

Ein mathematisches Modell für die peristaltische Bewegung als Grundlage für das Design wurmartiger Mikroroboter

I. Zeidis, K. Zimmermann

Die Konstruktion von Inspektionsrobotern für Kanalsysteme und Pipelines wird gegenwärtig von überwiegend starren Strukturen bestimmt. Die Lokomotion derartiger mobiler Roboter basiert auf radgetriebenen Systemen oder Schreitmechanismen. Für medizintechnische Anwendungen, zum Beispiel im Zusammenhang mit Diagnoserobotern in Blutgefäßen oder für endoskopische Aufgaben in der minimal-invasiven Chirurgie, sind Systeme zu entwickeln, die eine hohe Nachgiebigkeit und eine sehr geringe Baugröße besitzen. Als biologisches Vorbild für die Lokomotion solcher mobilen Roboter können peristaltische Bewegungen von Regenwürmern dienen. Für die mechanische Beschreibung der Peristaltik wird in der Arbeit ein Kontinuumsmodell untersucht. Dabei steht im Zusammenhang mit dem technischen Design von Mikrorobotern das Ziel im Vordergrund, qualitative und quantitative Aussagen über die Bewegung auf weitgehend analytischem Weg zu erreichen.

1 Einleitung

Bei der Entwicklung von Bewegungssystemen für die Lokomotion nach biologischem Vorbild dominieren gegenwärtig die Laufmaschinen. Die bekannten Lösungen für "Walking machines" reichen von Unikaten für die Grundlagenforschung bis zu in Serien gefertigten kommerziellen Lösungen. Von bipedalen bis oktopedalen Konstruktionen sind alle biologischen Vorbilder von Ingenieuren umgesetzt worden. Die mathematisch-mechanische Grundlage für den Entwurf und die Dimensionierung solcher Strukturen bilden Mehrkörpersysteme (MKS). Da die Laufmaschinen aus rigiden Strukturen gefertigt sind, erfüllt das MKS die Hauptforderung an das mechanische Modell - Adäquatheit zum realen System. Strukturen mit hoher Steifigkeit und nicht zu vernachlässigender Trägheit bestimmen bisher auch im Bereich der Inspektions- und Diagnoseroboter den Stand der Technik (Bild 1). Neue Anforderungen an mobile Roboter in Bezug auf Baugröße und Nachgiebigkeit werden vor allem aus dem Bereich der Minimal-Invasiven Chirurgie gestellt. Die apedale Lokomotion auf der Basis nachgiebiger Systeme wird zum Gegenstand vorliegender Arbeit. Die Beschreibung der Bewegung durch Peristaltik (Würmer) und Serpensation (Schlangen) führt in der Modellbildung zum deformierbaren Kontinuum. Auf diesem Modell basieren u.a. Untersuchungen zum Stofftransport durch Peristaltik von Burns und Parkes (1967), Shapiro et al. (1969) und Mazumdar (1992). In den Arbeiten wird eine mathematische Beschreibung der langsamen Bewegung einer viskosen Flüssigkeit in einer Röhre (rotationssymmetrischer Fall) bzw. in einem Kanal (ebenes Problem) bei wellenförmiger Bewegung der begrenzenden Wände gegeben.

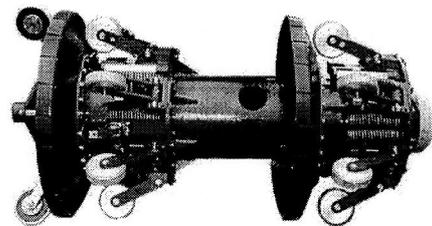


Bild 1: SCOUTSCAN - Roboter für Inspektionsaufgaben der Fa. Pipetronix



Bild 2: Entwurf für eine Wurmsonde nach dem Peristaltik-Prinzip (Lysenko, 1997)

