

Dynamischer Kontakt des Radialreifens als viskoelastische Schale mit einer starren Stützfläche bei stationärem Rollen

A. E. Belkin, N. L. Narskaya, F. Böhm, A. Duda, R. Wille

Untersucht werden die Deformation und die Betriebscharakteristiken Kontaktdruckverteilung und Rollwiderstand von Radialreifen beim stationären Rollen. Als mathematisches Modell des Reifens wird eine dreischichtige Schale verwendet mit zwei Membrantragschichten anstelle der Karkasse und des Gürtels, die über eine Gummizwischenschicht durch Schubkräfte zusammenwirken. Für dieses Modell wird das Differentialgleichungssystem des stationären Rollens angegeben. Vorgeschlagen wird eine Lösungsmethode für das Kontaktproblem, die auf der Berechnung von Einflußfunktionen der Kontaktspannungen beruht. Die Wirkung der Kontaktspannungen wird bestimmt. Mit Hilfe der erarbeiteten Methode wird der Einfluß einer Reihe von konstruktiven und Nutzungsparametern auf die Größe des Rollwiderstandes untersucht: der Breite des Gürtels, des Armierungswinkels im Gürtel, der Geometrie des Laufteils, der Dicke des Protektors, des Reifeninnendrucks und der Rollgeschwindigkeit. Dabei wurde festgestellt, daß es Werte der Konstruktionsparameter des Gürtels gibt, bei denen der Rollwiderstand zum Minimum wird.

1 Einführung

Bisher werden Berechnungen des Spannungs-Deformationszustandes bei Reifen unter Nutzlasten immer noch statisch ausgeführt. Bei höheren Rollgeschwindigkeiten jedoch unterscheidet sich der Charakter der Reifendeformation wesentlich von den Deformationen des stehenden oder langsam rollenden Reifens (Biderman u.a., 1963; Buchin, 1988). Bereits frühe experimentelle Untersuchungen am Reifen auf der Lauftrommel haben gezeigt, daß mit zunehmender Geschwindigkeit eine Umverteilung des Kontaktdrucks vor sich geht und demzufolge auch eine Veränderung der Beanspruchung des Gummis in der Protektorzone (Zacharov und Novopol'skij, 1957). Diese dynamischen Effekte machen sich bereits bei Geschwindigkeiten bemerkbar, die wesentlich unter den kritischen Werten liegen.

Außer der Berücksichtigung dieser dynamischen Effekte ist die Bestimmung der Energiedissipation im Reifenmaterial bei zyklischer Deformation wichtig. Auf ihrer Grundlage werden Rollwiderstand und Wärmebildung im Reifen berechnet.

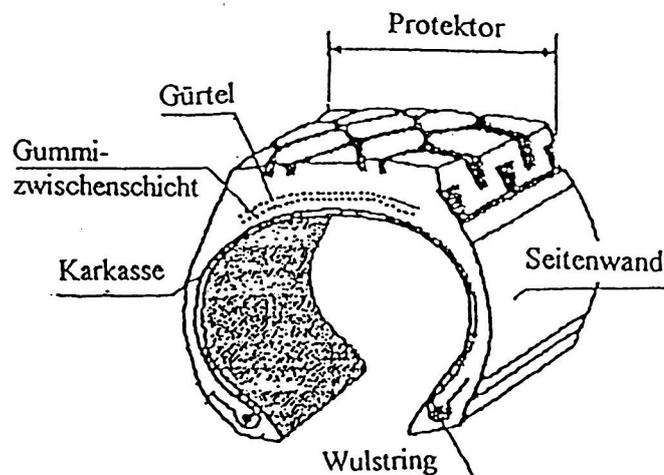


Bild 1. Hauptkonstruktionselemente des Luftreifens

In diesem Artikel wird ein spezielles Berechnungsmodell des Reifens verwendet, welches auf der Schalentheorie beruht und in der Lage ist, die erwähnten Phänomene des Energieverlustes bei zyklischer Beanspruchung zu simulieren. Um dieses Modell zu begründen, betrachten wir die Hauptkonstruktionselemente eines Reifens (Bild 1). Das wichtigste Element ist das Traggerüst des Reifens (Karkasse), bestehend aus einer oder mehrerer Gummi-Kord-Lagen. Durch die Struktur und konstruktive Ausführung der Karkasse werden die wesentlichen Eigenschaften des Reifens bestimmt. Die Karkasse des Diagonalreifens besteht aus einer geraden Anzahl von Gummi-Kord-Schichten mit sich netzartig überkreuzenden Verstärkungsrichtungen, während in der Karkasse des Radialreifens die Kordfäden parallel zu den Meridianen verlaufen und kein Netz bilden (Bild 2). Dadurch erhält der Radialreifen eine hohe Nachgiebigkeit gegenüber Vertikallasten und gewährleistet damit den Fahrkomfort. Das den Radialreifen umgürtende Element (Gürtel oder breaker) dagegen behält die Netzstruktur.

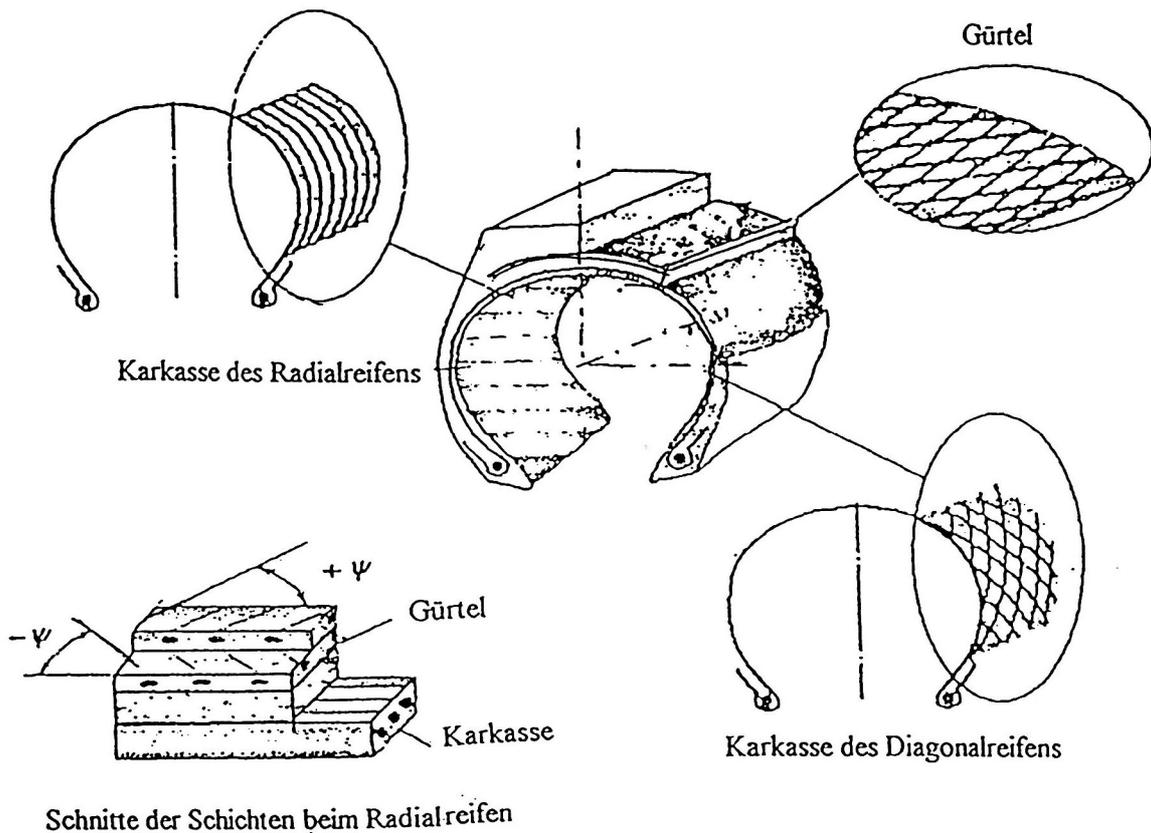


Bild 2. Unterschiedlicher Konstruktionsaufbau des Diagonal- und Radialreifens

Für die Lösung von Problemen der inneren Reifenmechanik werden unterschiedliche Berechnungsmodelle verwendet, die von Buchin (1988) zusammengestellt und in der Arbeit von Duda und Wille (1999) einer vergleichenden Analyse unterzogen wurden. Von den Schalenmodellen am genauesten ist das Modell der vielschichtigen Kompositschale mit diskreten Verschiebungsansätzen für die einzelnen Schichten, bei dem für alle Schichten unterschiedslos eine Art verallgemeinerter Timoshenko-Hypothese angenommen wird, so daß für die deformierte Reifenschale insgesamt die Normale in eine gebrochene Linie übergeht (Grigolyuk und Kulikov, 1988; Kulikov u.a., 2000).

Für den Fall stark unterschiedlicher Schichtsteifigkeiten (z. B. Reifengummi $E_r = 1 \dots 10 \text{ N/mm}^2$, Textilkord $E_c = 1000 \dots 2000 \text{ N/mm}^2$, Stahlkord $E_c = 10^4 \dots 10^5 \text{ N/mm}^2$) wurde die allgemeine Theorie der geschichteten Schalen mit abwechselnd steifen und weichen Schichten von Bolotin und Novichkov (1980) aufgestellt. Diese Theorie beruht auf der Betrachtung des Gleichgewichts jeder steifen Schicht im Einzelnen, wodurch die Ordnung des Systems lösender Differentialgleichungen von der Anzahl der steifen Schichten abhängt. Die Anwendung dieser Theorie auf den Fall, daß jede der Kordlagen im Reifen als steife Schicht der Schale angesehen wird, ist wegen der hohen Ordnung der Differentialgleichungen kompliziert und wurde bisher nur für die Berechnung der axialsymmetrischen Deformation des Reifens bei Belastung durch Innendruck durchgeführt (Kuz'min und Novichkov, 1983; Novichkov und Kuz'min, 1984).

Das Berechnungsmodell kann dadurch vereinfacht werden, daß benachbarte membranartige Kordschichten zu einer gedachten Schicht mit summarischen Steifigkeitswerten zusammengefaßt werden. Diesen Weg gingen Böhm (Habilitation, 1966) beim Ringmodell und Biderman und Levkovskaya (1969, 1971, 1974), die den Laufteil des Radialreifens als dreischichtige Schale bestehend aus zwei orthotropen Membranschichten (Karkasse und Gürtel) und einer weichen isotropen Gummizwischenschicht, die nur Querkraftschubspannungen überträgt, auffaßten. Nach diesem Schema wurde der durch Innendruck beanspruchte Reifen berechnet.

In der vorliegenden Arbeit wird das Reifenmodell der dreischichtigen pneumatischen Schale auf den Fall beliebiger nichtaxialsymmetrischer Belastungen übertragen. Der durch die Zusammenfassung der anisotropen Gürtelschichten zu einer orthotropen Membrantragschicht begangene Fehler wird hier für die Bearbeitung von Problemen der äußeren Reifenmechanik, insbesondere des Kontaktproblems, in Kauf genommen. Für genauere Berechnungen der inneren Spannungen und Deformationen des Reifens mit Berücksichtigung der Eigenbiegewirkung und aller Anisotropieeffekte des Gürtels wäre das einfachste Modell eine 5-schichtige pneumatische Schale mit drei anisotropen Membranschichten (1 Karkass-Schicht, 2 Gürtelschichten) und zwei weichen isotropen Gummizwischenschichten – siehe die Schnitte der Schichten beim Radialreifen in Bild 2.

