

Numerische Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen in Gebieten mit bewegtem Rand

G. Matthies

Wir betrachten die instationären, inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen in zweidimensionalen Gebieten mit bewegten Rändern. Wir werden eine Finite-Elemente-Methode vorstellen, die zur Lösung solcher Probleme geeignet ist. Ein besonderes Augenmerk richten wir auf die Vernetzung des Strömungsgebietes, die sich den Veränderungen des Gebietes anpassen muß. Dabei gehen wir auch auf die programmtechnische Umsetzung ein.

1 Einleitung

Die Berechnung von Strömungen in Gebieten mit bewegten Rändern tritt in vielen praktischen Anwendungen auf. Man denke nur an die Züchtung von Kristallen (Knobloch, 1996) und an Flüssigkeitsdichtungen. Dabei werden in zunehmendem Maße auch sogenannte intelligente Flüssigkeiten wie Ferrofluide eingesetzt, siehe Blums u.a. (1997) und Rosensweig (1998).

Zunächst werden wir uns mit der grundlegenden mathematischen Beschreibung von Strömungsvorgängen, den Navier-Stokes-Gleichungen, befassen. Dabei werden insbesondere die Randbedingungen auf dem bewegten Rand näher betrachtet. Danach widmen wir uns der räumlichen und zeitlichen Diskretisierung der Gleichungen und gehen dabei auf die Babuška-Brezzi-Bedingung ein, die festlegt, welche Finite-Elemente-Räume zur Approximation von Geschwindigkeit und Druck kombiniert werden können. Der folgende Abschnitt beschäftigt sich dann mit der Behandlung des Krümmungsterms, der in den Randbedingungen auftritt. Schließlich werden wir ein Konzept vorstellen, das die Handhabung der Triangulierungen in den zeitlich veränderlichen Gebieten ermöglicht. Zum Abschluß demonstrieren wir an einem Beispiel die Leistungsfähigkeit unserer Herangehensweise.

2 Formulierung des Problems

In diesem Abschnitt werden wir zunächst die partiellen Differentialgleichungen angeben, die das dynamische Strömungsverhalten eines inkompressiblen Fluids beschreiben. Danach gehen wir genauer auf die Randbedingungen auf dem bewegten Rand ein. Um uns auf die wesentlichen Gesichtspunkte konzentrieren zu können, beschränken wir uns auf den zweidimensionalen Fall. Die im folgenden vorgestellten Ideen lassen sich auf den dreidimensionalen Fall ausdehnen.

Die Strömung eines inkompressiblen Fluids in einem zeitlich veränderlichen Gebiet $\Omega(t)$ wird durch die instationären, inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen beschrieben. Eine Entdimensionierung mit Hilfe einer Bezugsgeschwindigkeit U und einer Bezugslänge L führt auf die dimensionslosen Parameter Reynoldszahl Re und Kapillarzah Ca , die gemäß

$$Re = \frac{UL}{\nu} \quad Ca = \frac{\nu \rho U}{\gamma} \quad (1)$$

definiert sind. Dabei sind ρ die Dichte des Fluids, ν die kinematische Viskosität und γ die Oberflächenspannung. Die entdimensionierten Navier-Stokes-Gleichungen sind durch

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, p) = \mathbf{f} \quad \text{in } \Omega(t) \quad t > 0 \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{in } \Omega(t) \quad t > 0 \quad (3)$$

gegeben. Dabei sind \mathbf{u} , p und \mathbf{f} die bezogenen Größen für die Geschwindigkeit, den Druck und die von außen wirkende Kraft. Der Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, p)$ ist durch

$$\sigma_{ij} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, p)_{ij} = \frac{2}{Re} D(\mathbf{u})_{ij} - p \delta_{ij} \quad i, j = 1, \dots, d \quad (4)$$

gegeben, wobei

$$D(\mathbf{u})_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad i, j = 1, \dots, d \quad (5)$$

der Geschwindigkeitsdeformationstensor ist und δ_{ij} das Kronecker-Symbol bezeichnet.

In vielen praktischen Anwendungsfällen ist der bewegte Rand nur ein Teil des gesamten Randes. Als Vereinfachung wollen wir uns hier auf den Fall beschränken, daß der gesamte Rand ein freier Rand ist. Damit erhalten wir die folgenden Randbedingungen

$$\mathbf{n} \cdot \sigma(\mathbf{u}, p) \mathbf{n} = \frac{2\mathcal{H}}{\text{Ca}} \quad \text{auf } \Gamma(t) \quad (6)$$

$$\mathbf{t} \cdot \sigma(\mathbf{u}, p) \mathbf{n} = 0 \quad \text{auf } \Gamma(t) \quad (7)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = V_\Gamma \quad \text{auf } \Gamma(t) \quad (8)$$

Dabei bezeichnen \mathcal{H} die mittlere Krümmung, Ca die Kapillar-Zahl und V_Γ die Normalgeschwindigkeit des freien Randes. \mathbf{n} und \mathbf{t} sind der äußere Normaleneinheitsvektor bzw. der Einheitstangentenvektor.

Das Problem, das mit den Gleichungen (2) und (3) beschrieben wird, stellt zusammen mit den Randbedingungen (6)-(8) und der Anfangsbedingung

$$\mathbf{u}(0, \cdot) = \mathbf{u}_0 \quad \text{in } \Omega(0) \quad (9)$$

ein nichtlineares, partielles Differentialgleichungssystem mit Anfangs- und Randwerten dar.

