

# Vernetzungskriterien für kerbbeanspruchungsorientierte FE-Analysen

E. Weiß, J. Rudolph, J. Hoffmann

*Die zunehmende Nutzung lokaler Konzepte des rechnerischen Ermüdungsfestigkeitsnachweises erfordert die korrekte Erfassung konstruktiver Details (z. B. Schweißnahtbereiche) innerhalb des Berechnungsmodells. Die zum Einsatz kommenden numerischen Berechnungsverfahren wie die Finite-Elemente-Methode (FEM) sind einerseits prädestiniert für die Beanspruchungsermittlung in Kerbbereichen, andererseits aber bereits vom Ansatz her mit dem Diskretisierungsfehler behaftet, der sich besonders drastisch in Bereichen hoher Beanspruchungsgradienten auswirkt und zu Unsicherheiten bei der Ergebnisbewertung führt. Um diese Unsicherheiten zu reduzieren, werden konkrete und generell anwendbare Richtlinien zur Elementierung im Rahmen der 2D-FE-Modellierung vorgestellt, die ohne adaptive Netzverfeinerung (adaptive meshing) zu optimaler Ergebnisgenauigkeit bei der Kerbspannungsanalyse führen.*

## 1 Einleitung

Moderne rechnerische Verfahren des Ermüdungsfestigkeitsnachweises nach lokalen Konzepten (z.B. Richtlinienkatalog, 1986; Haibach, 1989; Radaj, 1995; Rudolph und Weiß, 1997) erfordern eine detaillierte Festigkeitsanalyse. Entsprechend hohe Anforderungen werden an die zum Einsatz kommenden numerischen Berechnungsverfahren, wie die Finite-Elemente-Methode (FEM) oder die Randelementmethode (BEM), gestellt. Generell kann diesen numerischen Verfahren attestiert werden, den gestellten Anforderungen zumindest potentiell gerecht zu werden. Wesentlichen Einfluß auf die Güte der erzielten Lösungen nehmen jedoch das gewählte Bauteilmodell und die gewählte Vernetzungsstrategie insbesondere in Bereichen hoher Beanspruchungsgradienten. Für die praktische Durchführung des rechnerischen Ermüdungsfestigkeitsnachweises ist es folglich erforderlich, eindeutige Richtlinien zur Elementauswahl und Elementierung insbesondere im Bereich von Kerben bereitzustellen, die sich auf konkrete ermüdungsrißgefährdete Bauteilbereiche übertragen lassen. Dabei weisen besonders geschweißte Bauteilbereiche eine erhöhte Sensibilität gegenüber zyklischer Belastung auf, da zum einen ihre äußere Form in der Regel zu hoher geometrischer Kerbwirkung führt, zum anderen aber auch das Schweißnahtgefüge Mikrokerbwirkung hervorruft. Der Beanspruchungsermittlung im Bereich der Feinstruktur der Schweißnaht kommt folglich besondere Bedeutung zu, sofern man sich zur Nachweisführung des lokalen, kerbspannungsorientierten Konzeptes bzw. des Kerbgrundkonzeptes bedient. Im Rahmen des vorliegenden Aufsatzes werden für ebene Kerbprobleme konkrete Lösungsvorschläge unterbreitet, wobei zunächst eine eindeutige Definition des Kerbbegriffes mit entsprechenden Anmerkungen zur Berechenbarkeit von Kerben stehen soll.

## 2 Zum Kerbbegriff

Mit Blick auf die rechnerische Behandlung der Ermüdungsfestigkeit ist es von erheblicher methodischer Bedeutung, eine gedankliche und definitionsgemäße Trennung von Mikro- und Makrokerbwirkung vorzunehmen. Unter einer Mikrokerbe soll dabei in Anlehnung an (Richtlinienkatalog, 1986) eine sehr kleine, geometrisch meist nicht eindeutig definierte Kerbe verstanden werden. Hierzu gehören beispielsweise Rauigkeiten und Unregelmäßigkeiten der Schweißnahtoberfläche, aber auch Einschlüsse und andere Inhomogenitäten im Inneren des Materials. Ihre Berücksichtigung in der Nachweisführung erfolgt in der Regel durch experimentell ermittelte und statistisch abgesicherte Faktoren bzw. durch die Bereitstellung von Wöhlerkurven, die verschiedene Einflüsse bereits enthalten. Die Makrokerbe läßt sich als eine in ihrer Geometrie in der Regel definierte und damit berechenbare Kerbe auffassen (Richtlinienkatalog, 1986). Sie kann bei Nutzung der modernen Instrumentarien der Festigkeitsanalyse weitgehend in das Berechnungsmodell integriert werden. Als Makrokerbe im weiteren Sinn sollte in Anlehnung an Radaj (1995) aber auch das Aufeinandertreffen unterschiedlicher Werkstoffe (Werkstoffkerbe) wie z. B. bei Austenit-Ferrit-Verbindungen (siehe z. B. Weiß u. a., 1997) und das Auftreten singularer Lasten (Belastungskerbe) betrachtet werden. Die Geometriekerbe als Untermenge der Makrokerbe läßt sich hingegen noch in die Begriffe Strukturkerbe und Kerbe mit definiertem Radius aufteilen. Als Strukturkerbe soll dabei die Veränderung der Krümmungsverhältnisse eines Flächentragwerkes (z. B. torisphärische Böden) oder auch Wanddickenänderungen aufgefaßt werden. Die Strukturkerbe läßt sich häufig bereits mit analytischen Methoden der Festigkeitsberechnung (z. B. Biegetheorie der Rotationsschalen (siehe z. B. Timoshenko und Woinowsky-Krieger, 1959; Flügge, 1962) erfassen. Die unter dem Begriff Kerbe mit definiertem Radius zusammengefaßte Untermenge umfaßt die Kerbe im engeren Sinn, die nur in den einfachsten Fällen

analytisch (siehe z. B. Neuber 1985), zumindest im 2D-Bereich jedoch immer numerisch mittels detaillierter FE-Modellierung (siehe z. B. Radaj, 1975; Rainer, 1985; Rudolph, 1997) zu erfassen ist. Zur letztgenannten Kategorie gehört letztendlich auch die geometrisch beschreibbare äußere Kontur der Schweißnaht einschließlich ihrer Übergänge (siehe z. B. Rainer, 1985; Rudolph und Weiß, 1996), die einen erheblichen Einfluß auf das Ermüdungsverhalten einer Schweißkonstruktion hat (siehe z. B. Rudolph und Weiß, 1996, 1997). Das Schema nach Bild 1 liefert eine dem beschriebenen Konzept folgende Klassifizierung des ermüdungsrelevanten Kerbbegriffes. Gegenstand der im folgenden darzulegenden Elementierungsstrategie ist im wesentlichen die Geometrie Kerbe und dabei besonders die Kerbe mit definiertem Radius. Sie ist beim detaillierten rechnerischen Ermüdungsfestigkeitsnachweis, z. B. nach lokalem, kerbspannungsorientiertem Konzept Gegenstand der Beanspruchungsanalyse, während der Zweig Mikrokerbe nach Bild 1 in den Bereich der Beanspruchungsbewertung fällt und damit auf die Bereitstellung von Ermüdungskennlinien bzw. zusätzlichen Faktoren hinausläuft, die die genannten Mikrokerbwirkungseffekte enthalten.

