

Lösbarkeit eines mathematischen Modells für Dichtungen mit magnetischen Flüssigkeiten

T. Mitkova

In dieser Arbeit betrachten wir ein mathematisches Modell zur Beschreibung der Strömungsverhältnisse in Dichtungen mit magnetischen Flüssigkeiten. Ausgehend vom physikalischen, dreidimensionalen Modell zeigen wir, daß aufgrund der geringen Spaltbreite eine zweidimensionale Betrachtungsweise zulässig ist. Die mathematische Lösbarkeit des vereinfachten Modells wird mit der Galerkin-Methode untersucht, wobei abweichend zu Standardtechniken schwache Maximumprinzipien für gemischte Randwertaufgaben zum Einsatz kommen.

1 Einleitung

Magnetische Flüssigkeiten, die auch Ferrofluide genannt werden, stellen komplexe Fluide dar, deren Verhalten sich durch ein äußeres magnetisches Feld beeinflussen läßt. Ein Standardwerk über Ferrofluide ist das Buch von Rosensweig (1985). In Rosensweig (1979) findet man eine Reihe von technischen Anwendungen von magnetischen Flüssigkeiten, z.B. zur Dämpfung von Schrittmotoren, zur Abdichtung von Drehführungen (in Festplatten) und in der Medizin. Das Bild 1 stellt die Abdichtung von Drehführungen mit magnetischen Flüssigkeiten schematisch dar.

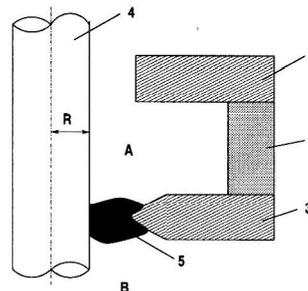


Bild 1. Dichtung mit magnetischer Flüssigkeit: 1 - Magnet, 2 - Kern, 3 - Magnetkern mit hyperbolischem Kopf, 4 - Schaft (Rotor), 5 - magnetische Flüssigkeit, A - Gebiet mit hohem Druck, B - das Gebiet mit niedrigem Druck

Die Vorteile dieser Art zur Abdichtung von Drehführungen sind gut bekannt. Bei einer magnetischen Dichtung existiert im Unterschied zur Manschettendichtung keine Kontaktreibung. Die hohe Qualität der Hermetisierung und das Selbstwiedereinsetzen bei Durchbrüchen sind zwei der für praktische Anwendungen wichtigen Eigenschaften der magnetischen Dichtungen.

Die Lage und Gestalt der magnetischen Flüssigkeit spielt eine wichtige Rolle für das Dichtungsverhalten. Die das mit Flüssigkeit ausgefüllte Gebiet begrenzenden Oberflächen setzen sich aus zwei vorgegebenen Oberflächen (die Oberfläche des Rotors und des magnetischen Kerns) und zwei freien Oberflächen zusammen. Die Zuverlässigkeit der Dichtung hängt von der Form der freien Oberflächen ab, deren Berechnung die Simulation des Strömungsverhaltens der Flüssigkeit voraussetzt.

Für praktische Anwendungen und für die Effektivität der verwendeten Anlagen ist es sehr wichtig, daß man das Verhalten der Dichtung gut untersucht. Dazu brauchen wir ein geeignetes, mathematisches Modell, das sich durch ein System von partiellen Differentialgleichungen mit entsprechenden Randbedingungen beschreiben läßt.

Im nächsten Abschnitt des Artikels stellen wir die mathematischen Gleichungen dar und formulieren Bedingungen, unter denen sich das dreidimensionale Problem durch ein zweidimensionales Problem beschreiben läßt. Im dritten Abschnitt werden wir das stetige Problem in eine Variationsformulierung

überführen. Eine wesentliche Bedeutung für die Untersuchungen hat die Behandlung der inhomogenen Dirichletranddaten. Im Abschnitt 4 sind die Aussagen zur Existenz einer Lösung formuliert. Die Existenz zeigen wir mit der in Girault und Raviart (1986) beschriebenen Galerkin-Methode, die eine Standardbeweistechnik ist. Obgleich die Form für das gekoppelte Problem auf dem Produktraum nicht positiv ist, gelingt es durch eine alternative Technik die Existenz einer Lösung eines äquivalenten Problems nachzuweisen. Schließlich geben wir einen Ausblick der Möglichkeiten für numerische Untersuchungen der Modellgleichungen.

2 Mathematisches Modell

Die physikalischen Gesetzmäßigkeiten, die in magnetischen Flüssigkeiten und im umgebenden Medium gelten, lassen sich mathematisch durch ein System partieller Differentialgleichungen mit entsprechenden Randbedingungen beschreiben. Der zeitliche Verlauf eines allgemeinen elektromagnetischen Feldes wird durch die Maxwell-Gleichungen beschrieben. Da eine magnetische Flüssigkeit als nichtleitend angesehen werden kann, reduzieren sich die Maxwell-Gleichungen auf

$$\operatorname{curl} \mathbf{H} = 0 \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (1)$$

Dabei bezeichnen \mathbf{H} die magnetische Feldstärke und \mathbf{B} die magnetische Induktion. Zwischen der magnetischen Feldstärke \mathbf{H} und der magnetischen Induktion \mathbf{B} besteht der im allgemeinen nichtlineare Zusammenhang $\mathbf{B} = \mu(|\mathbf{H}|)\mathbf{H}$, dabei heißt $\mu(|\mathbf{H}|)$ magnetische Permeabilität. Im betrachteten Anwendungsfall ist die magnetische Feldstärke \mathbf{H} groß im Vergleich zur Magnetisierung \mathbf{M} des in der Sättigung befindlichen Ferrofluids. Damit sind Formänderungen der freien Oberfläche auf die magnetische Feldstärke vernachlässigbar.

