

Untersuchung des thermopiezoelektrischen Strukturverhaltens mit Hilfe der Methode der Finiten Elemente

A. Görnandt

Ausgehend von den grundlegenden Bilanz- und Erhaltungsgleichungen der Thermoelektrodynamik wird eine vollständig gekoppelte Beschreibung des thermopiezoelektrischen Materialverhaltens abgeleitet. Mit Hilfe der schwachen Form des thermoelektromechanischen Gleichgewichts und den gekoppelten Konstitutivgleichungen des 3-Feld-Problems wird ein allgemeines Finite-Element-Konzept zur numerischen Lösung solcher Probleme vorgestellt. Es werden sowohl statische, als auch dynamische Strukturantworten infolge thermischer, elektrischer und mechanischer Erregung berücksichtigt. Zur effektiven Lösung des gekoppelten Problems wird eine sukzessive, iterative Lösungsstrategie vorgeschlagen. Die Koppeleffekte werden anhand eines Beispiels veranschaulicht.

1 Einleitung

In verschiedenen Anwendungsbereichen piezoelektrisch geregelter Strukturen, wie z.B. bei Raumfahrtstrukturen, haben thermische Effekte einen großen Einfluß auf das Strukturverhalten, den es zu berücksichtigen gilt. Der Entwurf und die Analyse von aktiven Strukturen mit integrierten piezokeramischen Aktuatoren und Sensoren erfordert leistungsfähige Berechnungswerkzeuge. Hier bietet die Finite-Element-Methode (FEM) eine effektive Technik. Aufgrund ihrer vielfältigen Einsatzmöglichkeiten sind viele theoretische und praktische Ergebnisse aus einem großen Anwendungsbereich verfügbar. In einigen FEM-Entwicklungen wird auch der thermische Aspekt berücksichtigt, wobei allerdings meist nur die thermischen Deformationen und der pyroelektrische Effekt einbezogen werden und der elektrokalarische Effekt sowie der Effekt der Deformationswärme fehlen. In diesem Artikel werden die vollständig gekoppelten Feldgleichungen und eine dazu äquivalente Variationsformulierung aus den grundlegenden Bilanz- und Erhaltungsgleichungen abgeleitet. Aus der Variationsformulierung wird eine allgemeine, vom Elementtyp unabhängige FEM-Formulierung entwickelt. Zur numerischen Lösung wird eine sukzessive iterative Lösungsstrategie vorgeschlagen, da diese für die hier vorliegende schwache Kopplung effektiver ist als die Lösung der vollständig gekoppelten nichtsymmetrischen Gleichungen.

2 Lineare Theorie der Thermopiezoelektrizität

2.1 Bilanz- und Erhaltungsgleichungen, Entropiegleichung

Die nachfolgend aufgeführten Bilanz- und Erhaltungsgleichungen beschreiben die allgemeingültigen physikalischen Prinzipien der Erhaltung der Masse (1), der Impulsbilanz (2), der Drehimpulsbilanz (3), der Bilanz der elektrischen Ladung (4), der Bilanz des elektrischen Feldes (5), der Erhaltung des magnetischen Flusses (6), der Bilanz der elektromagnetischen Durchflutung (7), der Bilanz der elektromagnetischen Induktion (8) und der Energiebilanz (9). Zur eindeutigen Beschreibung eines thermoelektromechanischen Prozesses bedarf es noch einer Aussage über die Reversibilität und/oder Irreversibilität der Energieumwandlung. Hierzu wird die Entropiegleichung (10) herangezogen.

$$\frac{D}{Dt}m = \frac{D}{Dt} \int_V \varrho \, dV = 0 \quad (1)$$

$$\frac{D}{Dt} \int_V \varrho \dot{u}_i \, dV = \int_V \varrho \ddot{u}_i \, dV = \int_V (T_{ji,j} + \varrho b_i) \, dV + \int_V (\varrho_c E_i + \varrho_c \dot{v}_i \times B_i) \, dV \quad (2)$$

$$\frac{D}{Dt} \int_V (x_{l,j} \times \varrho \dot{u}_i) \, dV = \int_V \epsilon_{kij} T_{ji} \, dV = 0 \quad T_{ji} = T_{ij} \quad (3)$$

$$\frac{D}{Dt} \int_V \varrho_c \, dV = - \int_O n_i J_i \, dO = - \int_V J_{i,i} \, dV \quad (4)$$

$$\int_O n_i D_i dO = \int_V D_{i,i} dV = \int_V \varrho_c dV \quad (5)$$

$$\int_O n_i B_i dO = \int_V B_{i,i} dV = 0 \quad (6)$$

$$\oint_R H_j dx_j = \int_A n_i \epsilon_{ijk} H_{k,j} dA = \int_A n_i (J_i + \dot{D}_i) dA \quad (7)$$

$$\oint_R E_j dx_j = \int_A n_i \epsilon_{ijk} E_{k,j} dA = - \int_A n_i \dot{B}_i dA \quad (8)$$

$$\int_V \varrho \dot{U} dV = \int_V T_{ji} \dot{u}_{i,j} dV + \int_V (\varrho_c E_i \dot{v}_i + E_i \dot{D}_i + H_i \dot{B}_i) dV + \int_V (\varrho r - q_{i,i}) dV \quad (9)$$

$$\int_V \varrho \dot{\eta} dV \geq \int_V \left(\frac{\varrho r - q_{i,i}}{\Theta} + \frac{q_i \Theta_{,i}}{\Theta^2} \right) dV \quad (10)$$

2.2 Konstitutivgleichungen thermopiezoelektrischer Festkörper

Die eingeführten Grundgleichungen sind allgemeingültig – unabhängig von den spezifischen Materialeigenschaften der Kontinua. Da die Anzahl der Feldgrößen höher als die Anzahl der bisher zur Verfügung stehenden Gleichungen ist, sind noch konstitutive Gleichungen erforderlich, mit denen das konkrete Kontinuumsverhalten berücksichtigt werden kann. Im folgenden wird ein einfaches, linear elastisches und dielektrisches Material betrachtet, welches polarisierbar, jedoch nicht magnetisierbar ist und in dem deshalb $\varrho_c = J_i = 0$ gilt. Wenn die elektromagnetischen Wellen im wesentlichen von den elastischen Wellen entkoppelt sind und Wellenlängen in der Größenordnung von elastischen Wellen betrachtet werden, kann die Änderung der magnetischen Flußdichte \dot{B}_i gegenüber den elektrischen Anteilen vernachlässigt werden. Dies bedeutet im einzelnen, daß $H_i \dot{B}_i$, der Anteil des magnetischen Feldes an der elektromagnetischen Leistung, gegenüber dem elektrischen Anteil $E_i \dot{D}_i$ in der Energiebilanz (9) vernachlässigt und das elektrische Feld als wirbelfrei angenommen werden kann (Tiersten, 1969 und Tiersten, 1990). Die Energiebilanz (9) und das Induktionsgesetz (8) vereinfachen sich dann zu

$$\int_V (\varrho \dot{U} - T_{ji} \dot{u}_{i,j} - E_i \dot{D}_i - \varrho r + q_{i,i}) dV = 0 \quad (11)$$

