

Variationslösungen für schubstarre Platten (II)

K. Naumenko, J. Altenbach, H. Altenbach

Professor Dr.rer.nat.habil. Hans-Georg Hahn zum 70. Geburtstag gewidmet.

Auf der Grundlage der Kirchhoffschen Plattentheorie und der Variationsmethode von Vlasov/Kantorovich werden Lösungsansätze für Platten mit geraden Plattenrändern im Rahmen der geometrisch linearen Theorie diskutiert. Durch eine alternierende, iterative Verbesserung eingliedriger Näherungsansätze für jeweils eine Koordinatenrichtung erhält man ein effektives Lösungsverfahren, das analytische Näherungslösungen für die Verformungen und die Schnittgrößen für das Gesamtgebiet einer Platte liefert. Die Genauigkeit der so abgeleiteten Lösungen ist für viele Anwendungen ausreichend. Die Einsatzmöglichkeiten des Lösungsweges sind von der Plattengeometrie abhängig. Ausführlich wird die Lösung linearer Aufgaben für Rechteck- und Parallelogrammplatten diskutiert. Teil II erweitert die Ableitungen des Teils I auf schiefwinklige Koordinaten und erläutert die Anwendung der Näherungslösung auf Parallelogrammplatten.

4 Parallelogrammplatten

Für Rechteckplatten liefert das Variationsverfahren nach Vlasov/Kantorovich in vielen Fällen mit Hilfe eingliedriger Ansätze brauchbare Näherungslösungen. Die Anwendung eingliedriger Lösungsansätze ist jedoch auf einfache Geometrie, einfache Lagerung und einfache Belastungen beschränkt. Für komplexere Anwendungsfälle gelingt es nicht, die Lösung in der Form eines eingliedrigen Produktansatzes zu ermitteln. Es ist aber vielfach möglich, die Lösung für eine komplexe Aufgabe durch Superposition vereinfachter Lösungen zu erhalten. Dabei können zunächst für zugeordnete vereinfachte Aufgaben Produktansätze mit Hilfe des eingeführten Iterationsverfahrens formuliert werden. Anschließend werden bekannte Lösungsverfahren (Verschiebungsgrößenverfahren, Kraftgrößenverfahren usw.) für die Ermittlung der Gesamtlösung eingesetzt. Beispiele für die Anwendung des Kraftgrößenverfahrens in Verbindung mit eingliedrigen Produktansätzen für einfache Teilbereiche werden in Altenbach u.a. (1998 b) für Platten mit komplexer Lagerung (auf Säulen gestützte Rechteckplatte) sowie für Platten komplexer Geometrie (L-förmige Platten) diskutiert. Im folgenden wird eine Erweiterung der Variationsmethode auf Parallelogrammplatten vorgenommen.

Dünnwandige schiefwinklige Plattenkonstruktionen sind im Bauwesen weit verbreitet (z.B. Brücken). Die Ermittlung der Durchbiegungsfunktion einer Parallelogrammplatte ist im Vergleich zu der einer Rechteckplatte eine wesentlich kompliziertere Aufgabe. Betrachtet man eine Parallelogrammplatte nach Bild 7 im schiefwinkligen Koordinatensystem mit den zunächst dimensionsbehafteten Koordinaten ξ , η , z

$$\xi = x_1 - x_2 \cot \vartheta \quad \eta = x_2 \csc \vartheta \quad (40)$$

wobei ϑ der Winkel zwischen den Koordinatenachsen ξ und η ist, erhält man aus der Plattengleichung

$$\Delta \Delta w(x_1, x_2) = \frac{q(x_1, x_2)}{K}$$

nach einer entsprechenden Koordinatentransformation (vgl. z.B. Altenbach u.a., 1998 a)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4} + 2(1 + 2 \cos^2 \vartheta) \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} \\ - 4 \cos \vartheta \left(\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^3 \partial \eta} + \frac{\partial^4 w}{\partial \xi \partial \eta^3} \right) = \frac{q(\xi, \eta) \sin^4 \vartheta}{K} \end{aligned} \quad (41)$$

