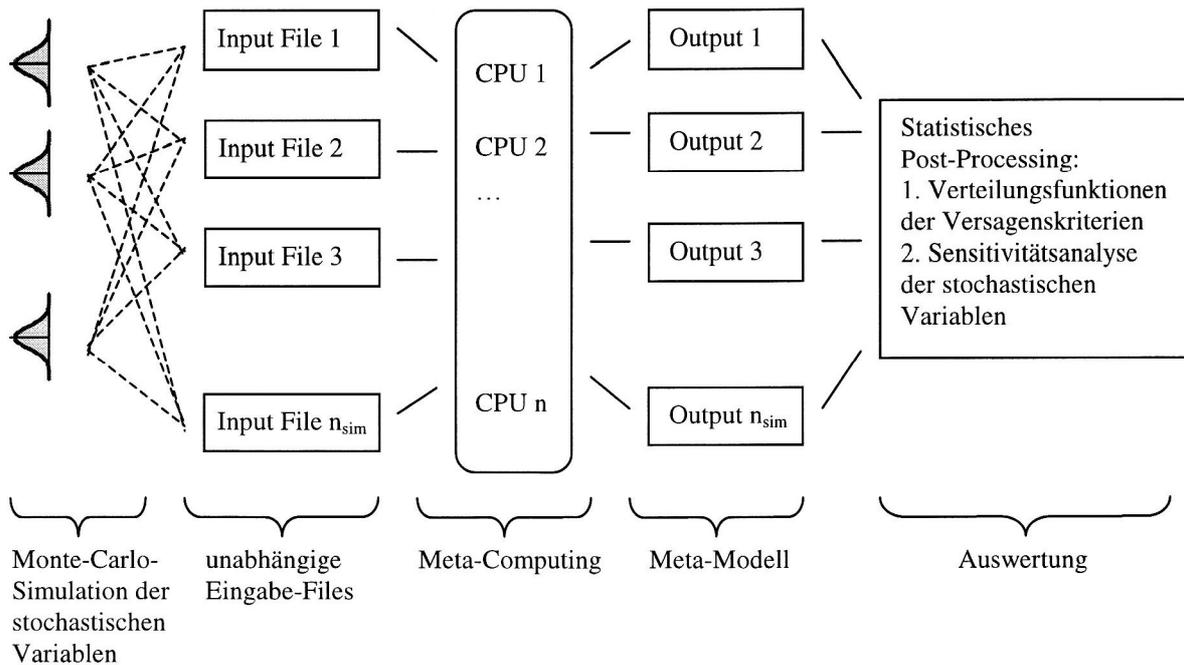


Bild 2: Vorgehensweise bei der direkten Monte-Carlo-Simulationsmethode.

4 Einige Bemerkungen zur Anwendbarkeit der genannten Verfahren

Im Gegensatz zu den Zuverlässigkeitsverfahren sind das Antwortflächenverfahren und die direkte Monte-Carlo-Methode vom physikalischen Problem unabhängig formulierbar und damit für eine universelle Anwendung in multidisziplinären Simulationsumgebungen prinzipiell geeignet. Dem stehen allerdings ein i.a. höherer Berechnungsaufwand und gegebenenfalls eine größere Ungenauigkeit den ermittelten Ausfallwahrscheinlichkeiten gegenüber.

Da das Antwortflächenverfahren und die direkte Monte-Carlo-Simulationsmethode eine massive Parallelisierung der Berechnungen zulassen, kann die Gesamtrechenzeit, die für probabilistische Analysen notwendig ist, durchaus vertretbar sein. Während beim Antwortflächenverfahren die Anzahl der Simulationen von der Anzahl der stochastischen Variablen, aber auch von einem guten Anfangswert für die Abschätzung des Zentrums des Versuchsplanes abhängig ist, ist bei der direkten Monte-Carlo-Methode die Anzahl der Simulationen mit der geforderten Ausfallwahrscheinlichkeit verknüpft und wird in der Literatur mit $n_{sim} = 100 / P_f$ angegeben (Bjerager, 1990). In eigenen Berechnungen wurde mit Hilfe der Latin Hypercube Varianzreduktionstechnik eine ausreichende Stabilität der Ergebnisse nach bereits

$$n_{sim} \approx 10 / P_f \quad (9)$$

Simulationen erreicht.