3 Räumliche Diskretisierung

Das gestellte Strömungsproblem wollen wir mit einer Finite-Elemente-Methode numerisch lösen, da eine exakte Lösung in der Regel nicht möglich ist. In diesem Abschnitt beschreiben wir, wie eine stabile Diskretisierung der Navier-Stokes-Gleichungen erhalten werden kann. Es ist bekannt, daß die Finite-Elemente-Räume, die zur Approximation von Geschwindigkeit und Druck verwendet werden, nicht beliebig gewählt werden dürfen. Vielmehr müssen die Räume V_h für die Geschwindigkeitsapproximation und Q_h für die Druckapproximation die Babuška-Brezzi-Bedingung

$$\sup_{\mathbf{v}_h \in V_h} \frac{(q_h, \nabla \cdot \mathbf{v}_h)}{|\mathbf{v}_h|_1} \geq \beta \|q_h\|_0 \quad \forall q_h \in Q_h \quad (10)$$

erfüllen, wobei $\beta > 0$ eine positive Konstante ist, die unabhängig von der Gitterweite h ist. Das Erfülltsein dieser Bedingung sichert die eindeutige Lösbarkeit des Stokes-Problems und die eindeutige Lösbarkeit der Navier-Stokes-Gleichungen mit kleinen Daten. Nähere Informationen zu diesem Thema findet man in Girault u.a. (1986).

Ausgangspunkt einer Finite-Elemente-Methode ist die schwache Formulierung des betrachteten Differentialgleichungsproblems. Für den Spannungstensorterm bedeutet dies

$$\begin{aligned} \int_{\Omega(t)} \nabla \cdot \sigma(\mathbf{u}, p) \mathbf{v} \, dx &= \int_{\Gamma(t)} \mathbf{v} \cdot \sigma(\mathbf{u}, p) \mathbf{n} \, d\gamma - \int_{\Omega(t)} \sigma(\mathbf{u}, p) : \nabla \mathbf{v} \, dx \\ &= \int_{\Gamma(t)} \mathbf{v} \cdot \sigma(\mathbf{u}, p) \mathbf{n} \, d\gamma - \frac{2}{\text{Re}} \int_{\Omega(t)} D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{v}) \, dx + \int_{\Omega(t)} p \, \text{div}(\mathbf{v}) \, dx \end{aligned} \quad (11)$$

Wenn wir ein Problem mit festen Wänden betrachten, dann wird eine vektorwertige Testfunktion \mathbf{v} verwendet, die auf $\Gamma(t)$ verschwindet. Wir erhalten dann die Beziehung

$$\frac{2}{\text{Re}} \int_{\Omega(t)} D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{v}) \, dx = \frac{1}{\text{Re}} \int_{\Omega(t)} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \, dx + \frac{1}{\text{Re}} \int_{\Omega(t)} \text{div}(\mathbf{u}) \, \text{div}(\mathbf{v}) \, dx \quad (12)$$

Bei Berücksichtigung der Nebenbedingung $\operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0$ erkennen wir, daß die Bilinearformen

$$a_D(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{2}{\operatorname{Re}} \int_{\Omega(t)} D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{v}) \, dx \quad a_G(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{\operatorname{Re}} \int_{\Omega(t)} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \, dx \quad (13)$$

für Funktionen \mathbf{u}, \mathbf{v} mit $\operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0$ und $\mathbf{v}|_{\Gamma} = 0$ übereinstimmen. Wenn, wie in unserem Beispiel, die Randbedingungen (6) und (7) vorliegen, dann kann die Testfunktion \mathbf{v} auf dem Rand nicht mehr Null gewählt werden. Damit ist die Gleichheit von a_G und a_D nicht mehr gewährleistet. Die Verwendung von a_D stellt die natürliche Wahl dar, da sich hier die Randbedingungen unmittelbar einarbeiten lassen. Mit der Zerlegung von \mathbf{v} in seine orthogonalen Anteile gemäß

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}) \mathbf{t} \quad (14)$$

erhalten wir unter Berücksichtigung von (6) und (7)

$$\int_{\Gamma(t)} \mathbf{v} \cdot \sigma(\mathbf{u}, p) \mathbf{n} \, d\gamma = \int_{\Gamma(t)} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \cdot \sigma(\mathbf{u}, p) \mathbf{n} \, d\gamma = \int_{\Gamma(t)} \frac{2\mathcal{H}}{\operatorname{Ca}} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \, d\gamma \quad (15)$$

Hinsichtlich des für die Finite-Elemente-Methode erforderlichen Speicherplatzbedarfes wäre die Bilinearform a_G zu bevorzugen, da sie keine direkte Koppelung zwischen den Komponenten der Geschwindigkeit bewirkt, so daß die entsprechenden Einträge in der Steifigkeitsmatrix verschwinden. Darüber hinaus ist die Bilinearform a_G im Unterschied zu a_D sowohl für konforme als auch für nichtkonforme Finite-Elemente-Räume elliptisch, was zusammen mit der Babuška-Brezzi-Bedingung die Lösbarkeit der diskreten Systeme sichert. Die Einarbeitung der natürlichen Randbedingungen (6) und (7) erfordert jedoch die Verwendung der Bilinearform a_D , die für nichtkonforme Elemente niedriger Ordnung im allgemeinen nicht elliptisch ist, siehe Knobloch (2000). Wir beschränken uns deshalb im folgenden auf konforme finite Elemente und auf die Verwendung der Bilinearform a_D .