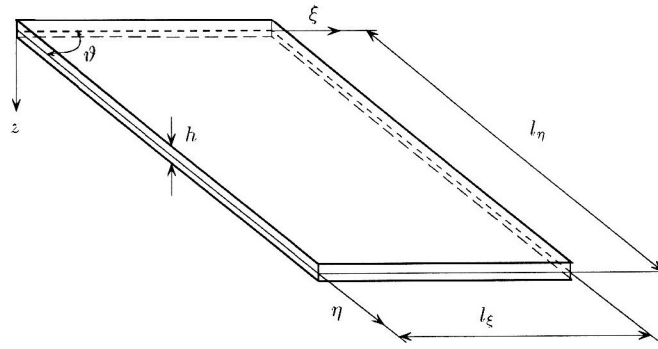


Bild 7. Parallelogrammplatte im schiefwinkligen Koordinatensystem ξ, η, z

Für $\vartheta = \pi/2$ gilt $\xi = x_1, \eta = x_2$ und die Gleichung (41) geht mit $\cos \pi/2 = 0, \sin \pi/2 = 1$ in die bekannte Form für eine Rechteckplatte über. Infolge des unterstrichenen Zusatzterms ist die Lösung der Gleichung (41) schon für einfache Lagerungsfälle im Vergleich zur Lösung von Rechteckplatten sehr aufwendig. Sucht man z.B. für eine allseitig momentenfreie Lagerung und eine gleichmäßig verteilte Vollast die Lösung in Analogie zur Rechteckplatte in der Form einer trigonometrischen Doppelreihe (Naviersche Lösung), sind neben den Sinusfunktionen erweiterte Ansätze (z.B. Cosinusterme) erforderlich (Krettner, 1954). Dies ist dadurch erklärbar, daß die gesuchte Lösung die Symmetriebedingungen bezüglich der Hauptdiagonalen erfüllen muß. Dagegen liefert die Naviersche Lösung zusätzliche unerwünschte Symmetrien bezüglich der Symmetrieachsen der Platte. Die Berechnung der Reihenkoeffizienten wird daher sehr aufwendig (Krettner, 1954). Weiterhin steigt der Lösungsaufwand wegen der Singularitäten der Biege- und der Torsionsmomente in den stumpfen Ecken der Platte. Die bekannten numerischen Verfahren erfordern spezielle Diskretisierungstechniken bzw. die Anwendung spezieller Ansatzfunktionen, da die Lösungen sehr sensitiv bezüglich des Winkels ϑ sind und der Fehler mit abnehmenden ϑ wesentlich steigt. Die für Rechteckplatten mit vier oder zwei parallelen, momentenfrei gelagerten Rändern möglichen Doppelreihenlösungen nach Navier oder Einfachreihenlösungen nach Levy führen für Parallelogrammplatten nicht zum Erfolg. Im Unterschied zur Rechteckplatte gibt es für momentenfrei gelagerte Parallelogrammplatten keine Vereinfachungen des Lösungsweges. Zusätzlich treten an der Verbindung momentenfrei gelagerter Ränder die genannten Singularitäten auf. In Morley (1963) wird für den Sonderfall einer Parallelogrammplatte mit $\vartheta = 60^\circ$, starrer Einspannung und Vollast eine trigonometrische Reihenlösung abgeleitet. Singularitäten treten für die allseitig eingespannte Platte nicht auf. Die Berechnung der Reihenkoeffizienten ist auch in diesem Fall sehr aufwendig. Die Lösung für die gleiche Platte mit dem Ritzschen Verfahren und einem Doppelreihenansatz nach den Eigenfunktionen eingespannter transversal schwingender Balken erfordert gleichfalls eine große Anzahl von Reihengliedern (Altenbach u.a., 1998 a).

Die Parallelogrammplatte wurde mehrfach als „benchmark test“ für die Verifikation unterschiedlicher Näherungsmethoden, kommerzieller Programmpakete sowie unterschiedlicher finiter Platten- und Schalelemente verwendet, vgl. z.B. Robinson (1985). Als effizientes numerisches Verfahren für die Lösung von Parallelogrammplatten wurde u.a. die Spline-Element-Methode (Mizusawa, 1994) eingesetzt.

Ein eingliedriger Lösungsansatz führt bei der Anwendung des Variationsverfahrens von Vlasov/Kantorovich auf schiefwinklige Platten nicht direkt zum Ziel. Für eine schiefwinklige Platte kann die Lösung aber wie folgt ermittelt werden. Man sucht zunächst die Lösung der Gleichung (41) bei Vernachlässigung des unterstrichenen Terms (zugeordnete vereinfachte Grundaufgabe). Dann läßt sich analog zu einer Rechteckplatte ein eingliedriger Ansatz $w_0 = W_{0\xi}(\xi)W_{0\eta}(\eta)$ finden, der die vereinfachte Gleichung

$$\frac{\partial^4 w_0}{\partial \xi^4} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial \eta^4} + 2(1 + 2 \cos^2 \vartheta) \frac{\partial^4 w_0}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} = \frac{q(\xi, \eta) \sin^4 \vartheta}{K} \quad (42)$$

sowie die Randbedingungen in guter Näherung erfüllt. Das Einsetzen in die vollständige Gleichung (41) liefert eine Störung (Fehlerfunktion)

$$q^f(\xi, \eta) = 4 \cos \vartheta (W_{0\xi}''' W_{0\eta}' + W_{0\xi}' W_{0\eta}''') = q_{1\xi}^f(\xi) q_{1\eta}^f(\eta) + q_{2\xi}^f(\xi) q_{2\eta}^f(\eta) \quad (43)$$

Interpretiert man die beiden Terme in Gleichung (43) als Belastungen, lassen sich Korrekturlösungen $w_1(\xi, \eta) = W_{1\xi}(\xi)W_{1\eta}(\eta)$ und $w_2(\xi, \eta) = W_{2\xi}(\xi)W_{2\eta}(\eta)$ aus den Gleichungen (44)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 w_1}{\partial \xi^4} + \frac{\partial^4 w_1}{\partial \eta^4} + 2(1 + 2 \cos^2 \vartheta) \frac{\partial^4 w_1}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} &= q_{1\xi}^f(\xi) q_{1\eta}^f(\eta) \\ \frac{\partial^4 w_2}{\partial \xi^4} + \frac{\partial^4 w_2}{\partial \eta^4} + 2(1 + 2 \cos^2 \vartheta) \frac{\partial^4 w_2}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} &= q_{2\xi}^f(\xi) q_{2\eta}^f(\eta) \end{aligned} \quad (44)$$

ermitteln. Betrachtet man jede Störbelastung als eine Summe einfacher Einheitsbelastungen (z.B. Polynomansätze), kann zur Ermittlung der Biegeflächen w_1 und w_2 das Verfahren nach Vlasov/Kantorovich eingesetzt werden. Die Gesamtlösung lautet dann

$$w(\xi, \eta) = a_0 w_0(\xi, \eta) + a_1 w_1(\xi, \eta) + a_2 w_2(\xi, \eta)$$

Die a_i können durch Fehlerorthogonalisierung oder durch Minimierung des elastischen Potentials berechnet werden. Damit erhält man eine Näherungslösung mit wenigen Produktansätzen und ohne zusätzliche Diskretisierung des Plattengebietes. Die Qualität der Lösung wird durch Einsetzen in die Plattengleichung (41) überprüft. Diese Vorgehensweise wurde für Platten- und Scheibenaufgaben bei unterschiedlicher Geometrie angewendet. In Altenbach (1972) wurden beispielsweise die Greenschen Funktionen einfacher Aufgaben, die vielfach analytisch bekannt sind, für inhomogene und anisotrope Platten eingesetzt und die Näherungslösung wurde durch geeignete Abänderung des Differentialoperators der allgemeinen Aufgabe gesucht.