	Zuverlässigkeitsanalysen	Antwortflächenverfahren	direkte Monte-Carlo-Simulationsmethode
numerischer Aufwand	gering bei analytischer Gradientenbildung	hoch bei $n_b > 10$	abhängig von P_f , unabhängig von n_b
Ergebnis	Ausfallwahrscheinlichkeit P_f	P_f und empirische Verteilungsfunktion	P_f und empirische Verteilungsfunktion
Genauigkeit	hoch	hoch wenn $g(\mathbf{b}, \mathbf{u}) = 0$ innerhalb Versuchsplan	abhängig von P_f und n_{sim}
Anwendbarkeit	problemabhängig	universell	universell

Tabelle 1: Charakteristiken verschiedener probabilistischer Design-Methoden.

n_b : Anzahl der stochastischen Variablen, n_{sim} : Anzahl der Strukturanalysen, P_f : Ausfallwahrscheinlichkeit

5 Sensitivitätsanalyse bei direkter Monte-Carlo-Simulationsmethode

Sensitivitätsanalysen beschreiben den im Designpunkt linearisierten Zusammenhang zwischen den einzelnen Designvariablen und der Strukturantwort. Sie tragen wesentlich zum verbesserten physikalischen Verständnis komplexer Strukturen bei. Ist ein Meta-Modell der untersuchten Struktur vorhanden, können die Sensitivitäten ohne zusätzlichen Aufwand mit Hilfe des Rangkorrelationskoeffizienten näherungsweise bestimmt werden. Dazu betrachtet man für jede stochastische Variable b_i mit $i=1,2,\dots,n_b$ den dazugehörigen Vektor der einzelnen zufälligen Realisierungen

$$\mathbf{b}_i = [b_{i,1}, b_{i,2}, \dots, b_{i,n_{sim}}]^T \quad (10)$$

Beachte, dass ein Histogramm der Komponenten dieser Vektoren die für diese Variable vorgegebene Verteilungsfunktion widerspiegelt. Dies ist natürlich umso besser der Fall, je höher die Anzahl n_{sim} der durchgeführten Simulationen ist. Gleichermäßen verfährt man mit den n_{out} Ergebnisgrößen der Simulationen, die in Vektoren \mathbf{y}_j zusammengefasst werden. Anschließend wird der Rang der einzelnen Vektoreinträge bestimmt, d.h. ihre Position, wenn diese der Größe nach geordnet wären:

$$\mathbf{b}_i = \begin{bmatrix} b_{i,1} \\ \vdots \\ b_{i,n_{sim}} \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Rang}(\mathbf{b}_i) = \begin{bmatrix} Rb_{i,1} = \text{Rang von } b_{i,1} & \text{innerhalb von } \mathbf{b}_i \\ \vdots \\ Rb_{i,n_{sim}} = \text{Rang von } b_{i,n_{sim}} & \text{innerhalb von } \mathbf{b}_i \end{bmatrix} \quad \text{mit } i = 1, 2, \dots, n_b \quad (11)$$

$$\mathbf{y}_j = \begin{bmatrix} y_{j,1} \\ \vdots \\ y_{j,n_{sim}} \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Rang}(\mathbf{y}_j) = \begin{bmatrix} Ry_{j,1} = \text{Rang von } y_{j,1} & \text{innerhalb von } \mathbf{y}_j \\ \vdots \\ Ry_{j,n_{sim}} = \text{Rang von } y_{j,n_{sim}} & \text{innerhalb von } \mathbf{y}_j \end{bmatrix} \quad \text{mit } j = 1, 2, \dots, n_{out} \quad (12)$$

Der Rangkorrelationskoeffizient C_{ij} , der ein Maß für die Sensitivität der Ergebniswerte in bezug auf die stochastischen Variablen darstellt, ist durch

$$C_{ij} = \frac{\sum_{s=1}^{n_{sim}} (Rb_{i,s} - \overline{Rb}_i)(Ry_{j,s} - \overline{Ry}_j)}{\sqrt{\sum_{s=1}^{n_{sim}} (Rb_{i,s} - \overline{Rb}_i)^2} \sqrt{\sum_{s=1}^{n_{sim}} (Ry_{j,s} - \overline{Ry}_j)^2}} \quad i = 1, 2, \dots, n_b, \quad j = 1, 2, \dots, n_{out} \quad (13)$$

gegeben (Ang u.a., 1975). Dabei sind $Rb_{i,s}$ und $Ry_{j,s}$ der Rang von $b_{i,s}$ innerhalb des Vektors \mathbf{b}_i bzw. der Rang von $y_{j,s}$ innerhalb des Vektors \mathbf{y}_j entsprechend (11) und (12). \overline{Rb}_i und \overline{Ry}_j sind die Mittelwerte von $Rb_{i,s}$ und $Ry_{j,s}$, für die stets

$$\overline{Rb}_i = \overline{Ry}_j = \frac{1 + n_{sim}}{2} \quad (14)$$

gilt.

In der praktischen Anwendung wird der relative (bzw. der prozentuale) Rangkorrelationskoeffizient

$$C_{ij} \% = \frac{C_{ij}}{\sum_{i=1}^{n_b} C_{ij}} \cdot 100\% \quad (15)$$

benutzt, um die Sensitivitäten der Variablen b_i darzustellen und zu bewerten.