Für inkompressible Medien, d.h. für Medien mit konstanter Dichte ρ erhält man aus der Massen- und Impulsbilanz die inkompressiblen Navier-Stokes Gleichungen. Wir benutzen sie als Grundlage des mathematischen Modells, das die hydrodynamischen Eigenschaften der magnetischen Dichtungsflüssigkeit beschreibt.

Das zugrundeliegende Strömungsgebiet kann bei stationärer Betriebsweise rotationssymmetrisch angenommen werden. Wir betrachten daher die inkompressiblen, stationären Navier-Stokes Gleichungen in Zylinderkoordinaten $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $z = z$ und nehmen an, daß $\mathbf{v} = (v_r, v_\varphi, v_z)$ nur von r, z abhängt. Dann gilt

$$\rho \left(v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_\varphi^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) = f_r - \frac{\partial P}{\partial r} + \eta \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right) \quad (2)$$

$$\rho \left(v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_r v_\varphi}{r} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} \right) = f_\varphi + \eta \left(\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r^2} + \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2} \right) \quad (3)$$

$$\rho \left(v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = f_z - \frac{\partial P}{\partial z} + \eta \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) \quad (4)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = 0 \quad (5)$$

Hier bezeichnen \mathbf{v} und P die Geschwindigkeit und den Druck. Die physikalischen (konstanten) Parameter sind die Dichte ρ und die dynamische Viskosität η . Da wir die Werte der magnetischen Feldstärke \mathbf{H} und der mittleren Magnetisierung $\widehat{\mathbf{M}} = \frac{1}{H} \int_0^H \mathbf{M} dH$ kennen, hat die Kraft $\mathbf{f} = (f_1, f_2)^T$ die folgende Darstellung $\mathbf{f} = \mu_0 \widehat{\mathbf{M}} \nabla \mathbf{H}$, wobei μ_0 die magnetische Feldkonstante ist (Rosensweig, 1985). Aufgrund der Rotationssymmetrie gilt $f_\varphi = 0$. Seien R der Radius des Rotors, $a \ll R$ die Spaltbreite (Bild 2) und v_0 die Geschwindigkeit des Rotors für $r = R$. Die Einführung dimensionsloser Variablen

$$X = \frac{r - R}{a} \quad Y = \frac{z}{a} \quad u_1 = \frac{v_r}{v_0} \quad u_2 = \frac{v_z}{v_0} \quad \omega = \frac{v_\varphi}{v_0} \quad p = \frac{P}{\rho v_0^2} \quad (6)$$

ergibt

$$u_1 \frac{\partial u_1}{\partial X} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial Y} - \left(\frac{a}{R+aX} \right) \omega^2 = f_1 - \frac{\partial p}{\partial X} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial X^2} + \left(\frac{a}{R+aX} \right) \frac{\partial u_1}{\partial X} - \left(\frac{a}{R+aX} \right)^2 u_1 + \frac{\partial^2 u_1}{\partial Y^2} \right) \quad (7)$$

$$u_1 \frac{\partial u_2}{\partial X} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial Y} = f_2 - \frac{\partial p}{\partial Y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial X^2} + \left(\frac{a}{R+aX} \right) \frac{\partial u_2}{\partial Y} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial Y^2} \right) \quad (8)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial X} + \left(\frac{a}{R+aX} \right) u_1 + \frac{\partial u_2}{\partial Y} = 0 \quad (9)$$

$$u_1 \frac{\partial \omega}{\partial X} + u_2 \frac{\partial \omega}{\partial Y} - \left(\frac{a}{R+aX} \right) u_1 \omega = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} + \left(\frac{a}{R+aX} \right) \frac{\partial \omega}{\partial X} - \left(\frac{a}{R+aX} \right)^2 \omega + \frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2} \right) \quad (10)$$

mit der Reynoldzahl $Re = \rho v_0 a / \eta$. Vernachlässigt man alle Terme der Form

$$\frac{a}{R+aX} = \frac{\delta}{1+\delta X} \quad \text{für} \quad \delta = \frac{a}{R} \ll 1 \quad (11)$$

mit Ausnahme des Terms vor ω^2 in der ersten Beziehung, der im wesentlichen die zentrifugalen Kräfte beschreibt, erhalten wir das folgende Modell in dimensionslosen Größen

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \delta \omega^2 = \mathbf{f} - \nabla p + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u} \quad (12)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (13)$$

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \omega = \frac{1}{Re} \Delta \omega \quad (14)$$

mit $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^T$. Für gegebenes ω sind die Gleichungen (12) und (13) die inkompressiblen Navier-Stokes Gleichungen im zweidimensionalen Querschnitt. Für die Umfangsgeschwindigkeit ω ergibt sich eine Konvektions-Diffusionsgleichung. Dies bietet die Möglichkeit der iterativen Lösung des Systems (12)-(14) unter Verwendung von Programmteilen für zweidimensionale Berechnungen.

Sei Ω ein beschränktes Gebiet des \mathbf{R}^2 mit Lipschitzstetigem Rand $\Gamma = \partial\Omega$. Wir betrachten das Modell der stationären, inkompressiblen Navier-Stokes Gleichungen in dimensionsloser Form, das die Kopplung zwischen der Sekundärströmung \mathbf{u} und der Hauptströmung ω beinhaltet:

$$-\frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}(\omega^2) \quad \text{in } \Omega \quad (15)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (16)$$

$$-\frac{1}{Re} \Delta \omega + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (17)$$

Auch die Randbedingungen lassen sich aufgrund der Rotationssymmetrie auf Randbedingungen für den zweidimensionalen Querschnitt zurückführen. Im Einzelnen gilt:

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{auf } \Gamma_C \cup \Gamma_S \quad (18)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{auf } \Gamma_F \quad (19)$$

$$\mathbf{n} \cdot \sigma(\mathbf{u}, p)_{ij} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0 \quad \text{auf } \Gamma_F, \quad 1 \leq i, j \leq 2 \quad (20)$$

$$\omega = 1 \quad \text{auf } \Gamma_S \quad (21)$$

$$\omega = 0 \quad \text{auf } \Gamma_C \quad (22)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{auf } \Gamma_F \quad (23)$$

mit $\Gamma = \Gamma_C \cup \Gamma_S \cup \Gamma_F$ (Bild 2).

