

Variationslösungen für schubstarre Platten (I)

K. Naumenko, J. Altenbach, H. Altenbach

Professor Dr.rer.nat.habil. Hans-Georg Hahn zum 70. Geburtstag gewidmet.

Auf der Grundlage der Kirchhoffschen Plattentheorie und der Variationsmethode von Vlasov/Kantorovich werden Lösungsansätze für Platten mit geraden Plattenrändern im Rahmen der geometrisch linearen Theorie diskutiert. Durch eine alternierende, iterative Verbesserung eingliedriger Näherungsansätze für jeweils eine Koordinatenrichtung erhält man ein effektives Lösungsverfahren, das analytische Näherungslösungen für die Verformungen und die Schnittgrößen für das Gesamtgebiet einer Platte liefert. Die Genauigkeit der so abgeleiteten Lösungen ist für viele Anwendungen ausreichend. Die Einsatzmöglichkeiten des Lösungsweges sind von der Plattengeometrie abhängig. Ausführlich wird die Lösung linearer Aufgaben für Rechteck- und Parallelogrammplatten diskutiert. Teil I umfaßt die Ableitung für kartesische Koordinaten und enthält Beispiele für Rechteck- und Trapezplatten.

1 Motivation

Ausgangspunkt für die Ableitung von Näherungsverfahren mit Hilfe von Funktionsansätzen für das Gesamtgebiet ist im allgemeinen das elastische Potential der schubstarrten Platte, vgl. Altenbach u.a. (1998. a)

$$\Pi = \Pi_i + \Pi_a$$

Das Potential für die inneren Kräfte einer schubstarrten Platte bei Vernachlässigung geometrischer Nichtlinearitäten lautet in kartesischen Koordinaten, Bild 1,

$$\Pi_i(w) = \frac{1}{2} \int_A K [(\Delta w)^2 - 2(1 - \nu)(w_{,11}w_{,22} - w_{,12}^2)] dA \quad (1)$$

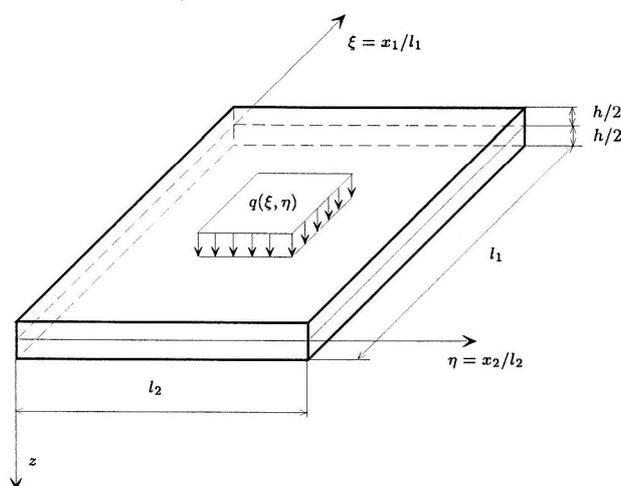


Bild 1. Rechteckige Platte in kartesischen Koordinaten

und für das Potential der äußeren Kräfte erhält man

$$\Pi_a(w) = - \int q w dA + \oint_{\Gamma_{\bar{m}}} \bar{m}_{nn} w_{,n} ds - \oint_{\Gamma_{\bar{q}^*}} \bar{q}_n^* w ds \quad (2)$$

Die Plattensteifigkeit $K = Eh^3/12(1 - \nu^2)$ kann konstant oder veränderlich sein. $w(x_1, x_2)$ ist die Plattendurchbiegung, die Integration über die Flächenlast q soll im verallgemeinerten Sinne auch Linien- und Punktlasten einschließen. \bar{m}_{nn} und \bar{q}_n^* sind vorgegebene Randbiegemomente und Randkräfte, wobei das Randintegral über $\Gamma_{\bar{q}^*}$ auch Einzelrand- und Eckkräfte erfaßt.

Das Prinzip vom Minimum des elastischen Potentials mit der notwendigen Bedingung $\delta\Pi = 0$ liefert nach den Regeln der Variationsrechnung die Plattendifferentialgleichung und alle Randbedingungsmöglichkeiten. Hier ist jedoch das elastische Potential Π Grundlage für die Ableitung von Näherungslösungen. Dabei sei besonders hervorgehoben, daß sich der Ausdruck für Π_i in vielen Fällen vereinfachen läßt (Altenbach u.a., 1998 a). Für gerade Ränder mit starrer Einspannung, elastischer Einspannung, aber starrer Lagerung und momentenfreier starrer Lagerung gilt für Π_i die einfachere Gleichung

$$\Pi_i(w) = \frac{1}{2} \int_A K(\Delta w)^2 dA \quad (3)$$

Beim Näherungsverfahren nach Ritz wird die Näherungslösung \tilde{w} in der Form

$$\tilde{w}(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^n a_i w_i(x_1, x_2) \quad (4)$$

oder

$$\tilde{w}(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} X_{1i}(x_1) X_{2j}(x_2) \quad (5)$$

gesucht. Die Bedingung $\delta\tilde{\Pi}(\tilde{w}) = 0$ führt auf die Gleichungen

$$\tilde{\Pi}_{,a_j}(\tilde{w}) = 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (6)$$

bzw.

$$\tilde{\Pi}_{,a_{kl}}(\tilde{w}) = 0 \quad k = 1, 2, \dots, n \quad l = 1, 2, \dots, m \quad (7)$$

Die Lösung der Plattenaufgabe ist damit auf die Lösung eines Gleichungssystems für die unbekannt konstanten Koeffizienten a_j bzw. a_{kl} reduziert. Die Bedingungen für die Konvergenz der Näherungslösung gegen die analytische Plattenlösung können eindeutig definiert werden (Altenbach u.a., 1998 a). Als Ansatzfunktionen werden vielfach die Eigenfunktionen transversal schwingender Balken oder des Knickstabes, aber auch über das Gesamtgebiet definierte Polynomansätze gewählt, s. z.B. (Altenbach u.a., 1998 a; Chia, 1980; Liew und Wang, 1993; Vlasov, 1958). Das Verfahren von Ritz wird für viele Fälle mit Erfolg angewendet. Bei konzentrierten Belastungsbereichen oder nichtlinearen Plattenaufgaben ist die Konvergenz gegen die gesuchte Lösung schwach. Näherungsansätze mit einer dann notwendigen höheren Anzahl von Reihengliedern führen aber vielfach auf numerische Probleme.

Das Näherungsverfahren nach Vlasov/Kantorovich liefert in Verbindung mit einer iterativen Verbesserung der Lösung häufig schon mit einem eingliedrigen Ansatz gute Ergebnisse. Die Näherungslösung $\tilde{w}(x_1, x_2)$ wird jetzt in der Form

$$\tilde{w}(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^n W_i(x_2) \chi_i(x_1, x_2) \quad (8)$$

oder

$$\tilde{w}(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^n W_i(x_2) \chi_i(x_1) \quad (9)$$

gesucht. Statt der unbekanntenen Koeffizienten a_i des Ritz-Ansatzes müssen jetzt unbekanntene Koeffizientenfunktionen $W_i(x_2)$ bestimmt werden. Die Anforderungen für die Ansatzfunktionen χ_i können wiederum eindeutig definiert werden. Die notwendige Bedingung $\delta \tilde{\Pi}(\tilde{w}) = 0$ führt auf ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen. Das Verfahren von Vlasov/Kantorovich wurde erfolgreich zur Lösung unterschiedlicher Plattenaufgaben, von Schalen kurzer Länge, von Stabschalen, von Faltwerken u.a.m. eingesetzt (z.B. Altenbach u.a., 1994; Göldner, 1961; Reissner und Stein, 1951; Vlasov, 1958).