Ausgangspunkt für die Reduktion der Plattengleichung auf eine gewöhnliche Differentialgleichung ist im folgenden der in schiefwinkligen Koordinaten formulierte Ausdruck des elastischen Potentials (Altenbach u.a., 1998a; Morley, 1963)

$$\begin{aligned} \Pi(w) &= \frac{K}{2 \sin^3 \vartheta} \int_0^{l_\xi} \int_0^{l_\eta} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right)^2 - 4 \cos \vartheta \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \right. \\ &- 4 \cos \vartheta \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} + 2(\cos^2 \vartheta + \nu \sin^2 \vartheta) \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \\ &+ \left. 2(1 + \cos^2 \vartheta - \nu \sin^2 \vartheta) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \right)^2 \right] d\xi d\eta \\ &- \sin \vartheta \int_0^{l_\xi} \int_0^{l_\eta} q w d\xi d\eta + \oint_\Gamma \left(\bar{m}_{nn} \frac{\partial w}{\partial n} - \bar{q}_n^* w \right) ds \end{aligned} \quad (45)$$

Im weiteren werden die dimensionslosen schiefwinkligen Koordinaten $\bar{\xi} = \xi/l_\xi$ und $\bar{\eta} = \eta/l_\eta$ verwendet. Die Lösung wird zunächst als Produkt zweier Funktionen

$$w(\bar{\xi}, \bar{\eta}) = W_\eta(\bar{\eta}) \chi(\bar{\xi}) \quad (46)$$

mit $\chi(\bar{\xi})$ als bekannter vorgegebener Funktion gesucht. Setzt man die Lösung (46) in die Gleichung (45) ein, ergibt sich analog zu den im Abschnitt 2 (Teil I) durchgeführten Ableitungen nach der Integration über die $\bar{\xi}$ -Koordinate und durch Nullsetzen der Variation des elastischen Potentials folgende gewöhnliche Differentialgleichung:

$$W_\eta^{IV}(\bar{\eta}) - 2r_\xi^2 W_\eta''(\bar{\eta}) + s_\xi^4 W_\eta(\bar{\eta}) = \frac{l_\eta^4 \sin^4 \vartheta}{KA} \bar{q}(\bar{\eta}) \quad (47)$$

mit

$$\begin{aligned}
\bar{q}(\bar{\eta}) &= \int_0^1 q(\bar{\xi}, \bar{\eta}) \chi(\bar{\xi}) d\bar{\xi} + \frac{\gamma}{l_\eta} \left[\bar{q}_{n2}^*(\bar{\eta}) \chi(1) - \bar{q}_{n1}^*(\bar{\eta}) \chi(0) \right]_{\bar{\eta}=0}^{\bar{\eta}=1} \\
&+ \frac{\gamma^2}{l_\eta^2} \left[\bar{m}_{n2}(\bar{\eta}) \chi'(1) - \bar{m}_{n1}(\bar{\eta}) \chi'(0) \right]_{\bar{\eta}=0}^{\bar{\eta}=1} \\
r_\xi^2 &= \frac{B(1 + 2 \cos^2 \vartheta) - B_0(\cos^2 \vartheta + \nu \sin^2 \vartheta)}{A} \gamma^2 \quad s_\xi^4 = \frac{C}{A} \gamma^4 \quad \gamma = \frac{l_\eta}{l_\xi}
\end{aligned} \tag{48}$$

Für die Berechnung der Koeffizienten A , B , B_0 und C gelten die in Abschnitt 2 (Teil I) abgeleiteten Formeln. Mit \bar{m}_{n1} , \bar{m}_{n2} , \bar{q}_{n1}^* und \bar{q}_{n2}^* sind hier die an den Rändern $\bar{\xi} = const$ vorgegebenen Momente $\bar{m}_{\eta\eta}$ und die Querkräfte \bar{q}_ξ^* bezeichnet. Ist der Rand $\bar{\eta} = \bar{\eta}^c = const$ eingespannt, dann folgt z.B.

$$W_\eta(\bar{\eta}^c) \chi(\bar{\xi}) = 0, \quad \varphi_n(\bar{\xi}, \bar{\eta}^c) = W'_\eta(\bar{\eta}^c) \chi(\bar{\xi}) \csc \vartheta - W_\eta(\bar{\eta}^c) \chi'(\bar{\xi}) \cot \vartheta = 0$$