Die Autoren gehen davon aus, daß die zweidimensionalen Schalenmodelle des Reifens, trotz ihres eingeschränkten Informationsgehaltes im Vergleich zu den 3D-Festkörpermodellen, von großem praktischen Interesse für die Aufstellung der generellen Abhängigkeiten der äußeren Reifenmechanik und für die Bestimmung der Betriebskenngrößen des rollenden Reifens sind.

2 Mathematische Formulierung des Problems

Wir betrachten das ebene stationäre Rollen eines Rades mit Radialreifen bei der Wirkung einer Vertikallast Q_z , einer Längskraft Q_x und eines Drehmomentes M_y (Bild 3a). Wenn als die das Rollen charakterisierenden Parameter die Winkelgeschwindigkeit des Rades Ω sowie die Vertikal- und die Längskraft Q_z und Q_x angenommen werden, dann sind das Drehmoment (Antriebs- oder Bremsmoment) M_y , die Rollwiderstandsleistung N_r und das Rollwiderstandsmoment M_r nach Buchin (1988)

$$M_y = Q_x R_{dyn} + Q_z d \quad N_r = M_y \Omega - Q_x V \quad M_r = N_r / \Omega = M_y - Q_x R_{eff} \quad (1)$$

V – Geschwindigkeit des Radzentrums in x -Richtung; $R_{eff} = V/\Omega$ – effektiver Rollradius; R_{dyn} – dynamischer Radius des Reifens; d – Versetzung der vertikalen Reaktionskraft.

Die Größen R_{eff} , R_{dyn} , d ergeben sich aus der Lösung des Kontaktproblems für den rollenden Reifen. Zweckmäßigerweise wird für die Problemformulierung angenommen, daß die Radachse unbeweglich ist und die Stützfläche sich unter dem Rad mit der Geschwindigkeit V bewegt.

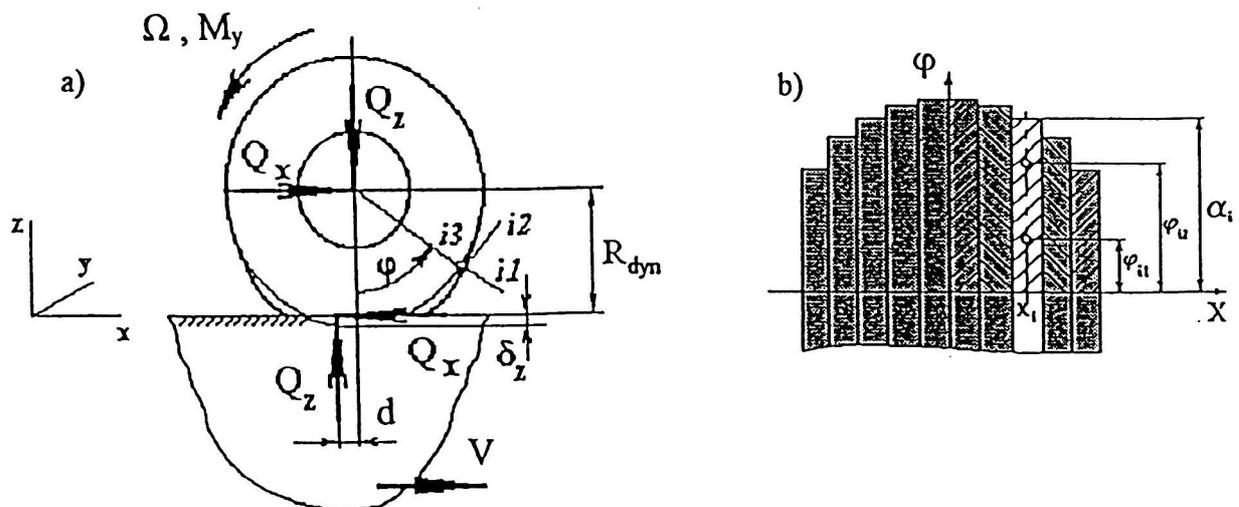


Bild 3. Stationäres Rollen eines angetriebenen Rades (a) und Zerlegung der Kontaktfläche in Streifen (b)

Als Berechnungsmodell des Reifens wird die bereits diskutierte und an statischen Aufgaben erprobte dreischichtige Schale bestehend aus Karkasse – Gummizwischenschicht – Gürtel verwendet (Böhm, 1966, 1967; Biderman und Levkovskaya, 1969, 1971; Belkin und Chernecov, 1993; Belkin, 1998), auf die eine vierte, den Protaktor ersetzende, nicht mittragende äußere Bettungsschicht aufgesetzt ist (Bild 4). Die Karkasse und die den Gürtel modellierenden Schichten werden als Membranen behandelt. Die hier getätigte Annahme der momentenfreien Lagerung an der Felge muß bei Untersuchung des Randeffects durch eine Drehfederlagerung ersetzt werden.

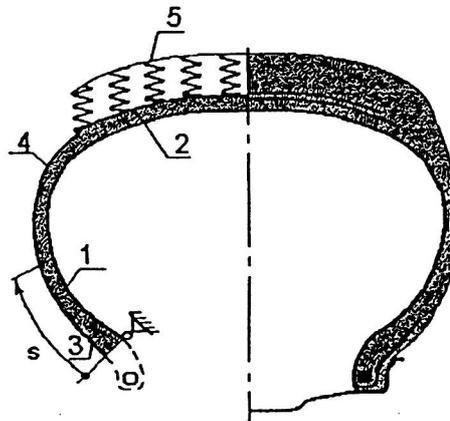


Bild 4. Berechnungsschema des Radialreifens als dreischichtige Schale
1 – Karkasse; 2 – Gürtel; 3 – Umschlag der Karkasse;
4 – fiktive Schicht (Erklärung siehe S. 363); 5 – Protaktor (Winkler-Bettung)

Beim stationären Rollen ist die Geschwindigkeit \mathbf{v} eines beliebigen Reifenpunktes die konvektive Ableitung des Ortsvektors \mathbf{R}^* des deformierten Reifens

$$\mathbf{v} = \Omega \frac{\partial \mathbf{R}^*}{\partial \varphi} \quad (2)$$

φ – Winkelkoordinate des betreffenden Meridianschnittes; s – Bogenkoordinate längs der Referenz-Meridianlinie vom Felgenpunkt aus gemessen.

In den mit der Radachse verbundenen zylindrischen Koordinaten $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ ist der Ausdruck für den Geschwindigkeitsvektor eines Reifenpunktes

$$\mathbf{v} = \Omega \left[\left(\frac{\partial \rho}{\partial \varphi} - v \right) \mathbf{i}_1 + \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + \rho + r \right) \mathbf{i}_2 + \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} \mathbf{i}_3 \right] \quad (3)$$

r – Abstand des Punktes der nichtdeformierten Schale von der Radachse; ρ, v, ξ – Verschiebungen des Reifenpunktes in radialer, Umfangs- und axialer Richtung, d. h. in den Richtungen $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$.

In der Basis der Hauptkrümmungslinien und der Normalen der undeformierten Schale (d. h. in den Richtungen $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{n}$) ist derselbe Geschwindigkeitsvektor gegeben durch

$$\mathbf{v} = \Omega r \left[\omega_2 \mathbf{t}_1 + (1 + e_2) \mathbf{t}_2 - \vartheta_2 \mathbf{n} \right] \quad (3a)$$

mit $e_2, \omega_2, \vartheta_2$ als den Schalendeformationsparametern, z. B. aus Biderman (1977).

Der Beschleunigungsvektor eines Schalenpunktes kann entweder aus

$$\mathbf{a} = \Omega \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \varphi} = \Omega^2 \left[\left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial \varphi^2} - 2 \frac{\partial v}{\partial \varphi} - r - \rho \right) \mathbf{i}_1 + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + 2 \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} - v \right) \mathbf{i}_2 + \frac{\partial^2 \xi}{\partial \varphi^2} \mathbf{i}_3 \right] \quad (4)$$

oder aus

$$a = \Omega^2 r \left\{ \left[\frac{\partial \omega_2}{\partial \varphi} - (1 + e_2) \cos \theta \right] \mathbf{t}_1 + \left(\frac{\partial e_2}{\partial \varphi} + \omega_2 \cos \theta - \vartheta_2 \sin \theta \right) \mathbf{t}_2 - \left[\frac{\partial \vartheta_2}{\partial \varphi} + (1 + e_2) \sin \theta \right] \mathbf{n} \right\} \quad (4a)$$

berechnet werden, θ – Winkel zwischen der Normalen \mathbf{n} zur Schalenbezugsfläche und der Rotationsachse \mathbf{i}_3 . Die in diesen Formeln verwendeten Schalendeformationsparameter sind im Fall der Torusschale

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{w}{R_1} & e_2 &= \frac{\partial v}{r \partial \varphi} + \frac{\cos \theta}{r} u + \frac{w}{R_2} \\ \omega_1 &= \frac{\partial v}{\partial s} & \omega_2 &= \frac{\partial u}{r \partial \varphi} - \frac{\cos \theta}{r} v \\ \vartheta_1 &= \frac{u}{R_1} - \frac{\partial w}{\partial s} & \vartheta_2 &= \frac{v}{R_2} - \frac{\partial w}{r \partial \varphi} \end{aligned} \quad (5)$$

u, v, w – Verschiebungen des Reifenpunktes in meridionaler, Umfangs- und Normalenrichtung; R_1, R_2 – Hauptkrümmungsradien (Bild 5).

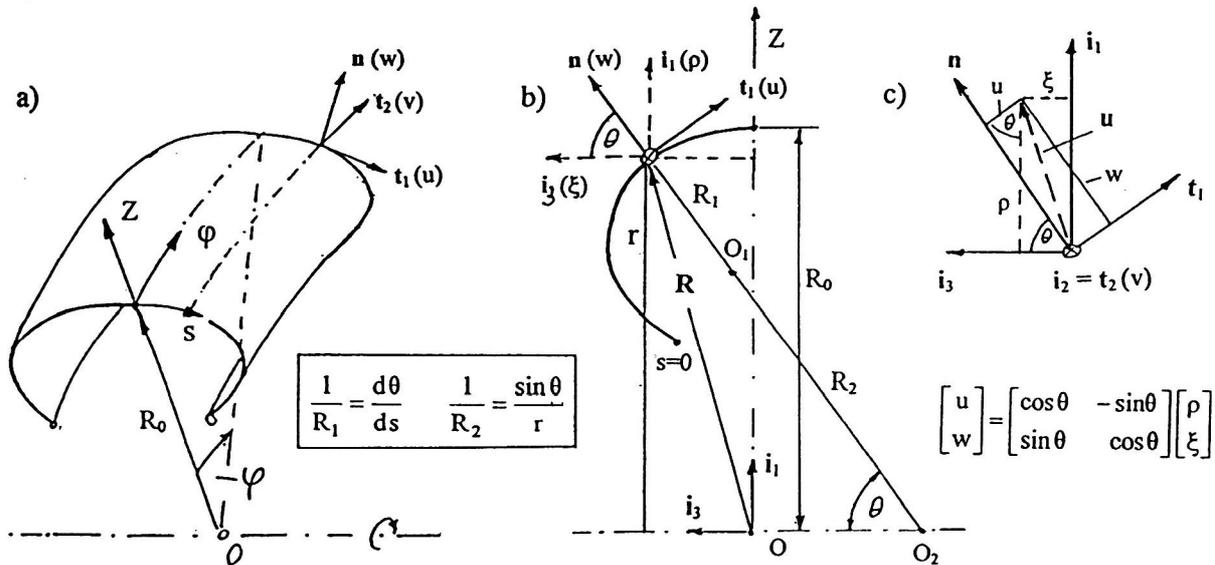


Bild 5. Bezugsfläche der Reifenschale: Torusfläche der Karkasse (a), Meridiankurve (b), Beziehungen zwischen den Verschiebungen u, v und ρ, ξ (c)