Für schubstarre Platten unterschiedlicher Geometrie wird die Vorgehensweise nachfolgend erläutert. Alle Gleichungen werden zunächst zum besseren Verständnis für den einfachen Fall einer Rechteckplatte abgeleitet, und danach wird dann die Möglichkeit der Erweiterung auf Trapez- und Parallelogrammplatten diskutiert. Es werden ausschließlich eingliedrige Variationsansätze betrachtet. Die angeführten Beispiele demonstrieren die Qualität eingliedriger Ansätze für Rechteckplatten. Mehrgliedrige Ansätze führen auf Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen, die im allgemeinen numerisch gelöst werden müssen (vgl. z.B. Grigorenko und Tumashova, 1989; Kryukov, 1984). Der wesentliche Vorteil der Variationslösungen nach Vlasov/Kantorovich, die Ableitung einfacher analytischer Näherungslösungen, die vor allem effektiv in der Entwurfsphase einer Konstruktion eingesetzt werden können, geht dann verloren. Wie für die Parallelogrammplatten im Teil II gezeigt wird, können die eingliedrigen Variationsansätze sinnvoll durch Zusatzterme ergänzt werden.

2 Rechteckplatten

Für eine Rechteckplatte in kartesischen Koordinaten, Bild 1, kann die Näherungslösung $\tilde{w}(x_1, x_2)$ als Summe von Produktansätzen dargestellt werden

$$\tilde{w}(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^n W_i(x_2) \chi_i(x_1)$$

$W_i(x_2)$ sind unbekanntene Koeffizientenfunktionen. Die $\chi_i(x_1)$ werden so gewählt, daß \tilde{w} die kinematischen Randbedingungen erfüllen. Im weiteren werden die dimensionslosen Koordinaten ξ und η , vgl. Bild 1, verwendet. Beschränkt man sich auf ein Reihenglied

$$\tilde{w}(\xi, \eta) = W_\eta(\eta) \chi(\xi) \quad (10)$$

und auf Platten mit $K = \text{const}$, erhält man durch Einsetzen in den Ausdruck der Energie der inneren Kräfte (1) folgende Gleichung

$$\begin{aligned} \Pi_i(\tilde{w}) = & \frac{K}{2\gamma l_2^2} \int_0^\eta \left(\gamma^4 W_\eta^2 \int_0^1 \chi''^2 d\xi + W_\eta''^2 \int_0^1 \chi^2 d\xi \right. \\ & \left. + 2\nu\gamma^2 W_\eta'' W_\eta \int_0^1 \chi'' \chi d\xi + 2(1-\nu)\gamma^2 W_\eta'^2 \int_0^1 \chi'^2 d\xi \right) d\eta \end{aligned} \quad (11)$$

mit $\gamma = l_2/l_1$. Hierbei wurde die Integration für einen durch die Linie $\eta = \text{const}$ abgeschnittenen Plattenteil durchgeführt, vgl. Bild 2. Die erste Variation

$$\delta \Pi_i(\tilde{w}) = \Pi_i(\tilde{w} + \delta \tilde{w}) - \Pi_i(\tilde{w})$$

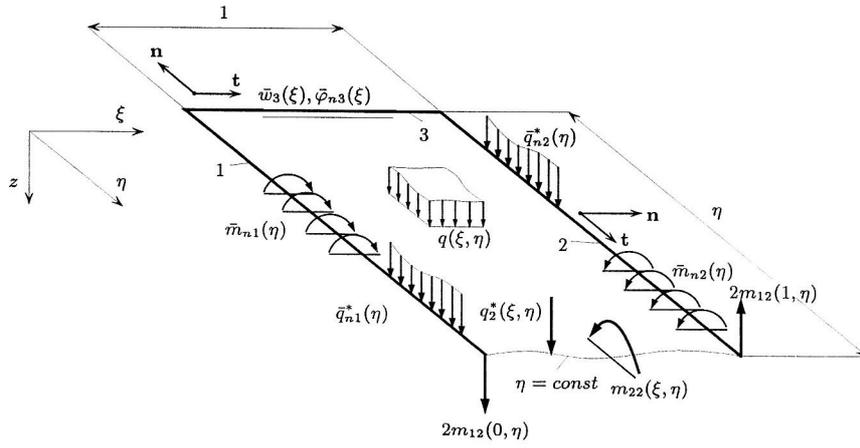


Bild 2. Schnittgrößen und Randbelastungen für einen Plattenabschnitt

liefert nach partieller Integration mit $[f(x)]_{x=0}^{x=1} = f(1) - f(0)$

$$\begin{aligned} \delta \Pi_i(\tilde{w}) &= \frac{K}{\gamma l_2^2} \int_0^\eta \left[A W_\eta^{IV}(\eta) - 2\gamma^2 (B - \nu B_0) W_\eta''(\eta) + \gamma^4 C W_\eta(\eta) \right] \delta W_\eta(\eta) d\eta \\ &+ \frac{l_2}{\gamma} \left[Q_\eta(\eta) \delta W_\eta(\eta) \right]_0^\eta - \frac{1}{\gamma} \left[M_\eta(\eta) \delta W_\eta'(\eta) \right]_0^\eta \end{aligned} \quad (12)$$

Hierbei wurden folgende Bezeichnungen verwendet:

$$\begin{aligned} M_\eta(\eta) &= -\frac{K}{l_2^2} \left[A W_\eta''(\eta) - (B - B_0) \gamma^2 \nu W_\eta(\eta) \right] \\ Q_\eta(\eta) &= -\frac{K}{l_2^3} \left[A W_\eta'''(\eta) - (B(2 - \nu) - B_0 \nu) \gamma^2 W_\eta'(\eta) \right] \\ A &= \int_0^1 \chi^2(\xi) d\xi \quad B = \int_0^1 \chi'^2(\xi) d\xi \quad C = \int_0^1 \chi''^2(\xi) d\xi \quad B_0 = \left[\chi'(\xi) \chi(\xi) \right]_0^1 \end{aligned} \quad (13)$$

Als äußere Kräfte am abgeschnittenen Plattenteil wirken die Schnittgrößen m_{22} , q_2^* und die Eckkräfte $2m_{12}$ am Schnittufer $\eta = const$, die vorgegebenen Randkräfte und Momente \bar{m}_{nn} , \bar{q}_n^* und die Flächenlast q , Bild 2. Mit q_2^* ist die Kirchhoffsche Ersatzquerkraft bezeichnet. Für die Variation des Potentials der äußeren Kräfte (2) gilt

$$\begin{aligned} \delta \Pi_a &= -\frac{l_2^2}{\gamma} \int_0^\eta \tilde{q}(\eta) \delta W_\eta(\eta) d\eta + \frac{1}{\gamma} \int_0^1 m_{22}(\xi, \eta) \chi(\xi) d\xi \delta W_\eta'(\eta) \\ &- \frac{1}{\gamma} \int_0^1 \bar{m}_{n3}(\xi) \chi(\xi) d\xi \delta W_\eta'(0) - \frac{l_2}{\gamma} \int_0^1 \bar{q}_{n3}^*(\xi) \chi(\xi) d\xi \delta W_\eta(0) \\ &- \left[\frac{l_2}{\gamma} \int_0^1 q_2^*(\xi, \eta) \chi(\xi) d\xi - \left[2m_{12}(\xi, \eta) \chi(\xi) \right]_{\xi=0}^{\xi=1} \right] \delta W_\eta(\eta) \end{aligned} \quad (14)$$

mit

$$\tilde{q}(\eta) = \int_0^1 q(\xi, \eta) \chi(\xi) d\xi + \frac{\gamma}{l_2} \left[\bar{q}_{n2}^*(\eta) \chi(1) - \bar{q}_{n1}^*(\eta) \chi(0) \right]_{\eta=0}^{\eta=1} + \frac{\gamma^2}{l_2^2} \left[\bar{m}_{n2}(\eta) \chi'(1) - \bar{m}_{n1}(\eta) \chi'(0) \right]_{\eta=0}^{\eta=1}$$

Damit ergibt sich mit $\delta \Pi = 0$ aus den Gleichungen (12) und (14) unter Beachtung, daß die Variation