Für die praktische Umsetzung einer Finite-Elemente-Methode ist eine Zerlegung des Rechengebiets in Zellen (Dreiecke und/oder Vierecke) notwendig. Die zur Berechnung verwendeten Funktionen werden auf den Zellen der Triangulierung definiert, wobei eine Transformation auf ein Referenzelement vorgenommen wird. Sei nun $(-1, 1)^2$ das Referenzquadrat \hat{K} und $F_K : \hat{K} \rightarrow K$ die Referenztransformation, die \hat{K} auf eine beliebige konvexe Viereckszelle K abbildet. Dabei ist zu beachten, daß F_K im allgemeinen eine bilineare Abbildung ist. Der affine Spezialfall ergibt sich, wenn K ein Parallelogramm ist. Wir definieren

$$Q_k(\hat{K}) := \left\{ \hat{q}(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = \sum_{i,j=0}^k a_{ij} \hat{x}_1^i \hat{x}_2^j \right\} \quad (16)$$

als den Raum der Polynome, die bezüglich jeder Variablen vom Grade kleiner oder gleich k sind, und

$$P_k(\hat{K}) := \left\{ \hat{p}(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = \sum_{0 \leq i+j \leq k} a_{ij} \hat{x}_1^i \hat{x}_2^j \right\} \quad (17)$$

als den Raum der Polynome vom Grade kleiner oder gleich k auf dem Referenzquadrat. Mit Hilfe der Inversen der Referenzabbildung ergeben sich dann

$$Q_k(K) := \{q = \hat{q} \circ F_K^{-1} : \hat{q} \in Q_k(\hat{K})\} \quad P_k(K) := \{p = \hat{p} \circ F_K^{-1} : \hat{p} \in P_k(\hat{K})\} \quad (18)$$

als lokale Funktionenräume auf K . Die Funktionen in $Q_k(K)$ und $P_k(K)$ stellen in der Regel keine Polynome mehr dar, da die Referenztransformation im allgemeinen bilinear und nicht notwendig affin ist. Auf einer Viereckstriangulierung von Ω definieren wir nun die folgenden Finite-Elemente-Räume

$$Q_k := \{v \in C^0(\Omega) : v|_K \in Q_k(K)\} \quad k \geq 1 \quad (19)$$

$$Q_0 := \{v \in L^2(\Omega) : v|_K \in Q_0(K)\} \quad (20)$$

$$P_k^{disc} := \{v \in L^2(\Omega) : v|_K \in P_k(K)\} \quad k \geq 0 \quad (21)$$

Die Kombinationen Q_k/P_{k-1}^{disc} (unstetiger Druck) und Q_k/Q_{k-1} (stetiger Druck) erfüllen für $k \geq 2$ die Bedingung (10), siehe Girault u.a. (1986). Das Elementepaar Q_2/Q_1 ist auch als Taylor-Hood-Element bekannt.

Nun wollen wir uns Dreieckstriangulierungen widmen. Für $k \geq 1$ definieren wir P_k als den Raum der stetigen Funktionen, die stückweise Polynome vom Grade kleiner oder gleich k sind. Weiterhin sei P_0 der Raum der stückweise konstanten Funktionen. Das Elementepaar P_k/P_{k-1} realisiert eine stetige Druckapproximation und erfüllt für $k \geq 2$ die Bedingung (10).

Die Verwendung einer Approximation des Geschwindigkeitsraumes mit Hilfe von Funktionen aus dem Q_k bzw. P_k sichert eine Approximationsordnung k für die H^1 -Seminorm. Die Nutzung der Druckräume Q_{k-1} , P_{k-1}^{disc} und P_{k-1} garantiert die Approximationsordnung k in der L^2 -Norm.

Wir haben finite Elemente für beliebige Approximationsordnungen $k \geq 2$ definiert. Für Rechnungen beschränken wir uns aber auf Elementepaare zweiter Ordnung. Diese Wahl stellt einen guten Kompromiß zwischen der erzielten Genauigkeit und dem dafür notwendigen numerischen Aufwand dar.

4 Zeitdiskretisierung

Für die zeitliche Diskretisierung bieten sich die Einschritt- θ -Verfahren an. Dazu gehören das explizite Euler-Verfahren, das implizite Euler-Verfahren und das Crank-Nicolson-Verfahren. Alle diese Verfahren besitzen Vor- und Nachteile. Die beiden Euler-Verfahren sind nur von erster Ordnung. Bei der Nutzung des expliziten Euler-Verfahrens muß kein Gleichungssystem gelöst werden, dafür ist dieses Schema nur für kleine Zeitschritte stabil. Das implizite Euler-Verfahren ist sehr stabil, aber auch sehr dissipativ. Das Crank-Nicolson-Verfahren ist zwar von zweiter Ordnung, aber nicht stark A-stabil, was zu Instabilitäten führen kann. Für weitere Informationen sei auf Rannacher (1999) verwiesen.

Eine Alternative stellt das Zwischenschritt- θ -Verfahren dar, das als eine Kombination von 3 Einschritt- θ -Verfahren auf Teilzeitintervallen betrachtet werden kann. Wir werden dieses Verfahren hier für das Modellproblem

$$u_t + Au = 0 \quad (22)$$

$$u(0) = u_0 \quad (23)$$

beschreiben. Eine Anwendung auf die Navier-Stokes-Gleichungen ist unmittelbar möglich.

Wir teilen das Zeitintervall (t_n, t_{n+1}) mit der Länge $\tau_n = t_{n+1} - t_n$ in drei Teilintervalle $(t_n, t_{n+\theta})$, $(t_{n+\theta}, t_{n+\theta'})$ und $(t_{n+\theta'}, t_{n+1})$ auf, wobei $t_{n+\theta} = t_n + \theta\tau_n$ und $t_{n+\theta'} = t_n + \theta'\tau_n$ mit $\theta' = 1 - \theta$ sind.

Das Zwischenschritt- θ -Verfahren für das Zeitintervall (t_n, t_{n+1}) ist durch die drei Teilprobleme

$$\frac{u^{n+\theta} - u^n}{\theta\tau_n} + \alpha A u^{n+\theta} + \beta A u^n = 0 \quad (24)$$

$$\frac{u^{n+\theta'} - u^{n+\theta}}{(1-2\theta)\tau_n} + \beta A u^{n+\theta'} + \alpha A u^{n+\theta} = 0 \quad (25)$$

$$\frac{u^{n+1} - u^{n+\theta'}}{\theta\tau_n} + \alpha A u^{n+1} + \beta A u^{n+\theta'} = 0 \quad (26)$$

gegeben.