$$\oint_R E_j dx_j = \int_A n_i \epsilon_{ijk} E_{k,j} dA = 0 \quad (12)$$

Der Vektor der Massenkraftdichte b_i und die spezifische Wärmequelle r werden als bekannt angenommen. Als unabhängige Variablen werden u_i , E_i und Θ sowie deren räumliche Gradienten $u_{i,j}$, $E_{i,j}$ und $\Theta_{,i}$ gewählt. Als abhängige Variablen ergeben sich T_{ji} , D_i , q_i , η und U . Es wird das elektrische Gibbs-Potential (Mason, 1954) eingeführt:

$$\varrho G = \varrho U - E_i D_i - \Theta \varrho \eta \quad (13)$$

Nach dem Prinzip der Äquipräsenz wird angenommen, daß jede der abhängigen Variablen vom gesamten Satz der unabhängigen Variablen abhängig ist. Für homogene Körper entfällt die explizite Abhängigkeit von der materiellen Koordinate X_i . Eine explizite Zeitabhängigkeit, wie z.B. Alterung, wird ausgeschlossen. Da nach dem Prinzip der materiellen Objektivität die Starrkörperbewegungen nicht das Materialverhalten beeinflussen, existiert keine explizite Abhängigkeit von u_i . Die Zeitableitung der Gleichung (13) ergibt

$$\varrho \dot{G} = \varrho \dot{U} - E_i \dot{D}_i - D_i \dot{E}_i - \Theta \varrho \dot{\eta} - \varrho \eta \dot{\Theta} \quad (14)$$

Die materielle Zeitableitung des elektrischen Gibbs-Potentials $G(u_{i,j}, E_i, E_{i,j}, \Theta, \Theta_{,i})$ liefert

$$\dot{G} = \frac{\partial G}{\partial u_{j,i}} \dot{u}_{i,j} + \frac{\partial G}{\partial E_i} \dot{E}_i + \frac{\partial G}{\partial E_{i,j}} \dot{E}_{j,i} + \frac{\partial G}{\partial \Theta} \dot{\Theta} + \frac{\partial G}{\partial \Theta_{,i}} \dot{\Theta}_{,i} \quad (15)$$

Das Einsetzen der Gleichungen (14) und (15) in die Energiebilanz (11) führt zu

$$\int_V \left(\left(\varrho \frac{\partial G}{\partial u_{j,i}} - T_{ji} \right) \dot{u}_{i,j} + \left(\varrho \frac{\partial G}{\partial E_i} + D_i \right) \dot{E}_i + \left(\varrho \frac{\partial G}{\partial E_{i,j}} \right) \dot{E}_{j,i} + \varrho \left(\frac{\partial G}{\partial \Theta} + \eta \right) \dot{\Theta} + \left(\varrho \frac{\partial G}{\partial \Theta_{,i}} \right) \dot{\Theta}_{,i} + \Theta \varrho \dot{\eta} + q_{i,i} - \varrho r \right) dV = 0 \quad (16)$$

Die Gleichung (16) muß für beliebige Größen $\dot{u}_{i,j}$, \dot{E}_i , $\dot{E}_{j,i}$, $\dot{\Theta}$, $\dot{\Theta}_{,i}$ erfüllt sein. Da die Ausdrücke in den Klammern unabhängig von den genannten Größen sind, müssen sie sich jeweils zu 0 ergeben (Nowinski, 1978). Daraus folgen die Konstitutivgleichungen

$$\varrho \frac{\partial G}{\partial u_{j,i}} = T_{ji} \quad \varrho \frac{\partial G}{\partial E_i} = -D_i \quad \frac{\partial G}{\partial \Theta} = -\eta \quad \frac{\partial G}{\partial \Theta_{,i}} = \frac{\partial G}{\partial E_{i,j}} = 0 \quad (17)$$

Aus Gleichung (17) folgt die Unabhängigkeit des Gibbs-Potentials von den räumlichen Gradienten $E_{i,j}$ und $\Theta_{,i}$. Weiterhin ergibt sich aus (16) und (17) die Restenergiegleichung (18)

$$\int_V (\Theta \varrho \dot{\eta} + q_{i,i} - \varrho r) dV = 0 \quad (18)$$

Die Substitution der spezifischen Wärmequelle r in der Entropiegleichung (10) mit Hilfe der Restenergiegleichung (18) führt zu

$$\int_V -q_i \frac{\Theta_{,i}}{\Theta^2} dV \geq 0 \quad (19)$$

Die Entwicklung des Vektors der Wärmestromdichte q_i in eine Taylorreihe für beliebige, aber fest gewählte $u_{j,k}$, E_j , $E_{j,k}$, Θ um den Punkt $\Theta_{,j} = 0_j$ und deren Einsetzen in die Ungleichung (19) liefert die konstitutive Gleichung für den Vektor der Wärmestromdichte (20), welche dem Fourierschen Wärmeleitungsgesetz entspricht, wobei der Wärmeleitensor λ_{ij} positiv semidefinit sein muß (Carlson, 1972):

$$q_i = q_i(\Theta_{,j}) = \left. \frac{\partial q_i}{\partial \Theta_{,j}} \right|_{\Theta_{,j}=0} \Theta_{,j} = -\lambda_{ij} \Theta_{,j} \quad (20)$$

Um weitere Aussagen zu erhalten, wird das elektrische Gibbs-Potential $G = G(u_{i,j}, E_i, \Theta)$ um den Ausgangszustand $\varrho G_0 = \varrho G(0_{ij}, 0_i, \Theta_0)$ in eine Taylorreihe entwickelt. Mit Einführung der Temperaturänderung $\vartheta = \Theta - \Theta_0$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \varrho G &= \varrho G_0 + \varrho \frac{\partial G_0}{\partial u_{j,i}} u_{i,j} + \varrho \frac{\partial G_0}{\partial E_i} E_i + \varrho \frac{\partial G_0}{\partial \Theta} \vartheta \\ &+ \frac{1}{2} \left(\varrho \frac{\partial^2 G_0}{\partial u_{j,i} \partial u_{l,k}} u_{i,j} u_{k,l} + \varrho \frac{\partial^2 G_0}{\partial E_i \partial E_j} E_i E_j + \varrho \frac{\partial^2 G_0}{\partial \Theta^2} \vartheta^2 \right) \\ &+ \varrho \frac{\partial^2 G_0}{\partial u_{j,i} \partial E_k} u_{i,j} E_k + \varrho \frac{\partial^2 G_0}{\partial u_{j,i} \partial \Theta} u_{i,j} \vartheta + \varrho \frac{\partial^2 G_0}{\partial E_i \partial \Theta} E_i \vartheta + R_2 \end{aligned} \quad (21)$$