Die Gleichungen des dynamischen Gleichgewichts von Elementen der Karkasse und des Gürtels in meridionaler, Umfangs- und Normalenrichtung sind nach Belkin (1998) und Belkin und Narskaya (1997):

in meridionaler Richtung s

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial s} (r T_1^{(k)}) + \frac{\partial}{\partial \varphi} S_2^{(k)} - T_2^{(k)} \cos \theta + \frac{r P_1^{(k)}}{R_1} \pm \frac{r Q_1}{h} + r q_1^{(k)} - \\ & - m_{kk} r^2 \Omega^2 \left[\frac{\partial \omega_2^{(k)}}{\partial \varphi} - (1 + e_2^{(k)}) \cos \theta \right] - m_{kr} r^2 \Omega^2 \left[\frac{\partial \omega_2^{(r)}}{\partial \varphi} - (1 + e_2^{(r)}) \cos \theta \right] = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

in Umfangsrichtung φ

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial s} (r S_1^{(k)}) + \frac{\partial}{\partial \varphi} T_2^{(k)} + S_2^{(k)} \cos \theta + \frac{r P_2^{(k)}}{R_2} \pm \frac{r Q_2}{h} + r q_2^{(k)} - \\ & - m_{kk} r^2 \Omega^2 \left[\frac{\partial e_2^{(k)}}{\partial \varphi} + \omega_2^{(k)} \cos \theta - \vartheta_2^{(k)} \sin \theta \right] - m_{kr} r^2 \Omega^2 \left[\frac{\partial e_2^{(r)}}{\partial \varphi} + \omega_2^{(r)} \cos \theta - \vartheta_2^{(r)} \sin \theta \right] = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

in Normalenrichtung

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial s}(r P_1) + \frac{\partial}{\partial \varphi} P_2 - r \left(\frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} - q_3 \right) + (m_{11} + m_{21}) r^2 \Omega^2 \left[\frac{\partial v_2^{(1)}}{\partial \varphi} + (1 + e_2^{(1)}) \sin \theta \right] + \\ & + (m_{12} + m_{22}) r^2 \Omega^2 \left[\frac{\partial v_2^{(2)}}{\partial \varphi} + (1 + e_2^{(2)}) \sin \theta \right] = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Die in runde Klammer gesetzten Indizes $k, l = 1, 2$ bezeichnen die steifen Membranschichten (Karkasse $k = 1$; Gürtel $k = 2$). Wenn in den Formeln (6) und (7) $k = 1$ ist, dann ist $l = 2$ zu setzen, und umgekehrt.

Die inneren Kräfte sind die in der Schalentheorie üblichen Spannungsergebnisse bezogen auf die Längeneinheit des Elementrandes: $T_1^{(k)}, T_2^{(k)}$ – meridionale und Umfangsnormalkräfte in den steifen Membranen; $S^{(k)}$ – Membranschubkräfte; Q_1, Q_2 – Querkräfte in der Gummizwischenschicht. Hieraus werden die auf die Referenzgeometrie bezogenen fiktiven Schubkräfte

$$S_1^{(k)} = S^{(k)} + T_1^{(k)} \omega_1^{(k)} \quad S_2^{(k)} = S^{(k)} + T_2^{(k)} \omega_2^{(k)}$$

sowie die auf die steifen Schichten reduzierten Querkräfte

$$P_1^{(k)} = 0,5 Q_1 - T_1^{(k)} v_1^{(k)} - S^{(k)} v_2^{(k)} \quad P_2^{(k)} = 0,5 Q_2 - T_2^{(k)} v_2^{(k)} - S^{(k)} v_1^{(k)}$$

gebildet. Weiter sind $T_1 = T_1^{(1)} + T_1^{(2)}, T_2 = T_2^{(1)} + T_2^{(2)}$ die Membrankräfte und $P_1 = P_1^{(1)} + P_1^{(2)}, P_2 = P_2^{(1)} + P_2^{(2)}$ die effektiven Querkräfte in der dreischichtigen Schale.

Mit $m_{kk}, m_{kj} (k, j = 1, 2)$ werden die auf die steifen Schichten reduzierten Massendichten des Schalenelementes bezeichnet, die sich aus folgender Überlegung ergeben. Die der Beschleunigung \mathbf{a} entsprechenden Trägheitskräfte sollen auf die steifen Membranschichten abgesetzt werden. Das geschieht durch eine Massenmatrix, die mit Hilfe des Verteilungsgesetzes der Geschwindigkeiten über die Schalendicke

$$\mathbf{v} = N_1(z) \mathbf{v}^{(1)} + N_2(z) \mathbf{v}^{(2)}$$

($N_1(z), N_2(z)$ – Formfunktionen; z – Normalkoordinate zur Schalenbezugsfläche) aus der auf die Einheit der Referenzfläche bezogenen kinetischen Energie

$$T = \frac{1}{2} \int_{(h)} \rho \mathbf{v}^2 dt = \frac{1}{2} \left[m_{11} (\mathbf{v}^{(1)})^2 + 2 m_{12} \mathbf{v}^{(1)} \cdot \mathbf{v}^{(2)} + m_{22} (\mathbf{v}^{(2)})^2 \right]$$

berechnet wird. Es ist also

$$m_{11} = \int_{(h)} \rho N_1^2 dz \quad m_{12} = m_{21} = \int_{(h)} \rho N_1 N_2 dz \quad m_{22} = \int_{(h)} \rho N_2^2 dz$$

ρ – Dichte des Materials an der Stelle z . Hiermit sind die auf die steifen Schichten bezogenen Trägheitslastvektoren

$$\mathbf{q}^{(1)} = -m_{11} \mathbf{a}^{(1)} - m_{12} \mathbf{a}^{(2)} \quad \mathbf{q}^{(2)} = -m_{21} \mathbf{a}^{(1)} - m_{22} \mathbf{a}^{(2)}$$

$\mathbf{a}^{(1)}, \mathbf{a}^{(2)}$ – Beschleunigungen in den steifen Schichten. Mit Rücksicht auf die Formel (4a) führt das auf die Trägheitsglieder in den Gln. (6) – (8).

Die Beziehungen zwischen den inneren Kräften und den Deformationen in der zyklisch beanspruchten Kordgummi-Schale werden üblicherweise als lineare Elastizitätsgesetze aufgebaut

$$\{T\}^{(k)} = [D]^{(k)} \{\varepsilon\}^{(k)} \quad \{Q\}^{(k)} = [D_\gamma] \{\gamma\} \quad (9)$$

mit

$$\begin{aligned} \{T\}^{(k)} &= (T_1^{(k)}, T_2^{(k)}, S^{(k)})^T & \{\varepsilon\}^{(k)} &= (\varepsilon_1^{(k)}, \varepsilon_2^{(k)}, \gamma_{12}^{(k)})^T \\ \{Q\} &= (Q_1, Q_2)^T & \{\gamma\} &= (\gamma_{13}, \gamma_{23})^T \end{aligned}$$

Die von Null verschiedenen Elemente der Elastizitätsmatrizen $[D]^{(k)}$, $[D_\gamma]$ sind nach Buchin (1988):

$$\begin{aligned} d_{11}^{(k)} &= C_k \cos^4 \psi_k + 4G h_k & d_{22}^{(k)} &= C_k \sin^4 \psi_k + 4G h_k \\ d_{12}^{(k)} &= d_{21}^{(k)} = C_k \sin^2 \psi_k \cos^2 \psi_k + 2G h_k & & \\ d_{33}^{(k)} &= C_k \sin^2 \psi_k \cos^2 \psi_k + G h_k & C_k &= E_k i_k n_k \\ d_{\gamma 11} &= d_{\gamma 22} = G h & & \end{aligned} \quad (10)$$

n_k – Anzahl der realen symmetrisch angeordneten Kord-Gummischichten, die in Gedanken zu einer steifen orthotropen, die Karkasse oder den Gürtel simulierenden Membranschicht, zusammengefaßt werden; E_k – Kordsteifigkeit; i_k , ψ_k – Kordfadendichte und Armierungswinkel (zwischen Kord- und Meridianrichtung); G – Schubmodul des Gummis.

Bei der Berechnung des rollenden Reifens ist die Energiedissipation im Reifenmaterial zu berücksichtigen. Wir nehmen als Hypothese die Gültigkeit der linearen Viskoelastizität sowohl für den Gummi als auch für den Kord an und können dann formal die physikalischen Gleichungen (9) beibehalten, wenn in den Beziehungen für die Elastizitätskoeffizienten (10) der Gummi-Schubmodul G und die Kordsteifigkeit E_k durch die entsprechenden Operatoren ersetzt werden (Moskvitin, 1981):

$$G(f) = G_0 \left[f(t) - \int_{-\infty}^t R(t-\tau) f(\tau) d\tau \right] \quad E_k(f) = E_{k0} \left[f(t) - \int_{-\infty}^t R_k(t-\tau) f(\tau) d\tau \right] \quad (11)$$

f steht für eine beliebige Komponente der Deformationsvektoren $\{\varepsilon\}^{(k)}$ und $\{\gamma\}$; $R(t-\tau)$ – Relaxationskern für den Schub im Gummi; $R_k(t-\tau)$ – Relaxationskern für den gezogenen Kord.

Bei stationärem Rollen sind die Deformationen periodische Zeitfunktionen mit der Periode $2\pi/\Omega$. Durch Darstellung der Deformationsfunktion f als Fourier-Reihe in der Form

$$f = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m e^{im\Omega t}$$

erhalten wir aus (11) für $G(f)$ und $E_k(f)$ die folgenden Fourier-Darstellungen

$$G(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} [G'(m\Omega) + iG''(m\Omega)] f_m e^{im\Omega t} \quad E_k(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} [E_k'(m\Omega) + iE_k''(m\Omega)] f_m e^{im\Omega t}$$

mit $G'(m\Omega) + iG''(m\Omega)$ als komplexem Schubmodul des Gummis und $E_k'(m\Omega) + iE_k''(m\Omega)$ als komplexe Kordsteifigkeit, die mit den entsprechenden Relaxationskernen durch Fourier-Integraltransformation zusammenhängen (Moskvitin, 1981).

Im weiteren setzen wir voraus, daß die komplexen Charakteristiken des Gummis und des Kords als Funktionen der Frequenz $m\Omega$ experimentell bestimmt wurden. Die zugehörigen Standardversuche findet man zum Beispiel bei Belkin (1998). Dann gelten, für jede Harmonische des zyklischen Prozesses einzeln, die Elastizitätsbeziehungen (9), (10), wenn dort die Elastizitätsmoduli G und E_k durch $G' + iG''$ und $E_k' + iE_k''$ ersetzt werden.

3 Lösungsmethode für das Kontaktproblem

Die Berechnung erfolgt in zwei Etappen. Als erstes wird der rotationssymmetrische Spannungszustand des Reifens unter der Wirkung des Innendruckes und der Zentrifugalkräfte berechnet. Das Problem wird geometrisch nichtlinear formuliert und mit Hilfe der schrittweisen Näherung nach Newton/Kantorovich (in jedem Schritt wird eine lineare Randwertaufgabe gelöst; vgl. auch Karmishin u. a. 1975) bearbeitet. In der zweiten Stufe wird die

Differentialgleichungen für die Abweichungen vom rotationssymmetrischen, vorgespannten Zustand der ersten Etappe linearisiert und mit Hilfe trigonometrischer Reihenansätze in Umfangsrichtung φ gelöst. Die dabei in der Meridianrichtung s entstehenden Randwertaufgaben werden nach der Methode der schrittweisen Orthogonalisierung von Godunov (1961) behandelt; siehe auch Grigorenko und Vasilenko (1992).