Die so gewonnenen Aussagen haben große praktische Bedeutung. Sie sollten allerdings vorsichtig interpretiert werden, da im Rangkorrelationskoeffizienten die deterministischen Sensitivitäten und die Einflüsse der Streuungen der einzelnen stochastischen Variablen miteinander kombiniert sind. An einem einfachen Gedankenexperiment soll dies veranschaulicht werden. In einem mit der direkten Monte-Carlo-Methode bereits untersuchten System mit mehreren Variablen soll eine neue stochastische Variable hinzugefügt werden. Die Sensitivität dieser neuen Variablen ist genau dann groß, wenn durch diese die Rangvektoren (12) der Ergebnisse „in Richtung“ des Rangvektors (11) der neuen Basisvariablen verändert werden. Dies tritt genau dann auf, wenn die deterministische Sensitivität dieser neuen stochastischen Variablen hoch und/oder deren Streuung groß ist.

6 Zur Auslegung einer Gasturbinenleitschaufel mit der direkten Monte-Carlo-Simulationsmethode

In diesem Abschnitt wird die Anwendung der direkten Monte-Carlo-Simulationsmethode auf die Analyse der LCF-Ermüdungsfestigkeit (Low Cycle Fatigue) einer Gasturbinenleitschaufel dargestellt. Dabei wird weniger auf die konkreten Ergebnisse eingegangen, sondern im wesentlichen die Methodik der Anwendung probabilistischer Verfahren auf reale komplexe Bauteile erläutert. Hinweise über Funktion, Wirkungsweise und Auslegung von Gasturbinen im allgemeinen findet man in der Monographie von Traupel (1982). Für einen Einblick in spezielle Probleme der strukturmechanischen Auslegung von Gasturbinenschaufeln sei auch auf Mücke (1998) verwiesen.

Typische Beanspruchungen einer Turbinenschaufel

Die Hauptbeanspruchungen einer Turbinenschaufel ergeben sich aus

- den thermischen Spannungen im stationären Betrieb sowie beim An- und Abfahren und bei Laständerungen der Maschine,
- den aerodynamischen Drucklasten aus dem Druckabbau über der Turbinenstufe,
- den Fliehkräften bei Turbinenlaufschaufeln sowie
- den dynamischen Belastungen bei Schaufelschwingungen.

Neben diesen Primärbeanspruchungen unterliegen Schaufelwerkstoffe einer Kriechbeanspruchung sowie einer hohen zyklischen Ermüdungsbeanspruchung im LCF-Bereich. Die Ermüdungsbeanspruchbarkeit, die im Mittelpunkt der hier dargestellten Untersuchungen steht, wird durch die Anrisslastspielzahl N_i quantifiziert, die die Anzahl der zulässigen Beanspruchungszyklen bis zum ersten makroskopischen Anriss in der Turbinenschaufel beschreibt.

Thermo-mechanische Analysen am 2D-Schaufelblattmodell

Für die Anwendung probabilistischer Verfahren sollte das Strukturmodell möglichst einfach sein, um den numerischen Aufwand in tolerierbaren Grenzen zu halten. Aus diesem Grunde wurde aus detaillierten 3D-Finite-Element-Simulationen der gesamten Schaufel ein 2D-Schaufelblattschnitt identifiziert, der für die Gesamtkomponente lebensdauerbegrenzend ist und an diesem die probabilistischen Analysen durchgeführt.

Ein erster Schritt bei der Bewertung der zyklischen Lebensdauer ist die numerische Lösung des gekoppelten Differentialgleichungssystems der Thermoelastizität. Dabei wird zunächst in einem thermischen Berechnungslauf die Fouriersche Differentialgleichung der Wärmeleitung mit konvektiven Randbedingungen gelöst und anschließend die ermittelte Temperaturverteilung bei der Lösung des Laméschen Differentialgleichungssystems der Thermoelastizität berücksichtigt (Boley und Weiner, 1960). Für die Ermittlung der zyklischen Lebensdauer werden die elastisch-plastischen Dehnschwingbreiten eines Belastungszyklus, die unter den Voraussetzungen der Deformationstheorie der Plastizität (Khan und Huang, 1995) aus den elastischen Spannungen, der Ramberg-Osgood-Beziehung und der Neuber-Hyperbel abgeleitet werden, gemeinsam mit einer den Belastungszyklus charakterisierenden Schädigungstemperatur mit Anrisslastspielzahlen aus Versuchsergebnissen korreliert. Eine alternative Methode ist die Verwendung der Coffin-Manson-Beziehung oder verschiedener kontinuumsmechanischer Modelle, die die Entwicklung einer oder mehrerer Schädigungsvariablen beschreiben (Lemaitre und Chaboche, 1990).