In (15) ist \mathbf{f} gegeben durch

$$\mathbf{f}(\omega^2) = \begin{pmatrix} \delta\omega^2 + \mu_0 \widehat{\mathbf{M}} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x} \\ \mu_0 \widehat{\mathbf{M}} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (24)$$

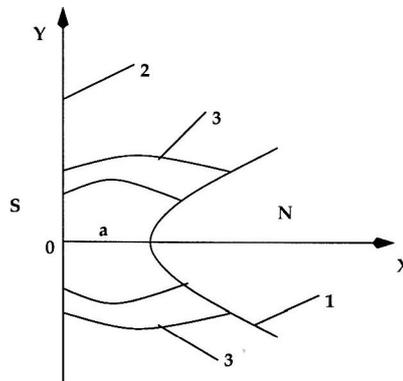


Bild 2. Das Modellgebiet: 1 - Oberfläche des Magnetkerns Γ_C , 2 - Rotoroberfläche Γ_S , 3 - freier Rand Γ_F , a - Spaltbreite

Dieses Modell für Dichtungen mit magnetischen Flüssigkeiten lässt sich mathematisch als ein System von partiellen Differentialgleichungen (15)-(17) mit Randbedingungen (18)-(23) auffassen. Für die Geschwindigkeit \mathbf{u} und den Druck p gelten die (zweidimensionalen) Navier-Stokes Gleichungen (15)-(16). Die Oberfläche des Magnetkerns Γ_C und die Rotoroberfläche Γ_S sind die festen Ränder des Gebiets Ω . Deshalb gilt für $\mathbf{u}|_{\Gamma_C \cup \Gamma_S}$ die klassische Stokes-Randbedingung (18). In Cuvelier und Driessen (1986) ist bewiesen, daß auf dem freien Rand Γ_F nicht die klassische Stokes-Randbedingung gilt, sondern die Gleitrandbedingungen (19)-(20). Hier bezeichnet \mathbf{n} - den Normalenvektor, $\boldsymbol{\tau}$ - den Tangentenvektor und $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, p)_{ij}$ - den Spannungstensor.

Für die Umfangsgeschwindigkeit ω gilt die Konvektions-Diffusions Gleichung (17). Die Drehung des Schafts erzeugt die inhomogene Randbedingung (21) auf Γ_S . Da der Konzentrator feststehend ist, verschwindet ω auf Γ_C .

Die Zentrifugalkraft ist der Grund dafür, daß die Funktion \mathbf{f} quadratisch von der Umfangsgeschwindigkeit ω abhängt.

Das gekoppelte System zur Bestimmung von \mathbf{u}, p, ω wird iterativ gelöst. Bei bekannter Umfangsgeschwindigkeit ω bestimmen wir (\mathbf{u}, p) aus (15), (16), (18), (19), (20). Die Berechnung von ω aus (17), (21), (22), (23) unter Nutzung des zuvor bestimmten Feldes \mathbf{u} ergibt eine neue Näherung für ω .

In dieser Arbeit benutzen wir die üblichen Bezeichnungen aus Girault und Raviart (1986). Die Normen in den Lebesgue- und Sobolev-Räumen $L^p(\Omega)$ und $H^m(\Omega)$ seien durch $\|\cdot\|_{0,p,\Omega}$ und $\|\cdot\|_{m,\Omega}$, die Seminorm in $H^m(\Omega)$ durch $|\cdot|_{m,\Omega}$ bezeichnet. Das Skalarprodukt im $L^2(\Omega)$ wird mit (\cdot, \cdot) notiert. Zur besseren Lesbarkeit werden vektorwertige Funktionen und Räume durch Fettdruck gekennzeichnet.

3 Schwache Formulierung

Um das Problem (15)-(23) in eine schwache Formulierung zu überführen, verwenden wir die folgenden Ansatz- und Testräume:

$$\begin{aligned}
\mathbf{V} &:= (H^1(\Omega))^2 \\
\mathbf{V}_0 &:= \{\mathbf{v} \in \mathbf{V} \mid \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ auf } \Gamma_F \text{ und } \mathbf{v} = 0 \text{ auf } \Gamma_C \cup \Gamma_S\} \\
Q &:= L_0^2(\Omega) = \{q \in L^2(\Omega) \mid (q, 1) = 0\} \\
\mathbf{W} &:= \{\mathbf{v} \in \mathbf{V}_0 \mid (q, \nabla \cdot \mathbf{v}) = 0 \quad \forall q \in Q\} \\
Z &:= \{z \in H^1(\Omega) \mid z = 1 \text{ auf } \Gamma_S \text{ und } z = 0 \text{ auf } \Gamma_C\} \\
Z_0 &:= \{z \in H^1(\Omega) \mid z = 0 \text{ auf } \Gamma_S \cup \Gamma_C\}
\end{aligned} \tag{25}$$

Die Räume $Q = L_0^2(\Omega)$ und $\mathbf{V}_0 \supset (H_0^1(\Omega))^2$ genügen der LBB-Stabilitätsbedingung, das heißt

$$\exists \beta > 0, \text{ so daß } \forall q \in Q \quad \beta \|q\|_0 \leq \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{V}_0} \frac{(q, \nabla \cdot \mathbf{v})}{|\mathbf{v}|_1} \tag{26}$$

Einen Beweis der LBB-Stabilitätsbedingung für die Räume $L_0^2(\Omega)$ und $(H_0^1(\Omega))^2$ findet man in Girault und Raviart (1986).