Dies entspricht den zwei kinematischen Randbedingungen

$$W_\eta(\bar{\eta}^c) = 0 \quad W'_\eta(\bar{\eta}^c) = 0$$

Für den Fall der gelenkigen Lagerung ist nur die erste kinematische Randbedingung zu erfüllen. Sind die Ränder $\bar{\eta} = const$ frei, ergeben sich aus der Variation des elastischen Potentials folgende Ausdrücke für die verallgemeinerten Schnittgrößen:

$$\begin{aligned}
M_\eta(\bar{\eta}^c) &= -\frac{KA}{\sin^2 \vartheta l_\eta^2} \left[W''_\eta(\bar{\eta}^c) - t_\xi^2 W_\eta(\bar{\eta}^c) - \underline{d_\xi W'_\eta(\bar{\eta})} \right] = 0 \\
Q_\eta(\bar{\eta}^c) &= -\frac{KA}{\sin^3 \vartheta l_\eta^3} \left[W'''_\eta(\bar{\eta}^c) - (2r_\xi^2 - t_\xi^2) W'_\eta(\bar{\eta}^c) + \underline{e_\xi W_\eta(\bar{\eta}^c)} \right] = 0
\end{aligned} \tag{49}$$

mit

$$t_\xi^2 = \frac{(B - B_0)(\cos^2 \vartheta + \nu \sin^2 \vartheta)}{A} \gamma^2, \quad d_\xi = \frac{\cos \vartheta \gamma}{A} \left[\chi^2(\bar{\xi}) \right]_0^1, \quad e_\xi = \frac{\cos \vartheta \gamma^3}{A} \left[\chi'^2(\bar{\xi}) \right]_0^1$$

Die unterstrichenen Größen in den Gleichungen (49) folgen aus den unterstrichenen Termen im elastischen Potential (45). Bei $\vartheta = 90^\circ$ verschwinden diese Glieder, und alle Gleichungen gehen in die im Abschnitt 2 (Teil I) formulierten Gleichungen einer Rechteckplatte über. Falls die Ränder $\bar{\xi} = const$ eingespannt sind, folgt aus den Gleichungen $d_\xi = 0$ und $e_\xi = 0$. Dies bedeutet, daß die unterstrichenen Terme in Gleichung (45), die den Einfluß der „Schiefwinkligkeit“ beschreiben, bei einer Lösung in Form des eingliedrigen Produktansatzes (46) durch die partielle Integration verschwinden. Für den Fall der allseitig momentenfreien Lagerung ist $d_\xi = 0$. Dabei muß an den Rändern $\bar{\xi} = const$ die Bedingung $W_\eta(\bar{\eta}) = 0$ erfüllt werden, wodurch der zusätzliche Term im Ausdruck für die Querkraft $Q_\eta(\bar{\eta})$ in Gleichung (49) ebenfalls verschwindet. Somit liefert ein eingliedriger Produktansatz (46) Näherungslösungen für eine „Quasi-Rechteckplatte“, d.h., es wird nur die Gleichung (45) ohne unterstrichene Terme minimiert.

Analog zur Lösung einer Rechteckplatte (Abschnitt 2) kann die Lösung $W_\eta(\bar{\eta})$ mit Hilfe von Übertragungsmatrizen konstruiert werden

$$\mathbf{W}_\eta(\bar{\eta}) = \mathbf{K}_E(\bar{\eta}) \mathbf{W}_{0\eta} + \mathbf{W}_\eta^p(\bar{\eta}) \tag{50}$$

Die Matrix $\mathbf{K}_E(\eta)$ setzt sich aus einer Matrix, die den Symmetriebedingungen entsprechend dem Satz von Betti genügt, sowie einer zusätzlichen antimetrischen Matrix zusammen, die für die von Null verschiedenen zusätzlichen Terme in den verallgemeinerten Schnittgrößen (49) berechnet werden muß, d.h. $\mathbf{K}_E = \mathbf{K}_E^S + \mathbf{K}_E^A$. Die Matrix \mathbf{K}_E^S entspricht vollständig der Übertragungsmatrix für eine Rechteckplatte (s. Gleichung (25), Teil I), wenn man die Koeffizienten r , s und t für die Parallelogrammplatte nach den Gleichungen (48) und (49) berechnet. Für die Fälle $s > r$ und $s < r$ sind die Matrizen im Anhang (Teil I) angegeben. Die Matrix \mathbf{K}_E^A hängt nicht von der Fallunterscheidung $s < r$ oder $s > r$ ab und kann wie

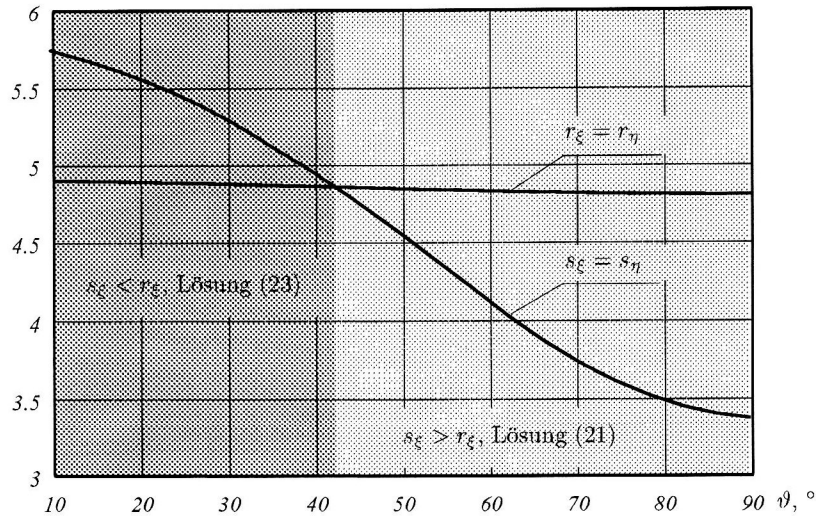


Bild 8. Abhängigkeit der Werte $r_\xi = r_\eta$ und $s_\xi = s_\eta$ vom Winkel ϑ für eine allseitig eingespannte, schiefwinklige Platte unter konstanter Vollast