Stochastische Variablen

Typische stochastische Modellparameter für probabilistische Schaufelanalysen sind in Tabelle 2 zusammengestellt. Die Verteilungsfunktionen und deren Parameter wurden aus Messungen und Erfahrungswerten abgeleitet. Im Berechnungsprozess werden die Streuungen der stochastischen Variablen je nach physikalischer Bedeutung unterschiedlich realisiert, wobei die Summenvorschrift

$$b = C + b_0 \tag{16}$$

die Multiplikationsvorschrift

$$b = C \cdot b_0 \quad (17)$$

sowie die verallgemeinerte Multiplikationsvorschrift

$$b = C_1^\alpha C_2^\beta \cdot b_0 \quad (18)$$

Anwendung finden. Dabei sind mit b_0 jeweils die Nominalwerte der stochastischen Variablen b und mit C (bzw. C_1 und C_2) Realisierungen von Zufallsgrößen bezeichnet, deren Gesamtheit eine vorgegebene Verteilung beschreibt. Die verallgemeinerte Multiplikationsvorschrift in der Form

$$\alpha = C_m^{0.8} C_\alpha \alpha_0 \quad (19)$$

wird für die Variation des heissgasseitigen Wärmeübergangskoeffizienten verwendet, da dieser auch vom Heissgasmassenstrom \dot{m} abhängig ist. Der Exponent von 0.8 resultiert aus einer auf der Nusselt-Beziehung basierenden Skalierungsvorschrift zur Bestimmung von Wärmeübergangskoeffizienten bei erzwungener Konvektion.

Eine andere Möglichkeit der Darstellung der Streuungen einzelner Parameter ist gegeben, wenn diese durch Mittelwerte und 2- σ bzw. 3- σ Minimalwerte beschrieben werden. Bei Kenntnis des Typs der Verteilungsfunktion kann daraus die Standardabweichung bestimmt werden. Diese Methode kann vor allem bei Materialkennwerten angewendet werden, für die i.a. umfangreiche statistische Daten vorliegen.

Software-Umgebung und Durchführung der Berechnungen

Für die thermischen und strukturmechanischen Analysen wurde das Finite-Element-Programmsystem ABAQUS verwendet. Die Anrißastspielzahl wurde mit einem firmeninternen Programm ermittelt, das auf Materialparameter aus einer entsprechenden Datenbank sowie auf die Ergebnisse der ABAQUS-Berechnungen zurückgreift. Der probabilistische Teil der Analysen wurde mit dem kommerziellen, auf der direkten Monte-Carlo-Simulationsmethode basierenden Probabilistik-Tool PROMENVIR (**Probabilistic Mechanical Design Environment**) realisiert. Den Finite-Element-Analyseprogrammen wird außerdem ein kleines Interface-Programm vorgeschaltet, das die stochastischen Variablen in Analyse-Variablen transformiert, die dann direkt in den Eingabefiles der Berechnungsprogramme verwendet werden, Bild 3.

Modellparameter	Verteilungsfunktion	Berechnungsvorschrift
Adiabate Wandtemperatur (heissgasseitig)	$N(\mu = 0, \sigma_{T_{ad}})$	$T_{ad} = C_{ad} + T_{ad,0}$
Kühllufttemperatur	$N(\mu = 0, \sigma_{T_c})$	$T_c = C_c + T_{c,0}$
Wärmeübergangskoeffizient heissgasseitig	$N_m(\mu = 1, \sigma_m)$ $N_\alpha(\mu = 1, \sigma_{\alpha_h})$	$\alpha_h = C_m^{0.8} C_\alpha \alpha_{h,0}$
Wärmeübergangskoeffizient kühlluftseitig	$N(\mu = 1, \sigma_{\alpha_c})$	$\alpha_c = C_c \alpha_{c,0}$
Thermischer Ausdehnungskoeffizient	$N(\mu = 1, \sigma_\lambda)$	$\lambda = C_\lambda \lambda_0$
Druckbelastung	$N(\mu = 1, \sigma_p)$	$p = C_p p_0$
Elastizitätsmodul	$N(\mu = 1, \sigma_E)$	$E = C_E E_0$
Ermüdungsfestigkeit, $N_i = f(\Delta\varepsilon)$	$N_{\log}(\mu = N_{mean}, \sigma_{N_i})$	σ_{N_i} wird aus Differenz von Minimal- und Mittelwerten N_{mean} ermittelt
Wanddicke der keramischen Schutzschicht	$G(\mu = d_{mean}, \sigma_d)$	$d = C_d d_0$

Tabelle 2: Typische stochastische Modellparameter und ihre Verteilungsfunktionen.

$N(\mu, \sigma)$ = Normalverteilung mit Erwartungswert μ und Standardabweichung σ ,

$N_{\log}(\mu, \sigma)$ = log-Normalverteilung, $G(\mu, \sigma)$ = Gleichverteilung.