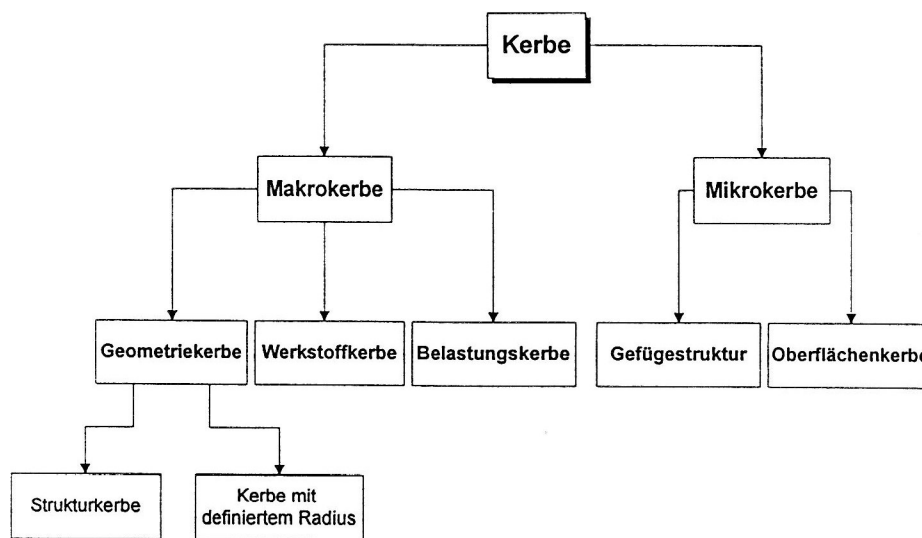


Bild 1. Klassifizierung des Kerbbegriffes

Bei der Behandlung scharfer Kerben ist stets die Mikrostützwirkung des Werkstoffes zu beachten (Neuber, 1968), die zu einer Abminderung der theoretischen Maximalbeanspruchung führt. Rechnerische Berücksichtigung kann sie durch eine fiktive Vergrößerung des Kerbradius nach Neuber (1968) bzw. speziell für Schweißnähte nach Radaj (1985) oder nach dem Spannungsgradientenansatz nach Siebel, Meuth und Stieler (siehe z. B. Siebel und Stieler, 1955; Richtlinienkatalog, 1986; Jaenicke, 1988; Radaj, 1995) finden.

Für die Berechnungspraxis erscheint die fiktive Erhöhung des realen Kerbradius innerhalb des FE-Modells zunächst am leichtesten handhabbar zu sein, mit den modernen Möglichkeiten des Postprocessing läßt sich aber auch das Gradientenverfahren ohne größere Schwierigkeiten realisieren.

### 3 Bewertung des Approximationsfehlers bei der Anwendung numerischer Berechnungsverfahren

Numerische Verfahren wie die Finite-Elemente-Methode (FEM) und die Randelementmethode (BEM) sind aufgrund ihres approximativen Charakters ungeachtet der erzielbaren Genauigkeit bereits vom Ansatz her mit Fehlern behaftet, die sich aus Modellbildung, Elementauswahl und Diskretisierungsgrad ergeben. Alle genannten Fehlerarten können vom Anwender der Methoden gezielt beeinflusst und minimiert werden. Während sich der Detailliertheitsgrad des Modells (z. B. Erfassung konstruktiver Details) und die Elementauswahl (z. B. Schalen- oder Volumenelemente) an den Erfordernissen der jeweiligen Nachweisführung (z. B. detaillierter rechnerischer Ermüdungsfestigkeitsnachweis) orientieren muß, läßt sich der dem Ansatz bereits anhaftende Diskretisierungsfehler über die Art und Dichte der Vernetzung gezielt steuern und in die Grenzen praxisrelevanter Ergebnisgenauigkeit drängen. Die Anzahl der Elemente beeinflusst wesentlich die Exaktheit der zu erwartenden Resultate. Besonders in Bereichen hoher Beanspruchungsgradienten ist deshalb eine möglichst enge Vernetzung anzustreben, wobei die verwendeten Elemente lediglich geringe Verzerrungen zur Anpassung an die vorgegebene Geometrie erfahren sollten. Diese Grundregel wird in der praktischen Anwendung numerischer

Verfahren zur konkreten Bauteilanalyse in der Regel bereits rein intuitiv befolgt (siehe z. B. Weiß u.a., 1995). Genauigkeitssteigerung ist durch Erhöhung der Elementanzahl (h-Adaptivität), durch Netzverdichtung in der Umgebung hoher Beanspruchungsgradienten (r-Adaptivität) und schließlich durch Erhöhung des Grades der Ansatzfunktionen für die einzelnen Elemente (p-Adaptivität) erreichbar. Die Genauigkeitssteigerung bei Nutzung von Elementen mit quadratischen Ansatzfunktionen wird mit längeren Rechenzeiten und Konvergenzschwierigkeiten bei nichtlinearen Analysen erkauft. Die steigenden Genauigkeitsanforderungen bei der Erfassung hoher Beanspruchungsgradienten haben zur Entwicklung spezieller Elementtypen (p-Elemente) geführt (siehe z. B. Peano, 1976; Rust und Müller, 1995), deren Implementierung innerhalb kommerzieller Programmsysteme derzeit noch im Entwicklungsstadium ist (z.T. Beschränkung auf linearelastische Analysen, beschränkte Auswertungsmöglichkeiten hinsichtlich Fehlergrößen usw. (ANSYS, 1996). Interessant ist dabei die Möglichkeit der variablen Anpassung des Grades der Ansatzfunktionen an die Genauigkeitsforderungen des jeweiligen Modells.

Da die Kopplung zwischen angrenzenden Elementen über gemeinsame Knoten mit entsprechenden Übergangsbedingungen erfolgt, wird bei der strukturmechanischen Analyse die Stetigkeit der Verschiebung gewährleistet. Abgesehen von speziellen hermiteschen Elementen (siehe z. B. Zienkiewicz, 1975; Smith und Duncan, 1970; Watson, 1986; Beer und Watson, 1992), die bei der Implementierung in Programmcodes erhebliche Schwierigkeiten bereiten, kann die Stetigkeit des Tangentenanstiegs, d. h. der ersten Ableitung, vom Ansatz her nicht erfüllt werden. Die abgeleiteten Größen (z. B. Spannungen) weisen deshalb an den Elementrändern Sprünge auf, die als Klaffung (siehe z. B. Schnack, 1976; Weiß und Krieg, 1989; Weiß u.a., 1989) bezeichnet werden und ein Maß für die Genauigkeit einer durchgeführten Analyse darstellen. Die Klaffung der Spannungskomponente  $\sigma_{ij}$  am Knoten  $k$  läßt sich durch die Gleichung

$$F_{\sigma_{ij,k}} = \frac{|\sigma_{ij,k}(\text{ungemittelt}) - \sigma_{ij,k}(\text{gemittelt})|}{\sigma_{ij,k}(\text{Bezug})} \quad (1)$$

darstellen. Als Bezugswert  $\sigma_{ij,k}(\text{Bezug})$  käme idealerweise die exakte Referenzlösung in Frage, die jedoch in den meisten praktischen Fällen nicht zur Verfügung stehen wird. In Anlehnung an Weiß und Krieg (1989) bieten sich jedoch folgende Referenzgrößen an:

- der größte Wert  $\sigma_{ij}$  im betrachteten Gebiet (Element)
- der gemittelte Wert  $\sigma_{ij}$  im betrachteten Gebiet (Element)
- der gemittelte Wert  $\sigma_{ij}$  am Knoten  $k$ .

Der letztgenannte Wert steht dabei als Standardausgabegröße innerhalb des Postprocessing kommerzieller FE-Programmsysteme zur Verfügung. Die Spannungen werden in der Regel aufgrund der zur Anwendung kommenden numerischen Integration nicht direkt in den Knoten, sondern in den sogenannten Gaußpunkten innerhalb des Elementes und damit dort auch am genauesten ermittelt, zu den Knoten hin extrapoliert und dann an den Elementgrenzen gemittelt. Die Differenz zwischen ungemitteltem und gemitteltem Knotenwert erscheint zunächst als sinnvolles Fehlermaß.