folgt formuliert werden:

$$\mathbf{K}_E^A = \begin{bmatrix} -e_\xi K_{wQ}^S & d_\xi K_{wM}^S & 0 & 0 \\ -e_\xi K_{wM}^S & d_\xi K_{\varphi M}^S & 0 & 0 \\ -e_\xi K_{\varphi w}^S - d_\xi K_{\varphi w}^S + d_\xi e_\xi K_{wM}^S & -d_\xi^2 K_{\varphi M}^S & -K_{\varphi\varphi}^A & -K_{w\varphi}^A \\ -e_\xi^2 K_{wQ}^S & e_\xi K_{w\varphi}^S + d_\xi K_{\varphi w}^S + d_\xi e_\xi K_{wM}^S & -K_{\varphi w}^A & -K_{ww}^A \end{bmatrix} \quad (51)$$

Wird die Funktion χ in der $\bar{\eta}$ - Koordinatenrichtung vorgegeben, d.h., die Lösung für die Biegefläche wird gesucht als

$$w(\bar{\xi}, \bar{\eta}) = W_\xi(\bar{\xi})\chi(\bar{\eta})$$

kann die gesuchte Funktion W_ξ mit der Übertragungsmatrix $\mathbf{K}_E(\bar{\xi})$ konstruiert werden

$$\mathbf{W}_\xi(\bar{\xi}) = \mathbf{K}_E(\bar{\xi})\mathbf{W}_{0\xi} + \mathbf{W}_\xi^p(\bar{\xi}) \quad (52)$$

Die entsprechenden Koeffizienten r_η , s_η , t_η , d_η und e_η werden wie folgt berechnet

$$\begin{aligned} r_\eta^2 &= \frac{B(1 + 2 \cos^2 \vartheta) - B_0(\cos^2 \vartheta + \nu \sin^2 \vartheta)}{A\gamma^2} & s_\eta^4 &= \frac{C}{A\gamma^4} \\ t_\eta^2 &= \frac{(B - B_0)(\cos^2 \vartheta + \nu \sin^2 \vartheta)}{A\gamma^2} & d_\eta &= \frac{\cos \vartheta}{A\gamma} \left[\chi^2(\bar{\xi}) \right]_0^1 \\ e_\eta &= \frac{\cos \vartheta}{A\gamma^3} \left[\chi'^2(\bar{\xi}) \right]_0^1 \end{aligned} \quad (53)$$

Als Beispiel wird eine allseitig eingespannte schiefwinklige Platte unter konstanter Vollast betrachtet. Analog zu einer Quadratplatte wird ein eingliedriger Lösungsansatz formuliert. Die Funktionen $W_\xi(\bar{\xi})$ und $W_\eta(\bar{\eta})$ werden zunächst mit der Übertragungsmatrix (50) unter Beachtung der Randbedingungen sowie der Belastung konstruiert. Mit Hilfe des im Abschnitt 2 eingeführten Iterationsverfahrens werden die Werte r_ξ , r_η , s_ξ , s_η ausgerechnet. Die Art der zu wählenden Lösungsansätze (21), Teil I oder (22), Teil I hängt von der Beziehung zwischen r_ξ und s_ξ bzw. r_η und s_η ab. Die sich aus dem Iterationsprozeß ergebenden Koeffizienten sind in Bild 8 in Abhängigkeit vom Winkel ϑ dargestellt. Für den Winkelbereich $43^\circ \leq \vartheta \leq 90^\circ$ sind die Hyperbel-trigonometrischen Funktionen (21), Teil I wie bei Rechteckplatten die vier unabhängigen Integrale der Differentialgleichung (47). Für die Winkel $\vartheta < 43^\circ$ müssen dagegen die Hyperbelfunktionen (22), Teil I benutzt werden. Somit hängt die Art der Lösung vom Winkel ϑ ab. Setzt man den durch das Iterationsschema erhaltenen Produktansatz in die Differentialgleichung (41)