Das Probabilistik-Tool PROMENVIR unterstützt die Parallelisierung des Berechnungsprozesses auf einem PC- oder Workstation-Cluster (Marczyk, 1999). Diese ist dann besonders effektiv, wenn die zur Anwendung kommenden Analyse- und Interface-Programme auf jedem PC bzw. auf jeder Workstation des benutzten Clusters vorhanden sind. In diesem Fall beschränkt sich der Datentransfer über das Computer-Netzwerk auf jeweils ein File mit den aktuellen stochastischen Variablen und ein File mit den Ergebnissen der Versagensfunktion.

Ergebnisse

Als Ergebnisgrößen wurden exemplarisch die maximale Materialtemperatur, die maximale v. Mises Spannung sowie die minimale Anrisslastspielzahl im Schaufelquerschnitt verwendet. Es wurden 1200 Simulationen durchgeführt, die jeweils aus einer thermischen, einer mechanischen und einer Lebensdaueranalyse bestanden. Da jede Simulation weniger als 5 Minuten Rechenzeit beanspruchte (eine Finite-Element-Diskretisierung mit ca. 14000 Knoten wurde verwendet), wurde mit einer entsprechenden Parallelisierung mit bis zu fünf Workstations eine Gesamtanalysezeit von ca. einem Tag erreicht. Es sei darauf hingewiesen, dass bei Crash-Simulationen im Fahrzeugbau probabilistische Analysen mit Rechenzeiten je Simulation von bis zu mehreren Stunden bereits realisiert wurden (Marczyk und Tanasescu, 1998; Reuter, 1998; Reuter und Watermann, 1999).

Die Ergebnisse der statistischen Auswertung der Monte-Carlo-Simulationen sind in Bild 4 in normierter Form dargestellt. Ein weiteres wichtiges Resultat sind die ermittelten Sensitivitäten der verwendeten stochastischen Variablen, siehe Bild 5. Dadurch können jene Einflussgrößen identifiziert werden, die wesentlich zur Streuung der jeweiligen Ergebnisgröße beitragen. Ein kleinerer Toleranzbereich dieser Variablen (wenn dieser physikalisch realisierbar ist) trägt damit wesentlich zur Verbesserung der Ergebnisqualität bei, während bei stochastischen Variablen die nur eine untergeordnete Bedeutung für die Streuung des Ergebnisses haben, der Toleranzbereich eventuell erweitert werden kann, wodurch Kosteneinsparungen, z.B. bei größeren zulässigen Wandstärketoleranzen, möglich sind.

Diskussion

Die hier vorgestellte Vorgehensweise bei der probabilistischen Analyse von Turbinenschaufeln stellt einen ersten Schritt für ein durchgängiges probabilistisches Auslegungskonzept dar. Das angewendete stochastische Modell bedarf allerdings noch Verbesserungen, um in einem Standardauslegeprozess zuverlässige Angaben liefern zu können.

Eine Herausforderung bei probabilistischen Analysen liegt in der schwierigen Verifikation der zugrundegelegten Modelle und deren Ergebnisse. Dies wird vor allem dann problematisch, wenn die Stückzahl der produzierten Bauteile relativ gering ist, so dass eine statistische Auswertung der Felderfahrung an gewisse Grenzen stößt.

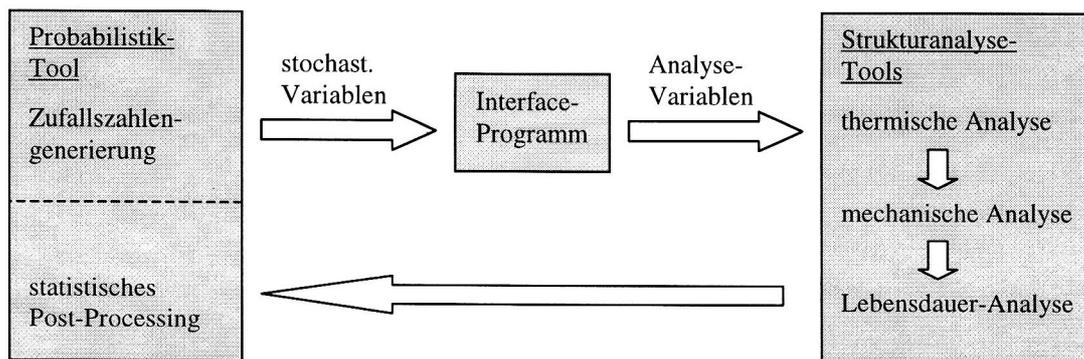


Bild 3: Software-Struktur für probabilistische strukturmechanische Analysen im Turbinendesign.