Eine weitverbreitete, leicht handhabbare und in FE-Programmsystemen standardmäßig implementierte Methode (Müller und Rehfeld, 1993; Rust und Müller, 1995; ANSYS, 1996) der Abschätzung des Diskretisierungsfehlers stellt die Fehlerenergienorm nach Zienkiewicz und Zhu (1989) dar. Hierbei geht man ebenfalls von den realitätsfremden Spannungssprüngen an den Elementrändern im Vergleich zu den gemittelten Beanspruchungswerten aus. Fehlerkriterium bildet dann die sogenannte Energienorm aus den Spannungsdifferenzen im Vergleich zur Energienorm aus den berechneten Spannungen selbst (Rust und Müller, 1995). Die Fehlerenergienorm  $F$  ergibt sich dann aus dem Ausdruck

$$F = \sqrt{\frac{\text{Gesamtfehlerenergie}}{\text{Gesamtfehlerenergie} + \text{Gesamtformänderungsenergie}}} \quad (2)$$

Sie ist innerhalb des Postprocessing explizit als Auswertungsgröße abrufbar. Die Anforderungen an den Diskretisierungsgrad können damit zahlenmäßig als Unterschreitungsforderung einer bestimmten prozentualen Fehlergrenze formuliert werden. Durch sequenzielle Netzverfeinerung innerhalb mehrerer Analysen kann nun die Unterschreitung der vorgegebenen Fehlergrenze erzwungen werden. Dieser Verfeinerungsprozeß wird allgemein als adaptive Vernetzung (adaptive meshing) bezeichnet und läßt sich beispielsweise innerhalb des FE-Programmsystems einfach in Makroform weitgehend automatisieren (siehe z. B. Müller und Rehfeld, 1993; ANSYS, 1996;). Generell läßt sich jedoch feststellen, daß von dieser iterativen Netzverfeinerung in der Berechnungspraxis häufig kein Gebrauch gemacht wird. Neben der durch die Netzanpassung bedingten Erhöhung der Rechenzeit bleibt als objektives Argument anzuführen, daß sowohl Klaffung als auch Fehlerenergienorm

allenfalls tendenzielle und generelle Angaben zum Diskretisierungsfehler erlauben, über die prozentuale Güte der Absolutwerte speziell bei hohen Beanspruchungsgradienten jedoch keine eindeutige Aussage zulassen. Als Ausweg bietet sich hier die systematische Kalibrierung des verwendeten Netzes durch Verifikation anhand von Kerbfällen an, für die „exakte“ analytische Referenzlösungen vorliegen. Dieser Weg wird im folgenden Abschnitt besprochen.

Zusätzlich sollten FEM und BEM als alternative Verfahren zur Ermittlung von Kerbbeanspruchungen vergleichend und bewertend gegenübergestellt werden. Sofern zumindest in modellierungstechnischen Teilbereichen allgemeingültige, streng mathematisch oder zumindest empirisch begründete Vernetzungsrichtlinien abgeleitet werden können, erübrigt sich eine adaptive Vernetzung von vornherein. Im Mittelpunkt sollten dann praxisrelevante Anwendungsfälle wie die detaillierte Modellierung von Schweißnahtbereichen stehen, wie sie beispielsweise für die Durchführung des Ermüdungsfestigkeitsnachweises nach lokalem, kerbspannungsorientiertem Konzept benötigt wird.

Ergänzend bleibt anzumerken, daß im Modell, das der Kerbbeanspruchungsermittlung zugrunde liegt, scharfe, radienlose Kanten (z. B. an den Schweißnahtübergängen) von vornherein zu vermeiden sind, da sie Singularitäten mit theoretisch unendlich hohen Spannungsspitzen darstellen. In diesem Fall erübrigen sich jegliche Überlegungen zur Steigerung der Netzgüte. Die mancherorts vor allem mit Blick auf die Randelementmethode (BEM) vorgeschlagene Nutzung sogenannter singulärer Elemente (Beer und Watson, 1992; Watson, 1995) ist für Betrachtungen auf der Grundlage bruchmechanischer Methoden interessant (Forster,) liefert jedoch keine Lösung für das kerbspannungsorientierte Konzept des Ermüdungsfestigkeitsnachweises.

#### 4 Entwicklung einer Vernetzungsstrategie anhand elementarer Kerbfälle

Unter Beachtung der im vorhergehenden Abschnitt dargelegten Überlegungen wurden zunächst elementare ebene bzw. rotationssymmetrische Kerbstab- und Schweißstoßmodelle (Bild 2) unter Zugbelastung auf Basis der Finite-Elemente-Methode (FEM) untersucht. Exemplarische Netzkonfigurationen sind Bild 3 zu entnehmen. Die gezeigten Kerbformen bieten den Vorteil der direkten Vergleichbarkeit vorrangig mit analytischen, erweiternd aber auch mit aus der Fachliteratur bekannten experimentellen und numerischen Referenzlösungen (Peterson, 1953; Babuska und Kantsky, 1963; Neuber, 1969, 1985; Bart u.a., 1976; Savin und Tulchiy, 1976). Makro- und Mikrostützwirkungseffekte (Neuber, 1968) des realen kerbbeanspruchten Materials sollen dabei zunächst nicht Gegenstand der Betrachtungen sein.

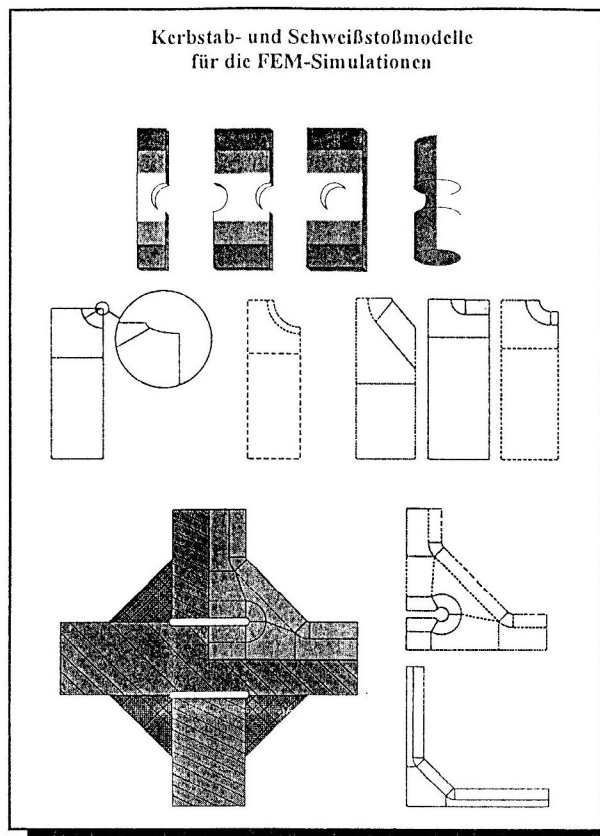


Bild 2. Beispiele für untersuchte Kerbformen

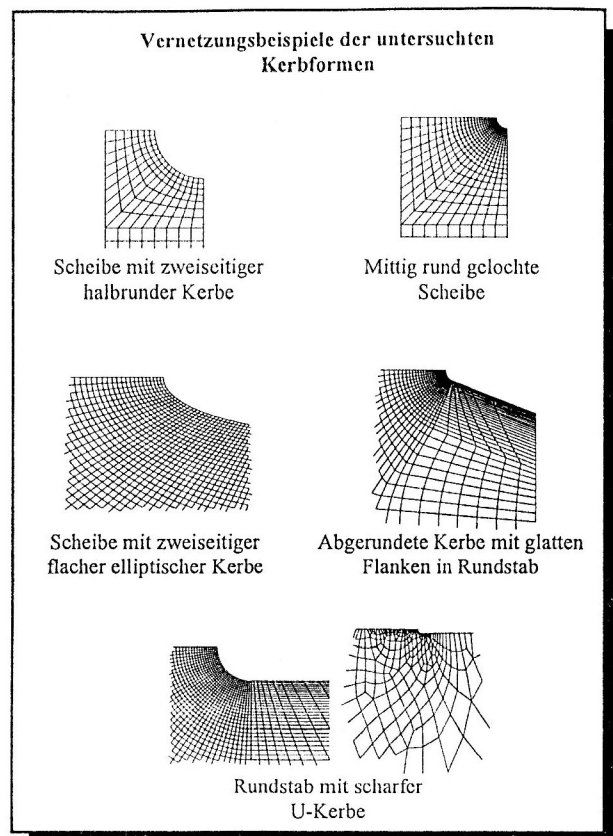


Bild 3. Vernetzungsbeispiele



Gestützt auf die Erfahrungen vorhergehender Untersuchungen (siehe z. B. Müller, 1996; Weiß u.a., 1997) manifestierte sich die Modellierung einer Randschicht möglichst unverzerrter Viereckselemente annähernd gleicher Kantenlänge im Bereich des höchsten Beanspruchungsgradienten, folglich des unmittelbaren Kerbgrundes. Verzerrte Elemente und Elemente mit großer Kantenlänge zur Abbildung des Gradienten führen von vornherein zu einer signifikanten Verschlechterung und Streuung des Berechnungsergebnisses. Als Idealfall nimmt man für ebene Kerbprobleme im Kerbgrund zunächst das Quadrat an, dessen Kantenlänge sich aus der zu bestimmenden notwendigen Elementanzahl für die zu untersuchende Kerbgrundlinie ergibt.