2 Modellbildung

In der Arbeit wird die Bewegung eines deformierbaren Kontinuums ("Wurm", Index 0) innerhalb eines zweiten Mediums (Index 1) betrachtet, dessen Ausdehnung durch geradlinige Wände begrenzt ist (Bild 3). Der in seiner Bewegung zu beschreibende deformierbare Körper ist durch undurchlässige Wände begrenzt. Beide Medien werden als inkompressible linear-viskose Medien mit unterschiedlicher Viskosität modelliert. Es wird angenommen, daß eine ungestörte Bewegung existiert, die zum Beispiel durch einen konstanten Druckgradienten erzeugt wird. Dieser Basisbewegung wird eine Bewegung vom Typ "Peristaltik", welche mit einer wellenförmigen Störung der Trennungsflächen verbunden ist, überlagert. Besonders interessant ist der Fall, wenn der konstante Druckgradient verschwindet. In diesem Fall findet keine ungestörte Bewegung statt und der Materialtransport (Medium

mit dem Index 0) basiert ausschließlich auf der wellenförmigen Störung der Grenzfläche. Diese peristaltische Bewegung ist Gegenstand der weiteren Untersuchung.

Die Amplituden der gestörten Oberfläche werden als klein bezüglich der Körperausdehnung angenommen. Es werden die Differentialgleichungen für beide Medien und die Randbedingungen an der wellenförmigen Grenzfläche formuliert.

Im Falle der Bewegung im Kanal (ebene Deformation) werden kartesische Koordinaten y, z und bei der Bewegung in einer Röhre (rotationssymmetrischer Fall) Zylinderkoordinaten r, z eingeführt. Es sei $2h$ der Abstand zwischen den festen Wänden bei einer Bewegung im Kanal (entspricht im rotationssymmetrischen Fall dem Durchmesser der Röhre), $2h_0$ - die Dicke (Durchmesser im rotationssymmetrischen Fall) des viskosen Mediums mit dem Index 0 im ungestörten Zustand und a - die Amplitude der Störungen der Grenzfläche zwischen den Medien mit dem Index 0 und 1 (Bild 3). Die Analyse der vollständigen Bewegungsgleichungen zeigt, daß man bei kleinen Reynoldszahlen die konvektiven Glieder $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$ (\mathbf{v} - Geschwindigkeitsvektor) in den Beschleunigungen vernachlässigen kann. Die partielle Ableitung $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$ (t - Zeit) aus dem Trägheitsterm muß im allgemeinen Fall bei instationären

Störungen berücksichtigt werden. Bei wellenförmigen Störungen mit kleiner Frequenz (langwellige Störungen), und nur solche Störungen werden nachfolgend betrachtet, kann jedoch auch diese Ableitung vernachlässigt werden. Das heißt, der Zuwachs in den Trägheitskräften ist klein gegenüber den viskosen Kräften.

Unter Berücksichtigung dieser Überlegungen wird die Strömung einer inkompressiblen viskosen Flüssigkeit durch die Gleichungen

$$\text{grad } p = \mu \Delta \mathbf{v} \quad (1)$$

$$\text{div } \mathbf{v} = 0 \quad (2)$$

beschrieben. \mathbf{v} ist der Vektor der Geschwindigkeit, p ist der Druck und μ die Scherviskosität.

Im rotationssymmetrischen Fall (Bewegung in der Röhre) und bei Annahme ebener Deformation (Bewegung im Kanal) erhält man ein zweidimensionales Problem, und aus der Kontinuitätsgleichung (2) folgt die Existenz einer Stromfunktion. Im rotationssymmetrischen Fall hat bei Verwendung von Zylinderkoordinaten, wobei die z -Achse mit der Symmetrieachse des Zylinders zusammenfällt, die Gleichung (2) die Form

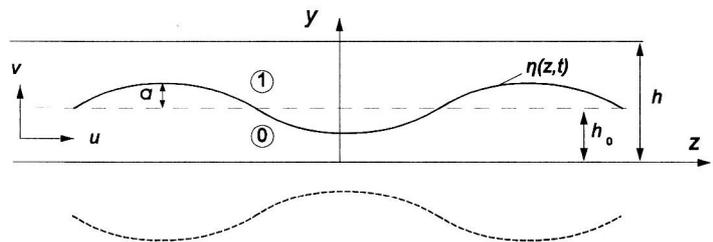


Bild 3: Modellparameter

$$\frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{\partial(ru_z)}{\partial z} = 0 \quad \text{mit} \quad \mathbf{v} = u_r \mathbf{e}_r + u_z \mathbf{e}_z \quad (3)$$

Die Stromfunktion $\Psi(r, z, t)$ muß gemäß

$$u_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \quad u_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \quad (4)$$

bestimmt werden.