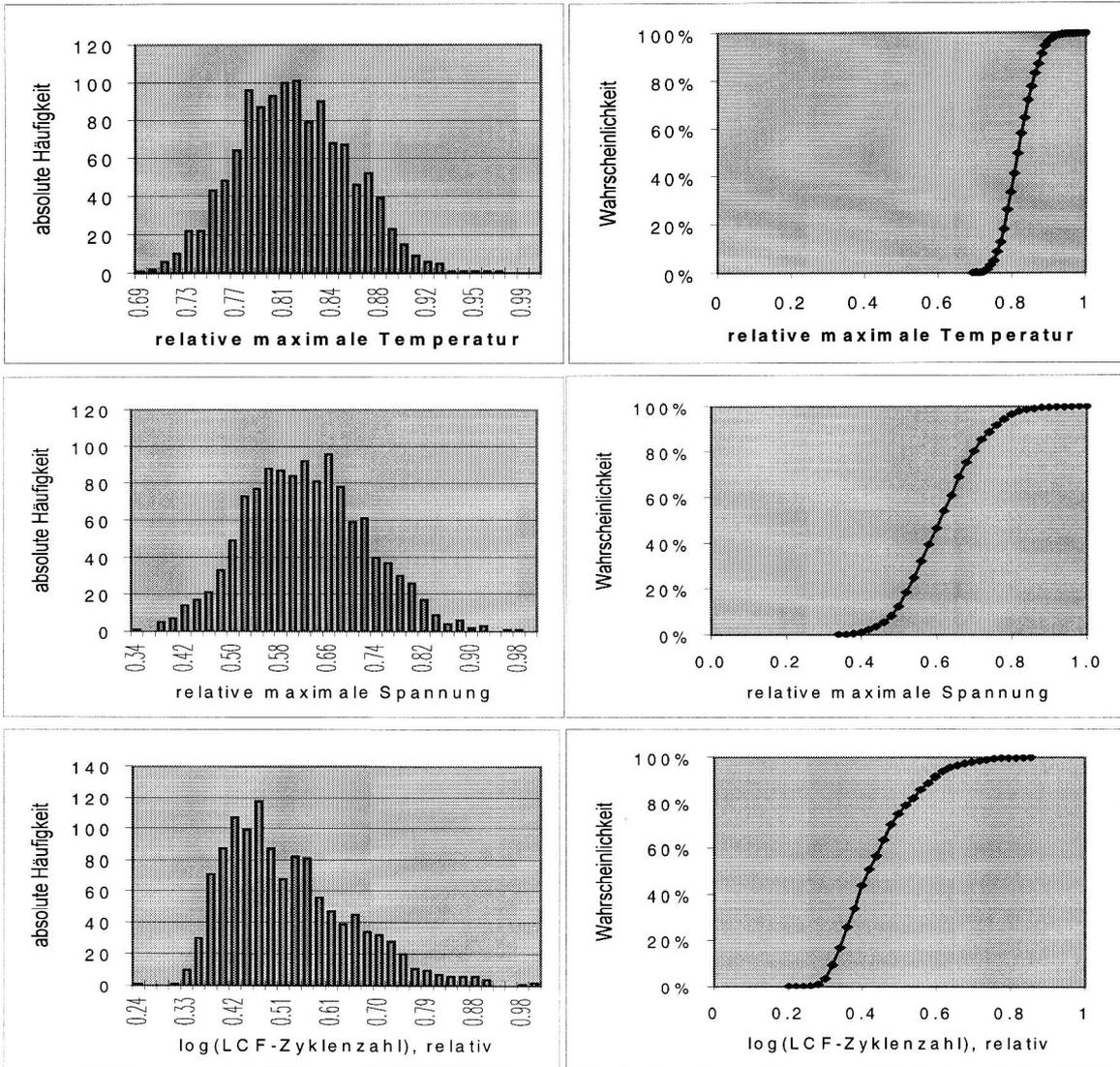


Bild 4: Absolute Häufigkeiten und normierte empirische Verteilungsfunktionen der maximalen Temperatur, der maximalen Spannung sowie der minimalen Anrisslastspielzahl im betrachteten Schaufelschnitt.