Die Anwendung des Zwischenschritt- θ -Verfahrens erfordert in jedem der drei Teilschritte die Lösung eines Gleichungssystems mit der Matrix $(I + \alpha\theta\tau_n A)$ bzw. $(I + \beta(1-2\theta)\tau_n A)$. Seien $\theta = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ und $\alpha, \beta \in (0, 1)$ mit $\alpha + \beta = 1$ und $\alpha > 1/2$. Wählt man $\alpha = (1-2\theta)/\theta'$, so gilt neben $\alpha > 1/2$ auch $\alpha\theta = \beta(1-2\theta)$ und alle impliziten Operatoren auf der linken Seite sind einander gleich. Das Zwischenschritt- θ -Verfahren ist von zweiter Ordnung, stark-A-stabil und kaum dissipativ. Eine theoretische Analyse des Verfahrens für die Navier-Stokes-Gleichungen findet man bei Müller-Urbaniak (1993).

Ursprünglich wurde das Zwischenschritt- θ -Verfahren mit einem Operatorsplitting verbunden, vergl. Bristeau u.a. (1987). Der dabei zusätzliche zeitliche Diskretisierungsfehler kann vermieden werden, wenn in

jedem Teilschritt das Gesamtproblem gelöst wird. Dafür stehen mittlerweile sehr effiziente Mehrgitter-Löser zur Verfügung, die die Lösung des vollen Systems in jedem der drei Teilschritte rechtfertigen.

5 ALE-Verfahren

Wir werden uns nun mit den Konsequenzen des bewegten Gebietsrandes für die Diskretisierung des betrachteten Problems beschäftigen. Da das von der Flüssigkeit eingenommene Gebiet zeitabhängig ist, ändert sich die Lage der Knoten, an denen die Lösung bestimmt werden soll. Somit benötigen wir eine besondere Behandlung für dieses Problem. Eine Möglichkeit bietet die Lagrange-Euler-Methode, die kurz als ALE (als Abkürzung von Arbitrary Lagrangian Eulerian method) bezeichnet wird. Dieses Verfahren wurde erfolgreich zur numerischen Berechnung des Strömungsfeldes in Flüssigkeiten eingesetzt, wobei die Wechselwirkung des Fluids mit den Gefäßwänden berücksichtigt wurde. Der Fall der Blutströmung wird von Quarteroni u.a. (2000) behandelt.

Der ALE-Zugang stellt eine Verallgemeinerung der Eulerschen und Lagrangeschen Herangehensweise dar und ist nicht auf eine der beiden Betrachtungsweisen eingeschränkt. Bei der Lagrangeschen Herangehensweise ist die Bewegung mit den Fluidpartikeln gekoppelt, d.h., der Betrachter bewegt sich mit der Strömung mit. Der Eulersche Zugang hingegen betrachtet das Gebiet zum Zeitpunkt t als fest, und das Fluid fließt durch dieses Gebiet. Der Ausgangspunkt für ALE ist die Betrachtung von bestimmten Punkten Y , die sich zum Zeitpunkt $t = 0$ im Gebiet $\Omega(0)$ befinden. Diese Punkte bewegen sich mit der Flüssigkeit mit, aber ihre Bewegung ist unabhängig von der Bewegung der Flüssigkeitspartikel. Weiterhin betrachtet man ein Referenzgebiet $\hat{\Omega}$, das weder mit dem Ausgangsgebiet $\Omega(0)$ noch mit dem Gebiet $\Omega(t)$ zu einem Zeitpunkt t übereinstimmen muß. Vielmehr wird das Gebiet zum Zeitpunkt t als Bild des Referenzgebietes $\hat{\Omega}$ unter der zeitabhängigen, bijektiven Abbildung $\Phi(t, \cdot)$ angesehen. Betrachten wir nun einen Punkt $Y \in \hat{\Omega}$. Die skalare Funktion $y(t) = \Phi(t, Y)$ stellt dann die Bewegung des Punktes dar, der dem Punkt Y im Referenzgebiet entspricht. Wenn nun Y einen Gitterpunkt darstellt, dann gibt $y(t)$ die Lage dieses Gitterpunktes zum Zeitpunkt t an. Die Größe $y(t) - y(0)$ ist die Gitterverschiebung. Die Zeitdiskretisierung kann mit Hilfe der ALE-Koordinaten ausgedrückt werden. Dazu betrachten wir zunächst eine skalare Funktion $\lambda(t, y) = \lambda(t, \Phi(t, Y))$. Mit Hilfe der Kettenregel erhalten wir

$$\left. \frac{\partial \lambda}{\partial t} \right|_Y = \left. \frac{\partial \lambda}{\partial t} \right|_y + \left. \frac{\partial y}{\partial t} \right|_Y \cdot \nabla_y \lambda \quad (27)$$

und damit

$$\left. \frac{\partial \lambda}{\partial t} \right|_y = \left. \frac{\partial \lambda}{\partial t} \right|_Y - \mathbf{w} \cdot \nabla \lambda \quad (28)$$

wobei \mathbf{w} die Gittergeschwindigkeit darstellt. Für die substantielle Ableitung bedeutet dies

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{\partial \lambda}{\partial t} + (\mathbf{u} - \mathbf{w}) \cdot \nabla \lambda \quad (29)$$

Wenn wir das implizite Euler-Verfahren zur Zeitdiskretisierung benutzen, erhalten wir

$$\left(\frac{\bar{\mathbf{u}}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n}{\tau_n}, \mathbf{v}_h \right)_{\Omega(t_n)} + \int_{\Omega(t_n)} ((\bar{\mathbf{u}}_h^{n+1} - \mathbf{w}) \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}}_h^{n+1} \mathbf{v}_h \, dx \quad (30)$$

als diskrete Approximation der substantiellen Ableitung, wobei $\bar{\mathbf{u}}_h^{n+1}$ durch

$$\bar{\mathbf{u}}_h^{n+1}(x) = \mathbf{u}_h^{n+1}(\Phi(t_{n+1}, Y)) \quad \text{mit } x = \Phi(t_n, Y) \quad (31)$$

definiert wird, d.h., der Wert des Geschwindigkeitsfeldes ergibt sich mit Hilfe der Transformationen des Referenzgebietes auf das jeweils aktuelle Gebiet.