Das elektrische Gibbs-Potential des Anfangszustandes kann ohne Einschränkung der Allgemeingültigkeit zu 0 gesetzt werden, da in die konstitutiven Gleichungen nur Ableitungen von G eingehen. Die 1. Ableitungen repräsentieren den jeweiligen Anfangszustand der Spannung (z.B. Eigenspannungen), der elektrischen Verschiebung und der Entropie. Diese Anfangszustände können für viele Anwendungsfälle unberücksichtigt bleiben (Altenbach, 1994). Die 2. Ableitungen entsprechen den konstitutiven Gleichungen einer geometrisch und physikalisch linearen Materialtheorie. Ihren Koeffizienten können folgende Bedeutungen zugeordnet werden:

$$\varrho \frac{\partial^2 G_0}{\partial u_{j,i} \partial E_k} = \left. \frac{\partial T_{ji}}{\partial E_k} \right|_0 = - \left. \frac{\partial D_k}{\partial u_{j,i}} \right|_0 = -e_{kij} \quad \varrho \frac{\partial^2 G_0}{\partial u_{j,i} \partial \Theta} = \left. \frac{\partial T_{ji}}{\partial \Theta} \right|_0 = -\varrho \left. \frac{\partial \eta}{\partial u_{j,i}} \right|_0 = -\zeta_{ij} \quad (22)$$

$$\varrho \frac{\partial^2 G_0}{\partial E_i \partial \Theta} = - \left. \frac{\partial D_i}{\partial \Theta} \right|_0 = -\varrho \left. \frac{\partial \eta}{\partial E_i} \right|_0 = -p_i \quad \varrho \frac{\partial^2 G_0}{\partial u_{j,i} \partial u_{l,k}} = \left. \frac{\partial T_{ji}}{\partial u_{l,k}} \right|_0 = C_{ijkl} \quad (23)$$

$$\varrho \frac{\partial^2 G_0}{\partial E_i \partial E_j} = - \frac{\partial D_i}{\partial E_j} \Big|_0 = -\kappa_{ij} \quad \varrho \frac{\partial^2 G_0}{\partial \Theta^2} = -\varrho \frac{\partial \eta}{\partial \Theta} \Big|_0 = -a \quad (24)$$

Da die spezifische Wärmekapazität bei konstantem Volumen definiert ist als

$$c_v \equiv \frac{\partial U}{\partial \Theta} = \Theta \frac{\partial \eta}{\partial \Theta} \quad (25)$$

kann a in Gleichung (24) ersetzt werden durch

$$a = \varrho \frac{\partial \eta}{\partial \Theta} \Big|_0 = \frac{\varrho c_v}{\Theta} \quad (26)$$

Mit den eingeführten Koeffizienten ergibt sich ein quadratischer Ansatz für das elektrische Gibbs-Potential:

$$\varrho G(u_{i,j}, E_i, \Theta) = \frac{1}{2} \left(C_{ijkl} u_{i,j} u_{k,l} - \kappa_{ij} E_i E_j - \frac{\varrho c_v}{\Theta} \vartheta^2 \right) - e_{kij} u_{i,j} E_k - \zeta_{ij} u_{i,j} \vartheta - p_i E_i \vartheta \quad (27)$$

Die linearen konstitutiven Beziehungen zwischen den thermischen, elektrischen und mechanischen Feldgrößen lassen sich unter Nutzung von Gleichung (17) aus Gleichung (27) ableiten:

$$T_{ji} = \varrho \frac{\partial G}{\partial u_{j,i}} = \underbrace{C_{ijkl} u_{k,l}}_{\text{Elastizität}} - \underbrace{e_{kij} E_k}_{\text{inv. Piezoelekt.}} - \underbrace{\zeta_{ij} \vartheta}_{\text{thermische Spannungen}} \quad (28)$$

$$D_i = -\varrho \frac{\partial G}{\partial E_i} = \underbrace{e_{ijk} u_{j,k}}_{\text{direkte Piezoelekt.}} + \underbrace{\kappa_{ij} E_j}_{\text{Permittivität}} + \underbrace{p_i \vartheta}_{\text{Pyroelektrizität}} \quad (29)$$

$$\varrho \eta = -\frac{\partial G}{\partial \Theta} = \underbrace{\zeta_{ij} u_{i,j}}_{\text{Deformationswärme}} + \underbrace{p_i E_i}_{\text{elektrokalor. Effekt}} + \underbrace{\frac{\varrho c_v}{\Theta} \vartheta}_{\text{Wärmekapazität}} \quad (30)$$

2.3 Gekoppelte Feldgleichungen

Die Impulsbilanz (2), die Drehimpulsbilanz (3), die Bilanz des elektrischen Feldes (5) und die Restenergiegleichung (18) bilden die Grundlage für die gekoppelten Feldgleichungen:

$$\int_V (T_{ij,j} + \varrho b_i - \varrho \ddot{u}_i) dV = 0 \quad (31)$$

$$\int_V D_{i,i} dV = 0 \quad (32)$$

$$\int_V (q_{i,i} - \varrho r + \Theta \varrho \dot{\eta}) dV = 0 \quad (33)$$

Da das elektrische Feld entsprechend Gleichung (12) als wirbelfrei angenommen wird, kann es aus dem Skalarfeld des elektrischen Potentials φ gemäß

$$E_i = -\varphi_{,i} \quad (34)$$

abgeleitet werden. Die Substitution der konstitutiven Gleichungen (28) - (30), des Fourierschen Wärmeleitungsgesetzes (20) und des elektrischen Potentials φ in die Feldgleichungen (31) - (33) führt auf das folgende gekoppelte Differentialgleichungssystem

$$\int_V (C_{ijkl} u_{k,l,j} + e_{kij} \varphi_{,kj} - \zeta_{ij} \vartheta_{,j} + \varrho b_i) dV = \int_V \varrho \ddot{u}_i dV \quad (35)$$

$$\int_V (e_{ikl} u_{k,li} - \kappa_{ik} \varphi_{,ki} + p_i \vartheta_{,i}) dV = 0 \quad (36)$$

$$\int_V \left(\Theta (\zeta_{ij} \dot{u}_{i,j} - p_i \dot{\varphi}_{,i} + \varrho (c_v/\Theta) \dot{\vartheta}) - \varrho r \right) dV = \int_V \lambda_{ij} \vartheta_{,ij} dV \quad (37)$$

Zur vollständigen Beschreibung des gekoppelten 3-Feldproblems bedarf es noch der jeweiligen Randbedingungen auf der Oberfläche O , die als Vereinigung von Teiloberflächen angenommen wird, wobei keine Überschneidungen existieren.

$$O = O_u \cup O_T = O_\varphi \cup O_D = O_\vartheta \cup O_{q_s} \cup O_{q_h} \quad (38)$$

$$O_u \cap O_T = O_\varphi \cap O_D = O_\vartheta \cap O_{q_s} \cap O_{q_h} = 0 \quad (39)$$

$$u_i = \bar{u}_i - \text{Randverschiebung auf } O_u \quad T_{ji} n_j = \bar{t}_i - \text{Randspannung auf } O_T \quad (40)$$

$$\varphi = \bar{\varphi} - \text{Randpotential auf } O_\varphi \quad D_i n_i = -\bar{Q} - \text{Oberflächenladung auf } O_D \quad (41)$$

$$\vartheta = \bar{\vartheta} - \text{Randtemperaturänderung auf } O_\vartheta \quad q_i n_i = -\bar{q}_s - \text{Randwärmestromdichte auf } O_{q_s} \quad (42)$$

$$q_i n_i = \bar{q}_h = h_v (\vartheta + \Theta_0 - \Theta_\infty) - \text{konvektiver Wärmeübergang auf } O_{q_h} \quad (43)$$