Die Vektorgleichung (1) ist äquivalent zu zwei skalaren Gleichungen, aus denen der Druck p eliminiert wird. Nach dem Ersetzen der Geschwindigkeitskomponenten u_r und u_z durch die Stromfunktion Ψ gemäß der Gleichungen (4) erhält man die Differentialgleichung für die Stromfunktion Ψ

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Psi = 0 \quad (5)$$

Unter Berücksichtigung der entsprechenden Randbedingungen kann man die Lösung des Problems mit Hilfe von Bessel-Funktionen formulieren. Im Fall der ebenen Deformation gelingt die Angabe einer geschlossenen Lösung.

3 Aufgabenstellung für das ebene Problem (Bewegung im Kanal)

Im Sonderfall der ebenen Deformation $\left(\frac{\partial \cdot}{\partial x} \equiv 0 \right)$, mit einer

zur Bewegungsrichtung parallelen z-Achse (Bild 4), hat die Kontinuitätsgleichung unter Berücksichtigung der Inkompressibilität die Form

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \text{mit} \quad \mathbf{v} = v \mathbf{e}_y + u \mathbf{e}_z$$

Nach Einführung der Stromfunktion $\Psi(y, z, t)$ gemäß

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad v = - \frac{\partial \Psi}{\partial z} \quad (6)$$

erhält man die Gleichung (1) in der Form

$$- \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (7)$$

$$- \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = 0$$

Differenziert man die erste Gleichung von (7) nach z und die zweite nach y , so kann der Druck p eliminiert werden, und nach dem Ersetzen der Beziehungen für die Geschwindigkeitskomponenten durch die Stromfunktion Ψ aus den Gleichungen (6) erhält man für jedes viskose Medium 0 und 1 die Differentialgleichung zur Bestimmung der entsprechenden Stromfunktion Ψ^s

$$\frac{\partial^4 \Psi^s}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 \Psi^s}{\partial y^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 \Psi^s}{\partial z^4} = 0 \quad (s = 0, 1) \quad (8)$$

mit den nachfolgend formulierten Randbedingungen.

An den festen Wänden gilt $y = h$: $u^1 = 0$, $v^1 = 0$ bzw. ausgedrückt über Ψ^1 :

$$y = h : (\Psi^1)'_y = 0 \quad (\Psi^1)'_z = 0 \quad (9)$$

Auf der Symmetrieachse erfüllen die Geschwindigkeit v und die Komponente des Reibspannungstensors τ_{yz} die Bedingungen

$$y = 0 : v^0 = 0 \quad \tau_{yz}^0 = 0 \quad (10)$$

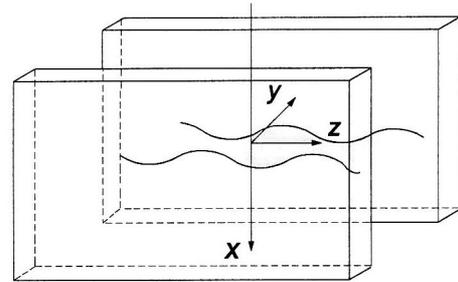


Bild 4: Bewegung im Kanal

Da für viskose Medien $\tau_{yz}^0 = \mu_0 \left(\frac{\partial u^0}{\partial y} + \frac{\partial v^0}{\partial z} \right)$ ist, erhält man aus den Gleichungen (6) und (10)

für die Stromfunktion auf der Symmetrieachse die Beziehungen

$$y = 0 : \quad (\Psi^0)'_z = 0 \quad (\Psi^0)''_{yy} - (\Psi^0)''_{zz} = 0 \quad (11)$$

Auf der mit der Gleichung

$$y = \eta(z, t) \quad (12)$$

beschriebenen Trennfläche müssen kinematische und dynamische Bedingungen erfüllt werden. Die Stetigkeit der Geschwindigkeiten verlangt

$$y = \eta(z, t) : \quad u^0 = u^1 \quad v^0 = v^1 \quad \text{bzw.} \quad (\Psi^0)'_y = (\Psi^1)'_y \quad (\Psi^0)'_z = (\Psi^1)'_z \quad (13)$$