6 Behandlung des Krümmungsterms

Für die Behandlung des Krümmungsterms in (15) benutzen wir die aus der Differentialgeometrie bekannten Notationen für den Laplace-Beltrami-Operator $\underline{\Delta}f$, die Tangentialableitung $\underline{\nabla}f$ und die Beziehung

$$\underline{\Delta}id_\Gamma = 2\mathcal{H}\mathbf{n} \quad (32)$$

wobei $id_\Gamma : \Gamma \rightarrow \Gamma$ die identische Abbildung auf Γ ist. Eine partielle Integration liefert

$$\int_{\Gamma} 2\mathcal{H}\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, d\gamma = \int_{\Gamma} (\underline{\Delta} id_\Gamma) \cdot \mathbf{v} \, d\gamma = - \int_{\Gamma} \underline{\nabla} id_\Gamma : \underline{\nabla} \mathbf{v} \, d\gamma \quad (33)$$

wobei zu beachten ist, daß keine Zusatzterme entstehen, da Γ als gesamter Rand des Gebietes Ω selbst keinen Rand besitzt. Für weitere differentialgeometrische Details verweisen wir auf Dierkes (1992).

Die bei der Herleitung der schwachen Formulierung durchgeführte partielle Integration (11) führt unter Beachtung von (33) zur folgenden Beziehung

$$\frac{2}{\text{Re}} \int_{\Omega(t)} D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{v}) \, dx - \int_{\Omega(t)} p \nabla \cdot \mathbf{v} \, dx + \frac{1}{\text{Ca}} \int_{\Gamma(t)} \underline{\nabla} id_{\Gamma(t)} : \underline{\nabla} \mathbf{v} \, d\gamma \quad (34)$$

$$= \int_{\Omega(t)} (\nabla \cdot \sigma(\mathbf{u}, p)) \cdot \mathbf{v} \, dx \quad (35)$$

wenn \mathbf{v} eine hinreichend glatte, vektorwertige Funktion ist. Der Randintegralterm

$$\frac{1}{\text{Ca}} \int_{\Gamma(t)} \underline{\nabla} id_\Gamma : \underline{\nabla} \mathbf{v} \, d\gamma \quad (36)$$

kann auf verschiedene Weise behandelt werden: voll implizit, semi-implizit und explizit. Wir werden die semi-implizite Variante benutzen, bei der die Approximationen

$$\frac{1}{\text{Ca}} \int_{\Gamma(t_n)} \underline{\nabla} id_{\Gamma(t_n)} : \underline{\nabla} \mathbf{v} \, d\gamma \sim \frac{1}{\text{Ca}} \int_{\Gamma(t_n)} \underline{\nabla} id_{\Gamma(t_{n+1})} : \underline{\nabla} \mathbf{v} \, d\gamma \sim \frac{1}{\text{Ca}} \int_{\Gamma(t_n)} \underline{\nabla} (id_{\Gamma(t_n)} + \tau_n \bar{\mathbf{u}}_h^{n+1}) : \underline{\nabla} \mathbf{v} \, d\gamma \quad (37)$$

ausgenutzt werden.

Damit erhalten wir eine größere Stabilität, da der zusätzlich in der schwachen Formulierung entstehende Term

$$\frac{1}{\text{Ca}} \int_{\Gamma(t_n)} \tau_n \underline{\nabla} (\bar{\mathbf{u}}_h^{n+1}) : \underline{\nabla} \mathbf{v} \, d\gamma \quad (38)$$

symmetrisch und positiv semi-definit ist. Wenn $\bar{\mathbf{u}}_h^{n+1}$ bekannt ist, dann ergibt sich die neue Position des Randes $\Gamma(t_{n+1})$ durch

$$x^{n+1} = x^n + \tau_n \bar{\mathbf{u}}_h^{n+1}(x^n) \quad (39)$$

Damit auf dem Gebiet, das durch den verschobenen Rand beschrieben wird, wieder eine Finite-Elemente-Methode arbeiten kann, benötigen wir eine Triangulierung des neuen Gebietes, die mit möglichst geringem Aufwand bestimmt werden sollte. Insbesondere ist die vollständige Neuvernetzung des Gebietes in jedem Zeitschritt zu vermeiden, da die Benutzung eines Gittergenerators stets einen großen Zeitaufwand verursacht.

7 Bestimmung einer Triangulierung für Gebiete mit bewegtem Rand

Mit Hilfe von (39) ist es möglich, die Lage des Randes zum Zeitpunkt t_{n+1} näherungsweise zu ermitteln. Bei der Verwendung des ALE-Zuganges ist allerdings die Kenntnis der Funktion $\Phi(t, \cdot)$ in allen Punkten des Referenzgebietes notwendig. Wir wollen uns nun damit befassen, wie die Abbildung $\Phi(t, \cdot) : \hat{\Gamma} \rightarrow \Gamma(t)$, die den Rand $\hat{\Gamma}$ des Referenzgebietes $\hat{\Omega}$ auf den Rand $\Gamma(t)$ des aktuellen Gebietes $\Omega(t)$ transformiert, auf das gesamte Referenzgebiet fortgesetzt werden kann.