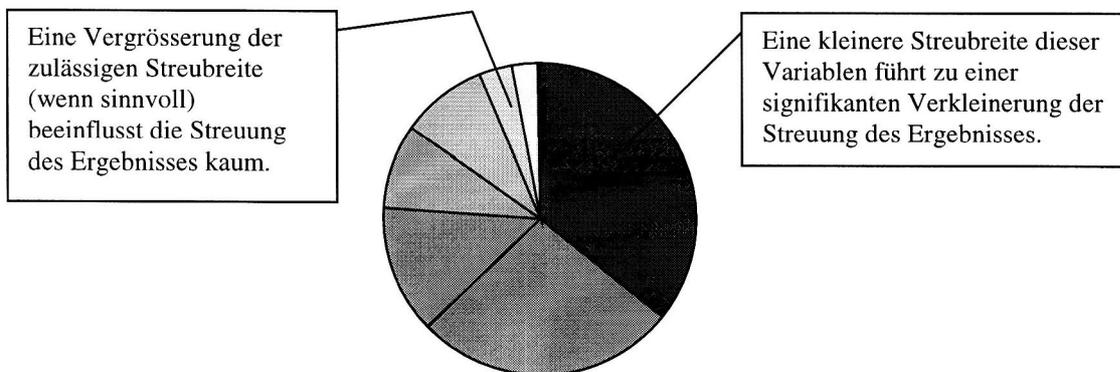


Bild 5: Relative Sensitivitäten (schematisch) bezüglich einer Ergebnisgröße, z.B. der maximalen Spannung.

Ein weiteres prinzipielles Problem liegt in der richtigen Auswahl der unabhängigen stochastischen Variablen. Im beschriebenen Beispiel wurden im wesentlichen solche Größen verwendet, die mehr oder weniger direkt als Parameter im Berechnungsmodell Verwendung finden. Das ist aber bei einer tiefergehenden Analyse nicht mehr der Fall. Die stochastischen Basisvariablen liegen teilweise auf einer anderen physikalischen Betrachtungsebene, z.B. im mikromechanischen Bereich, und diese Variablen haben dann gegebenenfalls Einfluss auf mehrere Eingabegrößen der Finite-Element-Berechnung. Diese Eingabegrößen können dann nicht mehr als voneinander unabhängig betrachtet werden, Bild 6.

7 Zusammenfassung

Die Anwendung probabilistischer Design-Methoden eröffnet neue Wege, um die Aussagefähigkeit von Computersimulationen bei der strukturmechanischen Analyse komplexer Bauteile zu verbessern. Es wurden mehrere Verfahren entwickelt, die die Streuung von Modellparametern bei strukturmechanischen Berechnungen berücksichtigen, wobei vor allem das Antwortflächenverfahren und die direkte Monte-Carlo-Simulationsmethode aufgrund ihrer universellen, vom physikalischen Problem unabhängigen Anwendbarkeit Verwendung gefunden haben. Im allgemeinen ist aber die praktische Umsetzung probabilistischer Design-Methoden bisher wenig fortgeschritten. Gründe dafür liegen nach Ansicht des Autors vor allem im hohen Berechnungsaufwand, den diese Verfahren erfordern, sowie in der Notwendigkeit, geeignete stochastische Modelle für die jeweilige Anwendung zu entwickeln. Außerdem wird die für probabilistische Methoden notwendige Parametrisierung des Berechnungsmodells dann aufwendig, wenn Geometriegrößen in die Analyse einbezogen werden, die auch eine Parametrisierung der Finite-Element-Diskretisierung erfordern. Da ähnliche Probleme bei der Anwendung von Strukturoptimierungsverfahren auftreten, bietet sich eine gemeinsame Vorgehensweise an.

Trotz der genannten Schwierigkeiten werden probabilistische Design-Methoden stärker als bisher eine Rolle in der Bewertung und Auslegung komplexer Strukturen spielen. Die Notwendigkeit dafür wird u.a. auch davon bestimmt, dass für kritische Bauteile, die die Sicherheit und Zuverlässigkeit der Gesamtanlage beeinflussen, vom Kunden oder Gesetzgeber probabilistische Nachweise in zunehmenden Masse gefordert werden.