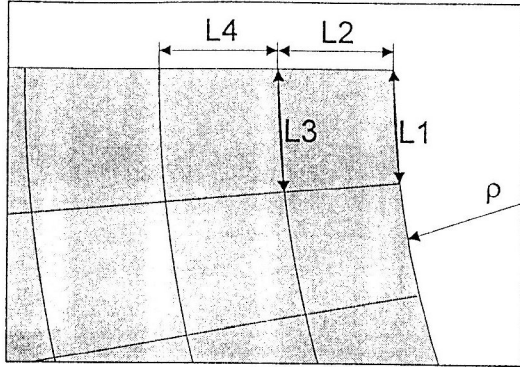


Bild 4. Bezeichnung der Elementkantenlängen und des Kerbgrundradius

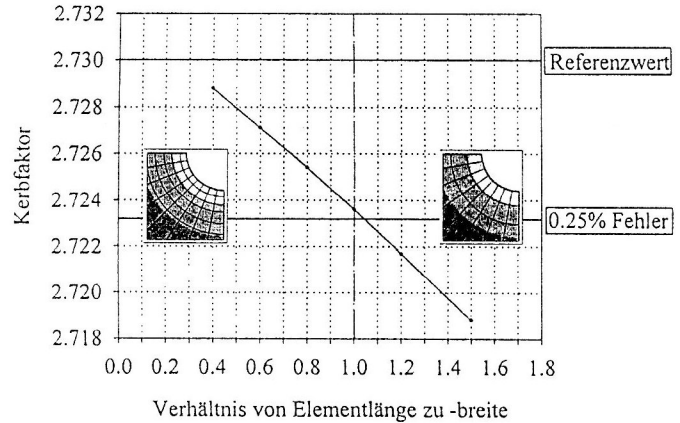


Bild 5. Einfluß des Verhältnisses von Elementlänge zu Elementbreite

Die Kantenlänge  $L1$  der Elemente im Kerbgrund Bild 4 einer Kerbe mit dem Radius  $\rho$  ergibt sich nach Vorgabe des gewünschten Diskretisierungsgrades, d.h. der Festlegung der Elementanzahl  $N_x$  entlang der Kerbgrundlinie aus der Gleichung:

$$L1 = 2 \cdot \rho \cdot \sin\left(\frac{\omega}{2 \cdot N_x}\right) \quad (3)$$

Es wird dabei idealisierend von geraden Elementseiten ausgegangen, wobei der Parameter  $\omega$  den im Modell unter Berücksichtigung möglicher Symmetriebedingungen nachzubildenden Teil des Kerbwinkels beschreibt. Für die FE-Modelle „Scheibe mit zweiseitiger halbrunder Kerbe“, „Mittig rund gelochte Scheibe“ und „Rundstab mit scharfer U-Kerbe“ nach Bild 3 gilt folglich  $\omega = 90^\circ$ .

Bei der Festlegung der Längen  $L2$  und  $L3$  (Bild 4) besteht das mathematische Optimierungsproblem nun in der Forderung der Minimierung der Längenunterschiede zwischen den einzelnen Seiten. Betrachtet man die Längendifferenzen als voneinander abhängige Fehler, so erhält man nach Gaußscher Fehlerfortpflanzung (Bronstein und Semendjajew, 1991)

$$\sigma = \sqrt{(L1 - L2)^2 + (L1 - L3)^2} \quad (4)$$

Die Länge  $L3$  läßt sich nach

$$\frac{L3}{L2 + \rho} = \frac{L1}{\rho} \Leftrightarrow L1 - L3 = -\frac{L1 * L2}{\rho} \quad (5)$$

elementar über den Strahlensatz darstellen und damit aus Gleichung (4) eliminieren:

$$\sigma = \sqrt{(L1 - L2)^2 + \frac{L1^2 * L2^2}{\rho^2}} \quad (6)$$

Über die Extremalbedingung

$$\frac{\partial \sigma}{\partial L2} = \frac{L1^2 * L2 - L1 * \rho^2 + L2 * \rho^2}{\rho * \sqrt{L1^2 * (L2^2 + \rho^2) - 2 * L1 * L2 * \rho^2 + L2^2 * \rho^2}} = 0 \quad (7)$$

erhält man die gesuchte Seitenlänge  $L_2$ :

$$L_2 = \frac{L_1 * \rho^2}{L_1^2 + \rho^2} \quad (8)$$

Durch wiederholtes Anwenden der Gleichungen (5) und (8) läßt sich die Breite jedes einzelnen Elementes in der Randschicht exakt festlegen und damit durch Aufsummieren von  $L_2$ ,  $L_4$  usw. auch die Randschichtdicke selbst. Für elliptische, hyperbel- oder parabelförmige Kerben ergibt sich bei der Herleitung einer solchen Berechnungsmethode die Besonderheit eines variablen Kerbradius  $\rho$ , der durch zusätzliche Elementaufweitung in tangentialer Richtung berücksichtigt werden könnte. Im allgemeinen läßt sich die Kerbkontur durch konstante Teilung im Bereich des Kerbgrundes jedoch hinreichend genau als ideale Abrundung approximieren.

Da die Idealform des Quadrates im Kerbgrund wie gezeigt aufgrund der realen Umrandung nicht erreicht wird, ist die Frage von Interesse, welche Einbußen an Rechengenauigkeit die realen Verhältnisse von Elementlänge zu -breite hervorrufen. In Bild 5 ist der Einfluß der Elementform im Kerbgrund auf das Ergebnis der Kerbfaktorberechnung für eine gelochte Scheibe dargestellt, wobei die Randschichtdiskretisierung in der Darstellung lediglich qualitativ wiedergegeben ist. Ausschlaggebend für die Beurteilung der Rechengenauigkeit ist dabei der zusätzlich in das Diagramm eingetragene analytische Referenzwert nach Savin und Tulchiy (1976). Ein Verhältnis 1,0 von Elementlänge zu -breite (Abszisse in Bild 4) stellt dabei die Quadratform dar. Es zeigt sich, daß eine relative Verlängerung der Elementkanten entlang der Kerbgrundlinie viel besser toleriert wird als eine solche in Radialrichtung. Die funktionale Abhängigkeit ist dabei quasilinear. Der numerisch belegte Zusammenhang steht im Einklang mit der Kerbspannungstheorie (Neuber, 1985), die die Ausbildung des maximalen Spannungsgefälles orthogonal zur Kerbgrundlinie vorhersagt. Zur Approximation des hohen Beanspruchungsgradienten sollten die Elementkantenlängen in dieser Richtung natürlich so klein wie möglich sein. Interessant bleibt die Beobachtung, daß nicht die quadratische Form die beste Annäherung an den analytischen Referenzwert liefert, sondern das in Richtung des maximalen Beanspruchungsgradienten gestauchte Rechteck. Die überaus hohe Genauigkeit mit Fehlern kleiner 0,25% gegenüber dem Referenzwert wird bei ebenen Elementen mit quadratischen Ansatzfunktionen mit einer Elementierung von 27 entlang der Kerbgrundlinie und 10 über die Randschichttiefe erreicht. Für die praktische Anwendung erscheint diese Genauigkeitsanforderung überzogen. Sie läßt jedoch andererseits Aussagen zur Leistungsfähigkeit des numerischen Verfahrens bei der Kerbbeanspruchungsermittlung zu.