Wir führen nun die folgenden Bilinearformen und Trilinearformen ein:

$$\begin{aligned}
a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &:= (\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{V}, \mathbf{v} \in \mathbf{V} \\
A(\omega, z) &:= (\nabla \omega, \nabla z) \quad \forall \omega \in H^1(\Omega), z \in H^1(\Omega) \\
n(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{m}) &:= (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v}, \mathbf{m}) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \mathbf{m} \in \mathbf{V} \\
N(\mathbf{u}, \omega, z) &:= (\mathbf{u} \cdot \nabla \omega, z) \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{V}, \omega \in H^1(\Omega), z \in H^1(\Omega)
\end{aligned} \tag{27}$$

Für $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}_0$ ist $a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ das übliche Skalarprodukt auf \mathbf{V}_0 . Eine Variationsformulierung von (15)-(23) lautet nun:

Finde ein Tripel $\{\mathbf{u}, p, \omega\} \in \mathbf{V}_0 \times Q \times Z$, so daß

$$\begin{aligned}
\frac{1}{Re} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + n(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) - (p, \nabla \cdot \mathbf{v}) &= (\mathbf{f}(\omega^2), \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_0 \\
(q, \nabla \cdot \mathbf{u}) &= 0 \quad \forall q \in Q \\
\frac{1}{Re} A(\omega, z) + N(\mathbf{u}, \omega, z) &= 0 \quad \forall z \in Z_0
\end{aligned} \tag{28}$$

Ziel der Untersuchungen ist es, Aussagen zur Lösbarkeit des Problems (28) herzuleiten.

Zunächst führen wir eine Homogenisierung der Dirichletschen Randbedingung $\omega = 1$ auf Γ_S durch. Da Γ_S und Γ_C keine Punkte gemeinsam haben, gibt es eine Erweiterung $\lambda_0 \in Z$ mit $\lambda_0|_{\Gamma_S} = 1$ und $\lambda_0|_{\Gamma_C} = 0$. Anstelle von ω suchen wir nun S , wobei $\omega := S + \lambda_0$ ist. Durch die Einschränkung der Testfunktionen auf den Raum \mathbf{W} aller divergenzfreien Funktionen aus \mathbf{V}_0 kann der gesuchte Druck p eliminiert werden. Nach der Homogenisierung und der Druckelimination lautet das Variationsproblem:

Finde ein Paar $\{\mathbf{u}, S\} \in \mathbf{W} \times Z_0$, so daß

$$\begin{aligned}
\frac{1}{Re} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + n(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) &= (\mathbf{f}((S + \lambda_0)^2), \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{W} \\
\frac{1}{Re} A(S, z) + N(\mathbf{u}, \lambda_0, z) + N(\mathbf{u}, S, z) &= -\frac{1}{Re} A(\lambda_0, z) \quad \forall z \in Z_0
\end{aligned} \tag{29}$$

Wenn das Tripel $\{\mathbf{u}, p, S\} \in \mathbf{V}_0 \times Q \times Z_0$ eine Lösung des Variationsproblems ist, dann ist das Paar $\{\mathbf{u}, S\} \in \mathbf{W} \times Z_0$ eine Lösung des Problems (29).

Die Umkehrung gilt ebenfalls, da die Räume \mathbf{V}_0 und Q durch die LBB-Stabilitätsbedingung (26) miteinander verknüpft sind. Ist das Paar $\{\mathbf{u}, S\} \in \mathbf{W} \times Z_0$ eine Lösung des Problems (29), dann existiert ein eindeutiges $p \in Q$, so daß das Tripel $\{\mathbf{u}, p, S\} \in \mathbf{V}_0 \times Q \times Z_0$ eine Lösung des Variationsproblems ist. Deshalb beschränken wir uns in den folgenden Darstellungen auf die Analyse des Problems (29).

Für unser weiteres Vorgehen benötigen wir einige Eigenschaften der Trilinearformen. Die folgenden Aussagen finden wir in Dorok (1995).

Lemma 1 Die Trilinearformen $n : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{R}$, $N : \mathbf{V} \times H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \rightarrow \mathbf{R}$ sind stetig, d.h.

$$|n(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{m})| \leq c_1 |\mathbf{v}|_{1,\Omega} \|\mathbf{u}\|_{0,4,\Omega} \|\mathbf{m}\|_{0,4,\Omega} \leq c_2 |\mathbf{v}|_{1,\Omega} \|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} \|\mathbf{m}\|_{1,\Omega} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{m} \in \mathbf{V} \quad (30)$$

$$|N(\mathbf{u}, S, z)| \leq c_3 |S|_{1,\Omega} \|\mathbf{u}\|_{0,4,\Omega} \|z\|_{0,4,\Omega} \leq c_4 |S|_{1,\Omega} \|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} \|z\|_{1,\Omega} \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{V}, S, z \in H^1(\Omega) \quad (31)$$

Lemma 2 Sei $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ mit $\nabla \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}$ und $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma} = 0$. Dann haben die Trilinearformen $n(\cdot, \cdot, \cdot)$ und $N(\cdot, \cdot, \cdot)$ die Eigenschaften:

$$n(\mathbf{u}; \mathbf{v}, \mathbf{m}) = -n(\mathbf{u}, \mathbf{m}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{m} \in \mathbf{V} \quad (32)$$

$$N(\mathbf{u}, S, z) = -N(\mathbf{u}, z, S) \quad \forall S, z \in H^1(\Omega) \quad (33)$$

$$n(\mathbf{u}; \mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} \quad (34)$$