Die Gleichungen (14) kennzeichnen den nicht existierenden Materialfluß durch die Trennfläche. Dies drückt sich in der Tatsache aus, daß die Geschwindigkeit der entsprechenden Punkte im Medium mit der Geschwindigkeit der Trennfläche zusammenfällt:

$$y = \eta(z, t) : \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = v^0 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} + (\Psi^0)'_y \cdot \frac{\partial \eta}{\partial z} + (\Psi^0)'_z = 0 \quad (14)$$

Die dynamischen Bedingungen beschreiben die Stetigkeit der Normalspannungen auf der Trennfläche $y = \eta(z, t)$

$$p_1 - p_0 = (\tau_{yy}^1 - \tau_{yy}^0)n_y^2 + (\tau_{zz}^1 - \tau_{zz}^0)n_z^2 + 2(\tau_{yz}^1 - \tau_{yz}^0)n_y n_z, \text{ mit}$$

$$n_y = \frac{\partial \eta}{\partial z} \left[1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad n_z = \left[1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}$$

Für die Komponenten des Reibspannungstensors einer viskosen Flüssigkeit gilt:

$$\tau_{yy} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \quad \tau_{zz} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial z} \quad \tau_{yz} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

Mit Hilfe der Stromfunktion Ψ erhält man die Randbedingungen

$$\begin{aligned} & - (p_1 - p_0) + 2 \left[\mu_1 (\Psi^1)''_{yz} - \mu_0 (\Psi^0)''_{yz} \right] \frac{1 - \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} \right)^2}{1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} \right)^2} + \\ & + 2 \left(\mu_1 \left[(\Psi^1)''_{yy} - (\Psi^1)''_{zz} \right] - \mu_0 \left[(\Psi^0)''_{yy} - (\Psi^0)''_{zz} \right] \right) \frac{\frac{\partial \eta}{\partial z}}{1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} \right)^2} = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

Die Druckdifferenz $(p_1 - p_0)$ wird nach Gleichung (1) ebenfalls über die Stromfunktion Ψ ausgedrückt:

$$- \frac{\partial (p_1 - p_0)}{\partial z} = \mu_1 \left[(\Psi^1)'''_{yyy} + (\Psi^1)'''_{yzz} \right] - \mu_0 \left[(\Psi^0)'''_{yyy} + (\Psi^0)'''_{yzz} \right]$$

Wenn zu den Randbedingungen auf der Trennfläche auch noch die Stetigkeitsforderung für die Schubspannung hinzugefügt wird, so erhält man für die Ermittlung der Integrationskonstanten ein homogenes algebraisches Gleichungssystem. Die Bedingung für die nichttriviale Lösbarkeit liefert eine Forderung für die Phasengeschwindigkeit der Oberflächenwelle.

Unter dem Aspekt der technischen Realisierung des Wurmes mit einer elastischen Haut

als Trennfläche zwischen den Medien dürfen die Schubspannungen unstetig sein. Der Sprung in den Schubspannungen drückt sich dann zum Beispiel in verteilten Biegemomenten in der Haut aus, welche durch Antriebe zu erzeugen sind (Bild 5).

Zur weiteren mathematischen Behandlung der Differentialgleichung (8) mit den Randbedingungen (9)-(15) wird, wie in der Kontinuumsmechanik üblich, zur **dimensionslosen** Darstellung (gesternete Größen sind dimensionsbehaftet)

$$m = \frac{\mu_1}{\mu_0}, \quad \delta = \frac{h_0}{h}, \quad t = t^* \frac{U}{h}, \quad \Psi = \frac{\Psi^*}{Uh}, \quad (u, v) = \frac{(u^*, v^*)}{U}, \quad (y, z) = \frac{(y^*, z^*)}{h}, \quad \eta = \frac{\eta^*}{h}$$

mit U als charakteristischer Geschwindigkeit für die Bewegung der Grenzfläche übergegangen.

Nachfolgend werden, wie in der Mechanik üblich, ausschließlich dimensionslose Größen mit denselben Bezeichnungen wie für die entsprechenden dimensionsbehafteten Größen benutzt.

4 Störungsrechnung

Zur Lösung der o.a. mathematischen Aufgabe wird die Störungsrechnung angewendet. Der für die peristaltische Bewegung angenommene wellenförmige Charakter der Trennfläche zwischen den Medien wird als Störung gegenüber einem geradlinigen Verlauf betrachtet. Diese Störung sei klein, so daß die Gleichung für die Trennfläche in der Form

$$\eta(z, t) = \delta + \varepsilon f(z, t) \tag{16}$$

mit $\varepsilon = \frac{a}{h}$ angesetzt werden kann.