Im folgenden soll der Fragestellung nachgegangen werden, inwieweit die bekannten Methoden zur Abschätzung des Diskretisierungsfehlers Aussagen hinsichtlich der korrekten Reflexion der Maximalbeanspruchung im Kerbgrund zulassen. Für den zweiseitig mit halbrunder Kerbe versehenen Zugstab (Bild 2) wurden die Verteilungen von Fehlerenergienorm und Klaffung über der gesamten Struktur verfolgt (Bild 6). Die Klaffung wurde dabei gemäß Gleichung (1) ermittelt, wobei die jeweils ungemittelten und gemittelten Knotenvergleichsspannungen nach der Schubspannungshypothese Verwendung fanden. Die Spannungsdifferenz aus ungemittelten und gemittelten Werten wurde dabei auf den Größtwert nach der Schubspannungshypothese im betrachteten Gebiet (Element) bezogen. Für praktische Belange ist diese Definition der Bezugsspannung als sinnvoll einzuschätzen, da ansonsten aufgrund einer latenten und durch Mittelung an jedem Knoten auftretenden Ungenauigkeit die Klaffung an Knoten mit sehr geringer Spannung sehr groß werden kann. Insbesondere die Darstellung der Fehlernorm in Bild 6 belegt, daß ihre Verteilung über der Struktur nicht direkt mit den auftretenden Beanspruchungsgradienten korreliert werden kann. Es ist die Tendenz unverkennbar, den Berechnungsfehler in Modellgebieten zu überschätzen, in denen eine exakte Vernetzung nicht notwendig ist. Wird unter diesen Bedingungen die Fehlernorm einer adaptiven Netzverfeinerung zugrunde gelegt, so erfolgt in den genannten Bereichen eine viel zu feine Elementierung, ohne eine Verbesserung des Berechnungsergebnisses zu liefern. Eine Aussage über die Netzgüte kann bei Nutzung der Fehlerenergienorm unter diesen Bedingungen natürlich nicht gemacht werden.

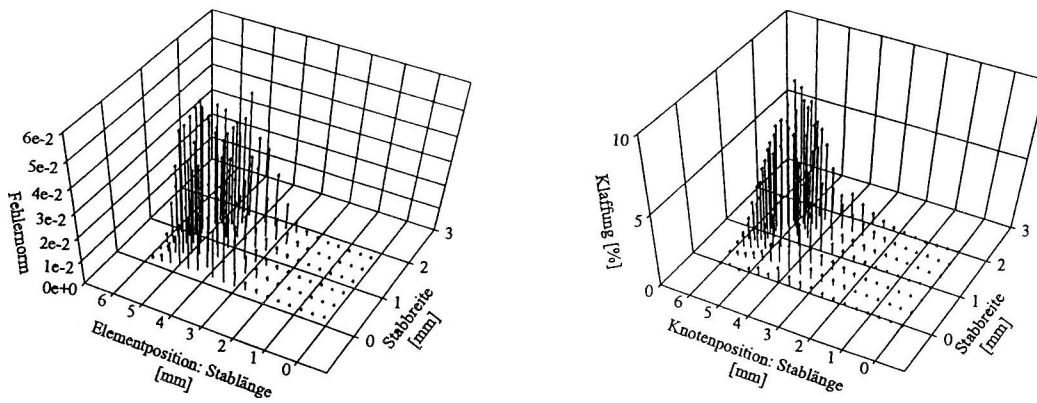


Bild 6. Fehlernorm und Klaffung

Bei der Klaffung ist dieser Effekt weniger stark ausgeprägt. Die Klaffungswerte erfahren in Bereichen hoher Spannungsgradienten eine starke Überhöhung (Bild 6), so daß sie sich besser als Grundlage für eine adaptive Netzverfeinerung eignen als die Fehlernorm. Dennoch offenbart sich bei gezielter Erhöhung des Diskretisierungsgrades eine entscheidende Schwäche des Fehlerbewertungskonzeptes auf der Basis der Klaffung. Bei theoretisch unendlich feiner Vernetzung müßte die über alle Elemente aufsummierte Klaffung des Modells gegen den Wert Null konvergieren. Die durchgeführten Untersuchungen zeigten jedoch, daß die programmtechnisch maximal realisierbare Netzfeinheit zu einem Grenzwert führt, der sowohl von der Elementanzahl als auch von der Elementform abhängig ist. Damit ergibt sich bei jeglicher Modifikation der Elementierung ein anderer Grenzwert. Obwohl das Rechenergebnis bei extrem feiner Vernetzung praktisch keine Änderung mehr erfährt, schwankt der Klaffungswert sowohl an einzelnen und in ihrer Form geringfügig veränderten Elementen im Kerbgrundbereich als auch in der Summe. Allein die Modifikation der Elementform entsprechend Bild 5 läßt sich zum Nachweis dieses Effektes heranziehen. Folglich erlaubt auch die Klaffung als Fehlermaß lediglich qualitative Angaben über die Netzgüte. Eine eindeutige quantitative Korrelation mit der Genauigkeit des Berechnungsergebnisses ist auch in diesem Fall nicht möglich. Als Bestandteil einer fundierten Vernetzungsstrategie für Kerbbereiche sind beide Fehlermaße folglich nur sehr bedingt geeignet und scheiden bei der Forderung einer nichtadaptiven Vorgehensweise von vornherein aus.

Von Interesse ist weiterhin das Konvergenzverhalten der FE-Analyse in Abhängigkeit vom Elementtyp und von der Elementanzahl im Kerbgrund. Für die diesbezüglichen Untersuchungen wurde der Rundstab mit U-Kerbe ausgewählt, für den ein exakter analytischer Referenzwert vorliegt. Entsprechend Bild 7 kamen ebene Elemente in Vierecksform mit linearen und quadratischen Ansatzfunktionen, Dreieckselemente mit quadratischen Ansatzfunktionen und p-Elemente in Vierecksform mit variablem Polynomansatz zum Einsatz. Es fällt zunächst auf, daß lediglich Elemente in Vierecksform bei Erhöhung der Elementanzahl im Kerbgrund stabiles Konvergenzverhalten im Berechnungsergebnis gegen den analytischen Referenzwert gewährleisten. Dreieckselemente sollten folglich für den unmittelbaren Kerbgrund keine Verwendung finden, was wiederum im völligen Einklang mit der allgemeinen FE-Berechnungserfahrung und -praxis steht (siehe z. B. Köttgen u. a., 1993; Niemi, 1993; Schmidt, 1994; Naubereit, 1996, 1997; Rudolph und Weiß, 1996; Petershagen, 1997; Rudolph, 1997). Das Konvergenzverhalten bei Nutzung von Viereckselementen deutet erwartungsgemäß eindeutig auf die Favorisierung der nichtlinearen Ansatzfunktionen. Für die praktische Anwendung geht die Empfehlung zum jetzigen Zeitpunkt eindeutig in Richtung Viereckselemente mit quadratischen Ansatzfunktionen. Im vorliegenden Beispiel wird bei diesem Elementtyp der exakte Referenzwert unter stabilem Konvergenzverhalten (Bild 7) bei einer Elementzahl von 30 im Kerbgrund erreicht. Bereits mit 12 Elementen entlang der Kerbgrundlinie wird die 1%-Fehlergrenze in diesem Beispiel unterschritten. Selbst diese Genauigkeit kann für sämtliche praktischen Belange mit Blick auf die stets vorhandenen Unsicherheiten bei der Modellbildung als unnötig hoch betrachtet werden.

Bei allen durchgeführten Untersuchungen stellte sich heraus, daß die extrem hohen Anforderungen an Elementform und -anzahl lediglich für den unmittelbaren Kerbgrund Gültigkeit besitzen. In den nicht unmittelbar vom hohen Kerbbeanspruchungsgradienten betroffenen Bereichen der Struktur ist sowohl eine Vergrößerung des Vierecksnetzes als auch ein Übergang zu einem Hybrid- oder Dreiecksnetz möglich. Diese Aussage ist mit Blick auf den erheblichen Modellierungsaufwand bei der Beibehaltung eines reinen Vierecksnetzes (Fortsetzung der Randschicht in angrenzenden Bauteilbereichen z.B. Müller (1996); Weiß u.a. (1997) usw.) von außerordentlich großer anwendungstechnischer Bedeutung.