3 Variations- und Finite-Element-Formulierung

Unter Einführung der Gewichte δu_i - virtuelle Verschiebung, $\delta \varphi$ - virtuelles elektrisches Potential und $\delta \vartheta$ - virtuelle Temperatur lassen sich die Feldgleichungen (31) - (33) und die dazugehörigen Randbedingungen (40) - (43) äquivalent als Funktionale darstellen:

$$\delta F_u = \int_V \delta u_i (T_{ji,j} + \rho b_i - \rho \ddot{u}_i) dV + \int_{O_t} \delta u_i (\bar{t}_i - T_{ji} n_j) dO = 0 \quad (44)$$

$$\delta F_\varphi = \int_V \delta \varphi D_{i,i} dV - \int_{O_Q} \delta \varphi (\bar{Q} + D_i n_i) dO = 0 \quad (45)$$

$$\delta F_\vartheta = \int_V \delta \vartheta (q_{i,i} + \Theta \rho \dot{\eta} - \rho r) dV - \int_{O_{q_s}} \delta \vartheta (\bar{q}_s + q_i n_i) dO + \int_{O_{q_h}} \delta \vartheta (\bar{q}_h - q_i n_i) dO = 0 \quad (46)$$

Mit den konstitutiven Gleichungen (20),(28) - (30) und der Gleichung (34) ergibt sich aus den Gleichungen (44) - (46) eine Formulierung der schwachen Form des thermoelektromechanischen Gleichgewichts, welche die Grundlage zur Ableitung einer Finite-Element-Beziehung bildet:

$$\delta F_u = - \int_V \delta u_{i,j} (C_{ijkl} u_{k,l} + e_{kij} \varphi_{,k} - \zeta_{ij} \vartheta) dV + \int_V \delta u_i (\rho b_i - \rho \ddot{u}_i) dV + \int_{O_t} \delta u_i \bar{t}_i dO = 0 \quad (47)$$

$$\delta F_\varphi = - \int_V \delta \varphi_{,i} (e_{ijk} u_{j,k} - \kappa_{ij} \varphi_{,j} + p_i \vartheta) dV - \int_{O_Q} \delta \varphi \bar{Q} dO = 0 \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \delta F_\vartheta = & \int_V \delta \vartheta \Theta (\zeta_{ij} \dot{u}_{i,j} - p_i \dot{\varphi}_{,i} + (\rho c_v / \Theta) \dot{\vartheta}) dV - \int_V \delta \vartheta \rho r dV \\ & + \int_V \delta \vartheta_{,i} \lambda_{ij} \vartheta_{,j} dV - \int_{O_{q_s}} \delta \vartheta \bar{q}_s dO + \int_{O_{q_h}} \delta \vartheta h_v (\vartheta + \Theta_0 - \Theta_\infty) dO = 0 \end{aligned} \quad (49)$$

Die Feldgrößen innerhalb eines Elementes ($\mathbf{u}_e, \varphi_e, \vartheta_e$) können mit Hilfe der Ansatzfunktionen ($\mathbf{N}_u, \mathbf{N}_\varphi, \mathbf{N}_\vartheta$) und der Knotenfreiheitsgrade ($\mathbf{u}_k, \varphi_k, \vartheta_k$) über die folgende Verknüpfung approximiert werden:

$$\mathbf{u}_e = \mathbf{N}_u (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \mathbf{u}_k \quad \varphi_e = \mathbf{N}_\varphi (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \varphi_k \quad \vartheta_e = \mathbf{N}_\vartheta (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \vartheta_k \quad (50)$$

Zur Vereinfachung der Darstellung werden die Matrizen der Differentialoperatoren

$$\mathbf{D}_u = \begin{bmatrix} \partial/\partial x_1 & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial x_2 & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial x_3 \\ \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_1 & 0 \\ 0 & \partial/\partial x_3 & \partial/\partial x_2 \\ \partial/\partial x_3 & 0 & \partial/\partial x_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D}_\varphi = \mathbf{D}_\vartheta = \begin{bmatrix} \partial/\partial x_1 \\ \partial/\partial x_2 \\ \partial/\partial x_3 \end{bmatrix} \quad (51)$$

eingeführt und auf die Ansatzfunktionen angewendet. Es ergeben sich in symbolischer Schreibweise die Matrizen

$$\mathbf{B}_u = \mathbf{D}_u \mathbf{N}_u \quad \mathbf{B}_\varphi = \mathbf{D}_\varphi \mathbf{N}_\varphi \quad \mathbf{B}_\vartheta = \mathbf{D}_\vartheta \mathbf{N}_\vartheta \quad (52)$$

Das Einsetzen der Gleichungen (50) und (52) in die Formulierung der schwachen Form des thermoelektromechanischen Gleichgewichts verbunden mit der Annahme $\delta F_u = \sum \delta F_u^e$, $\delta F_\varphi = \sum \delta F_\varphi^e$, $\delta F_\vartheta = \sum \delta F_\vartheta^e$ liefert die Element-Energiefunktionale in semidiskreter Matrix-Schreibweise:

$$\begin{aligned} \delta F_u^e &= -\delta \mathbf{u}_k^T \int_{V^e} \mathbf{B}_u^T \mathbf{C} \mathbf{B}_u dV \mathbf{u}_k - \delta \mathbf{u}_k^T \int_{V^e} \mathbf{B}_u^T \mathbf{e}^T \mathbf{B}_\varphi dV \varphi_k + \delta \mathbf{u}_k^T \int_{V^e} \mathbf{B}_u^T \zeta \mathbf{N}_\vartheta dV \vartheta_k \\ &\quad - \delta \mathbf{u}_k^T \int_{V^e} \mathbf{N}_u^T \rho \mathbf{N}_u dV \ddot{\mathbf{u}}_k + \delta \mathbf{u}_k^T \int_{V^e} \mathbf{N}_u^T \rho \mathbf{b} dV + \delta \mathbf{u}_k^T \int_{O_i^e} \mathbf{N}_u^T \bar{\mathbf{t}} dO = 0 \end{aligned} \quad (53)$$

$$\begin{aligned} \delta F_\varphi^e &= -\delta \varphi_k^T \int_{V^e} \mathbf{B}_\varphi^T \mathbf{e} \mathbf{B}_u dV \mathbf{u}_k + \delta \varphi_k^T \int_{V^e} \mathbf{B}_\varphi^T \boldsymbol{\kappa} \mathbf{B}_\varphi dV \varphi_k \\ &\quad - \delta \varphi_k^T \int_{V^e} \mathbf{B}_\varphi^T \mathbf{p} \mathbf{N}_\vartheta dV \vartheta_k - \delta \varphi_k^T \int_{O_Q^e} \mathbf{N}_\varphi^T \bar{Q} dO = 0 \end{aligned} \quad (54)$$

$$\begin{aligned} \delta F_\vartheta^e &= \delta \vartheta_k^T \int_{V^e} \mathbf{N}_\vartheta^T \mathbf{N}_\vartheta \boldsymbol{\Theta}_k \zeta^T \mathbf{B}_u dV \dot{\mathbf{u}}_k - \delta \vartheta_k^T \int_{V^e} \mathbf{N}_\vartheta^T \mathbf{N}_\vartheta \boldsymbol{\Theta}_k \mathbf{p}^T \mathbf{B}_\varphi dV \dot{\varphi}_k \\ &\quad + \delta \vartheta_k^T \int_{V^e} \mathbf{N}_\vartheta^T \varrho c_v \mathbf{N}_\vartheta dV \dot{\vartheta}_k - \delta \vartheta_k^T \int_{V^e} \mathbf{N}_\vartheta^T \varrho r dV + \delta \vartheta_k^T \int_{V^e} \mathbf{B}_\vartheta^T \boldsymbol{\lambda} \mathbf{B}_\vartheta dV \vartheta_k \\ &\quad - \delta \vartheta_k^T \int_{O_{q_s}^e} \mathbf{N}_\vartheta^T \bar{q}_s dO + \delta \vartheta_k^T \int_{O_{q_h}^e} \mathbf{N}_\vartheta^T h_v (\mathbf{N}_\vartheta \vartheta_k + \Theta_0 - \Theta_\infty) dO = 0 \end{aligned} \quad (55)$$

Mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{uu}^e &= \int_{V^e} \mathbf{N}_u^T \rho \mathbf{N}_u dV & \mathbf{K}_{\varphi u}^e &= \int_{V^e} \mathbf{B}_\varphi^T \mathbf{e} \mathbf{B}_u dV & \mathbf{K}_{\vartheta u}^e &= \int_{V^e} \mathbf{N}_\vartheta^T \mathbf{N}_\vartheta \boldsymbol{\Theta}_k \zeta^T \mathbf{B}_u dV \\ \mathbf{K}_{uu}^e &= \int_{V^e} \mathbf{B}_u^T \mathbf{C} \mathbf{B}_u dV & \mathbf{K}_{\varphi \varphi}^e &= \int_{V^e} \mathbf{B}_\varphi^T \boldsymbol{\kappa} \mathbf{B}_\varphi dV & \mathbf{K}_{\vartheta \varphi}^e &= \int_{V^e} \mathbf{N}_\vartheta^T \mathbf{N}_\vartheta \boldsymbol{\Theta}_k \mathbf{p}^T \mathbf{B}_\varphi dV \\ \mathbf{K}_{u\varphi}^e &= \int_{V^e} \mathbf{B}_u^T \mathbf{e}^T \mathbf{B}_\varphi dV & \mathbf{K}_{\varphi \vartheta}^e &= \int_{V^e} \mathbf{B}_\varphi^T \mathbf{p} \mathbf{N}_\vartheta dV & \mathbf{H}_{\vartheta \vartheta}^e &= \int_{V^e} \mathbf{N}_\vartheta^T \varrho c_v \mathbf{N}_\vartheta dV \\ \mathbf{K}_{u\vartheta}^e &= \int_{V^e} \mathbf{B}_u^T \zeta \mathbf{N}_\vartheta dV & \mathbf{K}_{\vartheta \vartheta}^e &= \int_{V^e} \mathbf{B}_\vartheta^T \boldsymbol{\lambda} \mathbf{B}_\vartheta dV + \int_{O_{q_h}^e} \mathbf{N}_\vartheta^T h_v \mathbf{N}_\vartheta dO \\ \mathbf{f}_u^e &= \int_{V^e} \mathbf{N}_u^T \rho \mathbf{b} dV + \int_{O_i^e} \mathbf{N}_u^T \bar{\mathbf{t}} dO & \mathbf{f}_\varphi^e &= - \int_{O_Q^e} \mathbf{N}_\varphi^T \bar{Q} dO \\ \mathbf{f}_\vartheta^e &= \int_{O_{q_h}^e} \mathbf{N}_\vartheta^T h_v (\Theta_\infty - \Theta_0) dO + \int_{O_{q_s}^e} \mathbf{N}_\vartheta^T \bar{q}_s dO + \int_{V^e} \mathbf{N}_\vartheta^T \varrho r dV \end{aligned} \quad (56)$$

läßt sich das folgende Differentialgleichungssystem für ein Element ableiten:

$$\mathbf{M}_{uu}^e \ddot{\mathbf{u}}_k + \mathbf{K}_{uu}^e \mathbf{u}_k + \mathbf{K}_{u\varphi}^e \varphi_k - \mathbf{K}_{u\vartheta}^e \vartheta_k = \mathbf{f}_u^e \quad (57)$$

$$\mathbf{K}_{\varphi u}^e \mathbf{u}_k - \mathbf{K}_{\varphi \varphi}^e \varphi_k + \mathbf{K}_{\varphi \vartheta}^e \vartheta_k = \mathbf{f}_\varphi^e \quad (58)$$

$$\mathbf{K}_{\vartheta u}^e \dot{\mathbf{u}}_k - \mathbf{K}_{\vartheta \varphi}^e \dot{\varphi}_k + \mathbf{H}_{\vartheta \vartheta}^e \dot{\vartheta}_k + \mathbf{K}_{\vartheta \vartheta}^e \vartheta_k = \mathbf{f}_\vartheta^e \quad (59)$$

Bei Zusammenfassung der Elementmatrizen zu einer globalen Matrix können die Systemgleichungen in Vektor-Matrix-Schreibweise wiedergegeben werden:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{uu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}} \\ \ddot{\varphi} \\ \ddot{\vartheta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{K}_{\vartheta u} & -\mathbf{K}_{\vartheta \varphi} & \mathbf{H}_{\vartheta \vartheta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\varphi} \\ \dot{\vartheta} \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\varphi} & -\mathbf{K}_{u\vartheta} \\ \mathbf{K}_{\varphi u} & -\mathbf{K}_{\varphi \varphi} & \mathbf{K}_{\varphi \vartheta} \\ 0 & 0 & \mathbf{K}_{\vartheta \vartheta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \varphi \\ \vartheta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_u \\ \mathbf{f}_\varphi \\ \mathbf{f}_\vartheta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (60)$$

4 Lösungsstrategien

Wird die Zeitabhängigkeit der Feldgrößen vernachlässigt, vereinfacht sich das Gleichungssystem zu

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\varphi} & -\mathbf{K}_{u\vartheta} \\ \mathbf{K}_{\varphi u} & -\mathbf{K}_{\varphi \varphi} & \mathbf{K}_{\varphi \vartheta} \\ 0 & 0 & \mathbf{K}_{\vartheta \vartheta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \varphi \\ \vartheta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_u \\ \mathbf{f}_\varphi \\ \mathbf{f}_\vartheta \end{bmatrix} \quad (61)$$

Die Gleichungen sind nun nicht mehr vollständig gekoppelt und können in zwei Schritten gelöst werden: 1. Berechnung des Temperaturfeldes (62), 2. Lösung der gekoppelten piezoelektrischen Gleichungen (63).

$$\mathbf{K}_{\vartheta\vartheta} \vartheta = \mathbf{f}_{\vartheta} \quad (62)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\varphi} \\ \mathbf{K}_{\varphi u} & -\mathbf{K}_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_u + \mathbf{K}_{u\vartheta} \vartheta \\ \mathbf{f}_{\varphi} - \mathbf{K}_{\varphi\vartheta} \vartheta \end{bmatrix} \quad (63)$$

Für die numerische Behandlung des vollständig gekoppelten Systems (60) ergeben sich prinzipiell zwei Vorgehensweisen: 1. Die simultane Iteration über die elektromechanischen und thermischen Variablen, 2. Die sukzessive, ungekoppelte Vorgehensweise, bei der das piezoelektrische und das thermische Problem nacheinander iterativ gelöst werden und jeweils die Ausgangsgrößen für die Lösung des koexistenten Problems liefern.