Die gesuchten Funktionen werden als Potenzreihen in ε dargestellt, zum Beispiel die Stromfunktion Ψ

$$\Psi = \Psi_0 + \varepsilon \Psi_1 + \varepsilon^2 \Psi_2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \Psi_k(y, z, t) \tag{17}$$

Die Gleichung (8) erhält die Form

$$\Delta \Delta \Psi_k^s = 0 \quad (k = 0, 1, \dots; \quad s = 0, 1) \tag{18}$$

Nach dem Einsetzen der Gleichungen (16), (17) in die Gleichung (8) und in die Randbedingungen (13)-(15) erhält man durch Koeffizientenvergleich der Potenzen in ε für jede Näherung das entsprechende Randwertproblem. Um die Bedingungen auf der Grenzfläche, d.h. bei $y = \delta + \varepsilon f(z, t)$, zu definieren, sind nach Bozhinskij und Zeidis (1973) die entsprechenden Funktionen ebenfalls in Potenzreihen nach ε zu entwickeln. Es sei

$$\eta(z, t) = \delta + \varepsilon \cos \omega(z - ct) \tag{19}$$

mit der dimensionslosen Wellenzahl ω und der dimensionslosen Phasengeschwindigkeit c , welche man durch die dimensionsbehafteten Größen (*) gemäß

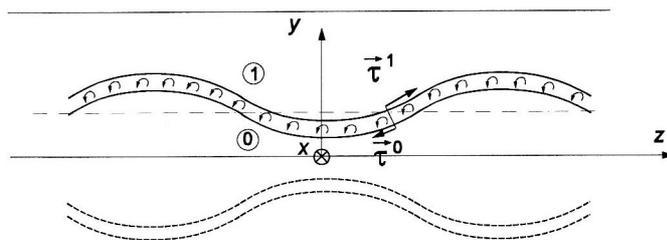


Bild 5: Unstetigkeit in den Schubspannungen

$$\omega = \omega^* h \quad c = \frac{c^*}{U}$$

erhält.

Somit werden die Stromfunktionen Ψ_k^s für jedes Medium in der komplexen Form (i - imaginäre Einheit)

$$\Psi_k^s = \varphi_k^s(y) e^{i\omega k(z-ct)} \quad (k=0,1,\dots; \quad s=0,1) \quad (20)$$

gesucht.

Das Einsetzen von Gleichung (20) in die Gleichungen (18) führt in jeder Näherung zur Differentialgleichung für die Amplitude φ_k^s

$$(\varphi_k^s)^{IV} - 2\omega^2 k^2 (\varphi_k^s)'' + \omega^4 k^4 \varphi_k^s = 0 \quad (k=0,1,\dots; \quad s=0,1) \quad (21)$$

deren Lösung $\varphi_0^s(y) = A_0^s y^3 + B_0^s y^2 + C_0^s y + D_0^s$ für $k=0$ und

$$\varphi_k^s(y) = C_{1k}^s \sinh \omega k y + C_{2k}^s \cosh \omega k y + C_{3k}^s y \sinh \omega k y + C_{4k}^s y \cosh \omega k y \quad (22)$$

für $k \geq 1$ ($s=0,1$) lauten.

Die Amplituden φ_0^s und die Stromfunktion Ψ_0^s entsprechen der ungestörten Lösung. Für den Fall eines verschwindenden Druckgradienten gilt $\Psi_0^s = 0$, ($s=0,1$). Die Integrationskonstanten folgen aus den Randbedingungen (9)-(15). Für die Amplituden φ_k^0 erhält man

$$\varphi_k^0(y) = C_{1k}^0 \sinh \omega k y + C_{4k}^0 y \cosh \omega k y$$

wobei die Koeffizienten der Phasengeschwindigkeit c proportional sind und von m, ω, δ abhängen.