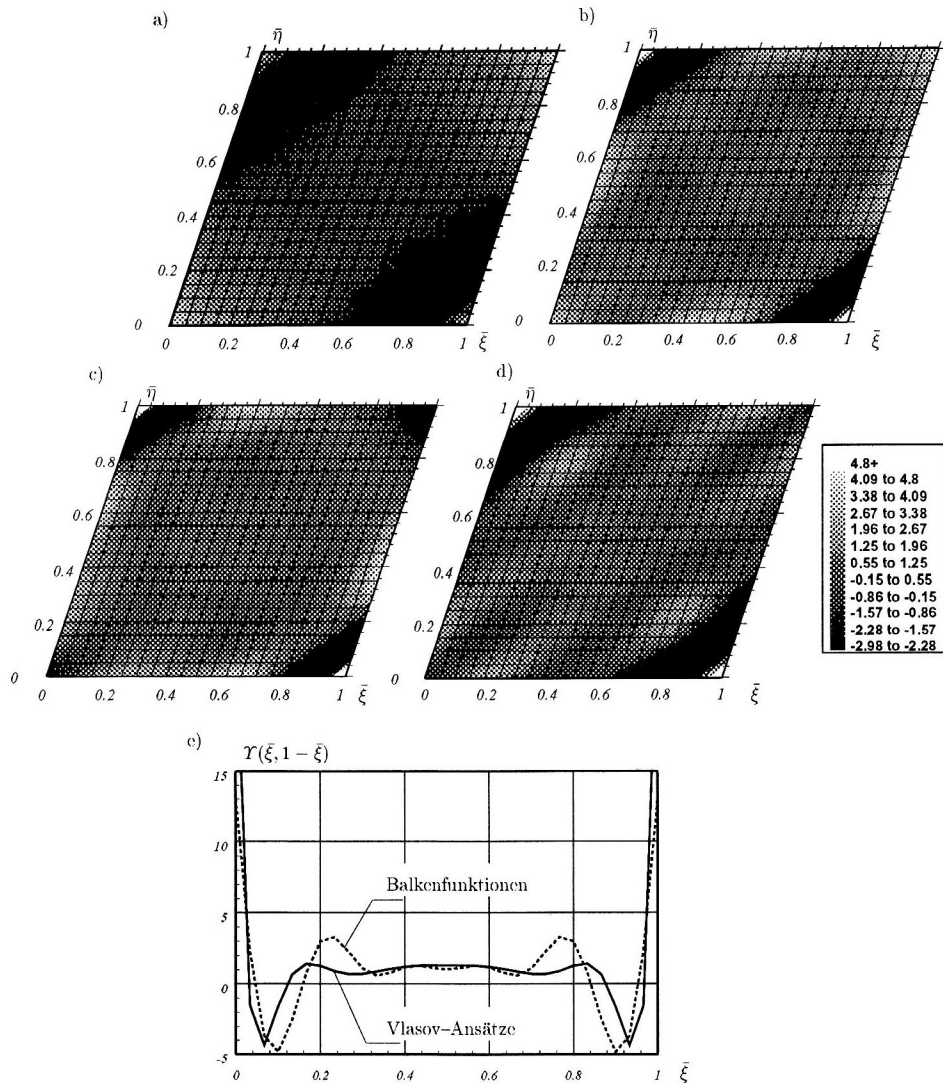


Bild 9. Erfüllung der Differentialgleichung (41) für eine allseitig eingespannte, schiefwinklige Platte unter konstanter Vollast für mit dem Ritzschen Verfahren erhaltene Näherungslösungen mit unterschiedlichen Ansatzfunktionen. a) Eingliedriger Ansatz $\tilde{w}(\bar{\xi}, \bar{\eta}) = W_{\xi}(\bar{\xi})W_{\eta}(\bar{\eta})$, b) $n = 3$, c) $n = 4$, d) Funktionen transversal schwingender Balken, $n = 4$, e) Verlauf der Störungsfunktion entlang der kleineren Hauptdiagonale

ein, ergibt sich eine Störungsfunktion $\Upsilon(\bar{\xi}, \bar{\eta})$, Bild 9, mit

$$\Upsilon(\bar{\xi}, \bar{\eta}) = \frac{K}{q(\xi, \eta) \sin^4 \vartheta l_{\eta}^4} \left[\gamma^4 \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial \bar{\xi}^4} + \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial \bar{\eta}^4} + \gamma^2 2(1 + 2 \cos^2 \vartheta) \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial \bar{\xi}^2 \partial \bar{\eta}^2} - 4 \cos \vartheta \left(\gamma^3 \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial \bar{\xi}^3 \partial \bar{\eta}} + \gamma \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial \bar{\xi} \partial \bar{\eta}^3} \right) \right]$$

Obwohl der Zahlenwert für die maximale Durchbiegung schon eine gute Übereinstimmung mit einer Referenzlösung zeigt, Tabelle 4, ist die Biegefläche sowie die Ortsverteilung der Biegemomente qualitativ falsch, da der eingliedrige Produktansatz unerwünschte Symmetrien liefert, Bilder 10a, 11a. Für eine Verbesserung der Lösung wird folgende Vorgehensweise gewählt. Die Näherungslösung für die Durchbiegungsfunktion wird durch eine Doppelreihe dargestellt

$$\tilde{w}(\bar{\xi}, \bar{\eta}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} W_{\xi i}(\bar{\xi}) W_{\eta j}(\bar{\eta}) \quad (54)$$

	Produktansätze mit Vlasov-Verfahren				Balkenfunkt.	Ref. Lös.
	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 4$	*)
	$\vartheta = 60^\circ$					
$K_w \cdot 10^2$	1,0189	1,1167	1,2399	1,2399	1,2525	1,2305
$K_{m_1} \cdot 10^2$	7,4772	6,1829	8,4108	8,329	8,0863	7,9146
$K_{m_2} \cdot 10^2$	4,3051	4,8004	6,5304	6,554	6,4141	6,1769
	$\vartheta = 45^\circ$					
$K_w \cdot 10^2$	0,4107	0,4123	0,5888	0,6055	0,6066	0,6034
$K_{m_1} \cdot 10^2$	4,7811	4,7723	6,3980	6,1411	5,9672	5,7788
$K_{m_2} \cdot 10^2$	2,1442	2,1513	3,8493	4,1038	4,1536	3,9057

Tabelle 4. Konvergenz der Lösungen für die maximale Durchbiegung und für Hauptmomente bei $\bar{\xi} = 0,5$, $\bar{\eta} = 0,5$ einer allseitig eingespannten schiefwinkligen Platte unter konstanter Vollast, *) Mizusawa (1994)