In der Arbeit von Argyris u.a. (1984) werden die numerischen Eigenschaften dieser beiden Verfahren für thermomechanische Vorgänge untersucht und diskutiert. Die Vorteile der sukzessiven Lösung liegen in ihrer algorithmischen Einfachheit und einer schnelleren Konvergenz gegenüber der simultanen Lösung bei schwach gekoppelten Systemen. Im Gegensatz zur simultanen Lösung können hier zwei unabhängige Programmteile für die Berechnung des piezoelektrischen und des thermischen Feldproblems genutzt werden. Da die Realisierung der thermopiezoelektrischen Kopplung im Rahmen dieser Arbeit unter Nutzung eines bestehenden FEM-Systems (COSAR) erfolgt, wurde der Methode der sukzessiven Kopplung der Vorzug gegeben. Dabei werden in jedem Schritt der Zeitintegration die Gleichungssysteme der instationären Wärmeübertragung (64) und der Piezoelektrizität (65) separat gelöst, wobei die Koppelterme als Kraftvektoren auf der rechten Seite der Gleichungssysteme berücksichtigt werden:

$$\mathbf{H}_{\vartheta\vartheta} \overset{(i)}{\dot{\vartheta}} + \mathbf{K}_{\vartheta\vartheta} \overset{(i)}{\vartheta} = \mathbf{f}_{\vartheta} - \mathbf{K}_{\vartheta u} \overset{(i)}{\dot{\mathbf{u}}} + \mathbf{K}_{\vartheta\varphi} \overset{(i)}{\dot{\varphi}} \quad (64)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{uu} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overset{(i)}{\ddot{\mathbf{u}}} \\ \overset{(i)}{\ddot{\varphi}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\varphi} \\ \mathbf{K}_{\varphi u} & -\mathbf{K}_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overset{(i)}{\mathbf{u}} \\ \overset{(i)}{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_u + \mathbf{K}_{u\vartheta} \overset{(i)}{\vartheta} \\ \mathbf{f}_{\varphi} - \mathbf{K}_{\varphi\vartheta} \overset{(i)}{\vartheta} \end{bmatrix} \quad (65)$$

Bei der Zeitintegration wird für die Gleichung der Wärmeübertragung das Crank-Nicolson-Verfahren und für die piezoelektrischen Gleichungen das Newmark-Verfahren verwendet. Für den 1. Zeitschritt werden die Ausgangszustände der Temperatur, der Verschiebungen und des elektrischen Potentials benutzt. Für jeden Zeitschritt erfolgt eine Iteration der piezoelektrischen Variablen und der Temperatur, bis sich ein Gleichgewichtszustand eingestellt hat.

5 Berechnungsbeispiel

Zur Verdeutlichung der beschriebenen Koppel Effekte wird ein von T.R. Tauchert vorgestelltes Benchmark-Beispiel (Tauchert, 1997) untersucht. Eine Platte mit einem Breite-Höhe-Verhältnis von $b/h = 5$ und dem im Bild 1 dargestellten Lagenaufbau wird einer thermischen Belastung ausgesetzt. Es wird ein ebener Verzerrungszustand senkrecht zur x_1 -Achse angenommen. Weiterhin gelten an den Rändern der Platte ($x_2 = 0, b$) für jede Schicht k die periodischen Randbedingungen $u_3^{(k)} = \sigma_{22}^{(k)} = 0$. An den Innenflächen $x_3 = -0.3h, 0.3h$ und den Rändern der piezoelektrischen Schichten wird das elektrische Potential bei $\varphi = 0$ gehalten, während sich auf den Außenflächen eine beliebige Potentialverteilung einstellen kann. Die einzelnen Lagen weisen folgende Materialeigenschaften auf:

- isotrope Schicht: $E = E_0, \nu = \nu_0, \alpha = \alpha_0, \lambda = \lambda_0, \varrho = \varrho_0, c_v = c_{v0}$
- orthotrope Schicht, 0° : $E_2 = 90 \cdot E_0, E_1 = E_3 = 5 \cdot E_0, G_{12} = G_{23} = 4 \cdot E_0, G_{13} = 1,5 \cdot E_0, \nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = \nu_0, \alpha_2 = 0,0002 \cdot \alpha_0, \alpha_1 = \alpha_3 = 0,2 \cdot \alpha_0, \lambda_2 = 100 \cdot \lambda_0, \lambda_1 = \lambda_3 = \lambda_0, \varrho = 0,2 \cdot \varrho_0, c_v = 3 \cdot c_{v0}$
- orthotrope Schicht, 90° : $E_1 = 90 \cdot E_0, E_2 = E_3 = 5 \cdot E_0, G_{12} = G_{13} = 4 \cdot E_0, G_{23} = 1,5 \cdot E_0, \nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = \nu_0, \alpha_1 = 0,0002 \cdot \alpha_0, \alpha_2 = \alpha_3 = 0,2 \cdot \alpha_0, \lambda_1 = 100 \cdot \lambda_0, \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_0, \varrho = 0,2 \cdot \varrho_0, c_v = 3 \cdot c_{v0}$
- piezoelektrische Schicht: $E = E_0, \nu = \nu_0, \alpha = \alpha_0, \lambda = \lambda_0, \kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_0, \kappa_3 = 10 \cdot \kappa_0, p = p_0, d_{31} = d_{32} = d_{24} = d_0, d_{33} = 1,4 \cdot d_0, \varrho = \varrho_0, c_v = c_{v0}$

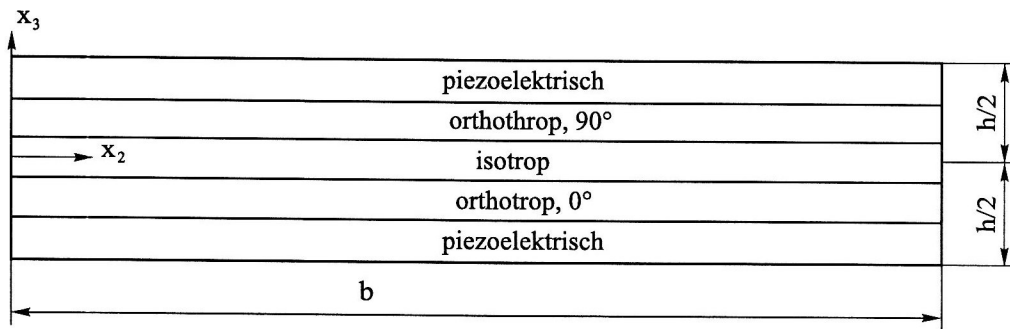


Bild 1: Laminataufbau der untersuchten Platte

Zur Berechnung wurden folgende Werte benutzt (siehe Bild 1): $b = 50 \text{ mm}$, $h = 10 \text{ mm}$, $E_0 = 2000 \text{ Nmm}^{-2}$, $\nu_0 = 0,25$, $\alpha_0 = 10e^{-6} \text{ K}^{-1}$, $\lambda_0 = 1 \text{ WK}^{-1}\text{m}^{-1}$, $\kappa_0 = 1e^{-9} \text{ Fm}^{-1}$, $d_0 = 2e^{-10} \text{ mV}^{-1}$, $p_0 = 0,25e^{-3} \text{ Cm}^{-2}\text{K}^{-1}$, $\rho_0 = 7600 \text{ kgm}^{-3}$, $c_{v0} = 420 \text{ Wskg}^{-1}\text{K}^{-1}$. Die Platte wird am Rand $x_3 = -h/2$ einer plötzlichen sinusförmigen Temperaturbelastung $\vartheta = \vartheta_0 \sin(\pi y/b)$ mit $\vartheta_0 = 50 \text{ K}$ ausgesetzt, während die Ränder $x_2 = 0$, $x_2 = b$ und $x_3 = h/2$ keine Änderung der Randtemperatur erfahren ($\Theta = 273,15 \text{ K}$).