In dieser Arbeit werden die Kontaktbedingungen des Reifens mit einer starren Straßenoberfläche untersucht. Bei stationärem Rollen können diese Bedingungen sowohl in differentieller Form, d. h. durch die Geschwindigkeiten der Punkte des deformierten Reifens, als auch in integraler Form durch die Punktverschiebungen dargestellt werden. Wegen der einfacheren Darstellung wird hier nur der Fall ohne Ablösen des Reifens von der Stützfläche im Kontaktbereich betrachtet. Die Stützfläche wird als eben angenommen.

Für einen Protetorpunkt im Kontakt liegt der Geschwindigkeitsvektor v_{Pr} in der Stützebene, d. h. $v_{Pr} \cdot \mathbf{k} = 0$, wobei \mathbf{k} der Normaleneinheitsvektor der Stützfläche ist. Mit Rücksicht auf (3) ergibt sich

$$\left(\frac{\partial \rho_{Pr}}{\partial \varphi} - v_{Pr} \right) \cos \varphi - \left(\frac{\partial v_{Pr}}{\partial \varphi} + \rho_{Pr} + r_{Pr} \right) \sin \varphi = 0$$

der Index "Pr" verweist auf einen Punkt der Protetoroberfläche. Die Integration dieser Gleichung ergibt eine Kontaktbedingung formuliert in den Verschiebungen:

$$\rho_{Pr} \cos \varphi - v_{Pr} \sin \varphi + r_{Pr} \cos \varphi = R_{dyn} \quad (12)$$

Wir betrachten den Fall des freien Rollens. Dabei ist $Q_x = 0$ und die im Gleichgewicht stehenden Schubspannungen werden hier nicht berücksichtigt. Die einzige zu bestimmende Kontaktkraftkomponente ist also der Normaldruck $q(s, \varphi) \mathbf{k}$. Durch Projektion dieses Vektors auf die lokalen Achsen der Schalenfläche $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{n}$ erhalten wir die in die Bewegungsgleichungen eingehenden Belastungen

$$q_1 = -q(s, \varphi) \cos \theta \cos \varphi \quad q_2 = q(s, \varphi) \sin \varphi \quad q_3 = -q(s, \varphi) \sin \theta \cos \varphi \quad (13)$$

Zur näherungsweisen Bestimmung des Kontaktdruckes $q(s, \varphi)$ nutzen wir die Methode der Einflußfunktionen. Der Laufteil des Protetors wird durch Parallelkreise in eine Anzahl n schmaler Streifen aufgeteilt und es wird angenommen, daß sich der Kontaktdruck über die Streifenbreite nicht ändert. In der Umfangsrichtung φ (d. h. in Rollrichtung) kann sich der Kontaktdruck ändern. Im Unterschied zum unbeweglichen Reifen ist beim rollenden Reifen der Kontaktdruck unsymmetrisch in Bezug auf die Vertikalebene durch die Radachse (d. h. in Bezug auf das Kontaktzentrum). Der Druck $q_i(\varphi)$ im i -ten Streifen (Bild 3b) kann angenommen werden als

$$q_i(\varphi) = \begin{cases} p_{1i} \Phi_1(\varphi, \alpha_i) + p_{2i} \Phi_2(\varphi, \alpha_i) & \text{wenn } |\varphi| \leq \alpha_i \\ 0 & \text{wenn } |\varphi| > \alpha_i \end{cases} \quad (14)$$

α_i – halber Kontaktwinkel im i -ten Streifen; $\Phi_1(\varphi, \alpha_i), \Phi_2(\varphi, \alpha_i)$ – vorgegebene Funktionen der Umfangskoordinate φ , durch welche der in Bezug auf $\varphi = 0$ symmetrische und antisymmetrische Teil der Kontaktdruckverteilung angenähert werden; p_{1i}, p_{2i} – unbestimmte Koeffizienten.

Die Funktion des Kontaktdruckes $q_i(\varphi)$ enthält also 3 unbekannte Parameter p_{1i}, p_{2i}, α_i , die so bestimmt werden, daß die Kontaktbedingung (12) in drei ausgewählten Kollokationspunkten auf dem i -ten Streifen erfüllt ist. Zur Durchführung der Berechnung wird die Funktion des Kontaktdruckes (14) in eine Fourierreihe zerlegt

$$q_i(\varphi) = p_{1i} \sum_{m=0}^{\infty} g_m^{sym}(\alpha_i) \cos m\varphi + p_{2i} \sum_{m=1}^{\infty} g_m^{asym}(\alpha_i) \sin m\varphi \quad (15)$$

Die Reihenkoeffizienten $g_m^{sym}(\alpha_i), g_m^{asym}(\alpha_i)$ sind bekannte Funktionen des gesuchten Kontaktwinkels α_i . Der symmetrische „Einheits“druck $q_i(\varphi) = 1 \cdot \cos m\varphi$ ruft in der Schale das Verschiebungsfeld

$$\begin{aligned}
\rho &= \rho_{im}(s)\cos m\varphi + \rho_{im}^*(s)\sin m\varphi \\
\xi &= \xi_{im}(s)\cos m\varphi + \xi_{im}^*(s)\sin m\varphi \\
v &= v_{im}(s)\sin m\varphi - v_{im}^*(s)\cos m\varphi
\end{aligned} \tag{16}$$

hervor. Ebenso entstehen infolge des antisymmetrischen „Einheits“drucks $q_i(\varphi) = 1 \cdot \sin m\varphi$ die Verschiebungen

$$\begin{aligned}
\rho &= \rho_{im}(s)\sin m\varphi - \rho_{im}^*(s)\cos m\varphi \\
\xi &= \xi_{im}(s)\sin m\varphi - \xi_{im}^*(s)\cos m\varphi \\
v &= -v_{im}(s)\cos m\varphi - v_{im}^*(s)\sin m\varphi
\end{aligned} \tag{17}$$

In (16) und (17) sind die ersten Glieder die Verschiebungskomponenten, die sich „in Phase“ mit der äußeren Last ändern; die zweiten mit * bezeichneten Glieder bleiben gegenüber der Belastung um die Phasenverschiebung $\pi/2$ zurück. Die zweiten Glieder sind durch die Viskoelastizität der Schalenmaterialien bedingt.

Die Koeffizienten $\rho_{im}(s), \rho_{im}^*(s), \xi_{im}(s), \xi_{im}^*(s), v_{im}(s), v_{im}^*(s)$, welche die Bedeutung von Einflußfunktionen haben, wurden durch die Berechnung des Reifens als dreischichtige viskoelastische Schale auf der Grundlage (6) – (9) bestimmt. Um die sprungartige Umbildung des für den Laufteil und den Umschlag der Karkasse zutreffenden dreischichtigen Modells in eine Membran im Seitenwandbereich numerisch zu verarbeiten, wird im Bereich der Seitenwand in das Berechnungsmodell eine fiktive äußere Tragschicht sehr geringer Steifigkeit eingeführt (vgl. Bild 4).

Wenn die Einflußfunktionen gefunden sind, dann ergeben sich mit (16) und (17) die Verschiebungen durch Superposition der Schalenverschiebungen aus allen im Kontaktgebiet auf die Streifen wirkenden Drücken $q_i(\varphi)$. Mit Rücksicht auf (15) erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\rho &= \sum_{i=1}^n p_{1i} \sum_{m=0}^{\infty} g_m^{sym}(\alpha_i) [\rho_{im}(s)\cos m\varphi + \rho_{im}^*(s)\sin m\varphi] + \\
&\quad + \sum_{i=1}^n p_{2i} \sum_{m=1}^{\infty} g_m^{asym}(\alpha_i) [\rho_{im}(s)\sin m\varphi - \rho_{im}^*(s)\cos m\varphi] \\
\xi &= \sum_{i=1}^n p_{1i} \sum_{m=0}^{\infty} g_m^{sym}(\alpha_i) [\xi_{im}(s)\cos m\varphi + \xi_{im}^*(s)\sin m\varphi] + \\
&\quad + \sum_{i=1}^n p_{2i} \sum_{m=1}^{\infty} g_m^{asym}(\alpha_i) [\xi_{im}(s)\sin m\varphi - \xi_{im}^*(s)\cos m\varphi] \\
v &= \sum_{i=1}^n p_{1i} \sum_{m=0}^{\infty} g_m^{sym}(\alpha_i) [v_{im}(s)\sin m\varphi - v_{im}^*(s)\cos m\varphi] + \\
&\quad + \sum_{i=1}^n p_{2i} \sum_{m=1}^{\infty} g_m^{asym}(\alpha_i) [-v_{im}(s)\cos m\varphi - v_{im}^*(s)\sin m\varphi]
\end{aligned} \tag{18}$$

Entsprechend dem verwendeten Berechnungsschema des Reifens werden die Verschiebungen der Oberflächenpunkte des Protectors aus den Verschiebungen des Gürtels unter Hinzufügung der Zusammendrückung des Protectors als viskoelastische Winkler-Bettung bestimmt. Für die Punkte des i -ten Kontaktstreifens gilt

$$\Delta_{Pr} = \frac{H_{Pr}}{\beta_1\beta_2} \left[p_{1i} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{g_m^{sym}(\alpha_i)}{E_{Pr}} \cos(m\varphi - \psi) + p_{2i} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{g_m^{asym}(\alpha_i)}{E_{Pr}} \sin(m\varphi - \psi) \right] \tag{19}$$

E_{Pr} – dynamischer Modul des Protectorsgummis (bei Kompression); ψ – Phasenverschiebung zwischen Spannung und Deformation; H_{Pr} – Dicke der Protectorschicht; β_1 – Sättigungskoeffizient der Lauffläche; β_2 – Abminderungskoeffizient der Stollenkompression infolge Behinderung der seitlichen Deformation durch Reibung.

Durch Einsetzen der aus (18) und (19) bestimmten Verschiebungen des Protectors $\rho_{Pr}, v_{Pr}, r_{Pr}$ in die Kontaktbedingung (12) erhalten wir die Gleichung

$$F(s, \varphi; p_{11}, p_{21}, \alpha_1, \dots, p_{1i}, p_{2i}, \alpha_i, \dots, p_{1n}, p_{2n}, \alpha_n; R_{\text{dyn}}) = 0 \quad (20)$$

Wegen des Näherungscharakters der angenommenen Kontaktdruckverteilung (14) kann die Gleichung (20) nicht in jedem Punkt des Kontaktgebietes erfüllt sein. Die Funktion F hängt ab von den $3n$ Parametern des Kontaktdrucks p_{1i}, p_{2i}, α_i ($i = 1, 2, \dots, n$) sowie vom Wert des dynamischen Reifenradius R_{dyn} . Zur Berechnung dieser Parameter fordern wir, daß die Bedingung (20) in drei Kollokationspunkten auf jedem Kontaktstreifen erfüllt ist:

$$\begin{aligned} F(s_j, \varphi_{j1}; p_{11}, p_{21}, \alpha_1, \dots, p_{1i}, p_{2i}, \alpha_i, \dots, p_{1n}, p_{2n}, \alpha_n; R_{\text{dyn}}) &= 0 \\ F(s_j, \varphi_{j2}; p_{11}, p_{21}, \alpha_1, \dots, p_{1i}, p_{2i}, \alpha_i, \dots, p_{1n}, p_{2n}, \alpha_n; R_{\text{dyn}}) &= 0 \\ F(s_j, \varphi_{j3}; p_{11}, p_{21}, \alpha_1, \dots, p_{1i}, p_{2i}, \alpha_i, \dots, p_{1n}, p_{2n}, \alpha_n; R_{\text{dyn}}) &= 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (21)$$

$(s_j, \varphi_{j1}), (s_j, \varphi_{j2}), (s_j, \varphi_{j3})$ – Koordinaten der Kollokationspunkte auf dem j -ten Streifen.