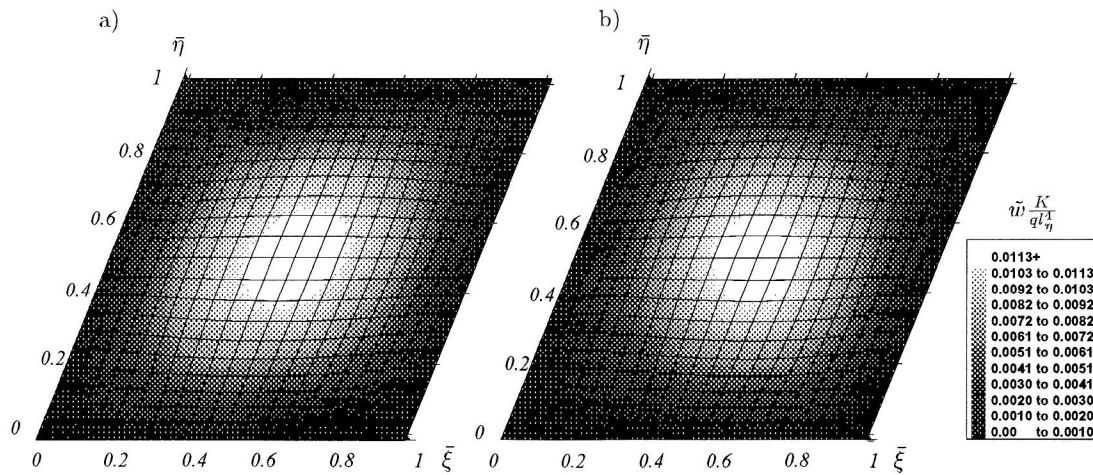


Bild 10. Isolinien der Durchbiegung für eine allseitig eingespannte, schiefwinklige Platte unter konstanter Vollast, $\vartheta = 60^\circ$. a) $n = 1$, b) $n = 4$

Jeder Produktansatz $W_{\xi_i}(\bar{\xi})W_{\eta_j}(\bar{\eta})$ wird mit Hilfe des Vlasov/Kantorovich Verfahrens und der iterativen Näherung als Biegefläche infolge der äußeren Belastung $q_{ij}(\bar{\xi}, \bar{\eta}) = g_\xi(\bar{\eta})g_\eta(\bar{\xi}) = 1 \cdot ij\xi^i\eta^j$ gesucht. Dies entspricht einer Darstellung der Fehlerfunktion (fiktive Belastung) durch einen Polynomansatz. Die Freiwerte a_{ij} werden dann mit Hilfe des Ritzschen Verfahrens berechnet. Die Ergebnisse sind auf den Bildern 9 bis 11 sowie in der Tabelle 4 zusammengefasst. Dabei werden folgende Bezeichnungen verwendet. Für die maximale Durchbiegung $w_{max} = k_w \frac{q l_\eta^4}{K}$ und für die Hauptmomente ergibt sich (Altenbach u.a., 1998 a)

$$m_1 = \frac{1}{2} \left[m_\xi + m_\eta + \sqrt{(m_\xi - m_\eta)^2 + 4m_{\xi\eta}^2} \right]$$

$$m_2 = \frac{1}{2} \left[m_\xi + m_\eta - \sqrt{(m_\xi - m_\eta)^2 + 4m_{\xi\eta}^2} \right]$$

$$m_\xi = -\frac{K}{\sin^3 \vartheta} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - 2 \cos \vartheta \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} + (\cos^2 \vartheta + \nu \sin^2 \vartheta) \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right]$$

$$m_\eta = -\frac{K}{\sin^3 \vartheta} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} - 2 \cos \vartheta \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} + (\cos^2 \vartheta + \nu \sin^2 \vartheta) \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right]$$

$$m_{\xi\eta} = -\frac{K}{\sin^3 \vartheta} \left[(1 + \cos^2 \vartheta - \nu \sin^2 \vartheta) \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} - \cos \vartheta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right) \right]$$

mit $m_1 = K_{m_1} q l_\eta^2$, $m_2 = K_{m_2} q l_\eta^2$. Die Zahlenwerte in der Tabelle entsprechen der im Mittelpunkt der Platte $\bar{\xi} = 0,5$, $\bar{\eta} = 0,5$ berechneten Durchbiegung und den Hauptmomenten. Zum Vergleich wurden für

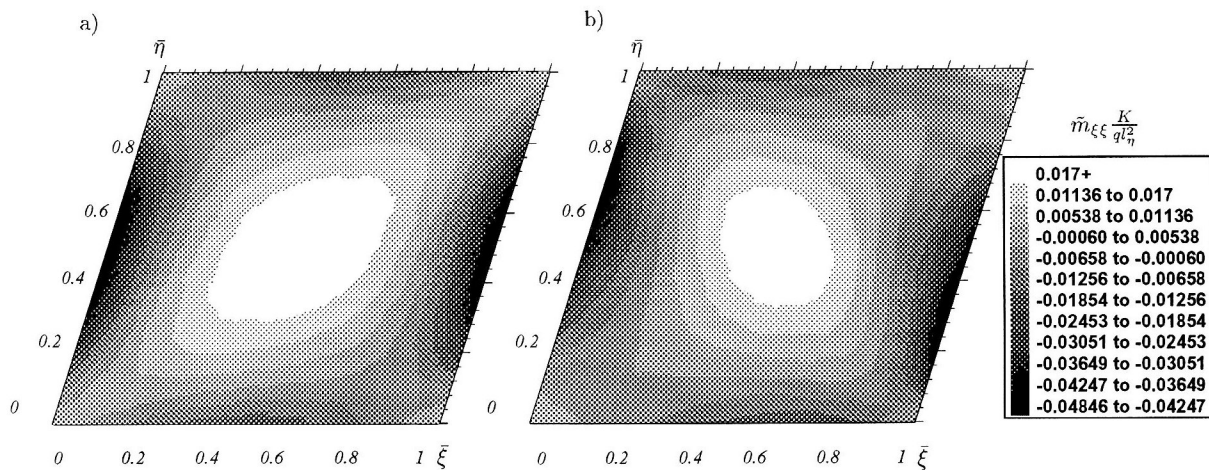


Bild 11. Isolinien der Biegemomente $\bar{m}_{\xi\xi}$ für eine allseitig eingespannte, schiefwinklige Platte unter konstanter Vollast, $\vartheta = 60^\circ$. a) $n = 1$, b) $n = 4$