$$N(\mathbf{u}, S, S) = 0 \quad \forall S \in H^1(\Omega) \quad (35)$$

Die Anwendung von Standardtechniken zum Nachweis der Existenz einer Lösung des Problems (29) erfordert die Positivität der entsprechenden Form der linken Seite von (29) auf dem Produktraum $\mathbf{W} \times Z_0$. Mit Hilfe des Lemmas 1 und des Lemmas 2 kann für alle $\mathbf{v} \in \mathbf{W}, z \in Z_0$ die folgende Abschätzung durchgeführt werden:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{Re} a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + n(\mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{v}) + \frac{1}{Re} A(z, z) + N(\mathbf{v}, \lambda_0, z) + N(\mathbf{v}, z, z) = \\ & \frac{1}{Re} a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + \frac{1}{Re} A(z, z) + N(\mathbf{v}, \lambda_0, z) \geq \\ & c_5 \frac{1}{Re} \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}^2 + c_6 \frac{1}{Re} \|z\|_{1,\Omega}^2 - c_4 |\lambda_0|_{1,\Omega} \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}^2 \|z\|_{1,\Omega}^2 \geq \\ & \left(\min\{c_5, c_6\} \frac{1}{Re} - \frac{c_4}{2} |\lambda_0|_{1,\Omega} \right) \left(\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}^2 + \|z\|_{1,\Omega}^2 \right) \end{aligned} \quad (36)$$

wobei c_5, c_6 positive, aus der Poincareschen Ungleichung resultierende Konstanten und c_4 die Konstante in (31) bezeichnen. Somit stellt man fest, daß die Positivität und damit die Lösbarkeit von (29) nur für kleine Reynolds-Zahlen Re gesichert werden kann. Ursache dafür ist, daß bei der Untersuchung auf Existenz einer Lösung von (29) die Art der Kopplung zwischen der Geschwindigkeit \mathbf{u} und der Umfangsgeschwindigkeit S beweistechnisch vernachlässigt wird. Im Unterschied dazu überführen wir im folgenden das Problem (29) durch "Elimination von S " in eine äquivalente Formulierung auf dem Raum \mathbf{W} . Zu diesem Zweck definieren und untersuchen wir das folgende (SP) Problem:

Sei $\mathbf{v} \in \mathbf{W}$ gegeben. Finde $S \in Z_0$, so daß

$$D(\mathbf{v}; S, z) = l(z) \quad \forall z \in Z_0 \quad (37)$$

mit

$$D(\mathbf{v}; S, z) := \frac{1}{Re} A(S, z) + N(\mathbf{v}, S, z) \quad l(z) := -\frac{1}{Re} A(\lambda_0, z) - N(\mathbf{v}, \lambda_0, z) \quad (38)$$

Für gegebene Funktion $\mathbf{v} \in \mathbf{W}$ ist $D(\mathbf{v}; S, z)$ eine stetige Bilinearform auf $Z_0 \times Z_0$. Für gegebene Funktionen $\lambda_0 \in Z$ und $\mathbf{v} \in \mathbf{W}$ ist $l(z)$ eine stetige Linearform auf Z_0 . Es gilt

$$D(\mathbf{v}; z, z) \geq \frac{1}{Re} |z|_{1,\Omega}^2 \quad \forall z \in Z_0, \forall \mathbf{v} \in \mathbf{W} \quad (39)$$

Die Bedingungen des Satzes von Lax/Milgram (Girault und Raviart, 1986) sind damit erfüllt. Das

bedeutet, daß das lineare Problem(SP) für jedes $\mathbf{v} \in \mathbf{W}$ eine eindeutige Lösung $S \in Z_0$ hat. Es existiert also ein wohldefinierter Lösungsoperator

$$T : \mathbf{W} \rightarrow Z_0 \quad \mathbf{v} \rightarrow T\mathbf{v} = S \quad (40)$$

Lemma 3 *Der Lösungsoperator $T : \mathbf{W} \rightarrow Z_0$ ist beschränkt und Lipschitz-stetig. Es gilt*

$$|T\mathbf{v}_1 - T\mathbf{v}_2|_{1,\Omega} \leq \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_{0,4,\Omega} \left(A + B|\mathbf{v}_2|_{1,\Omega} \right) \quad (41)$$

wobei $A = A(Re, \|\lambda_0\|_{0,4,\Omega}, |\lambda_0|_{1,\Omega}, \overline{C})$, $B = B(\|\lambda_0\|_{0,4,\Omega}, C, \overline{C})$. Die Konstanten C und \overline{C} sind die Einbettungskonstanten der stetigen Einbettung der Räume \mathbf{V}_0 und Z_0 in den Räume $L^4(\Omega)$ bzw. $L^4(\Omega)$.

Beweis. Wegen $|T\mathbf{v}|_{1,\Omega} = |S|_{1,\Omega}$ betrachten wir eine a priori-Abschätzung für die Lösung $S \in Z_0$ des Problems (SP). Zunächst gilt

$$\frac{1}{Re} |S|_{1,\Omega}^2 \leq D(\mathbf{v}; S, S) = l(S) \quad (42)$$

Mit den Eigenschaften (31) und (33) finden wir

$$l(S) \leq \left\{ \frac{1}{Re} |\lambda_0|_{1,\Omega} + C|\mathbf{v}|_{1,\Omega} \|\lambda_0\|_{0,4,\Omega} \right\} |S|_{1,\Omega} \quad (43)$$

Dann gilt die a priori-Abschätzung

$$|S|_{1,\Omega} \leq \left\{ |\lambda_0|_{1,\Omega} + C Re |\mathbf{v}|_{1,\Omega} \|\lambda_0\|_{0,4,\Omega} \right\} \quad (44)$$

Seien $T\mathbf{v}_1 = S_1$ und $T\mathbf{v}_2 = S_2$, wobei $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbf{W}$ beliebig. Dann ist

$$|T\mathbf{v}_1 - T\mathbf{v}_2|_{1,\Omega} = |S_1 - S_2|_{1,\Omega} \quad (45)$$

Aus (40) folgt nach Differenzbildung, Ausnutzen der Eigenschaften (31), (33) und (35)

$$|S_1 - S_2|_{1,\Omega} \leq \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_{0,4,\Omega} \left\{ \|\lambda_0\|_{0,4,\Omega} + Re \overline{C} |S_2|_{1,\Omega} \right\} \quad (46)$$

Zusammen mit (44) und (45) folgt die Ungleichung (41).