Zu den $3n$ Gleichungen des Punktkontaktes kommt noch die Gleichgewichtsgleichung für den Reifen als Ganzes hinzu:

$$Q_z = \sum_{i=1}^n \int_{-\alpha_i}^{\alpha_i} q_i(\varphi) (r_{\text{Pr}})_i (\Delta s_{\text{Pr}})_i d\varphi = \sum_{i=1}^n p_{1i} (r_{\text{Pr}})_i (\Delta s_{\text{Pr}})_i \int_{-\alpha_i}^{\alpha_i} \Phi_1(\varphi, \alpha_i) d\varphi \quad (22)$$

$(\Delta s_{\text{Pr}})_i$ – Breite des i -ten Kontaktstreifens; $(r_{\text{Pr}})_i$ – Radius des Parallelkreises in der Mitte des i -ten Kontaktstreifens. Das Gleichungssystem (21), (22) wird bezüglich der Kontaktparameter p_{1j}, p_{2j}, α_j ($j = 1, 2, \dots, n$) und des dynamischen Radius R_{dyn} gelöst.

Weiter ergibt sich für das Rollwiderstandsmoment

$$M_r = Q_z \cdot d = \sum_{i=1}^n \int_{-\alpha_i}^{\alpha_i} q_i(\varphi) \sin \varphi (r_{\text{Pr}})_i^2 (\Delta s_{\text{Pr}})_i d\varphi$$

Mit dem Kontaktdruck aus (14) und der Fourier-Darstellung (15) ergibt sich hieraus durch Integration:

$$M_r = \sum_{i=1}^n p_{2i} \pi g_1^{\text{asym}}(\alpha_i) (r_{\text{Pr}})_i^2 (\Delta s_{\text{Pr}})_i \quad (23)$$

$g_1^{\text{asym}}(\alpha_i)$ – Koeffizient bei der ersten Harmonischen der Fourierreihe für den antisymmetrischen Teil der Druckverteilung $\Phi_2(\varphi, \alpha_i)$.

Aus dem Rollwiderstandsmoment M_r werden die Versetzung d der Vertikalreaktion, die Rollwiderstandskraft F_r und der Rollwiderstandskoeffizient f_r berechnet:

$$d = M_r / Q_z \quad F_r = M_r / R_{\text{eff}} \quad f_r = F_r / Q_z$$

$R_{\text{eff}} = L_i / 2\alpha_i$ – Rollradius (L_i – Kontaktlänge im i -ten Streifen).

In den konkreten Berechnungen wurden als erste Annäherungen des symmetrischen und des antisymmetrischen Anteils der Kontaktdruckverteilung folgende Ansatzfunktionen benutzt:

$$\Phi_1(\varphi, \alpha) = \begin{cases} 1 & \text{bei } |\varphi| \leq \alpha \\ 0 & \text{bei } |\varphi| > \alpha \end{cases} \quad \Phi_2(\varphi, \alpha) = \begin{cases} \varphi/\alpha & \text{bei } |\varphi| \leq \alpha \\ 0 & \text{bei } |\varphi| > \alpha \end{cases} \quad (24)$$

d. h. der Druck wurde über die Streifenlänge als linear verteilt angenommen. Diese Annahme stimmt mit den realen Verhältnissen im „Latsch“ des rollenden Reifens überein, die sich bei einem linear viskoelastischen Kompressionsgesetz für die Beschreibung der Gummihysterese kombiniert mit dem Reifen als Spannband ohne Biegesteifigkeit auf radial elastischer Bettung ergeben (Böhm, 1966/67, Seite 23-24).

4 Ergebnisse der Berechnungen des dynamischen Reifenkontaktes

Als Beispiel betrachten wir die Kontaktberechnung für den PKW-Reifen 165/80R14. In Bild 6 sind Form und Abmessungen der Kontaktfläche sowie die Verteilung des Kontaktdrucks über die Breite der Lauffläche sowohl für den stehenden als auch für den mit $V = 150 \text{ km/h}$ rollenden Reifen angegeben. In beiden Fällen beträgt die Vertikallast auf den Reifen $Q_z = 4,85 \text{ kN}$. Für die Berechnung wurde die Lauffläche in 20 schmale Streifen unterteilt, d. h. die Kontaktbedingung wird in 60 Punkten erfüllt.

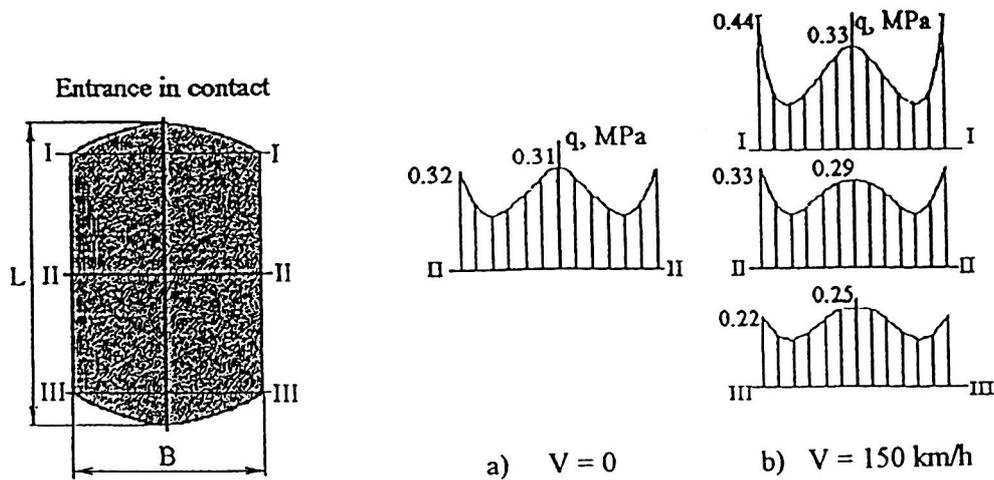


Bild 6. Kontaktfläche und Kontaktdruckverteilung über die Breite der Lauffläche beim freien Rollen: (a) stehender Reifen; (b) rollender Reifen (Reifen 165/80R14)

Die Kontaktflächen für den stehenden und den rollenden Reifen ergaben sich praktisch gleich zu $209,8 \text{ cm}^2$ ($B = 120 \text{ mm}$, $L = 191 \text{ mm}$). Beim stehenden Reifen wurde der Kontaktdruck als in Umfangsrichtung konstant angenommen. Beim Rollen dagegen übersteigt der Kontaktdruck am Einlauf wesentlich die Werte am Auslauf. Die sich aufgrund des linearen Ansatzes (14), (24) ergebenden Spitzen in der Kontaktdruckverteilung beim Ein- und Austritt (Bild 6b) sind Idealisierungen, die bei realer nichtlinearer Verteilung des Druckes über die Kontaktlänge abgebaut werden.

Die Kontaktdruckverteilung über die Breite der Lauffläche hat drei Maxima, im Zentrum und an den seitlichen Rändern, was für PKW-Reifen mit ihrem geringen Innendruck und demzufolge auch ihrer geringen Seitenwandsteifigkeit charakteristisch ist. Diese Art Kontaktdruckverteilung hat offensichtlich zwei Ursachen. Bekanntlich steigt bei Schalen mit endlicher Schubsteifigkeit der Kontaktdruck an den Rändern der Kontaktfläche. Wegen der äußeren Winkler-Bettungsschicht muß umgekehrt der Druck am Rande abfallen. Beide Tendenzen überlagern sich hier. Bei LKW-Reifen dagegen überwiegt der Membranspannungszustand und der Kontaktdruck fällt zum Rand hin ab.

Bei dem betrachteten Fahrregime sind die Versetzung der vertikalen Spannungsergebnisse in der Kontaktfläche $d = 2,45 \text{ mm}$, das Rollwiderstandsmoment $M_r = 11,9 \text{ Nm}$ und der Rollwiderstandskoeffizient $f_r = 0,0085$.

Die angegebene Methode ermöglicht es, den Einfluß der Rollgeschwindigkeit auf den Deformationszustand des Reifens zu untersuchen. Am deutlichsten macht sich der Geschwindigkeitseinfluß auf die Deformation der Karkasse bemerkbar. In den Bildern 7 sind Isolinienfelder der Durchbiegungen w der Karkasse bei verschiedenen Geschwindigkeiten des freien Rollens gezeigt. Die Meridiankoordinate s zählt von der Radfelge bis zum Reifenäquator, die Winkelkoordinate φ – vom Kontaktzentrum in Rollrichtung. Somit entsprechen die rechte untere und die rechte obere Ecke im Koordinatenfeld dem geometrischen Zentrum der Kontaktfläche.