Zur Veranschaulichung betrachten wir zunächst den eindimensionalen Fall. Als Referenzgebiet wird das Intervall $\hat{\Omega} = (0, 1)$ gewählt. Auf diesem Gebiet sei eine (z.B. äquidistante) Vernetzung gegeben. Eine Vernetzung im aktuellen Gebiet $\Omega(t) = (a, b)$ wird nun vermittels einer bijektiven, in beiden Richtungen

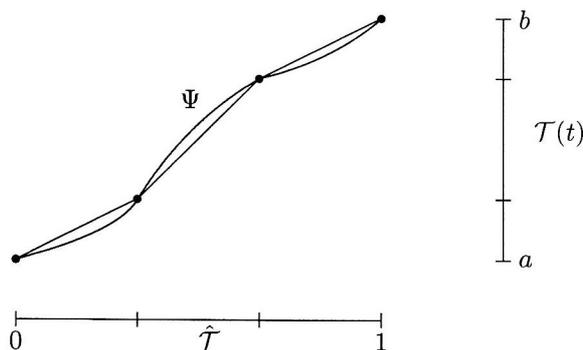


Bild 1: Veranschaulichung der Idee

stetigen Abbildung (Homöomorphismus) $\Phi(t, \cdot) : [0, 1] \rightarrow [a, b]$ als Bild der Vernetzung auf dem Referenzgebiet erzeugt. Im Prinzip kann hierfür jede streng monotone Monitorfunktion $\Psi : [0, 1] \rightarrow [a, b]$ verwendet werden. Für das folgende werden aber nur die Gitterpunkte $\Psi(\hat{p}) \in [a, b]$ und nicht die Abbildung selbst benötigt. Daher kann auch eine stückweise lineare Approximation der Monitorfunktion verwendet werden. Dieser Zusammenhang ist in Bild 1 veranschaulicht. Im aktuellen Gebiet erreicht man die gleiche Verteilung der Gitterpunkte wie im Referenzgebiet, wenn die Monitorfunktion dem Randwertproblem

$$-\Psi''(\hat{x}) = 0 \quad \text{in } (0, 1) \quad \Psi(0) = a \quad \Psi(1) = b \quad (40)$$

genügt. Insbesondere führt eine äquidistante Vernetzung auf $[0, 1]$ wieder zu einer äquidistanten Vernetzung auf $[a, b]$.

Im zweidimensionalen Fall sind die Verhältnisse komplizierter. In der Literatur werden verschiedene Techniken zur Gittergenerierung auf $\Omega(t)$, ausgehend von einer Gitterpunktverteilung $\Xi(\hat{\mathcal{E}})$ auf dem Rand $\Gamma(t)$, vorgeschlagen (siehe Castillo, 1991, für einen Überblick). Hierbei, bezeichnen $\hat{\mathcal{E}}$ die Gitterpunktverteilung auf dem Rand $\hat{\Gamma}$ des Referenzgebietes und $\Xi : \hat{\Gamma} \rightarrow \Gamma(t)$ eine bijektive Abbildung zwischen den Rändern des Referenz- und des aktuellen Gebietes. Aufgrund der speziellen Eigenschaften harmonischer Abbildungen bietet sich die gleiche Vorgehensweise wie im eindimensionalen Fall an. Wir bestimmen also die Abbildung $\Phi(t, \cdot) : \hat{\Omega} \rightarrow \Omega(t)$ als stückweise, lineare Approximation der Lösung des Randwertproblems

$$-\Delta\omega(\hat{x}) = 0 \quad \text{in } \hat{\Omega} \quad \omega(\hat{x}) = \Xi(\hat{x}) \quad \text{für } \hat{x} \in \hat{\Gamma} \quad (41)$$

Dieses Vorgehen wird durch folgendes Ergebnis gestützt.

Lemma 1 (Castillo, Kapitel 10, 1991) *Seien $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ eine beschränkte, offene Menge mit C^2 -Rand und $\Omega_1 \subset \mathbf{R}^2$ eine beschränkte, konvexe, offene Menge. Sei weiter $\Xi \in H^{3/2+\varepsilon}(\partial\Omega)$ ein Homöomorphismus von $\partial\Omega$ auf $\partial\Omega_1$, wobei $\varepsilon > 0$. Dann ist die Lösung ω des Randwertproblems (41) ein Homöomorphismus von $\hat{\Omega}$ auf $\hat{\Omega}_1$.*

Wir approximieren die Lösung von (41) auf der Basis einer festen Triangulierung von $\hat{\Omega}$ mit Hilfe von finiten Elementen und erhalten

$$\int_{\hat{\Omega}} \nabla\omega_h \nabla\psi_p = 0 \quad \forall \psi_p \in \hat{V}_h \quad (42)$$

$$\omega_h(\hat{p}) = \Phi(t_{n+1}, \hat{p}) \quad \forall \hat{p} \in \hat{\mathcal{E}} \quad (43)$$

Dabei stellen $\Phi(t_{n+1}, \hat{p})$ die Position der Randpunkte \hat{p} der Randpunktmenge $\hat{\mathcal{E}}$ zum Zeitpunkt t_{n+1} und \hat{V}_h den Raum der stückweise linearen Funktionen mit verschwindenden Randdaten dar. Die so erhaltene vektorwertige Funktion ω_h ist eine Fortsetzung der auf dem Rand $\hat{\Gamma}$ gegebenen Funktion Φ .