$W_\xi(\bar{\xi})$ und $W_\eta(\bar{\eta})$ die Eigenfunktionen des transversal schwingenden Balkens gewählt. Man sieht, daß die mit Hilfe des Vlasov/Kantorovich Verfahrens konstruierten Ansatzfunktionen bereits mit wenigen Reihengliedern eine gute Genauigkeit der Lösung liefern. Die Störung lokalisiert sich mit zunehmenden Reihengliedern im Bereich der stumpfen Ecken. Im restlichen Gebiet der schiefwinkligen Platte erfüllt die Näherungslösung (54) die grundlegende Differentialgleichung. Dagegen ergibt sich bei der Anwendung der Eigenfunktionen des transversal schwingenden Balkens eine wellenförmige Fehlerfunktion, Bild 9d.

5 Zusammenfassung

Das Variationsverfahren von Vlasov/Kantorovich liefert für eingliedrige Lösungsansätze in Verbindung mit einer iterativen Verbesserung in beiden Koordinatenrichtungen für schubstarre Rechteckplatten in vielen Fällen hinreichend genaue Näherungslösungen. Ausgehend von dieser Erfahrung wird die Erweiterung des Lösungsverfahrens auf schubstarre Platten mit allgemeinerer Geometrie untersucht. Für Trapezplatten ist eine Anwendung des Variationsverfahrens nur mit Einschränkungen möglich, da die Reduktion der Plattengleichung auf ein eindimensionales Problem auf gewöhnliche Differentialgleichungen mit nichtkonstanten Koeffizienten führt. Im Unterschied dazu kann die iterative Variationslösung auf Parallelogrammplatten angewendet werden. Ausgangspunkt ist die Näherungslösung für eine vereinfachte Grundaufgabe, bei der im Differentialoperator die Terme mit ungeraden Ableitungen im 1. Lösungsschritt vernachlässigt werden. Es wird somit eine Näherungslösung für eine Quasi-Rechteckplatte berechnet. In einem 2. Lösungsschritt wird durch Einsetzen der Näherungslösung in die vollständige Gleichung der Parallelogrammplatte eine Fehlerfunktion berechnet. Faßt man diese Fehlerfunktion als fiktive Belastung auf und stellt diese fiktive Belastung durch eine Polynomreihe dar, erhält man mit einem Doppelreihenansatz, dessen Ansatzfunktionen mit dem Vlasov/Kantorovich-Verfahren ermittelt wurden, und einer Berechnung der unbekanntenen Reihenkoeffizienten nach Ritz gute Näherungen für Parallelogrammplatten. Der Vergleich mit Doppelreihenansätzen nach den Eigenfunktionen transversal schwingender Balken zeigt für eine eingespannte Parallelogrammplatte unterschiedlicher Schiefe die bessere Konvergenz der mit dem Variationsverfahren ermittelten Ansatzfunktionen.

Der besondere Vorteil des hier geschilderten Lösungsweges zeigt sich z.B. bei der Lösung physikalisch nichtlinearer Plattenaufgaben. Für jeden Zeit- und Belastungsschritt werden Näherungslösungen für die Durchbiegungen und die Schnittgrößen durch geschlossene analytische Ausdrücke für das Gesamtgebiet der Platte dargestellt. Die Effektivität einer solchen Lösungsprozedur wurde für Kriechschädigungen von Rechteckplatten nachgewiesen. Dabei bereitet auch die Einbeziehung geometrischer Nichtlinearitäten keine prinzipiellen Schwierigkeiten.

Danksagung

Die Autoren möchten sich ausdrücklich beim Gutachter für die gegebenen Hinweise, die zu einer höheren Verständlichkeit der Arbeit beigetragen haben, bedanken.

Literatur

1. Altenbach, J.: Die Berechnung ebener Flächentragwerke mit Hilfe von Einflußfunktionen zugeordneter vereinfachter Grundaufgaben. ZAMM, 52, (1972), T 288– T 292.
2. Altenbach, J., Altenbach, H., Naumenko, K.: Ebene Flächentragwerke. Berlin u.a.: Springer-Verlag (1998 a).
3. Altenbach, J., Naumenko, K., Naumenko, V.: Analysis of rectangular thin plates and plate structures basing on the Vlasov's variational procedure. CAMES, 5, (1998 b), 115–128.
4. Krettner, J.: Beitrag zur Berechnung schiefwinkliger Platten. Ingenieur-Archiv, XXII, (1954), 47–54.
5. Mizusawa, T.: Application of the spline element method to analyse the bending of skew plates. Computers & Structures, 53, 2, (1994), 439–448.
6. Morley, L. S. D.: Skew Plates and Structures. International Series of Monographs on Aeronautics and Astronautics. New York: Pergamon Press (1963).
7. Robinson, J.: An evaluation of skew sensitivity of thirty three plate bending elements in nineteen FEM systems. Nucl. Eng. Des., 90, (1985), 67–85.

Adressen: Dr.-Ing. Konstantin Naumenko, Prof. Dr.-Ing. Holm Altenbach, Fachbereich Ingenieurwissenschaften, Lehrstuhl für Technische Mechanik, Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, D-06099 Halle, Prof. Dr.-Ing. Dr.h.c. Johannes Altenbach, Förderstedter Str. 28, D-39112 Magdeburg