Wir können nun mittels T auf die zweite Gleichung in (29) verzichten und in der ersten Gleichung S durch $T\mathbf{v}$ ersetzen. Eine äquivalente Formulierung der Problems (29) lautet:

Finde $\mathbf{v} \in \mathbf{W}$, so daß

$$\frac{1}{Re} a(\mathbf{v}, \mathbf{m}) + n(\mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{m}) = (\mathbf{f}((T\mathbf{v} + \lambda_0)^2), \mathbf{m}) \quad \forall \mathbf{m} \in \mathbf{W} \quad (47)$$

Aufgrund der Äquivalenz der Probleme (29) und (47) können wir uns bei den weiteren Untersuchungen auf das Problem (47) beschränken. Dabei ist von Vorteil, daß wir die Eigenschaften des Operators T und damit die Kopplung zwischen der Geschwindigkeit \mathbf{v} und der Umfangsgeschwindigkeit S beweistechnisch ausnutzen können.

4 Existenz einer Lösung der stetigen Aufgabe

Wir zeigen zunächst die Existenz einer Lösung des Problems (47). Dazu schreiben wir das Problem (47) in Operatorform

$$P(\mathbf{v}) = 0 \quad (48)$$

mit

$$a(P(\mathbf{v}), \mathbf{m}) := \frac{1}{Re} a(\mathbf{v}, \mathbf{m}) + n(\mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{m}) - (\mathbf{f}((T\mathbf{v} + \lambda_0)^2), \mathbf{m}) \quad \forall \mathbf{m} \in \mathbf{W} \quad (49)$$

Die Abbildung $P : \mathbf{W} \rightarrow \mathbf{W}$ ist stetig. Als Grundlage zum Nachweis der Existenz einer Lösung des Problems (48) benutzen wir eine Folgerung des klassischen Fixpunktsatzes von Brouwer, die man in Girault und Raviart (1986) findet.

Theorem 1 Sei X ein endlich-dimensionaler Hilbert-Raum mit dem Skalarprodukt (\cdot, \cdot) und der Norm $|\cdot|_X$. Weiter sei Q eine stetige Abbildung, $Q : X \rightarrow X$ mit der folgenden Eigenschaft: Es existiert eine Konstante $k > 0$, so daß

$$(Q\mathbf{x}, \mathbf{x}), \leq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in X \quad \text{mit} \quad |\mathbf{x}|_X = k \quad (50)$$

Dann existiert ein Element $\mathbf{x} \in X$, so daß

$$Q\mathbf{x} = 0, \quad |\mathbf{x}|_X \leq k \quad (51)$$

Das nächste Lemma liefert ein wichtiges technisches Resultat, das wir für unsere Beweistechnik benötigen.

Lemma 4 Seien $\omega \in Z_0$ und $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ gegeben und $D(\mathbf{v}; \omega, s) \leq 0$ für alle $s \in H^1(\Omega)$ mit $s \geq 0$ und $s|_{\Gamma_C \cup \Gamma_S} = 0$. Dann gilt für fast alle $\mathbf{x} \in \Omega$

$$\omega \leq \sup_{\Gamma_C \cup \Gamma_S} \omega^+ \quad (52)$$

wobei $\omega^+ = \max(\omega, 0) \in H^1(\Omega)$.

Das Lemma (4) ist ein Sonderfall des schwachen Maximumprinzips, das man in Chicco (1970) finden kann.

Lemma 5 Das Problem (47) hat eine Lösung $\mathbf{v} \in \mathbf{W}$.

Beweis. Wir betrachten $a(P(\mathbf{v}), \mathbf{v}) = \frac{1}{Re} a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + n(\mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{v}) - (\mathbf{f}((T\mathbf{v} + \lambda_0)^2), \mathbf{v})$. Mit (32) und (34) gilt

$$a(P(\mathbf{v}), \mathbf{v}) \geq \frac{1}{Re} |\mathbf{v}|_{1,\Omega}^2 - (\mathbf{f}((T\mathbf{v} + \lambda_0)^2), \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{W} \quad (53)$$

Wir brauchen nun eine Abschätzung des Terms $(\mathbf{f}((T\mathbf{v} + \lambda_0)^2), \mathbf{v})$. Wegen der Gestalt von \mathbf{f} (24) gilt $(\mathbf{f}((T\mathbf{v} + \lambda_0)^2), \mathbf{v}) \sim \delta((T\mathbf{v} + \lambda_0)^2, \mathbf{v})$. Die Idee für eine geeignete Abschätzung, die von Dorok (1995) dargestellt ist, können wir nicht anwenden, weil die Funktion \mathbf{f} quadratisch von der Umfangsgeschwindigkeit ω abhängt.

Die Funktion $T\mathbf{v} + \lambda_0 \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ ist die schwache Lösung des Problems:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{Re} \Delta \omega + \mathbf{v} \cdot \nabla \omega &= 0 \\ \omega|_{\Gamma_S} &= 1, \quad \omega|_{\Gamma_C} = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_F} = 0 \end{aligned} \quad (54)$$

Mit Hilfe von Lemma (4) finden wir Schranken für die schwache Lösung $\omega^* = T\mathbf{v} + \lambda_0 \in H^1(\Omega)$ des Problems (54).

$$\left. \begin{aligned} D(\mathbf{v}; \omega^* - 1, s) &= 0 & \leq & 0 \\ (\omega^* - 1)|_{\Gamma_S} &= 0 & \leq & 0 \\ (\omega^* - 1)|_{\Gamma_C} &= -1 & \leq & 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \omega^* \leq 1 \quad \left. \begin{aligned} D(\mathbf{v}; -\omega^*, s) &= 0 & \leq & 0 \\ -\omega^*|_{\Gamma_S} &= -1 & \leq & 0 \\ -\omega^*|_{\Gamma_C} &= 0 & \leq & 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \omega^* \geq 0$$