$\delta W_\eta(\eta)$ willkürlich ist, folgende gewöhnliche Differentialgleichung vierter Ordnung:

$$W_\eta^{IV}(\eta) - 2r_\xi^2 W_\eta''(\eta) + s_\xi^4 W_\eta(\eta) = \frac{l_2^4}{KA} \tilde{q}(\eta) \quad r_\xi^2 = \frac{B - \nu B_0}{A} \gamma^2 \quad s_\xi^4 = \frac{C}{A} \gamma^4 \quad (15)$$

Die Randterme mit $\delta W_\eta(0)$ und $\delta W_\eta'(0)$ verschwinden, wenn am Rand $\eta = 0$ kinematische Randbedingungen vorgeschrieben werden. Für den Fall, daß das Schnittufer $\eta = const$ mit dem Plattenrand zusammenfällt, gilt, wenn kinematische Randbedingungen vorgeschrieben werden,

$$\begin{aligned} \tilde{w}(\xi, \eta) = W_\eta(\eta) \chi(\xi) = \bar{w}_n(\xi) \quad \tilde{w}_{,n}(\xi, \eta) = W_\eta'(\eta) \chi(\xi) = \bar{\varphi}_n(\xi) \\ \delta W_\eta(\eta) = \delta W_\eta'(\eta) = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

mit \bar{w}_n und $\bar{\varphi}_n$ als am Rand $\eta = const$ vorgeschriebene kinematische Größen (die Durchbiegung und die Normalenneigung). Für beliebige $\delta W_\eta(\eta) \neq 0$ und $\delta W_\eta'(\eta) \neq 0$ ergeben sich aus den Gleichungen (12) und (14) die wesentlichen Randbedingungen am Rand $\eta = const$

$$M_\eta(0) = \int_0^1 \bar{m}_{n3}(\xi) \chi(\xi) d\xi \quad Q_\eta(0) = \int_0^1 \bar{q}_{n3}(\xi) \chi(\xi) d\xi \quad (17)$$

$$M_\eta(\eta) = \int_0^1 m_{22}(\xi, \eta) \chi(\xi) d\xi \quad Q_\eta(\eta) = \int_0^1 q_2^*(\xi, \eta) \chi(\xi) d\xi - \frac{l_2}{\gamma} \left[2m_{12}(\xi, \eta) \chi(\xi) \right]_{\xi=0}^{\xi=1} \quad (18)$$

Die Gleichungen (18) definieren die sog. „verallgemeinerten“ Schnittgrößen – das Biegemoment M_η und die Querkraft Q_η . Diese entsprechen der Wirkung der am Schnittufer $\eta = const$ wirkenden Plattenschnittgrößen m_{22} , m_{12} und q_2 , die wie folgt berechnet werden, vgl. z.B. Altenbach u.a. (1998. a)

$$\begin{aligned} m_{22} = -\frac{K}{l_2^2} (w_{,\eta\eta} + \gamma^2 \nu w_{,\xi\xi}) \quad m_{12} = -\frac{K}{l_2^2} \gamma (1 - \nu) w_{,\xi\eta} \\ q_2^* = -\frac{K}{l_2^3} [w_{,\eta\eta\eta} + \gamma^2 (2 - \nu) w_{,\xi\xi\eta}] \end{aligned} \quad (19)$$

Setzt man die Lösung (10) in die Gleichungen (19) ein und führt die Integration entsprechend den Gleichungen (18) durch, erhält man die bereits eingeführten Beziehungen (13). Aus den Gleichungen (18) ist leicht zu erkennen, daß mit dem eingliedrigen Ansatz (10) die statischen Randbedingungen nur näherungsweise erfüllt werden können.

In dem folgenden Kasten sind die gewöhnliche Differentialgleichung sowie die Ausdrücke für die Verformungen und die verallgemeinerten Schnittgrößen zusammengefaßt:

<p>Differentialgleichung</p> $W_\eta^{IV}(\eta) - 2r_\xi^2 W_\eta''(\eta) + s_\xi^4 W_\eta(\eta) = g_\xi(\eta)$ <p>Durchbiegung</p> $W_\eta(\eta)$ <p>Normalenneigung</p> $\varphi(\eta) = W_\eta'(\eta)$ <p>Biegemoment</p> $M_\eta(\eta) = -\frac{KA}{l_2^2} [W_\eta''(\eta) - t_\xi^2 W_\eta(\eta)]$ <p>Querkraft</p> $Q_\eta(\eta) = -\frac{KA}{l_2^3} [W_\eta'''(\eta) - (2r_\xi^2 - t_\xi^2) W_\eta'(\eta)]$
--

In diesen Gleichungen sind

$$r_\xi^2 = \frac{B - \nu B_0}{A} \gamma^2 \quad s_\xi^4 = \frac{C}{A} \gamma^4 \quad t_\xi^2 = \frac{(B - B_0)\nu}{A} \gamma^2 \quad g_\xi(\eta) = \frac{l_2^4}{KA} \bar{q}(\eta)$$

Die Differentialgleichung entspricht der Randwertaufgabe für einen Biegebalken auf elastischer Bettung. Die Lösung kann in elementaren Funktionen wie folgt ausgedrückt werden:

$$W_\eta(\eta) = \sum_{i=1}^4 c_i \zeta_i(\eta) + W_\eta^p(\eta) \quad (20)$$

wobei $\zeta_i, i = 1, \dots, 4$ die vier unabhängigen Integrale der homogenen Differentialgleichung sind, W_η^p ist die Partikulärlösung und c_i sind die aus den Randbedingungen zu bestimmenden Konstanten. Die Art der Funktionen ζ_i hängt von den Wurzeln der charakteristischen Gleichung ab. In Abhängigkeit von den Koeffizienten r_ξ und s_ξ werden hier die drei folgenden Fälle betrachtet:

$s_\xi > r_\xi$:

$$\begin{aligned} \zeta_1(\eta) &= \cosh \alpha_\xi \eta \sin \beta_\xi \eta & \zeta_2(\eta) &= \cosh \alpha_\xi \eta \cos \beta_\xi \eta \\ \zeta_3(\eta) &= \sinh \alpha_\xi \eta \cos \beta_\xi \eta & \zeta_4(\eta) &= \sinh \alpha_\xi \eta \sin \beta_\xi \eta \end{aligned} \quad (21)$$

$$\alpha_\xi = \sqrt{\frac{s_\xi^2 + r_\xi^2}{2}} \quad \beta_\xi = \sqrt{\frac{s_\xi^2 - r_\xi^2}{2}}$$

$s_\xi < r_\xi$:

$$\begin{aligned} \zeta_1(\eta) &= \sinh \beta_\xi \eta & \zeta_2(\eta) &= \cosh \alpha_\xi \eta \\ \zeta_3(\eta) &= \sinh \alpha_\xi \eta & \zeta_4(\eta) &= \cosh \beta_\xi \eta \end{aligned} \quad (22)$$

$$\alpha_\xi = \sqrt{r_\xi^2 + \sqrt{r_\xi^4 - s_\xi^4}} \quad \beta_\xi = \sqrt{r_\xi^2 - \sqrt{r_\xi^4 - s_\xi^4}}$$

$s_\xi = r_\xi$:

$$\begin{aligned} \zeta_1(\eta) &= \eta \cosh(r_\xi \eta) & \zeta_2(\eta) &= \cosh(r_\xi \eta) \\ \zeta_3(\eta) &= \sinh(r_\xi \eta) & \zeta_4(\eta) &= \eta \sinh(r_\xi \eta) \end{aligned} \quad (23)$$