Die Bestimmung eines Gitters für das Gebiet $\Omega(t_{n+1})$ erfordert bei Kenntnis der Lage der Randpunkte auf $\Gamma(t_{n+1})$ nur die Lösung von zwei Laplace-Problemen auf dem Referenzgebiet. Wenn eine kleine Zeitschrittweite benutzt wird und sich damit das Gebiet innerhalb des Zeitschrittes nur wenig ändert, dann ist die Finite-Elemente-Funktion, die dem Gitter zum Zeitpunkt t entspricht, eine gute Startnäherung für eine iterative Lösung der Laplace-Probleme.

Bei Bänsch (1998) wird vorgeschlagen, die Laplace-Probleme nicht über dem Referenzgebiet sondern über dem Gebiet $\Omega(t)$ zu lösen. Dies kann bei nicht konvexen Gebieten zu geometrisch besseren Gittern führen. Das Lösen der Laplace-Gleichungen auf dem Referenzgebiet hat den Vorteil, daß sich die diskreten Matrizen nicht ändern, d.h., eine Assemblierung ist nur einmal notwendig, und die einmal generierten Matrizen können zur Gitterberechnung zu allen Zeitschritten eingesetzt werden. Die zu lösenden linearen Gleichungssysteme unterscheiden sich nur in den rechten Seiten.

Damit das beschriebene Verfahren auch für praktische Berechnungen anwendbar ist, müssen wir noch voraussetzen, daß sich der topologische Zusammenhang des betrachteten Gebietes nicht ändert, d.h., das aktuelle Gebiet ist stets topologisch äquivalent zum Referenzgebiet. Die soeben gemachte Einschränkung schließt die Betrachtung von Strömungsvorgängen, bei denen Tropfen entstehen oder sich mehrere Tropfen zu einem Tropfen verbinden oder ähnliche Phänomene auftreten, aus.

8 Numerische Ergebnisse

Dieser Abschnitt soll dazu dienen, die Leistungsfähigkeit des vorgestellten Verfahrens zu demonstrieren. Als Beispiel betrachten wir einen Wassertropfen, der sich im Zustand der Schwerelosigkeit befindet. Als

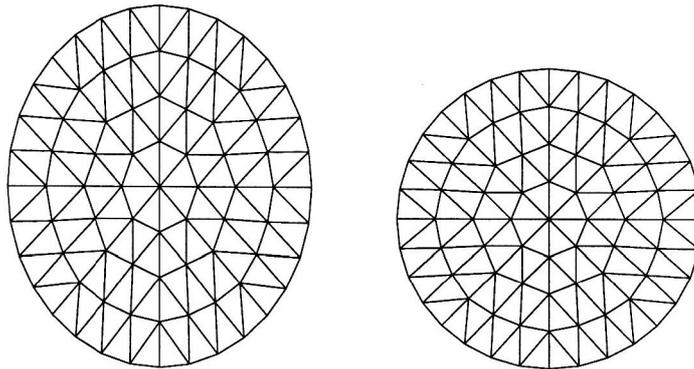


Bild 2: Die Triangulierungen des Ausgangsgebietes (links) und des Gebietes zum Zeitpunkt $t = T/4$ (rechts)

Ausgangsgebiet benutzen wir eine Ellipse mit den Halbachsen $r_x = 1.0$, $r_y = 1.2$. Den Einheitskreis wählen wir als Referenzgebiet. Weiterhin nehmen wir an, das sich das Fluid zum Zeitpunkt $t = 0$ in Ruhe befindet, d.h. $\mathbf{u}(0, \cdot) = \mathbf{u}_0 = 0$. Die Oberflächenspannung ist auf Grund der unterschiedlichen Krümmungsradien an den Symmetrieachsen der Ellipse verschieden groß. Dieser Unterschied bewirkt nun, daß eine Bewegung des Tropfens einsetzt. Der Tropfen strebt dabei der Form minimaler Energie zu, die in diesem Fall der Kreis ist. Hat der Tropfen diese Form erreicht, verharrt er nicht in ihr, da er sich auf Grund der Trägheit weiter bewegt. Wenn die Oberflächenkräfte den Trägheitskräften überlegen sind, dann setzt eine Bewegung in umgekehrte Richtung ein. Der Tropfen schwingt. Die Länge der Schwingungsperiode sei mit T bezeichnet.

Für unsere Berechnungen haben wir das Finite-Elemente-Paar P_2/P_1 , d.h. eine stetige Druckapproximation, gewählt. Die Vernetzungen des Anfangsgebietes Ω_0 und des Gebietes Ω nach einem Viertel der Schwingungsperiode sind in Bild 2 dargestellt. Wir erkennen, daß der topologische Zusammenhang des Gitters unverändert ist. Weiterhin ist offensichtlich, daß die benutzten Gitter den üblichen geometrischen Anforderungen genügen. Die sich ergebenden diskreten Gleichungssysteme wurden mit Hilfe eines Mehrgitter-Verfahrens gelöst, vergl. John u.a (2000). Die dazu erforderliche Gitterhierarchie wurde durch reguläre Verfeinerung einer groben Anfangsvernetzung, die aus 8 Dreiecken bestand, erhalten. Die Gitter in Bild 2 stellen die jeweils feinsten Gitter dar, d.h., die Lösung wurde auf diesem Gitter ermittelt.