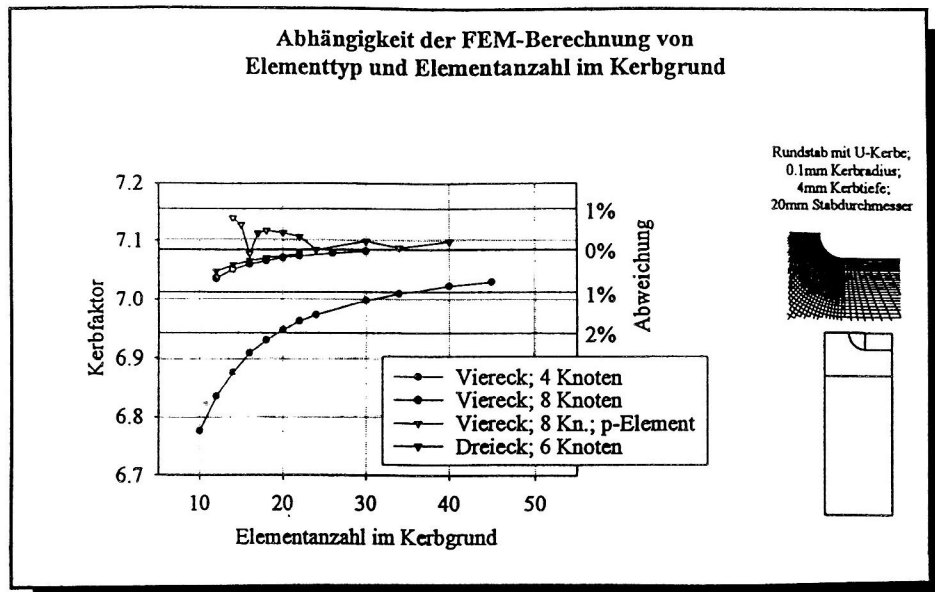


Bild 7. Einfluß von Elementtyp, Elementanzahl im Kerbgrund und Ansatzfunktion

Zusammenfassend können folgende Anforderungen an eine optimale Vernetzung zur Berechnung ebener Kerbprobleme formuliert werden:

- Der unmittelbare Kerbgrund wird durch eine aus mehreren Reihen möglichst exakt quadratischer Elemente mit quadratischen Ansatzfunktionen bestehende Randschicht nachgebildet. Diese Randschicht soll eine Tiefe von mindestens zehn Elementen haben.
- Entlang einer abgerundeten Kerbgrundlinie mit einem Winkel von  $90^\circ$  werden 18 Elemente mit quadratischen Ansatzfunktionen empfohlen. Damit liegt die Abweichung zwischen analytischer Referenzlösung und der Berechnung nach FEM immer unter 2%, folglich in jedem Fall innerhalb des praxisrelevanten Toleranzbereiches. Die notwendige Elementanzahl  $n$  für andere Kerbwinkel  $\omega$  kann nach

$$n = \text{NINT}\left(\frac{18 \cdot \omega}{90^\circ}\right) \quad (9)$$

selbstverständlich sinngemäß durch lineare Verhältnisbildung bestimmt werden.

- Für die Diskretisierung der angrenzenden Bereiche können zur Senkung des Modellierungs- und Berechnungsaufwandes Dreiecks-, Vierecks- oder Hybridnetze Verwendung finden.

Die Anwendung der genannten Kriterien liefert für die Berechnungspraxis ebener Kerbprobleme eine anwendungsbereite Richtschnur, um ohne Nutzung adaptiver Vernetzungstechniken bei geringstmöglichem Modellierungsaufwand zu optimaler Ergebnisgenauigkeit zu gelangen. Insbesondere die Randschichtmodellierung läßt sich innerhalb kommerzieller FE-Programmsysteme (z.B. ANSYS, 1996) in Makroform weitestgehend automatisieren.

Die Ableitung der Vernetzungskriterien erfolgte durch die systematische Untersuchung zugbeanspruchter Kerbstäbe. Nachfolgende Testrechnungen belegten jedoch ohne Ausnahme die Übertragbarkeit der gewählten Strategie auf Biege- und Torsionsbelastung.

Im folgenden Abschnitt soll anhand einiger ausgewählter Beispiele die praktische Anwendung der formulierten Vernetzungskriterien gezeigt werden.

## 5 Anwendungsbeispiele

Zunächst wurde ein abgesetzter Flachstab unter Zugbeanspruchung nach Bild 8 als Anwendungsbeispiel herangezogen, da hierfür zum einen sowohl FE-Vergleichslösungen in tabellierter (Francavilla u.a., 1975) und durch Approximationsfunktionen (DUBBEL, 1983; Rainer, 1985) angepaßter Form als auch experimentelle Referenzwerte nach Peterson (1953) zur Verfügung stehen. Zum anderen konnte das BEM-Programm B2 (Forster, 1998) in der Version 1.04 benutzt werden, um Vergleichsrechnungen des ebenen Kerbproblems auf der Basis Hermitescher Randelemente durchzuführen. Der Vergleich nach Tabelle 1 unter Variation des Kerbradius  $\rho$  zeigt zunächst, daß die errechneten Werte für die Formzahl  $\alpha$

$$\alpha = \frac{\sigma_{1\max}}{\sigma_N} \quad (10)$$



( $\sigma_{1\max}$  ... Maximalwert der ersten Hauptspannung im Kerbgrund;  $\sigma_N$  ... Nominalspannung im engsten Querschnitt der Breite  $2 \cdot a$ ) nach DUBBEL (1983), Rainer (1985) und unter Anwendung der formulierten Vernetzungskriterien (Rubrik „FEM mit Vernetzungskriterien“) nahezu Identität aufweisen. Die Leistungsfähigkeit der anwenderfreundlichen Vernetzungskriterien konnte damit eindeutig unter Beweis gestellt werden. Die niedriger liegenden Formzahlwerte nach Francavilla u.a. (1975) deuten trotz ihrer guten Übereinstimmung mit den experimentellen Resultaten nach Peterson (1953) auf eine zu grobe Vernetzung im Kerbgrund hin (4 Elemente!). Im letztgenannten Fall ist die Vergleichbarkeit der Werte nach Peterson (1953) und Francavilla u. a. (1975) insofern trügerisch, daß bei der photoelastischen Kerbspannungsermittlung Peterson (1953) das absolute Maximum augenscheinlich nicht erfaßt werden konnte. Die getroffenen Aussagen relativieren sich folgerichtig mit abnehmender Kerbschärfe. Interessant ist nun noch der Vergleich mit den Ergebnissen aus den BEM-Analysen unter Anwendung des Programmes B2 (Forster, 1998). Die Implementierung kubischer Hermitescher Elemente (Smith und Duncan, 1970; Zienkiewicz, 1975; Watson, 1986; Beer und Watson, 1992) im genannten Programmpaket erlaubt eine vergleichsweise grobe Diskretisierung der Bauteilumrandung. Die unter Verwendung von zwei Hermiteschen Elementen (!) entlang der Kerbgrundlinie erzielte Genauigkeit (Tabelle 1) entspricht bereits vollständig den praktischen Bedürfnissen, wobei eine Erhöhung der Elementanzahl auf vier keine signifikante Verbesserung der Resultate mehr bewirkt. Hier zeigt sich die Stärke der im Elementansatz erzwungenen Stetigkeit der ersten Ableitung. Die Beschränkung des Modellierungsaufwandes auf die Umrandung der Struktur macht die BEM prädestiniert für die Kerbspannungsanalyse. Diesen unbestreitbaren Vorteilen steht die im Gegensatz zur FEM erst langsam einsetzende Implementierung der Methode in kommerziellen Programmsystemen unter Einbeziehung fortgeschrittener Optionen (z. B. Nichtlinearitäten, rotationssymmetrische und harmonische Elemente usw.) gegenüber. Für die Zukunft ist hier jedoch ein bemerkenswertes Potential an Berechnungsmöglichkeiten bei optimaler Aufwand-Nutzen-Relation zu verzeichnen.