Man kann die Berechnung der c_i und der Partikulärlösung W_η^p erleichtern, indem man die Lösung mit Hilfe der Übertragungsmatrix konstruiert. Mit dem Vektor der eindimensionalen kinematischen und statischen Größen

$$\mathbf{W}_\eta(\eta) = \begin{bmatrix} W_\eta(\eta) \\ \varphi_\eta(\eta) \\ M_\eta(\eta) \\ Q_\eta(\eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_\eta(\eta) \\ W_\eta'(\eta) \\ -(KA/l_2^2)[W_\eta(\eta)'' - t_\xi^2 W_\eta(\eta)] \\ -(KA/l_2^3)[W_\eta(\eta)''' - (2r_\xi^2 - t_\xi^2)W_\eta'(\eta)] \end{bmatrix}$$

kann man die Lösung wie folgt angeben:

$$\mathbf{W}_\eta(\eta) = \mathbf{K}_E(\eta) \mathbf{W}_{0\eta} + \mathbf{W}_\eta^p(\eta) \quad (24)$$

mit

$$\mathbf{K}_E(\eta) = \begin{bmatrix} K_{ww}(\eta) & K_{w\varphi}(\eta) & K_{wM}(\eta) & K_{wQ}(\eta) \\ K_{\varphi w}(\eta) & K_{\varphi\varphi}(\eta) & K_{\varphi M}(\eta) & K_{\varphi Q}(\eta) \\ K_{Mw}(\eta) & K_{M\varphi}(\eta) & K_{MM}(\eta) & K_{MQ}(\eta) \\ K_{Qw}(\eta) & K_{Q\varphi}(\eta) & K_{QM}(\eta) & K_{QQ}(\eta) \end{bmatrix} \quad \mathbf{W}_{0\eta} = \begin{bmatrix} W_\eta(0) \\ \varphi_\eta(0) \\ M_\eta(0) \\ Q_\eta(0) \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$\mathbf{W}_\eta^P(\eta) = \begin{bmatrix} -\int_0^\eta g_\xi(t)K_{wQ}(\eta-t)dt \\ -\int_0^\eta g_\xi(t)K_{\varphi Q}(\eta-t)dt \\ -\int_0^\eta g_\xi(t)K_{MQ}(\eta-t)dt \\ -\int_0^\eta g_\xi(t)K_{QQ}(\eta-t)dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_{wQ}(\eta) \\ -R_{\varphi Q}(\eta) \\ -R_{MQ}(\eta) \\ -R_{QQ}(\eta) \end{bmatrix} \quad (26)$$

Die Übertragungsmatrix \mathbf{K}_E läßt sich nach der Methode der Anfangsparameter in Analogie zum Biegebalken aus der Linearkombination der vier Integrale der Differentialgleichung sowie entsprechender Ableitungen bilden, vgl. Altenbach u.a. (1998 a), Altenbach u.a. (1994) und Vlasov (1958). Die Übertragungsmatrizen für die beiden Sonderfälle (21) und (22) sind im Anhang angegeben. Mit der Übertragungsmatrix läßt sich die Lösung für vorgegebene Randbedingungen und äußere Belastungen einfach formulieren. Als Beispiel ist die Lösung für den Fall eingespannter Ränder angegeben. η_F ist die Koordinate des Angriffspunktes einer Einheitslast

$$\begin{aligned} W_\eta(\eta, \eta_F) &= K_{wM}(\eta)M_0(\eta_F) + K_{wQ}(\eta)Q_0(\eta_F) - R_{wQ}(\eta; \eta_F) \\ M_0(\eta_F) &= \frac{R_{wQ}(1; \eta_F)K_{\varphi Q}(1) - R_{\varphi Q}(1; \eta_F)K_{wQ}(1)}{K_{wM}(1)K_{\varphi Q}(1) - K_{\varphi M}(1)K_{wQ}(1)} \\ Q_0(\eta_F) &= \frac{R_{\varphi Q}(1; \eta_F)K_{wQ}(1) - R_{wQ}(1; \eta_F)K_{\varphi Q}(1)}{K_{wM}(1)K_{\varphi Q}(1) - K_{\varphi M}(1)K_{wQ}(1)} \end{aligned} \quad (27)$$

Die Terme R_{wQ} und $R_{\varphi Q}$ hängen von der Art der Belastung ab. Für eine im Punkt η_F wirkende Einzellast $F = 1$ ergibt sich

$$R_{wQ}(\eta; \eta_F) = \begin{cases} K_{wQ}(\eta - \eta_F), & \eta > \eta_F \\ 0, & \eta \leq \eta_F \end{cases}, \quad R_{\varphi Q}(\eta; \eta_F) = \begin{cases} K_{\varphi Q}(\eta - \eta_F), & \eta > \eta_F \\ 0, & \eta \leq \eta_F \end{cases} \quad (28)$$

Für eine Vollast mit $g_\xi(\eta) = 1$ erhält man

$$R_{wQ}(\eta) = K_{wQ}^{(I)}(\eta) - K_{wQ}^{(I)}(0) \quad \text{mit der Stammfunktion} \quad K_{wQ}^{(I)}(\eta) = \int K_{wQ}(\eta) d\eta \quad (29)$$

Für eine linear verteilte Vollbelastung $1 \cdot \eta$ kann man schreiben

$$R_{wQ}(\eta) = K_{wQ}^{(II)}(\eta) - \eta K_{wQ}^{(I)}(0) - K_{wQ}^{(II)}(0) \quad \text{mit} \quad K_{wQ}^{(II)}(\eta) = \int K_{wQ}^{(I)}(\eta) d\eta \quad (30)$$

Analog erhält man für die Belastung $g_\xi(\eta) = 1 \cdot \eta^3$

$$R_{wQ}(\eta) = 2K_{wQ}^{(III)}(\eta) - 2\eta K_{wQ}^{(II)}(0) - \eta^2 K_{wQ}^{(I)}(0) - 2K_{wQ}^{(III)}(0) \quad (31)$$

Damit folgt durch Induktionsschluß für eine Belastung $1 \cdot \eta^n$

$$R_{wQ}(\eta) = -\sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!} \left[t^{n-k} K_{wQ}^{(k+I)}(\eta-t) \right]_{t=0}^{t=\eta} \quad \text{mit} \quad K_{wQ}^{(k+I)}(\eta) = \int K_{wQ}^{(k)}(\eta) d\eta \quad (32)$$

Die Funktionen K_{wQ} können einfach analytisch integriert werden. Für den Fall $s_\xi > r_\xi$ ergibt sich für die ersten zwei Integrale

$$\begin{aligned} K_{wQ}^{(I)}(\eta) &= \frac{1}{s_\xi^4} [(\alpha_\xi^2 - \beta_\xi^2)\zeta_4(\eta) - 2\alpha_\xi\beta_\xi\zeta_2(\eta)] \\ K_{wQ}^{(II)}(\eta) &= \frac{1}{s_\xi^6} [\alpha_\xi(\alpha_\xi^2 - 3\beta_\xi^2)\zeta_1(\eta) + \beta_\xi(\beta_\xi^2 - 3\alpha_\xi^2)\zeta_3(\eta)] \end{aligned}$$

Für den Fall einer im Bereich $t_a \leq \eta \leq t_b$ verteilten konstanten Belastung $q = 1$ folgt z.B.

$$R_{wQ}(\eta) = \begin{cases} 0, & \text{für } 0 \leq \eta < t_a \\ K_{wQ}^{(I)}(\eta - t_a) - K_{wQ}^{(I)}(0), & \text{für } t_a \leq \eta \leq t_b \\ K_{wQ}^{(I)}(\eta - t_a) - K_{wQ}^{(I)}(\eta - t_b), & \text{für } t_b < \eta \leq 1 \end{cases} \quad (33)$$

Für beliebige Belastungsfunktion $g(\eta)$ können die Partikulärlösungen (26) im allgemeinen nicht analytisch integriert werden. Approximiert man die Belastungsfunktionen durch Polynomansätze, lassen sich die Lösungen mit Hilfe der Übertragungsmatrizen in elementaren Funktionen angeben. Durch Superposition einfacher Teilbelastungen können dann auch komplexere Belastungszustände erfaßt werden.