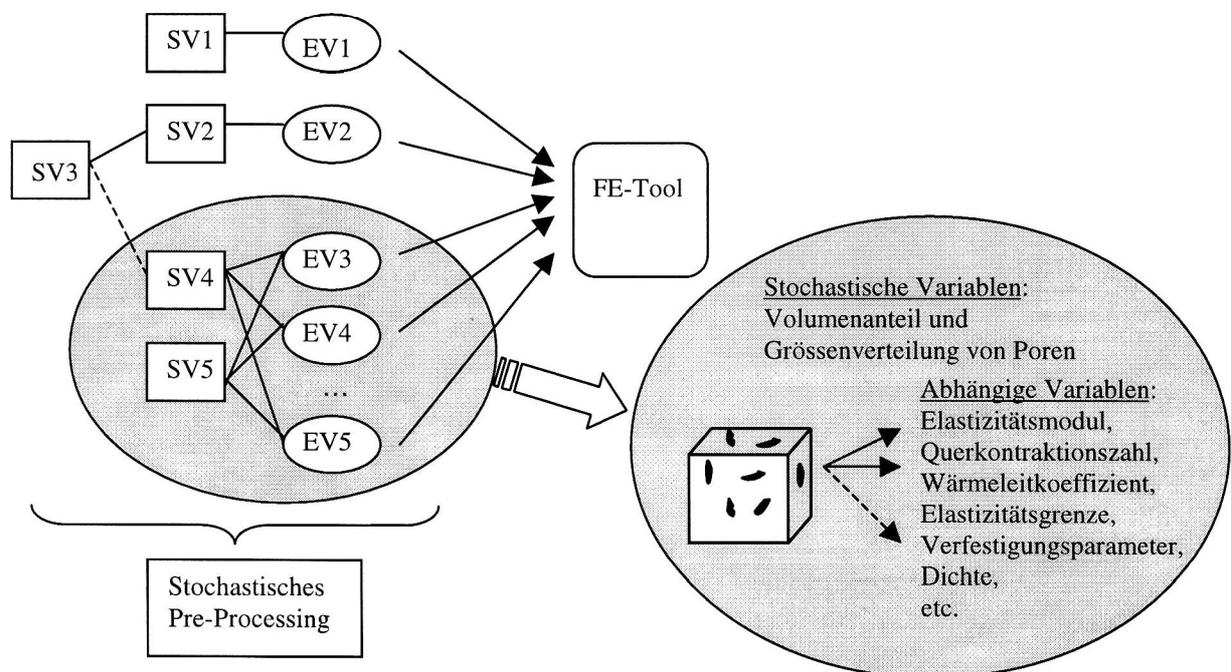


Bild 6: Mögliche Beziehungen zwischen stochastischen Variable (SV) und Finite-Element-Eingabedaten (EV).

Literatur

1. Ang, H.-S.; Tang, W. H.: Probability Concepts in Engineering Planning and Design, J. Wiley & Sons, 1975.
2. Bjerager, P.: On Computational Methods for Structural Reliability Analysis, Structural Safety, 9 (1990), 79-96.
3. Boley, B.; Weiner, J.: Theory of Thermal Stresses, J. Wiley & Sons, Inc., (1960).
4. Haftka, R. T.; Adelman, H. M.: Recent Developments in Structural Sensitivity Analysis, Structural Optimization, 1 (1989), 137-151.
5. Jocksch, A.: Berechnung von Turbinenschaufeln mit probabilistischen Methoden, Praktikumsarbeit, ABB Alstom Power / TU-Dresden, (1999).
6. Khan, A. S.; Huang, S.: Continuum Theory of Plasticity, J. Wiley & Sons, (1995).
7. Kleiber, M.; Hien, T. D.: The Stochastic Finite Element Method. Basic Perturbation Technique and Computer Implementation, J. Wiley & Sons, (1992).
8. Lemaitre, J.; Chaboche, J.-L.: Mechanics of Solid Materials, Cambridge University Press, (1990).
9. Marczyk, J.: Statistical Mechanical Designs Uncertainty Management in CAE via Monte Carlo Simulation, Benchmark, 11-15, Jan. (1999).
10. Marczyk, J.; Tanasescu, C.: BMW Joins with Silicon Graphics to Pioneer Stochastic Crash Simulation, Internet <http://reality.sgi.com/sposey/prom/>, (1998).
11. Mücke, R.: Finite Element Methoden zur strukturmechanischen Analyse von Gasturbinenschaufeln, In: Proceedings XXV. FEM-Kongress Baden-Baden, (1998).
12. Mücke, R.: Remarks on the applicability of structural optimization methods in the practical engineering design process, Design Optimization, 1 (1999), 137-153.
13. Petersen, R. G.: Design and Analysis of Experiments, Marcel Dekker, Inc., New York, (1985).
14. PROMENVIR, A Meta-Computing System for Computational Stochastic Mechanics, User's Manual, Trade Mark of CASA Division Espacio.
15. Reh, S.: Zuverlässigkeitsanalyse komplexer Bauteile mit Hilfe der stochastischen Finite-Element-Methode, Dissertation, Universität Karlsruhe, (1993).
16. Reh, S.; Scheu, M.: Sensitivity Controlled Response Surface Approach for Reliability Based Design, International Gas Turbine and Aeroengine Congress, Birmingham, ASME, 96-GT-268, (1996).
17. Reuter, R.: Stochastic MADYMO Simulations, In: MADYMORE, No. 10, December 1998, Internet <http://www.easi.de/papers/>, (1998).
18. Reuter, R.; Watermann, A.: Application of Uncertainty Management to MADYMO Occupant Simulations, In: Proceedings 2nd European MADYMO User's Conference, Stuttgart, (1999).
19. Traupel, W.: Thermische Strömungsmaschinen, Springer-Verlag, 3. Auflage, (1982).

Anschriften: Dr.-Ing. Roland Mücke, ABB Alstom Power, Gasturbinenentwicklung, Abt. KWT-TOY, Haselstrasse 16, CH-5401 Baden / Schweiz, e-mail: roland.muecke@chkra.mail.abb.com, Andreas Jocksch, Technische Universität Dresden, Fakultät Maschinenwesen, D-01062 Dresden