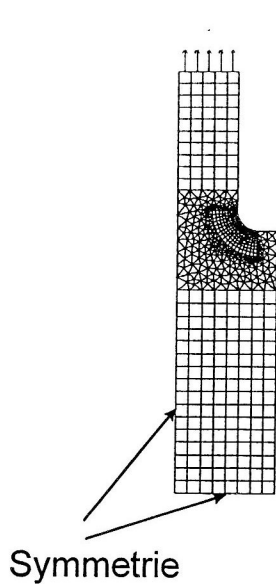


Bild 8. Gekerbter Flachstab

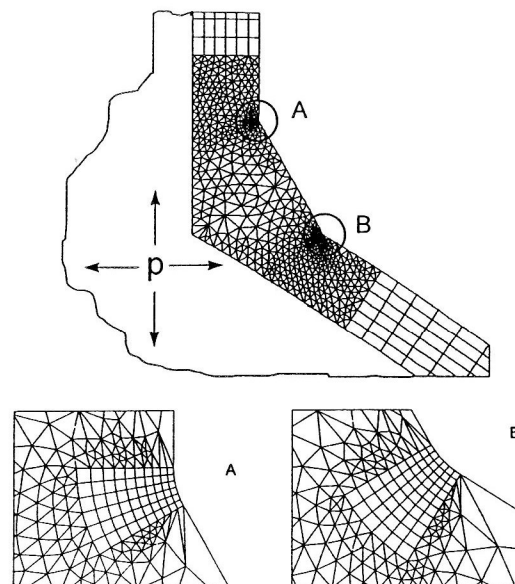


Bild 9. Anwendungsfall Schweißnahtübergang

$\frac{\rho}{2 \cdot a}$	Zienkiewicz (FEM) (Francavilla u.a., 1975)	Peterson (Experiment) (Peterson, 1953)	Rainer (FEM) (DUBBEL, 1983; Rainer, 1985)	FEM mit Vernetzungs- kriterien	BEM (2 Her- mitesche Ele- mente) (Forster, 1998)	BEM (4 Her- mitesche Ele- mente) (Forster, 1998)
0.167	1.88	1.85	2.008	2.022	2.005	2.005
0.208	1.76	1.74	1.864	1.890	1.843	1.905
0.250	1.70	1.68	1.752	1.788	1.747	1.805
0.292	1.64	1.60	1.664	1.709	1.677	1.796

Tabelle 1. Vergleich der Ergebnisse für einen abgesetzten Flachstab unter Zugbeanspruchung

Schließlich wurden die für kerbbeanspruchungsorientierte FE-Analysen abgeleiteten Vernetzungskriterien gemäß Bild 9 exemplarisch auf die detaillierte Modellierung des Schweißnahtbereiches einer Stutzenverbindung mit sphärischem Grundkörper angewandt, die unter der Einwirkung eines inneren Überdrucks steht. Die Schweißnahtübergänge wurden hierbei in Anlehnung an Radaj siehe z. B. Radaj, (1985) mit einem Kerbradius  $\rho$  von 1mm ausgerundet, was der näherungsweise Berücksichtigung von Mikrostützwirkungseffekten für den Fall scharfkantiger (singulärer) Übergänge entspricht (Worst-Case-Abschätzung). Beide Schweißnahtübergänge nach Bild 9 sind zur exakten Ermittlung der Beanspruchung im Kerbgrund mit einer aus Viereckselementen bestehenden Randschicht versehen, die den formulierten Kriterien entspricht. Der verbleibende Schweißnahtbereich kann dann zur Senkung des Modellierungs- und Berechnungsaufwandes mit einem aus Dreieckselementen bestehenden und mittels freier Vernetzung (Free Meshing) generierten Netz versehen werden. Die an Kerbstäben hinsichtlich der Vernetzungsstrategie gewonnenen Erkenntnisse sind damit unmittelbar auf praxisrelevante Bauteile übertragbar. Die Vernetzung von Schweißnahtbereichen kann dabei als Standardanwendungsfall im Zusammenhang mit den lokalen Konzepten des Ermüdungsfestigkeitsnachweises betrachtet werden.

## 6 Zusammenfassung

Dem zunehmenden Einsatz numerischer Berechnungsverfahren wie der Finite-Elemente-Methode (FEM) und der Randintegralmethode (BEM) zur Ermittlung von Kerbbeanspruchungen im Zusammenhang mit dem detaillierten rechnerischen Ermüdungsfestigkeitsnachweis nach lokalen Konzepten stehen Unsicherheiten bei der Behandlung des stets vorhandenen Diskretisierungsfehlers gegenüber. Es konnte gezeigt werden, daß die bekannten und einer adaptiven Vernetzungsstrategie (Adaptive Meshing) zugrundeliegenden Methoden der Fehlerabschätzung (Klaffung, Fehlerenergienorm) für den aufgezeigten Problembereich nur sehr bedingt geeignet und von rein qualitativem Aussagewert sind. Zudem konnte sich die adaptive Netzverfeinerung in der Praxis nicht durchsetzen. Da gegenwärtig meist die Finite-Elemente-Methode (FEM) auf der Basis kommerzieller Programmcodes für die Kerbbeanspruchungsanalyse zum Einsatz kommt, wurden systematisch anhand von Untersuchungen an 2D-Kerbstabmodellen Vernetzungskriterien für kerbbeanspruchungsorientierte FE-Analysen abgeleitet, die den praktischen Bedürfnissen an die Ergebnissenauigkeit uneingeschränkt gerecht werden. Bei der quantitativen und qualitativen Beurteilung der Fehlergröße wurde dabei der Vergleich mit „exakten“ Referenzlösungen angestrebt. Durch die

nachgewiesene Brauchbarkeit von Hybridnetzen wurden Möglichkeiten zur Senkung des Modellierungsaufwandes aufgezeigt, die vor allem für die Behandlung komplizierter Strukturen wie Schweißnahtübergänge von Interesse sind. Schließlich wurden Kerbspannungsanalysen nach FEM und BEM direkt gegenübergestellt. Der insbesondere bei der Nutzung spezieller Hermitescher Elemente minimale Modellierungs- und Vernetzungsaufwand weist die BEM dabei als zukunftsträchtiges Verfahren zur Behandlung von Kerbproblemen aus.

## Literatur

1. ANSYS User's Manual for Revision 5.3. Bd. 1-4. Swanson Analysis Systems, (1996).
2. Babuska, I.; Kautsky, J.: Optimization of Notch Shapes. ZAMM 43, (1963), 1-2; 47-54.
3. Bart, J.; Neuber, H.; Schnack, E.: Kerbfaktordiagramme nach numerischen Berechnungsverfahren. Konstruktion 28, Heft 6, (1976) 217-218.
4. Beer, G.; Watson, J.O.: Introduction to Finite and Boundary Element Methods for Engineers. Chichester: John Wiley & Sons Ltd, (1992).
5. Bronstein, I.N.; Semendjajew, K.A.: Taschenbuch der Mathematik. Stuttgart - Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, (1991).
6. DUBBEL, Taschenbuch für den Maschinenbau. Berlin: Springer; 15. Auflage, (1983), 1363.
7. Flügge, W.: Statik und Dynamik der Schalen. Berlin: Springer (1962).
8. Forster, M.: B2 1.04 User Manual. Fluxus GmbH, BEM Division, Rendsburger Landstraße 345, 24111 Kiel, (1998).