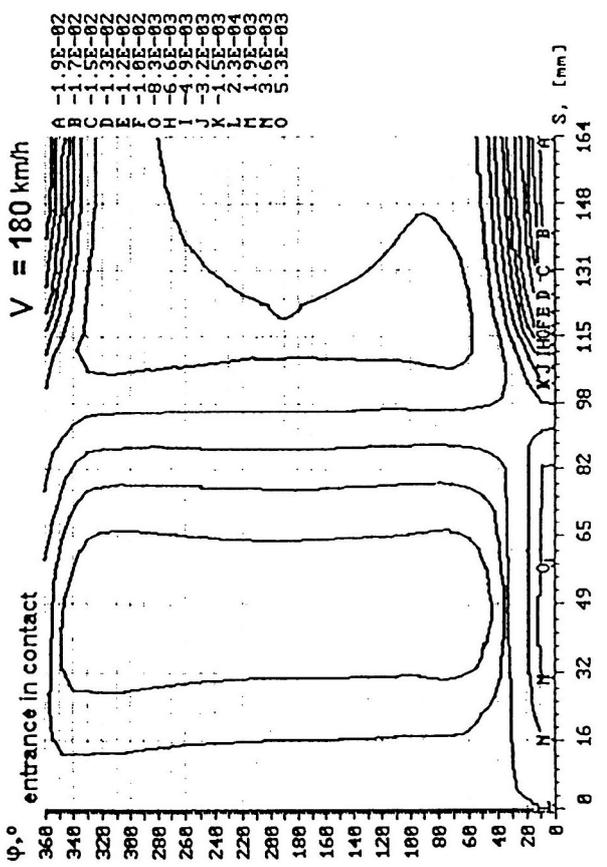
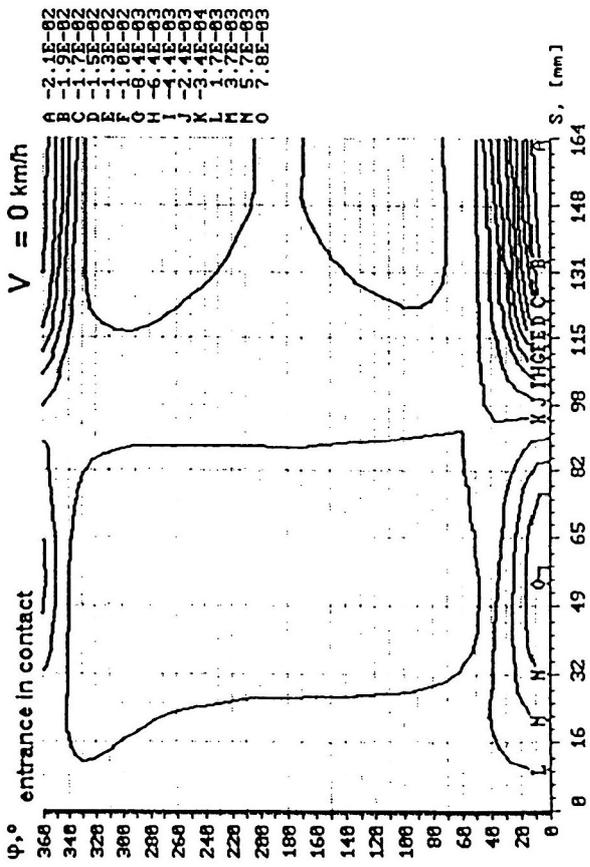
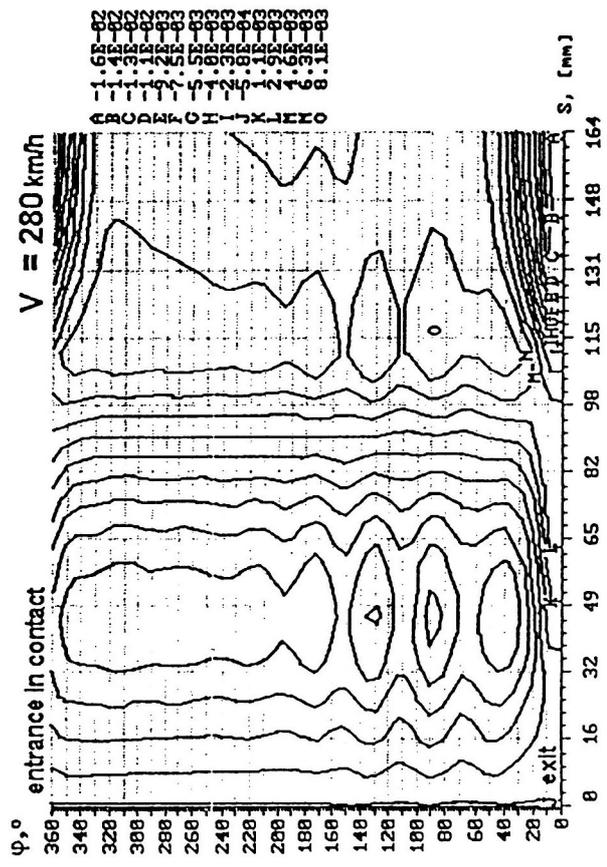
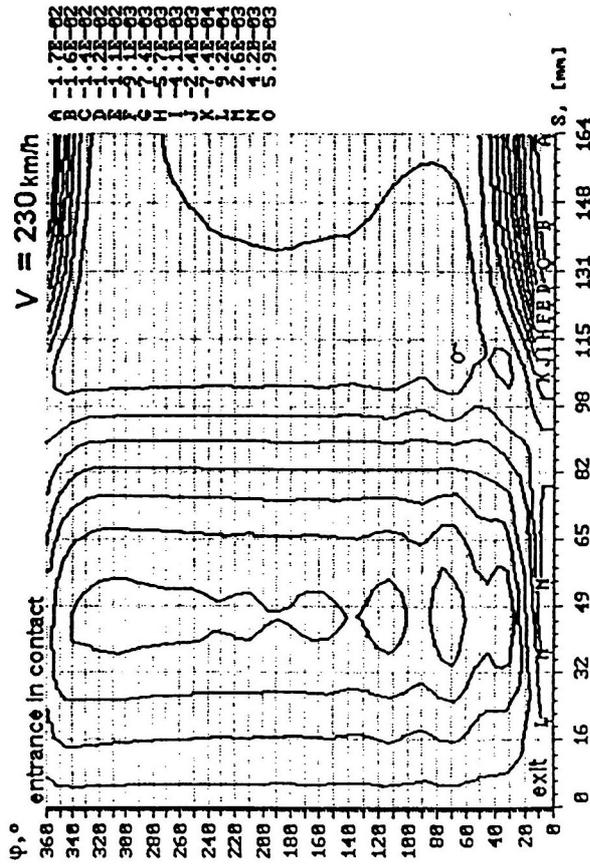


Bild 7. Niveaulinien der Karkasse-Normalverschiebungen bei verschiedenen Rollgeschwindigkeiten (Reifen 165/70R13)

Aus den Bildern 7 erkennt man, daß bei $V = 230 \text{ km/h}$ in der Seitenwand des Reifens nach dem Kontaktauslauf eine im Raum stehende, aber im Reifenmaterial umlaufende, Welle entsteht. Das Profil dieser Welle ist im Bild 8 für die Geschwindigkeiten $V = 230 \text{ km/h}$ und $V = 280 \text{ km/h}$ gezeigt. Die Wellenamplituden von der Größenordnung $1,2 \dots 1,3 \text{ mm}$ sind zwar unbedeutend im Vergleich zu den Durchbiegungen der Karkasse, aber allein die Tatsache ihres Erscheinens ist ein Zeichen für die Überschreitung der kritischen Geschwindigkeit, bei der die Verformungen vom Kontakt weg zunächst monoton und dann oszillierend abklingen. Wegen der geringen Gürtelvorspannung am seitlichen Rand ist dort die Amplitude besonders deutlich.

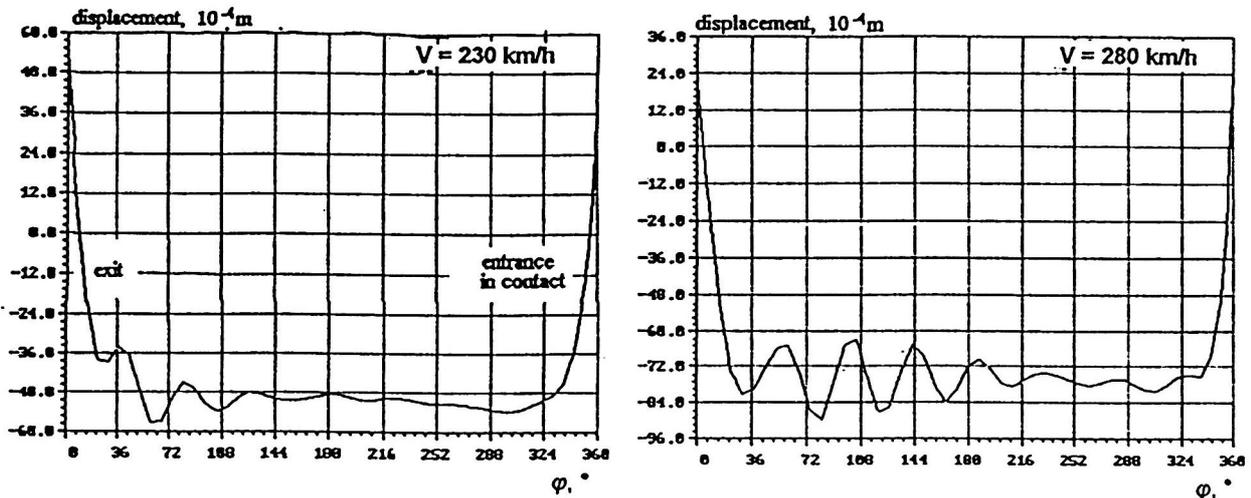


Bild 8. Wellenprofile in der Seitenwand bei verschiedenen Rollgeschwindigkeiten (Reifen 165/70R13)

Das vorgeschlagene Modell gestattet die Untersuchung des Einflusses einiger konstruktiver und Betriebsparameter auf den Rollwiderstand. Messungen am Reifen zeigen, daß die Gürtelbreite wesentlichen Einfluß auf den Rollwiderstand hat (Buchin, 1993). Die gleiche Abhängigkeit ergab sich durch Anwendung des vorgeschlagenen Modells.

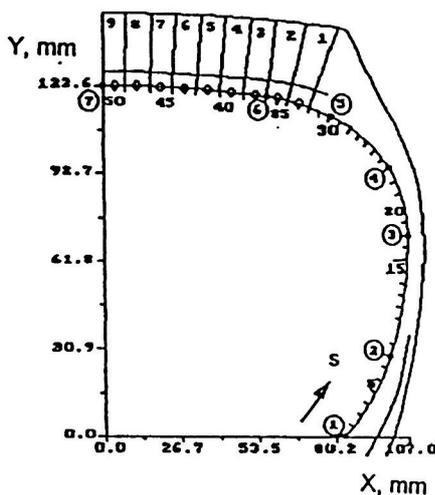


Bild 9. Rechnerisches Profil des Reifens MI-225 (Gleichgewichtslage unter Innendruck)

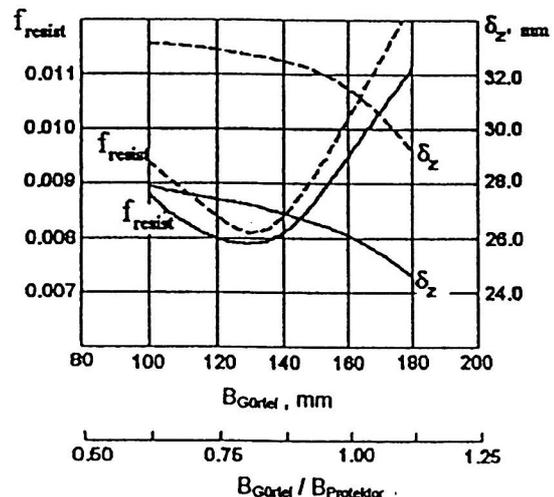


Bild 10. Abhängigkeit des Rollwiderstandskoeffizienten f_r und der Reifeneindrückung δ_z von der relativen Gürtelbreite $B_{\text{Gürtel}} / B_{\text{Protect}}$ beim Reifen MI-225
 — bei Innendruck $p = 0,67 \text{ MPa}$;
 - - - bei $p = 0,47 \text{ MPa}$

Als Beispiel betrachten wir im Bild 9 den Reifen MI-225 mit den eingezeichneten Kontaktstreifen 1 bis 9. Im Bild 10 ist für $Q_z = 14,2 \text{ kN}$ und zwei verschiedene Innendrucke der Rollwiderstandskoeffizient f_r als Funktion der Gürtelbreite angegeben. Wie man sieht, ist diese Abhängigkeit nicht monoton, sondern sie hat für eine bestimmte Gürtelbreite ein Minimum. Diese Art der Abhängigkeit wird so erklärt: je breiter der Gürtel, desto wichtiger ist die Rolle der Schubdeformation γ_{13} in der Gummizwischenschicht zwischen Gürtel und Karkasse.

Diesen Sachverhalt erkennt man aus Bild 11 durch Vergleich der γ_{13} -Kurven bezogen auf die Randzonen des Gürtels für verschiedene Gürtelbreiten. Wegen der Schubamplituden, die für die Energiedissipation verantwortlich sind, werden die Energieverluste in einem Reifen mit breiterem Gürtel (und größeren Schubdeformationen γ_{13}) erheblich höher und der Rollwiderstand ist demzufolge ebenfalls höher. Allerdings ist der breitere Gürtel flacher und besitzt eine höhere Vorspannung am Rand, wodurch die Amplituden der Seitenwandwellen deutlich kleiner werden.