Ist die Funktion W_η berechnet, erhält man die Näherungslösung in der Form $\tilde{w}(\xi, \eta) = W_\eta(\eta)\chi(\xi)$. Die Genauigkeit der Plattenlösung hängt in erster Linie von der Funktion $\chi(\xi)$ ab. Wählt man für $\chi(\xi)$ die Biegelinie eines Balkens mit entsprechender Belastung und Randbedingungen an den Rändern $\xi = \text{const}$, d.h., die Lösung der Differentialgleichung $\chi^{IV}(\xi) = g(\xi)$, erhält man durch Integration die Werte für s_ξ und r_ξ nach den Gleichungen (13) und (15) und damit die Funktion $W_\eta(\eta)$. Dieser Lösungsweg liefert für die Berechnung von Rechteckplatten mit $\gamma \gg 1$ und mit stetigen Flächenbelastungen gute Näherungswerte, vgl. Altenbach u.a. (1994), Göldner (1961) und Vlasov (1958). Dabei ist die Funktion $\chi(\xi)$ immer in Richtung der kleineren Stützweite zu wählen. Die schlechtesten Näherungslösungen erhält man für Quadratplatten, d.h. für $\gamma = 1$. Die Plattenbelastungen sind immer in solche Belastungszustände umzuordnen, die zu affinen Durchbiegungen für alle Schnitte $\eta = \text{const}$ führen.

Durch die Vorgabe einer Ansatzfunktion $\chi(\xi)$ und Berechnung der Funktionen $W_\eta(\eta)$ durch Lösung der entsprechenden Differentialgleichung (15) sind die Näherungen in ξ -Richtung und in η -Richtung von unterschiedlicher Qualität. Dies führt u.a. dazu, daß für symmetrische Plattenaufgaben die Symmetriebedingungen verletzt werden. Die Genauigkeit eingliedriger Näherungslösungen kann jedoch durch das nachfolgende Iterationsschema wesentlich verbessert werden.

Als Startlösung $\chi^{[0]}(\xi)$ wird die Biegelinie eines Balkens angenommen, Bild 3. Durch numerische Integration über die Koordinate ξ erhält man die Koeffizienten $s_\xi^{[0]}$ und $r_\xi^{[0]}$ nach den Gleichungen (13) und (15). Aus der Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung (15) ergibt sich die Funktion $W_\eta^{[0]}(\eta)$ (der erste Vlasov-Rechenschritt). Nun wird die Funktion $W_\eta^{[0]}$ als vorgegebene Funktion $\chi^{[1]}(\eta)$ eingesetzt. Die neue Lösung wird in folgender Form gesucht:

$$\tilde{w}(\xi, \eta) = W_\xi^{[1]}(\xi)\chi^{[1]}(\eta)$$

Durch Nullsetzen der ersten Variation des elastischen Potentials erhält man analog zu den Gleichungen (12) bis (18) die im folgenden Kasten angegebene Differentialgleichung sowie die verallgemeinerten kinematischen und statischen Größen. Es sind nur ξ und η vertauscht worden.

<p>Differentialgleichung</p> $W_\xi^{IV}(\xi) - 2r_\eta^2 W_\xi''(\xi) + s_\eta^4 W_\xi(\xi) = g_\eta(\xi)$ <p>Durchbiegung</p> $W_\xi(\xi)$ <p>Normalenneigung</p> $\varphi(\xi) = W_\xi'(\xi)$ <p>Biegemoment</p> $M_\xi(\xi) = -\frac{KA\gamma^2}{l_2^2} [W_\xi''(\xi) - t_\eta^2 W_\xi(\xi)]$ <p>Querkraft</p> $Q_\xi(\xi) = -\frac{KA\gamma^3}{l_2^3} [W_\xi'''(\xi) - (2r_\eta^2 - t_\eta^2) W_\xi'(\xi)]$
--

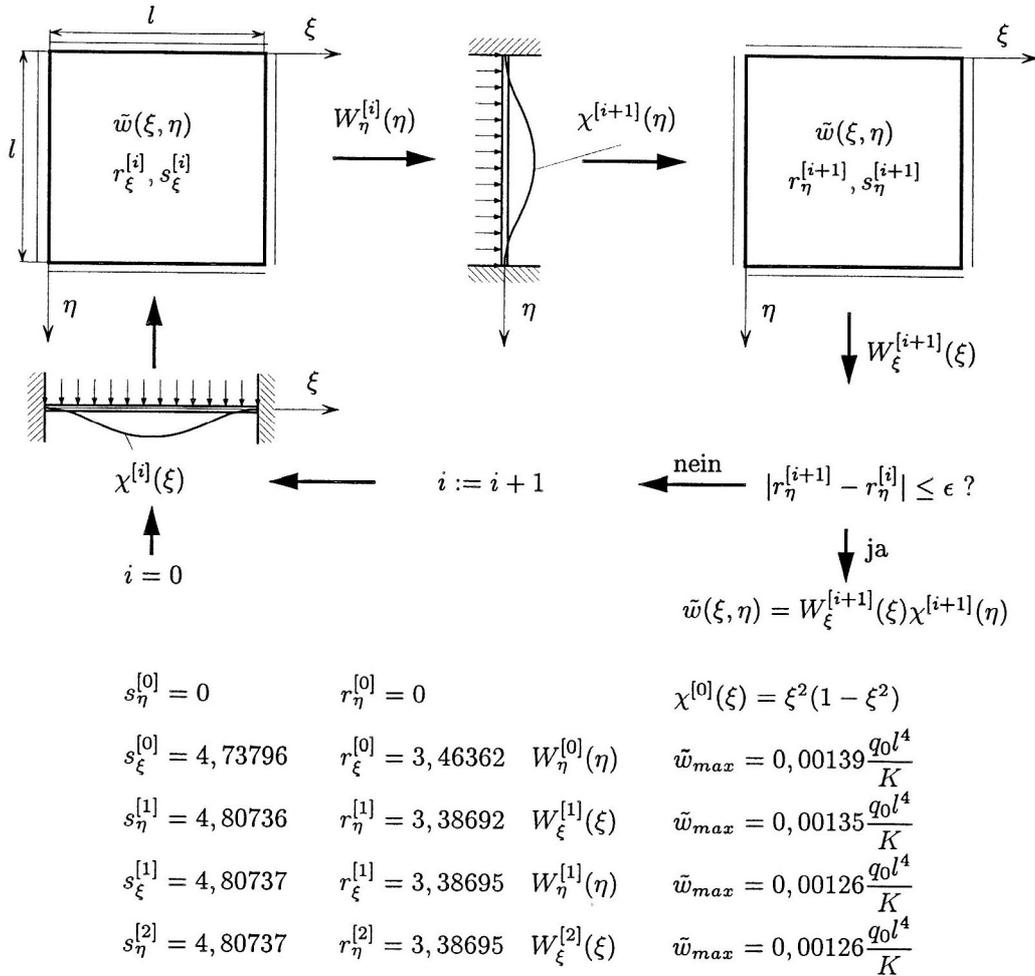


Bild 3. Iterative Verbesserung der Biegefläche für eine allseitig eingespannte Quadratplatte unter Vollast mit

$$r_\eta^2 = \frac{B - \nu B_0}{A\gamma^2} \quad s_\eta^4 = \frac{C}{A\gamma^4} \quad t_\eta^2 = \frac{(B - B_0)\nu}{A\gamma^2} \quad g_\eta(\xi) = \frac{l_2^4}{K A \gamma^4} \tilde{q}(\xi)$$

$$A = \int_0^1 \chi^2(\eta) d\eta \quad B = \int_0^1 \chi'^2(\eta) d\eta \quad C = \int_0^1 \chi''^2(\eta) d\eta \quad B_0 = \left[\chi'(\eta) \chi(\eta) \right]_0^1$$