Für die interessierende Bewegung des Wurmes (Medium 0) bei kleinen Reynoldszahlen folgen unter Berücksichtigung von Gliedern erster Ordnung die Geschwindigkeiten

$$\begin{aligned} u_1^0 &= \left[C_{11}^0 \omega \cosh \omega y + C_{41}^0 (\cosh \omega y + \omega y \sinh \omega y) \right] \cos \omega(z-ct) \\ v_1^0 &= \omega \left[C_{11}^0 \omega \sinh \omega y + C_{41}^0 y \cosh \omega y \right] \sin \omega(z-ct) \end{aligned} \quad (23)$$

und die Komponenten des Reibspannungstensors

$$\begin{aligned} \tau_{yy_l}^0 &= 2\omega \left[C_{11}^0 \omega \cosh \omega y + C_{41}^0 (\cosh \omega y + \omega y \sinh \omega y) \right] \sin \omega(z-ct) \\ \tau_{yz_l}^0 &= 2\omega \left[C_{11}^0 \omega \sinh \omega y + C_{41}^0 (\sinh \omega y + \omega y \cosh \omega y) \right] \cos \omega(z-ct) \\ \tau_{zz_l}^0 &= 2\omega^2 \left[C_{11}^0 \sinh \omega y + C_{41}^0 y \cosh \omega y \right] \cos \omega(z-ct) \end{aligned} \quad (24)$$

Für die Betrachtung der Effizienz der peristaltischen Bewegung wird der Durchfluß q , d.h. die Stoffmenge, welche durch einen gegebenen Querschnitt pro Zeiteinheit fließt, ermittelt.

$$q = 2 \int_0^{\delta + \varepsilon f(z,t)} (u_0^0 + \varepsilon u_1^0 + \varepsilon^2 u_2^0 + \dots) dy \quad (25)$$

Für den Durchfluß \bar{q} innerhalb einer Periode λ gilt

$$\bar{q} = \int_0^{\lambda} q(\omega\zeta) d\zeta \quad \text{mit } \zeta = z - ct \quad \lambda = \frac{2\pi}{\omega} \quad (26)$$

Für die Berechnung von \bar{q} werden Terme einschließlich zweiter Ordnung in ε berücksichtigt:

$$\begin{aligned} \bar{q} &= \bar{q}_0 + \varepsilon \bar{q}_1 + \varepsilon^2 \bar{q}_2 \\ \bar{q}_0 &= 2 \left[\Psi_0^0(\delta) - \Psi_0^0(0) \right] \quad \bar{q}_1 = 0 \\ \bar{q}_2 &= 2 \int_0^{\lambda} \left[\cos \omega\zeta \cdot (\Psi_1^0)'(\delta) + \frac{\cos^2 \omega\zeta}{2} (\Psi_0^0)''(\delta) \right] d\zeta \end{aligned} \quad (27)$$

Bemerkung: Alle Werte des Durchflusses, integriert über eine Periode, verschwinden für ungerade Potenzen von ε .

Für einen Druckgradienten gleich Null ($\Psi_0^0 = 0$) folgt mit $\bar{q}_2 = \lambda (\varphi_1^0)'(\delta)$ für den Durchfluß

$$\bar{q} = \varepsilon^2 \cdot \frac{2\pi}{\omega} \left[C_{10}^0 \omega \cosh \omega\delta + C_{40}^0 (\cosh \omega\delta + \omega\delta \sinh \omega\delta) \right] \quad (28)$$

Die Abhängigkeit dieser Größe \bar{q} vom Wert des Parameters ε (= Quotient aus der Amplitude der gestörten Oberfläche zur Ausdehnung des umgebenden Mediums 1, Abb.2) ist für verschiedene Werte von m und δ in der Abbildung 6 dargestellt. Aus der Grafik folgt, daß der Durchfluß \bar{q} vom Verhältnis der Viskositäten m nur schwach, vom Schichtdickenverhältnis δ jedoch stark beeinflusst wird. In Bild 7 werden die Resultate der vorliegenden Arbeit mit den Ergebnissen von Burns und Parkes (1967) (Stofftransport durch Peristaltik ohne Betrachtung des Mediums 1 mit dem Argument $\frac{\varepsilon}{\delta}$ und dem Parameter $\omega = 2,5$ ($\omega\delta = 0,25$) verglichen. Wenn die starren Wände

weit von der gestörten Oberfläche entfernt sind, d.h. für $\delta = 0,1$, zeigt sich eine gute Übereinstimmung der Ergebnisse beider Arbeiten.