Daraus folgt die Abschätzung

$$\|T\mathbf{v} + \lambda_0\|_{0,\infty} \leq 1 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} \quad (55)$$

Mit der Abschätzung (55) und mit dem Einbettungstheorem $H^1 \hookrightarrow L^1$ gilt für $\mathbf{v} \in \mathbf{W}$

$$|((T\mathbf{v} + \lambda_0)^2, \mathbf{v})| \leq \left| \int_{\Omega} (T\mathbf{v} + \lambda_0)^2 \mathbf{v} dx \right| \leq \int_{\Omega} |\mathbf{v}| dx \leq C_1 |\mathbf{v}|_{1,\Omega} \quad (56)$$

Aus der Abschätzung (56) können wir schlußfolgern

$$a(P(\mathbf{v}), \mathbf{v}) \geq \frac{1}{\operatorname{Re}} |\mathbf{v}|_{1,\Omega}^2 - C_1 |\mathbf{v}|_{1,\Omega} \quad (57)$$

mit C_1 unabhängig von \mathbf{v} .

Der Operator P ist also koerzitiv und wir setzen

$$K_1 = K_1(\operatorname{Re}) := C_1 \operatorname{Re} \quad (58)$$

Nach dieser Vorüberlegung können wir nun die Existenz einer Lösung mit der Galerkin-Methode zeigen.

Da \mathbf{W} ein separabler Hilbert-Raum ist, kann man ein System $\{\mathbf{r}_i\}_{i \geq 1} \subset \mathbf{W}$ abzählbar vieler linear unabhängiger Elemente in \mathbf{W} auswählen, deren Linearkombinationen dicht liegen in \mathbf{W} .

Sei $\mathbf{W}_m \subset \mathbf{W}$, $\mathbf{W}_m = \operatorname{span}\{\mathbf{r}_i\}_{i=1}^m$. Dann ist mit

$$G\mathbf{y} = \sum_{i=1}^m y_i \mathbf{r}_i \quad \mathbf{y} \in \mathbf{R}^m \quad (59)$$

eine bijektive Abbildung $G : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{W}_m$ definiert und $|G\mathbf{y}|_{1,\Omega}$ ist eine Norm in \mathbf{R}^m . Auf endlich-dimensionalen Räumen sind alle Normen äquivalent, deshalb existiert ein $k_0 > 0$ mit $|\mathbf{y}| \leq k_0 |G\mathbf{y}|_{1,\Omega}$. Hier kennzeichnen wir mit $|\cdot|$ die euklidische Norm in \mathbf{R}^m . Wir definieren durch

$$(Q\mathbf{y})_i = a(P(G\mathbf{y}), \mathbf{r}_i), \quad i = 1, \dots, m \quad (60)$$

einen stetigen Operator $Q : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^m$. Da der Operator koerzitiv ist, gilt

$$(Q\mathbf{y}, \mathbf{y}) = a(P(G\mathbf{y}), G\mathbf{y}) \geq 0 \quad \forall |\mathbf{y}| \geq k_0 K_1 \quad (61)$$

Nach Theorem 1 existiert dann $\tilde{\mathbf{y}} \in \mathbf{R}^m$ mit $Q\tilde{\mathbf{y}} = 0$. Wir setzen $\mathbf{w}_m = G\tilde{\mathbf{y}}$, wegen (60) ist

$$a(P(\mathbf{w}_m), \mathbf{r}_i) = 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (62)$$

Dann folgt aus (51)

$$|\mathbf{w}_m|_{1,\Omega} \leq K_1 \quad \forall m \in \mathbf{N} \quad (63)$$

Da der Raum \mathbf{W} reflexiv ist, existiert wegen (63) eine Teilfolge \mathbf{w}_{m_j} und ein Element $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$, so daß $\mathbf{w}_{m_j} \rightharpoonup \mathbf{w}$ in \mathbf{W} . Wenn nun aus

$$\mathbf{w}_{m_j} \rightharpoonup \mathbf{w} \implies a(P(\mathbf{w}_{m_j}), \mathbf{v}) \rightarrow a(P(\mathbf{w}), \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{W} \quad (64)$$

bedeutet das $a(P(\mathbf{w}), \mathbf{r}_i) = 0 \quad \forall i \in \mathbf{N}$. Da $\mathbf{W} = \overline{\operatorname{span}\{\mathbf{r}_i\}_{i=1}^{\infty}}$, erhalten wir $a(P(\mathbf{w}), \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{W}$. Das heißt, daß ein $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$ mit $P(\mathbf{w}) = 0$ existiert. Die Existenz einer Lösung ist also bewiesen, wenn (64) gezeigt werden kann. Wir betrachten die aus (30) und (32) folgende Abschätzung

$$|n(\mathbf{w}_{m_j}; \mathbf{w}_{m_j}, \mathbf{v}) - n(\mathbf{w}; \mathbf{w}, \mathbf{v})| \leq \|\mathbf{w}_{m_j} - \mathbf{w}\|_{0,4,\Omega} |\mathbf{v}|_{1,\Omega} (|\mathbf{w}_{m_j}|_{1,\Omega} + |\mathbf{w}|_{1,\Omega}) \quad (65)$$

Mit der Eigenschaft von Lemma 1 gilt die Abschätzung

$$|(\mathbf{f}((T\mathbf{w}_{m_j})^2), \mathbf{v}) + (\mathbf{f}((T\mathbf{w})^2), \mathbf{v})| \leq C_2 \|\mathbf{w}_{m_j} - \mathbf{w}\|_{0,4,\Omega} \quad (66)$$

mit $C_2 = C_2(A, B, |\mathbf{w}|_{1,\Omega}, |T\mathbf{w}_{m_j} + T\mathbf{w}|_{1,\Omega}, |\mathbf{v}|_{1,\Omega})$.