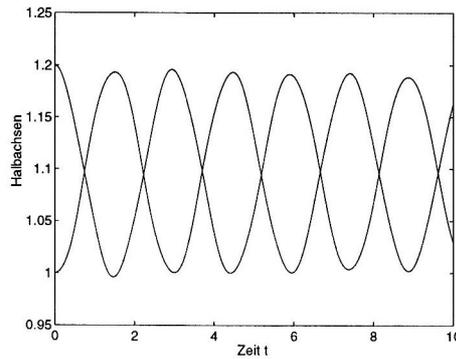


Bild 3: Längen der Halbachsen des Tropfen als Funktionen der Zeit

Das Bild 3 zeigt die Längen der Halbachsen des Tropfen als Funktionen der Zeit. Wir sehen, daß beide Werte um einen gemeinsamen Gleichgewichtswert schwanken, der der Kreisform entspricht. Auf Grund der Dämpfung ist eine geringe Abnahme der Schwingungsamplitude zu erkennen. Bei fester Wahl von Bezugsgeschwindigkeit U und Bezugslänge L führt eine Verringerung der kinematischen Viskosität zu einer Erhöhung der Reynoldszahl. Mit steigender Reynoldszahl nimmt die Stärke der Dämpfung ab. Für sehr kleine Reynoldszahlen (bei festen Bezugsgrößen) findet keine Schwingung statt. Der Tropfen bleibt nach dem Erreichen der Gleichgewichtslage in dieser.

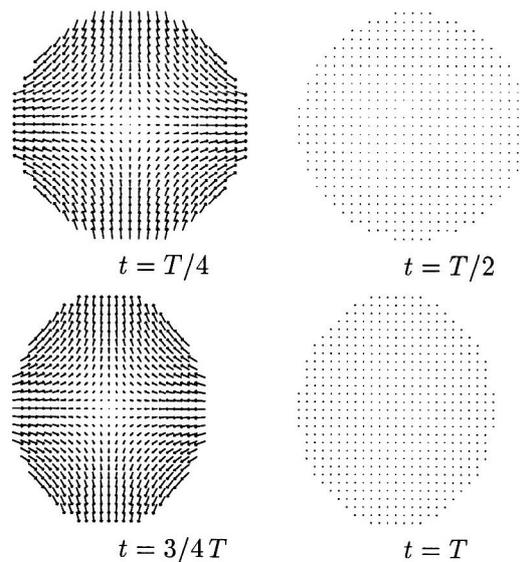


Bild 4: Geschwindigkeitsfeld im Tropfen bei $t = T/4$, $t = T/2$, $t = 3/4T$, $t = T$

Das Geschwindigkeitsfeld im Tropfen zu verschiedenen Zeitpunkten ist in Bild 4 zu erkennen. Es ist klar ersichtlich, daß sich der Tropfen an den Umkehrpunkten in Ruhe befindet. Weiterhin sieht man, daß sich ein symmetrisches Strömungsfeld ausbildet, was dazu führt, daß sich der Mittelpunkt des Tropfens nicht bewegt.

Danksagung

Der Deutschen Forschungsgemeinschaft danke ich für die finanzielle Unterstützung meiner Arbeit im Graduiertenkolleg Modellierung, Berechnung und Identifikation mechanischer Systeme (GRK 203) und in der Forschergruppe Grenzflächendynamik bei Strukturbildungsprozessen (En 278/2-1). Die Bilder in Bild 4 wurden mit Hilfe des Grafikprogrammes GRAPE des Sonderforschungsbereiches 256 erstellt.

Literatur

1. Bänsch, E.: Numerical methods for the instationary Navier-Stokes equations with a free capillary surface. Habilitationsschrift, Albert-Ludwigs-Universität Freiburg i. Br., (1998).
2. Blums, E.; Cebers, A.; Maiorov, M. M.: Magnetic Fluids. Walter De Gruyter, (1997).
3. Brezzi, F.; Fortin, M.: Mixed and Hybrid Finite Element Methods. Band 15 von Springer Series in Computational Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg. New York, Tokyo, (1991).
4. Bristeau, M.; Glowinski, R.; Periaux, J.: Numerical methods for the Navier-Stokes equations. Applications to the simulation of compressible and incompressible flows, Computer Physics Report, 6, (1987), 73 – 188.
5. Castillo, J. E. (ed.): Mathematical Aspects of Numerical Grid Generation. SIAM, Frontiers in Applied Mathematics, Philadelphia, (1991).
6. Dierkes, U.; Hildebrandt, S.; Küster, A.; Wohlrab, O.: Minimal Surfaces I. Band 295 der Grundlehren der mathematischen Wissenschaft, Springer-Verlag, Berlin, (1992).
7. Girault, V.; Raviart, P.-A.: Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations. Theory and Algorithms. Band 5 von Springer Series in Computational Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg. New York, Tokyo, (1986).
8. John, V.; Matthies, G.: Higher Order Finite Element Discretizations in a Benchmark Problem for Incompressible Flows. International Journal for Numerical Methods in Fluids, (2000).
9. Knobloch, P.: Solvability and Finite Element Discretization of a Mathematical Model Related to Czochralski Growth. Dissertation, Otto-von-Guericke-Universität, Magdeburg, (1996).
10. Knobloch, P.: On Korn's Inequality for Nonconforming Finite Elements. Technische Mechanik, 20, (2000), 205 – 214.
11. Müller-Urbaniak, S.: Eine Analyse des Zwischenschritt- θ -Verfahrens zur Lösung der instationären Navier-Stokes-Gleichungen. Dissertation, Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg, (1993).
12. Rannacher, R.: Finite Element Methods for the Incompressible Navier-Stokes Equations. Preprint 99-37, SFB 359, Ruprecht-Karls-Universität, Heidelberg, (1999).
13. Rosensweig, R. E.: Ferrohydrodynamics. Dover Pubns, (1998).
14. Quarteroni, A.; Tuveri, M.; Veneziani, A.: Computational vascular fluid dynamics: problems, models and methods. Computing and Visualization in Science, 2, (2000), 163 – 197.

Anschrift: Dipl.-Math. Gunar Matthies, Institut für Analysis und Numerik, Fakultät für Mathematik, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, PSF 4120, D-39016 Magdeburg.
e-mail: gunar.matthies@mathematik.uni-magdeburg.de