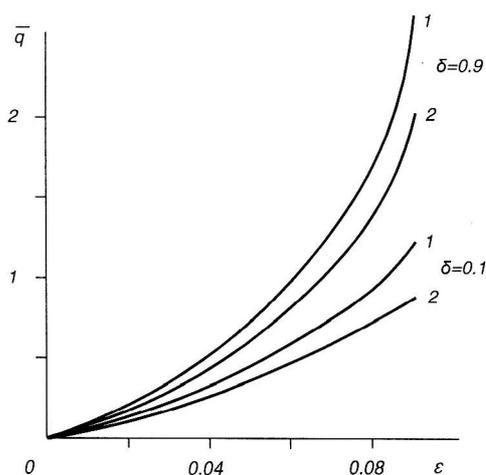


Bild 6: Abhängigkeit des Durchflusses von der dimensionslosen Amplitude (1- $m=0,1$; 2- $m=10$; $\omega=0,5$)

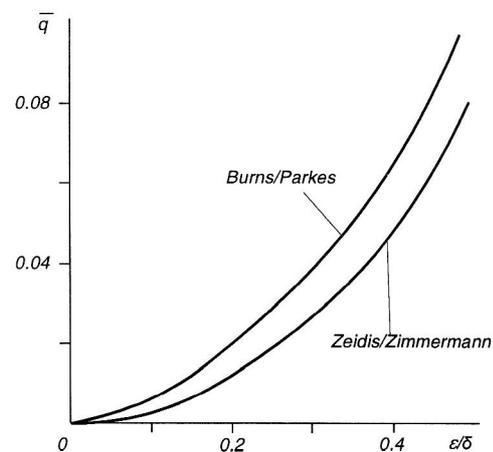


Bild 7: Ergebnisvergleich mit Burns/Parkes ($\delta=0,1$; $m=1$; $\omega=2,5$; $c=1$)

5 Zusammenfassung

Das Problem der peristaltischen Bewegung eines deformierbaren, viskosen Körpers innerhalb eines anderen viskosen Mediums wurde mit der Störungsrechnung untersucht. Für den ebenen Fall (Bewegung im Kanal) gelingt eine analytisch geschlossene Lösung bei kleinen Reynoldszahlen und damit verbundener Vernachlässigung der Trägheitsterme in den Modellgleichungen. Die Ergebnisse zeigen, daß der Materialtransport ein Effekt zweiter Ordnung bezüglich der wellenförmig gestörten Grenzfläche zwischen den Medien ist. Dieses Resultat stimmt mit den Ergebnissen aus Burns und Parkes (1967) überein. Die gewonnenen Erkenntnisse sollen bei der Analyse und Synthese peristaltischer Bewegungen von wurmförmigen Sonden in Röhren und Kanälen angewendet werden.

Literatur

1. Bozhinskij, A.; Zeidis, I.: Stability of quasistatic equilibrium state of an inclined plane. Journ. Fluid Dynamics. Vol.8, No. 6, (1973), pp. 866-869.
2. Burns, J.; Parkes, P.: Peristaltic motion. Journal Fluid mechanics. Vol. 29, (1967), pp. 731-743.
3. Fa. Pipetronix, <http://www.pipetronix.com>.
4. Lysenko, V.G.: Modelle für peristaltische Bewegungssysteme. Arbeitspapier (unveröff.), TU Ilmenau, (1997)
5. Mazumdar, J.: Biofluid Mechanics. Word Scientific,(1992).
6. Shapiro, A.; Jaffrin, M.; Weinberg, S.: Peristaltics pumping with long wavelengths at low Reynolds number. Journal fluid Mechanics. Vol. 37, (1969), pp. 799-825.

Die dargestellten Untersuchungen erfolgen im Rahmen des Innovationskollegs "Bewegungssysteme" (Sprecher Prof. Dr. Blickhan), gefördert von der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG).

Anschrift: Dr.rer.nat. Igor Zeidis, Univ.-Prof. Dr.-Ing.habil. Klaus Zimmermann, Technische Universität Ilmenau, Fakultät für Maschinenbau, PF 10 05 65, 98684 Ilmenau, Tel.: ++49 3677 692478, Fax: ++49 3677 691823, E-mail: klaus.zimmermann@maschinenbau.tu-ilmenau.de