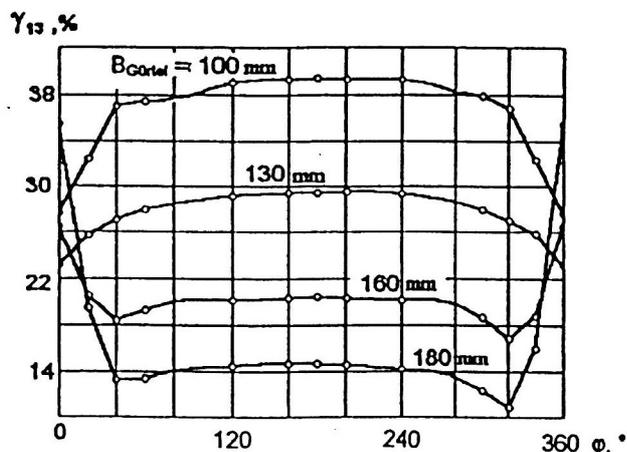


Bild 11. Änderungszyklen der Schubdeformation γ_{13} in der Gummi-Zwischenschicht an den Gürtelrändern für verschiedene Gürtelbreiten ($p = 0,67 \text{ MPa}$; $Q_z = 14,2 \text{ kN}$; $V = 100 \text{ km/h}$)

Die hohen Verluste in Reifen mit schmalem Gürtel bei überkritischen Rollgeschwindigkeiten dagegen erklären sich aus dem Anwachsen der Eindrückungsenergie wegen der geringen Radial-Steifigkeit des Reifens. Beim Rollen „zirkuliert“ die Energieproduktion im Material, was zum Ansteigen der Verluste führt.

Ebenso wichtig ist der Einfluß des Kordwinkels ψ im Gürtel auf den Rollwiderstand (Bild 12). Auch hier gibt es wieder einen optimalen Wert für den Konstruktionsparameter, bei dem der Rollwiderstandskoeffizient minimal wird. In den betrachteten Beispielen sind aber nicht die konkreten Werte der zu minimierenden Parameter wichtig (sie hängen im starken Maße von den Hysteresiseigenschaften des Reifenmaterials ab) sondern die Tendenzen. Um näherungsweise identische Rollbedingungen bei unterschiedlichen Werten des Reifeninnendrucks zu gewährleisten, wurde die Vertikallast Q_z jeweils so angenommen, daß der Wert Q_z / p konstant blieb.

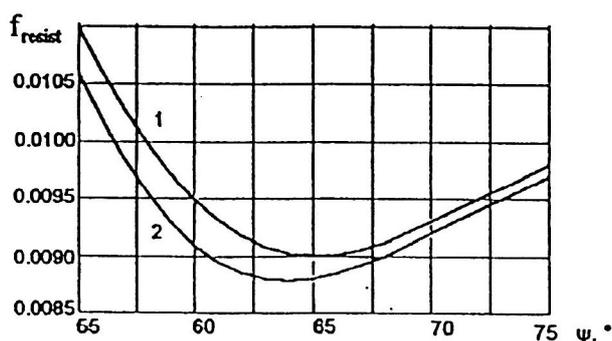


Bild 12. Einfluß des Kordwinkels ψ im Gürtel auf den Rollwiderstandskoeffizienten f_r (Reifen MI-225) für $V = 100 \text{ km/h}$ und
 1 - $p = 0,67 \text{ MPa}$; $Q_z = 14,2 \text{ kN}$; $Q_z / p = 212 \text{ cm}^2$,
 2 - $p = 0,47 \text{ MPa}$; $Q_z = 9,97 \text{ kN}$; $Q_z / p = 212 \text{ cm}^2$

Änderungen der Gürtelbreite und des Kordwinkels im Gürtel haben Einfluß auf alle Steifigkeitskenngrößen des Reifens. Es ist daher schwierig durch konstruktive Veränderungen den Rollwiderstand zu vermindern, ohne daß sich andere Betriebscharakteristiken des Reifens verschlechtern, z. B. seine Armortisations- und Glättungsfähigkeit, seine Haftigenschaften u. a.

Wenn während des Konstruktionsprozesses eines Reifen-Prototyps die Geometrie und die Steifigkeiten der Karkasse und des Gürtels unverändert bleiben, dann bleibt in der Entscheidung des Konstrukteurs nur noch die Gestaltung der Lauffläche. Am Beispiel des Reifens MI-225 wurde untersucht, wie der Krümmungsradius der Lauffläche den Kontaktdruck q und den Rollwiderstandskoeffizient f_r beeinflusst. In nachstehender Tabelle sind die Berechnungsergebnisse für sechs Konstruktionsvarianten zusammengestellt, die sich nur durch den Wert des Laufflächenradius unterscheiden:

Variante	Krümmungsradius mm	Druck im Kontakteinlauf (N / mm ²)									$\Delta q^*)$, %	$f_r \cdot 10^2$
		Nummer des Kontaktstreifens (vgl. Bild 9)										
		1	2	3	4	5	6	7	8	9		
1	500	0,72	0,48	0,42	0,43	0,48	0,53	0,58	0,61	0,63	54,9	0,98
2	600	0,79	0,51	0,43	0,43	0,47	0,52	0,56	0,59	0,61	65,8	0,97
3	680 ^{**)}	0,83	0,53	0,44	0,43	0,47	0,51	0,55	0,57	0,59	72,0	0,96
4	750	0,86	0,54	0,44	0,43	0,46	0,50	0,53	0,56	0,57	77,3	0,96
5	850	0,90	0,55	0,45	0,43	0,45	0,49	0,52	0,55	0,56	83,6	0,96
6	1000	0,94	0,57	0,45	0,43	0,45	0,48	0,51	0,53	0,54	90,7	0,96

*) $\Delta q = \frac{q_{max} - q_{min}}{q_{mittel}} \cdot 100$ % - Ungleichförmigkeitskoeffizient der Kontaktdruckverteilung

***) beim realen Reifen MI-225

Aus den Tabellenwerten folgt, daß die Krümmung der Protektoroberfläche das Kontaktdruckprofil stark beeinflusst. Mit abnehmender Krümmung (in den betrachteten Grenzen) steigt der Ungleichförmigkeitsindex Δq scharf an. Die Größe der Kontaktfläche und der mittlere Kontaktdruck bleiben dabei fast gleich. Ebenso wenig ändert sich der Rollwiderstandskoeffizient f_r . Das alles gilt exakt natürlich nur unter der Bedingung konstanter Protektordicke.

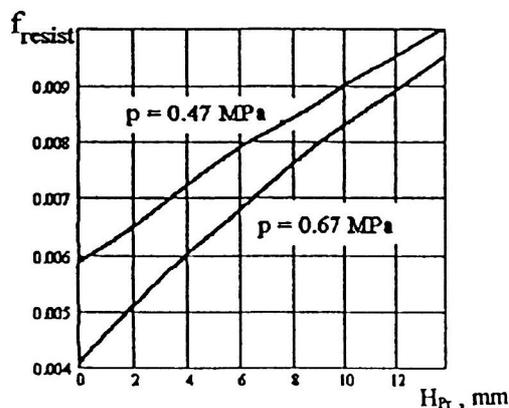


Bild 13. Abhängigkeit des Rollwiderstandskoeffizienten von der Dicke des Protectors (Reifen MI-225)

Messungen an neuen Reifen und an Reifen mit abgetragenen Protektor (Knoroz u. a., 1976) zeigten, daß bis zu 50 % des Verlustes an mechanischer Reifenenergie auf den Protektor entfallen können. Das verweist auf die starke Abhängigkeit der Energieverluste und damit auch des Rollwiderstandes von der Protektordicke. Aus dem durch numerische Analyse erhaltenen Bild 13 kann indirekt der Protektoranteil der Energieverluste dadurch bestimmt werden, daß man den Rollwiderstandskoeffizient f_r für einen neuen Reifen mit dem des vollständig verschlissenen Reifens vergleicht. Es handelt sich hier um eine indirekte Bewertung, weil mit der Veränderung der Protektordicke auch eine Umverteilung des Kontaktdrucks einhergeht und damit auch eine Umverteilung der Energieverluste im Reifenmaterial.

Dieser früher bereits mit der FEM untersuchte Vorgang ist im Bild 14 gezeigt. Mit Verminderung der Protektordicke (und damit der Nachgiebigkeit in vertikaler Richtung) wird auch hier wieder eine starke Zunahme

des Kontaktdrucks an den Rändern beobachtet. Dies ist in Übereinstimmung mit bekannten Ergebnissen aus der Kontakttheorie der Schalen (Popov, 1975; Grigolyuk und Tolkachev, 1987).

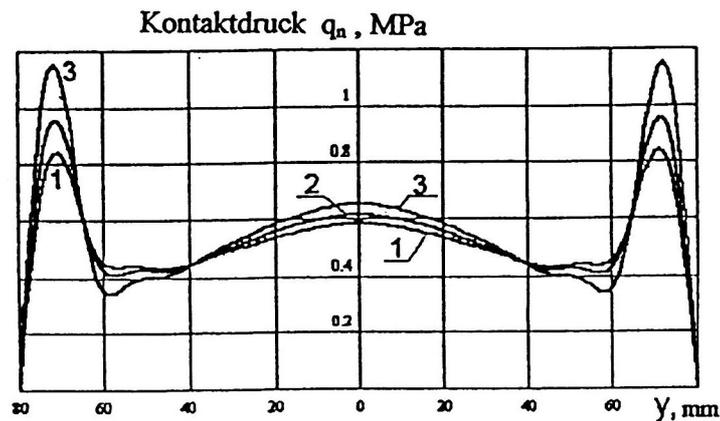


Bild 14. Kontaktdruckverteilung bei verschiedenen Werten der Protektordicke für $p = 0,47$ MPa, $Q_z = 14,2$ kN und
1 – $H_{Pr} = 12$ mm ; 2 – $H_{Pr} = 8$ mm ; 3 – $H_{Pr} = 4$ mm

Der Rollwiderstand hängt wesentlich von der Fahrgeschwindigkeit V ab. Für die adäquate Modellierung dieses Einflusses muß man eigentlich über Daten der Abhängigkeit der Verlustmoduli des Reifenmaterials von dessen Deformationsgeschwindigkeit verfügen. Die Empfindlichkeit des Modells gegenüber der Fahrgeschwindigkeit kann aber auch über die frequenzunabhängigen Verlustcharakteristiken hergestellt werden. In Bild 15 ist die so berechnete Geschwindigkeitsabhängigkeit des Rollwiderstandskoeffizienten für die Reifen 175/70R13 und MI-225 dargestellt. Im Bereich mäßiger Geschwindigkeiten ändert sich der Rollwiderstand nur wenig, erst ab $V = 150$ km/h (Reifen 175/70R13) oder $V = 200$ km/h (Reifen MI-225) nehmen die Verluste stark zu, was durch das Auftreten von Schwingungen im Gürtelrand und in der Seitenwand des Reifens zu erklären ist.

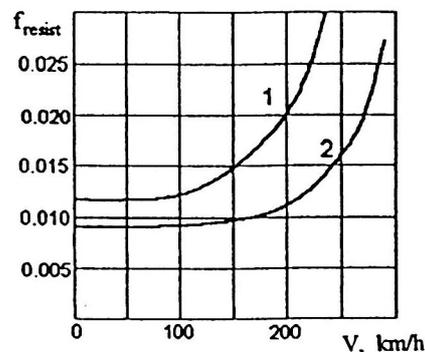


Bild 15. Rollwiderstandskoeffizient f_r in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit
1 – für Reifen 175/70R13 ($p = 0,2$ MPa, $Q_z = 4,0$ kN)
2 – für Reifen MI-225 ($p = 0,47$ MPa, $Q_z = 10,0$ kN)

Durch Vergleich der Kurven $f_r(V)$ in Bild 15 für die beiden untersuchten Reifen erkennt man, daß für den PKW-Reifen 175/70R13 bei mäßigem Innendruck der Beginn des starken Anstiegs der Rollverluste im Bereich der realen Geschwindigkeiten liegt. Das bedeutet, daß für Hochgeschwindigkeitsreifen z. B. der Kategorie Z mit 240 km/h Höchstgeschwindigkeit das Problem der Absenkung der geschwindigkeitsabhängigen Verlustanteile sehr aktuell ist.