Wir wenden auf $|a(P(\mathbf{w}_{mj}) - P(\mathbf{w}), \mathbf{v})|$ die Dreiecksungleichung an und setzen die eben gewonnenen Abschätzungen ein. Es gilt

$$|a(P(\mathbf{w}_{mj}) - P(\mathbf{w}), \mathbf{v})| \leq \frac{1}{Re} |a(\mathbf{w}_{mj} - \mathbf{w}, \mathbf{v})| + C_3 \|\mathbf{w}_{mj} - \mathbf{w}\|_{0,4,\Omega} \quad (67)$$

mit $C_3 = C_3(C_2, |\mathbf{v}|_{1,\Omega}, |\mathbf{w}_{mj}|_{1,\Omega}, |\mathbf{w}|_{1,\Omega})$.

Wegen der schwachen Konvergenz $\mathbf{w}_{mj} \rightharpoonup \mathbf{w}$ in \mathbf{W} gilt $a(\mathbf{w}_{mj} - \mathbf{w}, \mathbf{v}) \rightarrow 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{W}$.

Wegen des Sobolevschen kompakten Einbettungssatzes $\mathbf{W} \hookrightarrow L^4(\Omega)$ gilt

$$\|\mathbf{w}_{mj} - \mathbf{w}\|_{0,4,\Omega} \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad \mathbf{w}_{mj} \rightharpoonup \mathbf{w} \quad \text{in} \quad \mathbf{W} \quad (68)$$

Mit der Beschränktheit (63) der Teilfolge \mathbf{w}_{mj} ist dann (64) gezeigt. Das Problem (48) hat eine Lösung $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$.

Lemma 6 *Das Ausgangsproblem (28) hat eine Lösung $\{\mathbf{u}, p, w\} \in \mathbf{V} \times Q \times Z$.*

Beweis. Das Problem (47) ist äquivalent zu Problem (37). Das Problem (37) besitzt damit eine Lösung $\mathbf{v} \in \mathbf{W}$. Dann existiert ein Paar $(\mathbf{v}, S) \in \mathbf{W} \times Z_0$ mit $S = T\mathbf{v}$, das das Problem (29) löst. Wegen der Gültigkeit der LBB-Stabilitätsabschätzung gibt es ein eindeutiges $p \in Q$, so daß das Tripel $(\mathbf{v}, p, S) \in \mathbf{W} \times Q \times Z_0$ eine Lösung des Variationsproblems ist. Also hat das Ausgangsproblem (28) eine Lösung $\{\mathbf{u}, p, \omega\} \in \mathbf{V} \times Q \times Z$.

5 Ausblick

Diskretisierungskonzepte für die Modellgleichungen basieren auf Finite-Elemente-Methoden. Im Gegensatz zu anderen Diskretisierungsverfahren ist eine rigorose Konvergenzanalyse verfügbar. Komplexe Strömungsgebiete können einfach behandelt werden. Die Randbedingungen sind leicht integrierbar und die Adaption an Gebiete und Lösungsstrukturen ist einfach realisierbar.

Die Schwierigkeiten bei der Diskretisierung der Modellgleichungen bestehen in der Berücksichtigung der Gleitrandbedingung (19). Zur Berücksichtigung dieser Randbedingung gibt es verschiedene Varianten, deren Vor- und Nachteile zu diskutieren sind. Insbesondere sind Varianten, die die Randbedingung in starker Form im Ansatzraum (wie z.B. in Bänsch und Deckelnick, 1997; Knobloch, 1995) oder in schwacher Form (Sattelpunktformulierung in Verfürth, 1987) berücksichtigen, hinsichtlich ihrer effizienten Umsetzung in bestehende Programmsysteme zu bewerten.

Danksagung: Der Deutschen Forschungsgemeinschaft danke ich für die finanzielle Unterstützung meiner Arbeit im Graduiertenkolleg Modellierung, Berechnung und Identifikation mechanischer Systeme (GRK 203).

Literatur

1. Bänsch, E.; Deckelnick, K.: Optimal error estimates for the Stokes und Navier-Stokes equations with slip-boundary conditions. Technical Report 28, Mathematische Fakultät, Universität Freiburg, (1997).
2. Chicco, M.: Principio di massimo per soluzioni di problemi al contorno musti per equazioni elliptiche di tipo variazionale. Boll. Un. Mat. Ital., IV Ser. 3, (1970), 384–394.
3. Cuvelier, C.; Driessen, J.: Thermocapillary free boundaries in crystal growth. J. Fluid mech., vol. 169, (1986), 1–26.
4. Dorok, O.: Eine Stabilisierte Finite-Elemente-Methode zur Lösung der Boussinesq-Approximation der Navier-Stokes-Gleichungen. Dissertation, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, (1995).
5. Girault, V.; Raviart, P.: Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations. Springer-Verlag, Berlin, (1986).

6. Knobloch, P.: Variational Crimes in a Finite Element Discretization of 3D Stokes Equations with Nonstandard Boundary Conditions. Preprint MBI-97-4, Universität Magdeburg, (1995).
7. Rosensweig, R. E.: Fluid Dynamics and Science of Magnetic Liquids. Advances in Electronics and Electron Physics, Vol. 48, (1979), 103 – 199.
8. Rosensweig, R. E.: Ferrohydrodynamics. Cambridge University Press, London, New York, New Rochelle, Melbourne, Sydney, (1985).
9. Verfürth, R.: Finite Element Approximation of Incompressible Navier-Stokes Equations with Slip Boundary Condition I. Numer. Math., 50, (1987), 697-721.

Anschrift: Dipl.-Math. Teodora Mitkova, Institut für Analysis und Numerik, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, PF 4120, D-39016 Magdeburg.
e-mail: teodora.mitkova@mathematik.uni-magdeburg.de