Die Lösung kann analog der bereits diskutierten Lösung für die η - Koordinatenrichtung mit Hilfe der Übertragungsmatrix (24) konstruiert werden. Nach Vergleich der Werte s_η und r_η mit den Startwerten kann der Rechenprozeß wiederholt oder abgebrochen werden, Bild 3. Die Konvergenz der Iterationsprozedur wurde hier für eine allseitig eingespannte Quadratplatte unter konstanter Vollast illustriert. Die sich daraus ergebende Lösung für die maximale Durchbiegung $\tilde{w}_{max} = 0,00126 \frac{q_0 l^4}{K}$ sowie für das maximale Biegemoment $\tilde{m}_{max} = -5,22 q_0 l^2$ stimmt mit der Referenzlösung $w_{max} = 0,00126 \frac{q_0 l^4}{K}$, $m_{max} = -5,13 q_0 l^2$, vgl. Timoshenko und Woinowsky-Krieger (1959), sehr gut überein. Die Qualität der Näherungslösung kann man auch durch Einsetzen in die Plattengleichung

$$\Delta \Delta w(x_1, x_2) = \frac{q(x_1, x_2)}{K} \quad (34)$$

überprüfen. Für die exakte Lösung muß für alle Plattenpunkte gelten

$$\frac{K}{q} \Delta \Delta w = 1$$

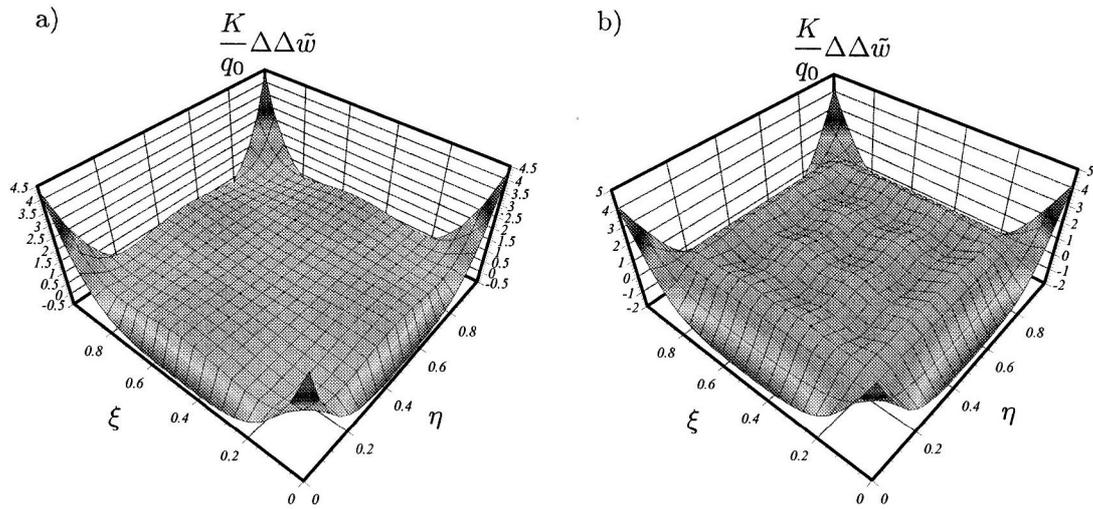


Bild 4. Erfüllung der Plattengleichung für eine allseitig eingespannte Quadratplatte unter konstanter Vollast. a) Eingliedriger Ansatz $\tilde{w}(\xi, \eta) = a_0 W_\xi(\xi) W_\eta(\eta)$, b) Lösung mit vier Ansatzfunktionen je Richtung $\tilde{w}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 a_{ij} \Phi_{\xi_i}(\xi) \Phi_{\eta_j}(\eta)$.

Die Ergebnisse für eine eingespannte Platte unter konstanter Vollast sowie für eine eingespannte Platte unter einer auf der Fläche $0,2 \times 0,2$ in der Mitte verteilten konstanten Belastung sind auf den Bildern 4 und 5 dargestellt. Es ist zu sehen, daß das Einsetzen der eingliedrigen Näherungslösung in die Plattengleichung fast exakt (mit Ausnahme der Eckpunkte) den Wert 1 liefert, Bild 4a. Die Störung an den Ecken klingt sehr schnell ab. Im Falle einer Teilbelastung ist die Störung wesentlich, Bild 5a. Im Bereich der Belastungsfläche ist die Näherungslösung sehr genau. Zum Vergleich sind Ergebnisse für Näherungslösungen mit Hilfe des Ritzschen Verfahrens dargestellt. Diese Lösungen wurden dabei in Form einer Doppelreihe wie folgt gesucht:

$$\tilde{w}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 a_{ij} \Phi_{\xi_i}(\xi) \Phi_{\eta_j}(\eta)$$

wobei als Ansatzfunktionen Φ_{ξ_i} und Φ_{η_i} die Eigenfunktionen des transversal schwingenden Balkens vorgegeben wurden. Diese Funktionen sind z.B. in Altenbach u.a. (1998 a) für unterschiedliche Randbe-

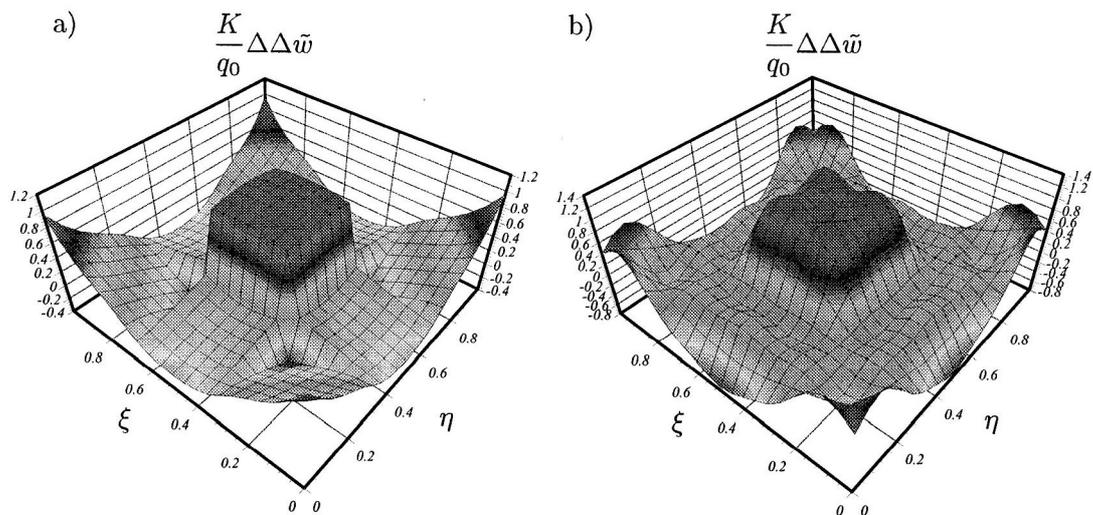


Bild 5. Erfüllung der Plattengleichung für eine allseitig eingespannte Quadratplatte unter konstanter Teilbelastung. a) Eingliedriger Ansatz $\tilde{w}(\xi, \eta) = a_0 W_\xi(\xi) W_\eta(\eta)$, b) Lösung mit vier Ansatzfunktionen je Richtung $\tilde{w}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 a_{ij} \Phi_{\xi_i}(\xi) \Phi_{\eta_j}(\eta)$.