Die untersuchten Beispiele zeigen die Möglichkeiten des vorgeschlagenen dreischichtigen Reifenschalenmodells und der Analysemethode des Einflusses von Konstruktions- und Nutzungsparametern auf das Deformations- und Kontaktverhalten des Reifens. Das ist besonders wichtig für die Prognostizierung der Ausgangscharakteristiken beim stationären Rollen. Die Berechnungsmethode ist im Programmkomplex CASCADE realisiert, über welchen ausführlich in der Arbeit Belkin u. a. (1993) informiert wurde.

5 Schlußfolgerungen

Für die Berechnung der Deformationen und der Ausgangscharakteristiken des Radialreifens bei stationärem Rollen wurde das mathematische Modell einer viskoelastischen dreischichtigen Schale verwendet. Die Lösung des Kontaktproblems erfolgte nach der Methode der Einflußfunktionen. Trotz starker Vereinfachungen der realen Verhältnisse gelingt es, zu qualitativ richtigen Aussagen über das Deformations- und Kontaktverhalten sowie über die Abhängigkeit der wichtigsten Betriebsparameter von der Reifenkonstruktion und der Fahrgeschwindigkeit zu kommen. Ein Optimum der Gürtelbreite und damit der Schulterbeanspruchung des Gürtels wurde gefunden. Die durch das dreischichtige Schalenmodell mögliche Berücksichtigung der Schubdeformationen ist für die Beurteilung der Festigkeit des Reifens von entscheidender Bedeutung. Eine detaillierte statische FEM-Berechnung findet sich bei Feng (1995).

Der Artikel enthält die Grundideen für das Vorgehen bei angewandten Untersuchungen des stationären Reifen-Boden-Kontaktes auch mit entsprechend verbesserten Modellen: z. B. für die geplante Berechnung als 5-schichtige Schale mit Membrantragschichten (zur Berücksichtigung der Eigenbiegesteifigkeit und der allgemeinen Anisotropie des Gürtels sowie der Asymmetrie in der Kontaktdruckverteilung) oder für die Verwendung verbesserter nichtlinearer Ansatzfunktionen für die Kontaktdruckverteilung im nachgiebigen Boden. Eine weitere denkbare Verbesserung besteht in der Berücksichtigung instationärer Vorgänge durch Gitterpunktdarstellung der Lösung in Umfangs- und Meridianrichtung unter Verwendung diskretisierter Schalengleichungen (Böhm u. a., 1989).

Literatur

1. Belkin, A.E.: Ausarbeitung eines Systems von Modellen und Methoden der Berechnung des Spannungs-Deformations- und Wärmezustandes von Automobil-Radialreifen. Habilitationsschrift, Bauman Moscow State Technical University, (1998), 284 S. (russ.).
2. Belkin, A.E.; Belikov, A.Yu.; Narskaya, N.L.; Ulyashkin, A.V.: Elemente der automatisierten Projektierung und Berechnung des Spannungszustandes von Radialreifen. *Kauchukirezina*, No. 2, (1993), 11-14. (russ.).
3. Belkin, A.E.; Chernecov, A.A.: Methodik zur Berechnung des Spannungs-Deformationszustandes von PKW-Radialreifen nach der nichtlinearen Theorie dreischichtiger Schalen. *Moskau, Vestnik MGTU, Ser. Mashinostroenie*, No. 2, (1993), 113-125. (russ.).
4. Belkin, A.E.; Narskaya, N.L.: Dynamischer Kontakt des Reifens als viskoelastische Schale mit einer Stützfläche bei stationärem Rollen. *Moskau, Vestnik MGTU, Ser. Mashinostroenie*, No. 1, (1997), 62-73. (russ.).
5. Biderman, V.L.: *Mechanik der dünnwandigen Konstruktionen. Statik*. Moskau, Mashinostroenie, (1977), 488 S. (russ.).
6. Biderman, V.L.; Guslicer, R.L.; Zacharov, S.P.; Nenachov, B.V.; Seleznev, I.I.; Cukerberg, S.M: (als Herausgeber): *Automobil-Reifen*. Moskau, Goschimizdat, (1963), 384 S. (russ.).
7. Biderman, V.L.; Levkovskaya, E.Ya.: Berechnung der Spannungen und Deformationen infolge Druck in Reifen vom Typ R. *Izv. Vuzov, Mashinostroenie*, No. 3, (1969), 107-112. (russ.).
8. Biderman, V.L.; Levkovskaya, E.Ya.: Berechnung von Spannungen, hervorgerufen durch Innendruck in Reifen vom Typ R. *Trudy Mezhdunarod. konf. po kauchuke i rezine*, Moskau, *Chimia* (1971), 362-369. (russ.).
9. Biderman V.L., Levkovskaya E.Ya.: Zur Berechnung von Radial- und umgürteten Diagonalreifen. *Mechanik der Luftreifen als Grundlage einer rationalen Konstruktion und Prognose der Betriebseigenschaften*. Moskau, NIIShP (1974), 7-11. (russ.).
10. Böhm F.: *Zur Mechanik des Luftreifens*. Habilitationsschrift, TH Stuttgart (1966), 120 S.
11. Böhm F.: *Mechanik des Gürtelreifens*. *Ingenieur-Archiv*, Band 35, Heft 2, (1966), 82-101.
12. Böhm F.: *Skript zur Vorlesung „Fahrmechanik des Automobils“*. Universität Stuttgart, Lehrstuhl I für Mechanik, Fakultät Bauwesen (1966/67), 43 S.
13. Böhm F.: *Zur Statik und Dynamik des Gürtelreifens*. *ATZ*, Band 69, Nr. 8, (1967), 255-261.
14. Böhm F., Swierczek M., Csaki G.: *Hochfrequente Rolldynamik des Gürtelreifens – das Kreisringmodell und seine Erweiterung*. Sonderforschungsbereich 181 der TU Berlin, *Fortschr.-Ber. VDI, Reihe 12, Nr. 135*, VDI-Verlag (1989), 63 S.
15. Bolotin V.L., Novichkov Ju.N.: *Mechanik der mehrschichtigen Konstruktionen*. Moskau, Mashinostroenie (1980), 376 S. (russ.).
16. Buchin B.L.: *Einführung in die Mechanik der Luftreifen*. Moskau, *Chimia* (1988), 224 S. (russ.).
17. Buchin B.L.: *Rollwiderstand pneumatischer Reifen*. Moskau, NIIShP, *Wissenschaftsinformations-Sammelband "Prostor"*, Ausgabe 4, (1993), 5-68. (russ.).
18. Duda A., Wille R.: *Mechanische Grundlagen des umweltverträglichen Rad-Boden-Kontaktes*. Zwischenbericht zum DFG-Projekt Bo648/6, TU Berlin, Juni (1999), 144 S.

19. Feng K.: Statische Berechnung des Gürtelreifens unter besonderer Berücksichtigung der kordverstärkten Lagen. Diss. TU Berlin 1995, VDI-Fortschrittsberichte, Reihe 12, Nr. 258, (1995), 150 S.
20. Godunov S.K.: Über die numerische Lösung von Randwertaufgaben für Systeme linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen. Uspechi matemat. Nauk, (1961), tom 16, vyp. 3 (99), S. 171-174. (russ.).
21. Grigolyuk, E.I.; Kulikov, G.M.: Mehrschichtige armierte Schalen-Berechnung von Luftreifen. Moskau, Mashinostroenie, (1988), 288 S. (russ.).
22. Grigolyuk E.I., Tolkachev V.M.: Contact Problems in the Theory of Plates and Shells. Moscow, Mir Publ. (1987), 423 S.
23. Grigorenko Ya.M., Vasilenko A.T.: Probleme der Statik anisotroper inhomogener Schalen. Moskau, „Nauka“ (1992), 336 S. (russ.).
24. Karmishin A.V., Ljaskovec V.A., Mjachenkov V.I., Frolov A.N.: Statik und Dynamik dünnwandiger Schalenkonstruktionen. Moskau, Mashinostroenie (1975), 376 S. (russ.).
25. Knoroz V.I., Klennikov E.V., Petrov I.P., Sheluchin A.S., Jurev Ju.M. (als Herausgeber): Das Verhalten des Automobilreifens. Moskau, Transport-Verl. (1976), 238 S. (russ.).
26. Kulikov G.M., Böhm F., Duda A., Wille R., Plotnikova S.V.: Zur inneren Mechanik des Radialreifens; Teil 2. Geschichtete Kompositschale mit diskreten Verschiebungsansätzen für die einzelnen Schichten. TECHNISCHE MECHANIK, Bd. 20, Heft 1 (2000), S. 81-90.
27. Kuz'min A.S., Novichkov Ju.N.: Nichtlineare Theorie mehrschichtiger Rotationsschalen veränderlicher Dicke. XIII. Allunions-Konferenz zur Platten- und Schalentheorie, Trudy. Tallin (1983), Teil 3, 113-118. (russ.).
28. Moskvitin V.V.: Zyklische Belastung von Konstruktionselementen. Moskau, Nauka (1981), 344 S. (russ.).
29. Novichkov Ju.N., Kuz'min A.S.: Untersuchung des Spannungs-Deformationszustandes geschichteter Rotationsschalen mit Anwendung auf die Reifenberechnung. Mechanika kompositnykh materialov, Nr. 6, (1984), 1023-1029. (russ.).
30. Popov G.Ya.: Zu Kontaktaufgaben für Schalen und Platten. X. Allunions-Konferenz zur Schalen- und Plattentheorie, Trudy. Kutaisi, (1975), 244-250. (russ.).
31. Zacharov S.P., Novopol'ski V.I.: Verteilung des spezifischen Druckes des Reifens auf die Straße bei hohen Geschwindigkeiten. Trudy NIIShP. Sbornik 3. Moskau, Goschimizdat (1957), 139-153. (russ.).

Danksagung

Dieser Artikel entstand im Rahmen einer durch den internationalen Fonds INTAS / RFBR (Projekt Nr. 95-525) geförderten Zusammenarbeit. Die Projektförderung gestattete es den russischen Autoren, an dem Thema ungestört zu arbeiten. Durch die Unterstützung der Moskauer Staatlichen Technischen Universität (Bauman) und der Technischen Universität Berlin wurden gegenseitige Besuche der Autoren, eine intensive Diskussion des Problems und damit die gemeinsame Erarbeitung dieses Artikels ermöglicht.

Anschriften: Professor Dr. Alexander Belkin, Dr. Natalia Narskaya, Dept. of Applied Mechanics & Dept. of Theoretical Mechanics, Bauman Moscow State Technical University, 2 Baumanskaya Str. 5, RU-107 005 Moscow; Professor Dr. techn. Friedrich Böhm, Professor Dr. sc. techn. Albert Duda, Dr. rer. nat. Ralf Wille, Institut für Mechanik, Technische Universität Berlin, Sekretariat MS 4, Einsteinufer 5/7, D-10587 Berlin