Zur Untersuchung des Problems mit Hilfe der FEM wurde jede Schicht mit 26 isoparametrischen Scheibenelementen mit quadratischen Ansatzfunktionen modelliert. Bei Vernachlässigung der Zeitabhängigkeit der Feldvariablen kann die stationäre Lösung entsprechend den Gleichungen (62) and (63) ermittelt werden. Das Diagramm in Bild 2 zeigt die normierte Verschiebung ($u_3^* = u_3 h \alpha_0^{-1} \vartheta_0^{-1} b^{-2}$) über die Höhe im Mit-

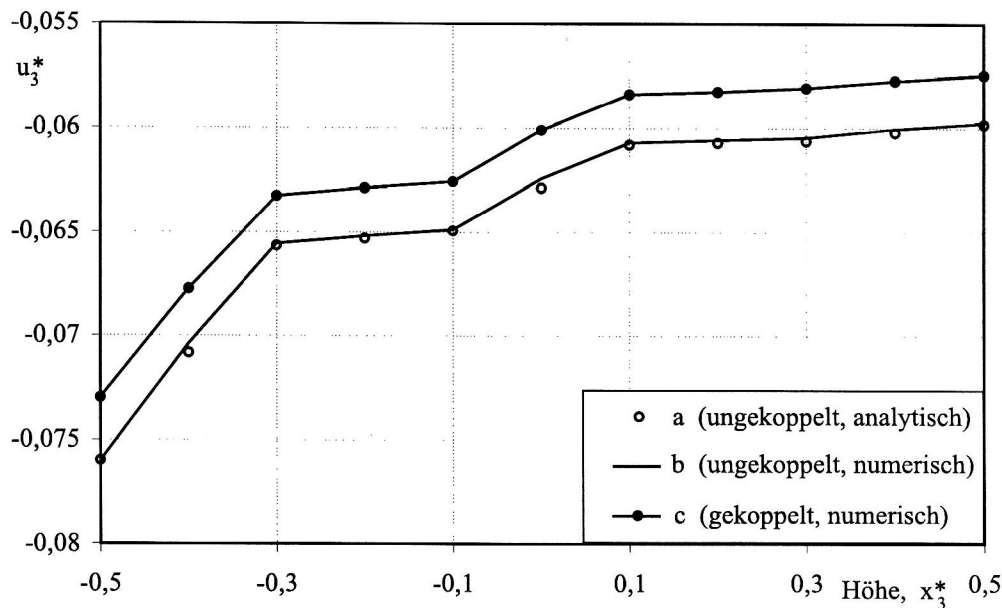


Bild 2: Normierte Verschiebung $u_3^* [0,5b; x_3^*]$

telschnitt der Platte. Der Graph a beschreibt die in Tauchert (1997) angegebene analytische Lösung unter Vernachlässigung der piezoelektrischen Effekte und des pyroelektrischen Effekts. Zum Vergleich wurde auch eine FE-Berechnung ohne Berücksichtigung der piezo- und pyroelektrischen Kopplung durchgeführt (Graph b). Die ermittelte Lösung stimmt sehr gut mit der analytischen Lösung überein. Graph c zeigt die berechnete Plattenbiegung, wenn zusätzlich die piezo- und pyroelektrischen Kopplungseffekte berücksichtigt werden. Das Ergebnis zeigt, daß diese Kopplung einen starken Einfluß auf das Ergebnis besitzt. Bei Berücksichtigung der piezo- und pyroelektrischen Kopplung ergibt sich in den piezoelektrischen Schichten eine Potentialdifferenz. Bild 3 zeigt die Änderung des elektrischen Potentials auf der unteren piezoelektrischen Schicht ($x_3 = -0,5h$) über der Plattenbreite. Die Kurve a repräsentiert die FE-Lösung unter Berücksichtigung der piezoelektrischen Kopplung; Graph b beschreibt die Lösung, wenn zusätzlich auch

auch die pyroelektrische Kopplung berücksichtigt wird. Diese Darstellung zeigt, daß der pyroelektrische Effekt insbesondere bei der Sensorfunktion der Piezokeramiken berücksichtigt werden muß.