9. Francavilla, A.; Ramakrishnan, C.V.; Zienkiewicz, O.C.: Optimization of Shape to Minimize Stress Concentration. *Journal of Strain Analysis* 10, No. 2, (1975), 63-70.
10. Haibach, E.: Betriebsfestigkeit. Verfahren und Daten zur Bauteilberechnung. Düsseldorf: VDI-Verlag (1989).
11. Jaenicke, B.: Stützwirkungskonzepte. VDI Berichte Nr. 66 (1988), 27-66.
12. Köttgen, V.B.; Olivier, R.; Seeger, T.: Der Schaden an der Großen Windkraftanlage GROWIAN - Schwingfestigkeitsanalyse der versagenskritischen Schweißverbindungen. *Konstruktion* 45, (1993), 1-9.
13. Müller, C.: Theoretischer und rechnerischer Vergleich verschiedener Konzepte des Ermüdungsfestigkeitsnachweises im Druckbehälterbau. Diplomarbeit. Universität Dortmund, Fachbereich Chemietechnik/Chemieapparatebau, (1996).
14. Müller, G.; Rehfeld, I.: FEM für Praktiker. Basiswissen und Arbeitsbeispiele zur Methode der Finiten Elemente mit dem FE-Programm ANSYS®. Ehningen bei Böblingen: expert-Verlag, (Kontakt & Studium Bd. 441), (1993).
15. Naubereit, H.: Anwendung der FEM zur Berechnung der Lebensdauer von Schweißkonstruktionen. Vortrag auf dem 14. CAD-FEM Users' Meeting, Bad Aibling, (1996).
16. Naubereit, H.: Anwendung des Kerbspannungskonzeptes zur Berechnung der Lebensdauer von Schweißkonstruktionen. Vortrag auf dem 15. CAD-FEM Users' Meeting, Fulda, (1997).
17. Neuber, H.: Über die Berücksichtigung der Spannungskonzentration bei Festigkeitsberechnungen. *Konstruktion* 20, Heft 7, (1968), 245-251.
18. Neuber, H.: Der zugbeanspruchte Flachstab mit optimalem Querschnittsübergang. *Forsch. Ing. Wes.* 35, (1969), 29-30.
19. Neuber, H.: Kerbspannungslehre. Berlin. Springer, (1985).
20. Niemi, E.: Recommendations concerning stress determination for fatigue analysis of welded components. Glasgow: International Institute of Welding (IIW). Document XIII-1458-92 (XV-797-92), (1993).
21. Peano, A.: Hierarchies of Conforming Finite Elements for Plane Elasticity and Plate Bending. *Comp. Math. with Appl.* 2, (1976).
22. Petershagen, H.: IIW-Empfehlung zur Reparatur geschweißter schwingbeanspruchter Konstruktionen - Grundlagen und Anwendung. DVS-Berichte 187. Fortschritte bei der Konstruktion und Berechnung geschweißter Bauteile. Vorträge und Posterbeiträge des Kolloquiums „Schweißkonstruktionen 1997“ in Braunschweig am 27/ 28. November 1997, 56-58.
23. Peterson, R.E.: Stress Concentration Design Factors. New York: John Wiley and Sons, Inc.
24. Radaj, D.: Kerbspannungsanalyse nach der Finite-Elemente-Methode an Kehlnähten. *Schweißen und Schneiden* Bd. 27, Nr. 3, (1975), 86-89.
25. Radaj, D.: Kerbspannungsnachweis für die dauerschwingfeste geschweißte Konstruktion. *Konstruktion* 37, Nr. 2; (1985), S. 53-59.
26. Radaj, D.: Ermüdungsfestigkeit. Grundlagen für Leichtbau, Maschinen- und Stahlbau. Berlin. Springer, (1995).
27. Rainer, G.: Parameterstudien mit Finiten Elementen - Berechnung der Bauteilfestigkeit von Schweißverbindungen unter äußeren Beanspruchungen. *Konstruktion*, Bd. 37, Nr. 2, (1985), 45-52.

28. Richtlinienkatalog Festigkeitsberechnungen (RKF) Teil 5 und 6. LINDE-KCA Dresden, (1986).
29. Rudolph, J.: Nachweis der Ermüdungsfestigkeit von Behälter-Stutzen-Verbindungen unter Einwirkung von Innendruck und Rohrleitungslasten. Dissertation. Universität Dortmund, Fachbereich Chemietechnik/Chemieapparatebau (1996). Erschienen im Rahmen der Fortschritt-Berichte VDI Reihe 18 (Mechanik/Bruchmechanik) Nr. 206. Düsseldorf. VDI-Verlag, (1997).
30. Rudolph J.; Weiß, E.: Prinzipielle Aspekte des Ermüdungsfestigkeitsnachweises geschweißter und ungeschweißter Druckbehälterkomponenten. Vortrag auf dem 14. CAD-FEM Users' Meeting, Bad Aibling, (1996).
31. Rudolph, J.; Weiß, E.: Praxisorientierte Aufbereitung des Ermüdungsfestigkeitsnachweises für Komponenten der Druckbehälter- und Kraftwerkstechnik. Chemie-Ingenieur-Technik Bd. 69, Heft 1+2, (1997), 68-76.
32. Rust, W.; Müller, G.: Wem gehört die Zukunft: h-Elementen oder p-Elementen. Vortrag auf dem 13. CAD-FEM Users' Meeting, Bad Wildungen, (1995).
33. Savin, G.N.; Tulchiy, V.I.: Reference-Book on Stress Concentration. Hochschulverlag Kiew, (1976).
34. Schmidt, R.: Elastisch-plastische Kerbspannungsanalyse unter Verwendung harmonischer Elemente und der Submodelltechnik. Vortrag auf dem 12. CAD-FEM. Users' Meeting, Miesbach, (1994).
35. Schnack, E.: Zur Berechnung rotationssymmetrischer Kerbprobleme mit der Methode der finiten Elemente. Forsch.-Ing.-Wesen 42, Heft 3, (1976), 73-81.
36. Siebel, E.; Stieler, M.: Ungleichförmige Spannungsverteilung bei schwingender Beanspruchung. VDI-Z.97, Nr. 5, (1955) 121-126.
37. Smith, I.M.; Duncan, W.: The effectiveness of nodal continuities in finite element analysis of thin rectangular and skew plates in bending. International Journal of Num. Mech. Eng., 2, (1970), 253-258.
38. Timoshenko, S.P.; Woinowsky-Krieger, S.: Theory of Plates and Shells. London: McGraw-Hill, (1959).
39. Watson, J.O.: Hermitian Cubic and Singular Elements for Plane Strain. In: Developments in Boundary Element Methods - 4. Elsevier Applied Science Publishers, (1986), 1-28.
40. Watson, J.O.: Singular Boundary Elements for the Analysis of Cracks in Plane Strain. International Journal for Numerical Methods in Engineering 38, (1995), 2389-2411.
41. Weiß, E.; Hartmann, O.; Rudolph, J.: Beanspruchungsanalyse von Schweißkonstruktionen aus Werkstoffen mit unterschiedlichem Gefüge. TÜ-Z. Bd. 38, Nr. 11/12, (1997), 31-39.
42. Weiß, E.; Krieg, U.: Beurteilung des Aussagegehaltes von Finite-Element-Festigkeitsberechnungen. Maschinenbautechnik 38, Heft 5, (1989), 212-216.
43. Weiß, E.; Krieg, U.; Strumpf, D.: Bewertung von Finite-Elemente-Spannungsanalysen hinsichtlich Tragfähigkeit. Maschinenbautechnik 38, Heft 6, (1989), 244-248.
44. Weiß, E.; Rudolph, J.; Lietzmann, A.: Anwendung der Finite-Elemente-Methode (FEM) als Basis der Druckbehälterdimensionierung. Chemieingenieurtechnik Bd. 67, Nr. 7, (1995), 874-879.
45. Zienkiewicz, O.C.: Methode der finiten Elemente. München: Carl Hanser Verlag, (1975).
46. Zienkiewicz, O.C.; Zhu, J.Z.: A Simple Error Estimator and Adaptive Procedure for Practical Engineering Analysis. Int. J. Num. Meth. Eng. 28, (1989), 2839-2853

---

*Anschrift:* Professor Dr.-Ing. habil. Eckart Weiß, Dr.-Ing. Jürgen Rudolph, Dipl.-Ing. Jürgen Hoffmann, Universität Dortmund, Fachbereich Chemietechnik/Chemieapparatebau, D-44221 Dortmund.