Beispiel	Anzahl der Iterationen	$\alpha_{\xi,\eta}$	$\beta_{\xi,\eta}$	$k_w \cdot 10^3$		$k_m \cdot 10^2$	
					eigene Lösung		eigene Lösung
1	3	4,150	2,286	5,60 *)	5,55	1,26 *)	1,25
2	3	4,156	2,416	1,26 *)	1,27	5,13 *)	5,18
3	3	3,178	0,174	4,06 *)	4,06	4,79 *)	4,76
4	5	3,142	7,354	12,86 *)	12,84	0,112 *)	0,11
		1,421	3,005				
5	3	4,258	2,226	–	0,91	0,16 *)	0,16
6	6	1,792	0,563	206,5 **)	202,1	212,5 **)	201,4
		0,323	0,237				

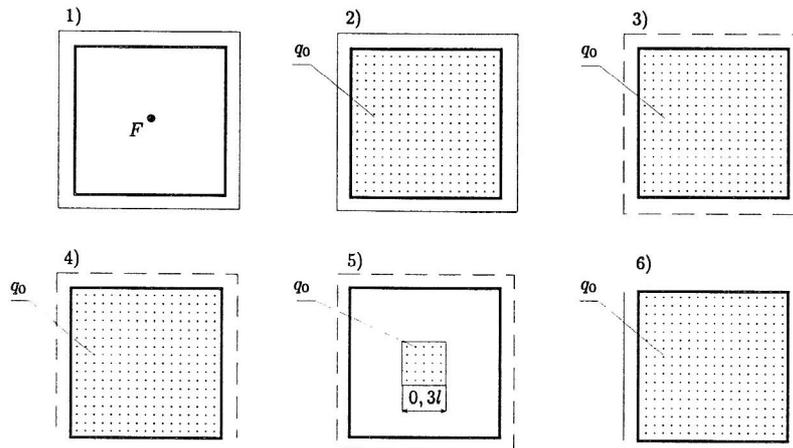


Tabelle 1. Lösungen für eine Quadratplatte mit unterschiedlichen Belastungen und Randbedingungen: $k_w = \frac{Fl^2}{K}$, $k_m = F$ (Beispiel 1); $k_w = \frac{q_0 l^4}{K}$, $k_m = q_0 l^2$ (Beispiele 2 bis 6) *) Timoshenko und Woinowsky-Krieger (1959), **) Mizusawa (1994)

dingungen tabelliert. Mit dem Ritzschen Verfahren erhält man erst mit 4 Ansatzfunktionen je Richtung, d.h. mit 16 Reihengliedern Näherungslösungen, die den hier vorgeschlagenen eingliedrigen Ansätzen ungefähr gleichwertig sind, vgl. Bilder 4b und 5b.

Das vorgestellte iterative Variationsverfahren wurde für unterschiedliche Randbedingungen und Belastungsfälle eingesetzt. Als Startfunktion für den Iterationsprozeß muß nicht die Biegelinie eines Balkens vorgegeben werden. Man kann auch geeignete „Plattenfunktionen“ mit Hilfe der Übertragungsmatrix (24) für beide Koordinatenrichtungen formulieren. In Tabelle 1 sind Lösungen für andere Randbedingungen und Belastungsfälle angegeben. Der Vergleich mit Lösungen nach Mizusawa (1994) und Timoshenko und Woinowsky-Krieger (1959) zeigt eine gute Übereinstimmung. Man sieht, daß die Anzahl notwendiger Iterationen von den Lagerungs- und Belastungsarten abhängt. Die maximale Anzahl der Vlasov-Schritte ist für Aufgaben, die keine Symmetrien erhalten, notwendig.

Weitere Beispiele für Rechteckplatten mit eingliedrigen Lösungsansätzen sind in Altenbach u.a. (1998 b) diskutiert.

3 Trapezplatten

Betrachtet werden im folgenden Trapezplatten nach Bild 6. Eine eingliedrige Ansatzfunktion im Sinne des Variationsverfahrens nach Vlasov/Kantorovich hat jetzt die Form

$$\tilde{w}(x_1, x_2) = W(x_1)\chi(x_1, x_2)$$

wobei die Ansatzfunktion $\chi(x_1, x_2)$ so zu wählen ist, daß die Randbedingungen für die Ränder $x_2 = \pm mx_1$ erfüllt werden. Wie im Falle der Rechteckplatte erhält man durch Einsetzen von \tilde{w} in das elastische Potential und Anwendung des Prinzips vom Minimum des elastischen Potentials, d.h. aus $\delta II = 0$, eine

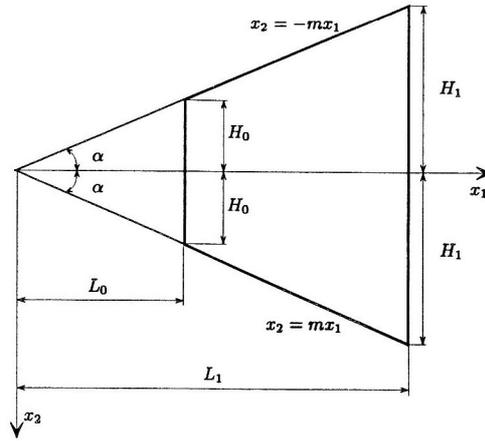


Bild 6. Trapezplatte: $m = \tan \alpha = H_1/L_1$

gewöhnliche Differentialgleichung für $W(x_1)$, die sog. Eulersche Differentialgleichung des Variationsproblems. In Abhängigkeit von den Randbedingungen der Trapezplatte ist nach Abschnitt 1 für das Potential Π_i der inneren Kräfte die Gleichung (1) oder die Gleichung (3) zu wählen.

Ist die Trapezplatte nach Bild 6 an allen Rändern starr eingespannt und durch eine konstante Flächenlast q_0 belastet, lautet das elastische Potential Π

$$\Pi(w) = \int_{L_0}^{L_1} \int_{-mx_1}^{mx_1} \left[\frac{1}{2} K (\Delta w)^2 - q_0 w \right] dx_2 dx_1 \quad (35)$$

Der eingliedrige Ansatz $\tilde{w}(x_1, x_2) = W(x_1)\chi(x_1, x_2)$ mit der vorgewählten Ansatzfunktion $\chi(x_1, x_2)$ und der unbekanntem Koeffizientenfunktion $W(x_1)$ erfüllt für $\chi(x_1, x_2) = (x_2^2 - m^2 x_1^2)^2$ die Randbedingungen am schrägen Rand

$$\tilde{w}(x_1, x_2 = \pm mx_1) = 0 \quad \tilde{w}_{,n}(x_1, x_2 = \pm mx_1) = 0$$

Für $K = \text{const}$ folgt aus Gleichung (35)

$$\Pi(\tilde{w}) = \frac{K}{2} \int_{L_0}^{L_1} \int_{-mx_1}^{mx_1} \{ \Delta [W(x_1)\chi(x_1, x_2)] \}^2 dx_2 dx_1 - \int_{L_0}^{L_1} \int_{-mx_1}^{mx_1} q_0 W(x_1)\chi(x_1, x_2) dx_2 dx_1 \quad (36)$$

Führt man die Integration über x_2 aus, erhält man ein eindimensionales Funktional Π , dessen Gesamtfunktion F von der gesuchten Koeffizientenfunktion $W(x_1)$ und deren Ableitungen bis zur zweiten Ordnung abhängt

$$\Pi(W(x_1)) = \int_{L_0}^{L_1} F(x_1, W, W', W'') dx_1 \quad (37)$$

Die Bedingung $\delta \Pi = 0$ führt auf eine gewöhnliche Differentialgleichung 4. Ordnung für $W(x_1)$ als Eulersche Differentialgleichung des Variationsproblems (37)

$$F_{,W} - \frac{d}{dx_1} F_{,W'} + \frac{d^2}{dx_1^2} F_{,W''} = 0 \quad (38)$$

Die Differentialgleichung für $W(x_1)$ kann man auch einfacher mit Hilfe des Reduktionsverfahrens nach

Kantorovich ableiten

$$\int_{-mx_1}^{mx_1} \left\{ \Delta \Delta [W(x_1)\chi(x_1, x_2)] - \frac{q_0}{K} \right\} \chi(x_1, x_2) dx_2 = 0 \quad (39)$$

Im Unterschied zur Rechteckplatte hat die Differentialgleichung für $W(x_1)$ bei Trapezplatten veränderliche Koeffizienten. Die einfache Konstruktion allgemeiner Lösungen wie für die Rechteckplatte nach Abschnitt 2 mit Hilfe der Methode der Übertragungsmatrizen ist daher nicht möglich. Auch die Anwendung des Iterationsschemas kann nicht in der dargestellten Form erfolgen, da die Ansatzfunktionen die Randbedingungen für die Ränder $x_2 = \pm mx_1$ erfüllen müssen. Für Trapezplatten ist die Variationsmethode nach Vlasov/Kantorovich somit ohne zusätzliche Überlegungen nur bedingt einsetzbar. Beispiele findet man u.a. in Altenbach u.a. (1998 a). Entspricht die Genauigkeit der eingliedrigen Näherungslösung nicht den Anforderungen, können im Rahmen der Variationsmethode mehrgliedrige Lösungsansätze gewählt werden. Wegen des damit verbundenen hohen Lösungsaufwandes wird man aber allgemein darauf verzichten und ein anderes Näherungsverfahren zur Lösung wählen. Trapezplatten werden daher hier nicht weiter betrachtet. Im Abschnitt 4 (Teil II) wird dafür am Beispiel von Parallelogrammplatten erläutert, wie eine Verallgemeinerung des Lösungsweges für Rechteckplatten bei schiefwinkligen Platten vorgenommen werden kann.