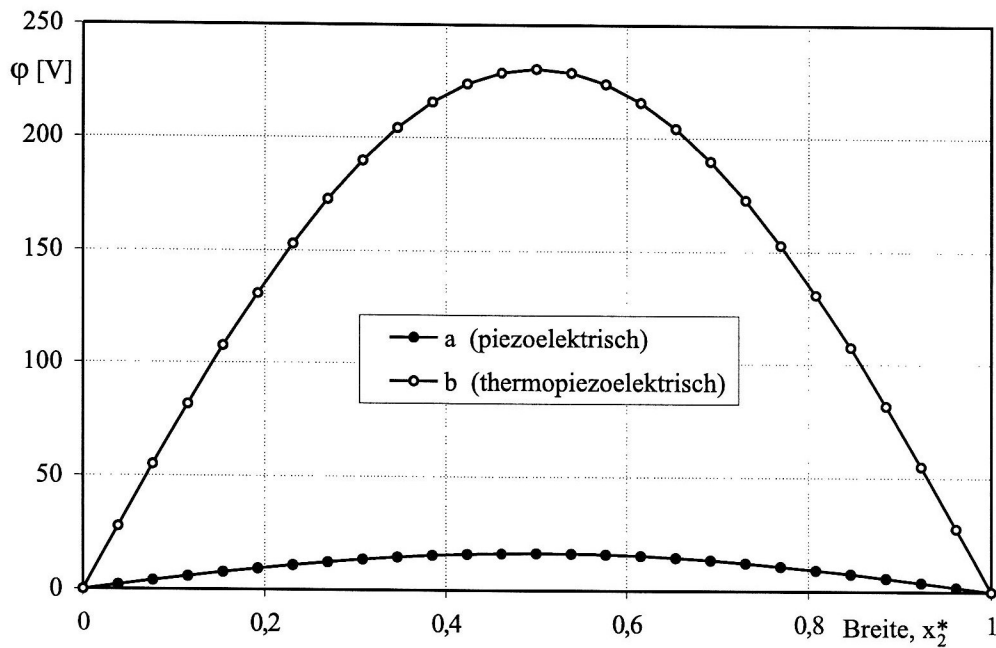


Bild 3: Elektrisches Potential $\varphi [x_2^* ; -0,5 h]$

Wird die Zeitabhängigkeit der Feldvariablen berücksichtigt, müssen die gekoppelten Gleichungen (64) und (65) gelöst werden. Aufgrund der stoßartigen Belastung wurde zum belasteten Rand hin eine Netzverfeinerung durchgeführt, um Anfangssoszillationen der instationären Lösung zu vermeiden. Im Bild 4 ist der Temperaturverlauf am Punkt $[x_2 = 0,5 b ; x_3 = -0,4 h]$ über die Zeit aufgetragen. Die Kurve *a* beschreibt die ungekoppelte Lösung des instationären Temperaturfeldes, während Graph *b* die gekoppelte Lösung unter Berücksichtigung des elektrokalendarischen Effektes beschreibt. Der Effekt der Deformationswärme ist in diesem Beispiel sehr gering und wird nicht betrachtet. Die Kurve *c* beschreibt die Differenz der beiden Lösungen *a* und *b* und damit den Einfluß des elektrokalendarischen Effektes, der in diesem Beispiel ebenfalls relativ gering ist.

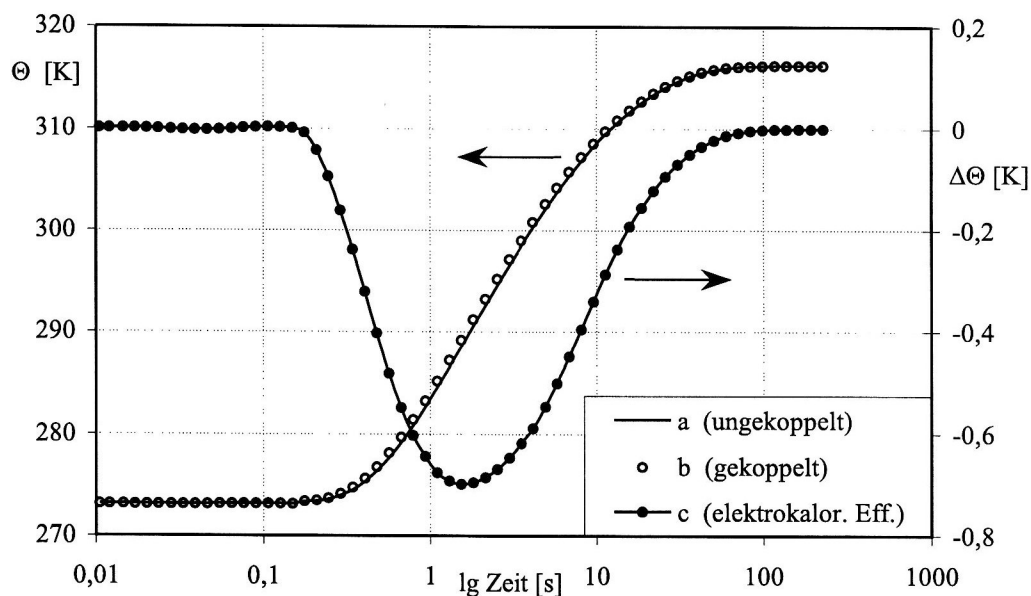


Bild 4: Temperatur Θ und Temperaturdifferenz $\Delta\Theta$ am Punkt $[0,5 b ; -0,4 h]$ über die Zeit

6 Zusammenfassung

Auf der Grundlage der thermoelektromechanischen Bilanz- und Erhaltungsgleichungen und einer linearen Materialtheorie wird die schwache Form des vollständig gekoppelten thermopiezoelektrischen Gleichgewichts entwickelt, welche die Basis zur Ableitung einer allgemeinen FEM-Formulierung bildet. Es zeigt sich, daß das erhaltene System von gekoppelten Differentialgleichungen eine unsymmetrische Struktur aufweist. Die Temperatur ist nur von den ersten Zeitableitungen der Verschiebung und des elektrischen Potentials abhängig. Für stationäre Berechnungen können die Gleichungen teilweise entkoppelt gelöst werden. Für die instationäre Analyse wird eine sukzessive iterative Lösungsstrategie vorgeschlagen. An einem Beispiel wird veranschaulicht, daß die untersuchten thermischen Effekte einen deutlichen Einfluß auf das Systemverhalten piezoelektrisch geregelter Strukturen haben können, der berücksichtigt werden muß.

Danksagung

Der Deutschen Forschungsgemeinschaft danke ich für die finanzielle Unterstützung meiner Arbeit im Graduiertenkolleg „Modellierung, Berechnung und Identifikation mechanischer Systeme“ (GRK 203).

Symbole

A	– Fläche	U	– spezifische innere Energie
C_{ijkl}	– Steifigkeitstensor	\dot{v}_i	– Geschwindigkeitsv. der el. Ladungsträger
D_i	– Vektor der elektr. Verschiebungsdichte	x_i	– Ortsvektor
E	– E-Modul	α	– Wärmeausdehnungskoeffizient
E_i	– Vektor der elektrischen Feldstärke	ϵ_{ijk}	– Permutationssymbol
e_{ijk}	– piezoelektrischer Kopplungstensor	ζ_{ij}	– Tensor der therm. Spannungskoeffizienten
H_i	– Vektor der magnetischen Feldstärke	η	– spezifische Entropie
J_i	– Vektor der elektrischen Stromdichte	Θ	– absolute Temperatur
m	– Masse	Θ_0	– abs. Temp. des Ausgangszustandes
n_i	– Normalenvektor	Θ_∞	– abs. Temp. der Umgebung
O	– Oberfläche	κ	– Dielektrizitätstensor
p_i	– Vektor der pyroelektr. Koeffizienten	ν	– Querkontraktionszahl
q_i	– Vektor der Wärmestromdichte	ρ	– Dichte
T_{ij}	– Spannungstensor	ρ_c	– elektrische Ladungsdichte
t	– Zeit		

Literatur

1. Altenbach, J.; Altenbach, H.: Einführung in die Kontinuumsmechanik. B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, (1994).
2. Argyris, J.H.; Doltsinis, J.St.; Kneese, F.; Wüstenberg, H.: Numerik thermomechanischer Vorgänge. Institut für Computeranwendungen, Universität Stuttgart, Stuttgart, (1984).
3. Mason, W.P.: Piezoelectric Crystals and Their Application to Ultrasonics. D. Van Nostrand Company, New York, (1954).
4. Nowinski, J.L.: Theory of thermoelasticity with applications. Sijthoff & Noordhoff International Publishers, Alphen aan den Rijn, (1978).
5. Tauchert, T.R.: Plane Piezothermoelastic Response of a Hybrid Laminate – a Benchmark Problem. Composite Structures, 39, 3-4, (1997), 329-336.
6. Tiersten, H.F.: Linear Piezoelectric Plate Vibrations. Plenum Press, New York, (1969).
7. Tiersten, H.F.: A Development of the Equations of Electromagnetism in Material Continua. Springer-Verlag, New York, (1990).

Anschrift: Dipl.-Ing. Andreas Görnandt, Institut für Mechanik, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, Postfach 4120, D-39016 Magdeburg. *e-mail:* andreas.goernandt@mb.uni-magdeburg.de