Danksagung

Die Autoren möchten sich ausdrücklich beim Gutachter für die gegebenen Hinweise, die zu einer höheren Verständlichkeit der Arbeit beigetragen haben, bedanken.

Literatur

1. Altenbach, J., Altenbach, H., Naumenko, K.: Ebene Flächentragwerke. Berlin u.a.: Springer-Verlag (1998 a).
2. Altenbach, J., Kissing, W., Altenbach, H.: Dünnwandige Stab- und Stabschalentragwerke. Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg (1994).
3. Altenbach, J., Naumenko, K., Naumenko, V.: Analysis of rectangular thin plates and plate structures basing on the Vlasov's variational procedure. CAMES, 5, (1998 b), 115–128.
4. Chia, C.-Y.: Nonlinear Analysis of Plates. New York: McGraw-Hill (1980).
5. Göldner, H.: Die Reduktionsmethode in der Elastizitätstheorie. Wissenschaftliche Zeitschrift der TH Dresden, 10, 2, (1961), 337–352.
6. Grigorenko, Y. M., Tumashova, O. V.: Napryazhenno-deformirovannoe sostoyanie gibkikh cilindricheskikh panelei s peremennymi geometricheskimi parametrami (Stress-strain state of flexible cylindrical panels with variable geometric parameters). Prikl. mekh., 25, 5, (1989), 37–45.
7. Kryukov, N. N.: Chislennoe reshenie zadach o deformacii otkrytykh gibkikh nekrugovykh cilindricheskikh obolochek peremennoi zhestkosti (Numerical solution of problems on the deformation of open flexible noncircular cylindrical shells of variable stiffness). Prikl. mekh., 20, 11, (1984), 71–76.
8. Liew, K. M., Wang, C. M.: PB-2 Rayleigh – Ritz method for general plate analysis. Eng. Struct., 15, 1, (1993), 55–60.
9. Mizusawa, T.: Application of the spline element method to analyse the bending of skew plates. Computers & Structures, 53, 2, (1994), 439–448.
10. Reissner, E., Stein, M.: Torsion and Transverse Bending of Cantilever Plates. NACA Tech. Note 2369 (June 1951).
11. Timoshenko, S. P., Woinowsky-Krieger, S.: Theory of Plates and Shells. New York: McGraw-Hill (1959).
12. Vlasov, V. Z.: Thinwalled Spatial Systems (in Russ.) (1958).

Anhang A: Übertragungsmatrizen für Plattenaufgaben

$s > r$	$\zeta_1 =$ $\cosh \alpha \eta \sin \beta \eta$	$\zeta_2 =$ $\cosh \alpha \eta \cos \beta \eta$	$\zeta_3 =$ $\sinh \alpha \eta \cos \beta \eta$	$\zeta_4 =$ $\sinh \alpha \eta \sin \beta \eta$
	$W(0)$	$\varphi(0)$	$M(0)$	$Q^*(0)$
$W(\eta)$	$2\alpha\beta\zeta_2 - (r^2 - t^2)\zeta_4$	$\frac{1}{s^2}[(s^2 - t^2)\alpha\zeta_1 + (s^2 + t^2)\beta\zeta_3]$	$-\zeta_4$	$-\frac{1}{s^2}(\alpha\zeta_1 - \beta\zeta_3)$
$\varphi(\eta)$	$\begin{bmatrix} (s^2 - t^2)\alpha\zeta_1 \\ -(s^2 + t^2)\beta\zeta_3 \end{bmatrix}$	$2\alpha\beta\zeta_2 + (r^2 - t^2)\zeta_4$	$-(\alpha\zeta_1 + \beta\zeta_3)$	$K_{\varphi Q} = K_{WM}$
$M(\eta)$	$(s^4 - 2r^2t^2 + t^4)\zeta_4$	$-\frac{1}{s^2}\{[t^4 - s^4 + 2s^2(r^2 - t^2)]\alpha\zeta_1 - [t^4 - s^4 - 2s^2(r^2 - t^2)]\beta\zeta_3\}$	$K_{MM} = K_{\varphi\varphi}$	$K_{MQ} = K_{W\varphi}$
$Q^*(\eta)$	$-\begin{bmatrix} [t^4 - s^4 + 2s^2(r^2 - t^2)]\alpha\zeta_1 \\ [t^4 - s^4 - 2s^2(r^2 - t^2)]\beta\zeta_3 \end{bmatrix}$	$K_{Q\varphi} = K_{MW}$	$K_{QM} = K_{K\varphi W}$	$K_{QQ} = K_{WW}$

Tabelle 2. Übertragungsmatrix, $s > r$

$s < r$	$\zeta_1 =$ $\sinh \beta \eta$	$\zeta_2 =$ $\cosh \alpha \eta$	$\zeta_3 =$ $\sinh \alpha \eta$	$\zeta_4 =$ $\cosh \beta \eta$
	$W(0)$	$\varphi(0)$	$M(0)$	$Q^*(0)$
$W(\eta)$	$-(t^2 - \beta^2)\zeta_2 + (t^2 - \alpha^2)\zeta_4$	$-\frac{1}{\alpha\beta}[\alpha(t^2 - \beta^2)\zeta_1 - \beta(t^2 - \alpha^2)\beta\zeta_3]$	$\zeta_4 - \zeta_2$	$\frac{1}{\alpha\beta}(\alpha\zeta_1 - \beta\zeta_3)$
$\varphi(\eta)$	$\begin{bmatrix} \beta(t^2 - \alpha^2)\zeta_1 \\ -\alpha(t^2 - \beta^2)\zeta_3 \end{bmatrix}$	$-(t^2 - \beta^2)\zeta_4 + (t^2 - \alpha^2)\zeta_2$	$\beta\zeta_1 - \alpha\zeta_3$	$K_{\varphi Q} = K_{WM}$
$M(\eta)$	$[t^2(t^2 - 2r^2) + \alpha^2\beta^2](\zeta_4 - \zeta_2)$	$-\frac{1}{\alpha\beta}[\alpha(t^2 - \beta^2)^2\zeta_1 - \beta(t^2 - \alpha^2)^2\zeta_3]$	$K_{MM} = K_{\varphi\varphi}$	$K_{MQ} = K_{W\varphi}$
$Q^*(\eta)$	$[\beta(t^2 - \alpha^2)^2\zeta_1 - \alpha(t^2 - \beta^2)^2\zeta_3]$	$K_{Q\varphi} = K_{MW}$	$K_{QM} = K_{K\varphi W}$	$K_{QQ} = K_{WW}$

Tabelle 3. Übertragungsmatrix, $s < r$

Adressen: Dr.-Ing. Konstantin Naumenko, Prof. Dr.-Ing. Holm Altenbach, Fachbereich Ingenieurwissenschaften, Lehrstuhl für Technische Mechanik, Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, D-06099 Halle, Prof. Dr.-Ing. Dr.h.c. Johannes Altenbach, Förderstedter Str. 28, D-39112 Magdeburg