

# Biegeschwingungen des einfachen Brückenträgers unter mehreren bewegten Körpern

Nguyen Van Khang, Do Xuan Tho, Hoang Ha

*Schwingungsprobleme von Brücken sind komplizierte Aufgaben in der Baudynamik. In der vorliegenden Arbeit wird die Biegeschwingungsaufgabe des Brückenträgers unter mehreren bewegten Körpern betrachtet. Das Schwingungsgleichungssystem des betrachteten Modells ist ein gemischtes System aus einer partiellen Differentialgleichung und  $N$  gewöhnlichen Differentialgleichungen. Danach wird eine numerische Methode zur Lösung der gemischten Differentialgleichungen behandelt.*

## 1 Einleitung

Der Brückenbau ist eine wichtige Aufgabe im Verkehrswesen. Bei der Berechnung der Brücken betrachtet man normalerweise nur die statischen Beanspruchungen und die Eigenfrequenzen. Für Brücken mit großem Pfeilerabstand wie Schrägkabelbrücken oder Hängebrücken spielt die dynamische Berechnung eine wichtige Rolle (Petersen, 1996; Schemmann und Smith, 1998; Walther u. a., 1988). Zur Untersuchung der Biegeschwingungen von Brückenträgern benutzt man häufig das Modell eines Trägers unter mehreren bewegten Lasten (siehe z. B. Filippov, 1974; Popp und Schiehlen, 1993). Das mechanische Modell der Brücken, das in dieser Arbeit betrachtet wird, ist ein Träger unter mehreren bewegten Körpern, die Fahrzeuge darstellen. Zunächst werden die Schwingungsgleichungen des untersuchten Modells aufgestellt. Danach wird die numerische Berechnung der erhaltenen Differentialgleichungen behandelt.

## 2 Aufstellung der Biegeschwingungsgleichungen der Brückenträger

Bild 1 zeigt ein mechanisches Modell des einfachen Brückenträgers unter mehreren bewegten Körpern.

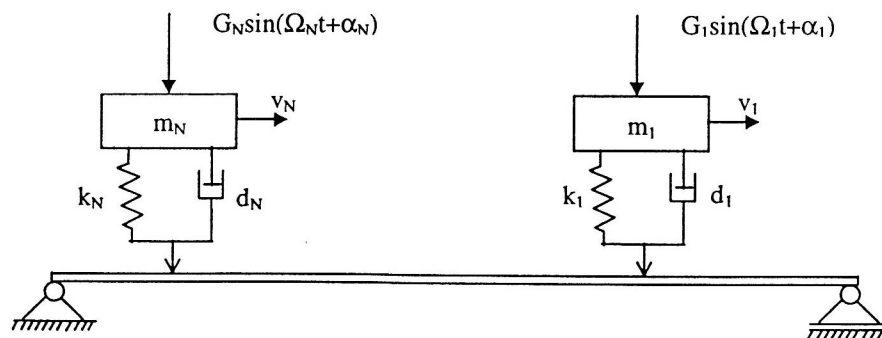


Bild 1. Brückenträger unter mehreren Körpern

Es besteht aus einem Euler-Bernoulli-Balken und  $N$  bewegten Körpern. Jedes Fahrzeug wird als ein Feder-Masse-Schwinger mit Dämpfer in einem bewegten Koordinatensystem betrachtet. Dabei sind  $m_i$  die Masse und  $v_i$  die Geschwindigkeit des  $i$ -ten Körpers. Die Kraft  $G_i \sin(\Omega_i t + \alpha_i)$  ist die äußere Kraft, die auf den  $i$ -ten Körper wirkt. Es wird vorausgesetzt, daß das Fahrzeug in der Zeit seiner Bewegung auf der Brücke nicht vom Brückenträger abhebt und die Geschwindigkeiten  $v_i (i = 1, \dots, N)$  der Fahrzeuge so eingeschränkt sind, daß die Fahrzeuge nicht aufeinander stoßen können. Für die Fahrzeuge, die mit verschiedenen konstanten Geschwindigkeiten  $v_i$  fahren, lautet die zweite Bedingung

$$v_{i+1}(t - \tau_{i+1}) < (t - \tau_i) \quad \tau_i \leq t \leq T_i + \tau_i \quad (i = 1, \dots, N-1)$$

Dabei wird die Zeit der Bewegung des  $i$ -ten Körpers auf der Brücke als  $T_i$  und der Zeitpunkt, in dem der  $i$ -te Körper auf die Brücke fährt, als  $\tau_i$  bezeichnet.

Zur Aufstellung der Schwingungsgleichungen für das System des Brückenträgers unter mehreren bewegten Körpern ist es günstig, das Gesamtsystem, die Struktur, nach dem Schnittprinzip an den Kontaktpunkten zu teilen (siehe z. B. Holzweißig und Dresig, 1993; Nguyen Van Khang, 1995). Es entstehen dabei  $N + 1$  Substrukturen mit  $N$  Kopplungskräften  $F_i (i = 1, \dots, N)$ , Bild 2a und Bild 2b. Es wird davon ausgegangen, daß an den Kopplungspunkten sowohl die Verschiebungen als auch die Kopplungskraftgrößen von bewegten Körpern und Brückenträgern übereinstimmen müssen.

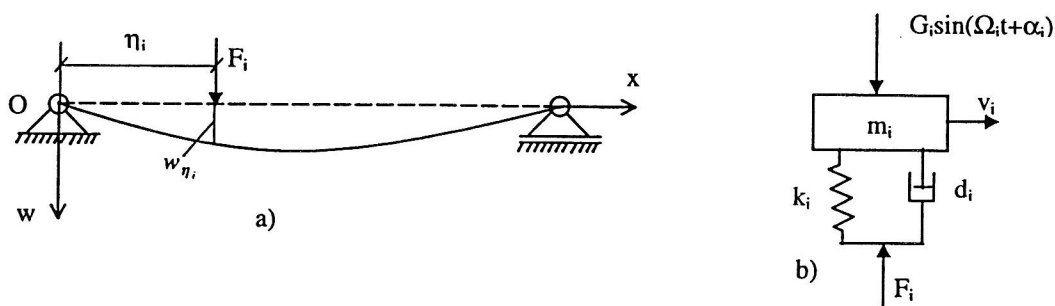


Bild 2. Substrukturen

Zur Beschreibung der Biegeschwingungen des Trägers wird ein Koordinatensystem  $(Oxw)$  mit O als Koordinatenursprung gewählt. Die  $x$ - und die  $w$ -Achse sind hierbei zueinander orthogonal und wie im Bild 2a orientiert. Zur Beschreibung der Lage des  $i$ -ten Körpers werden die absoluten Koordinaten  $z_i$  und  $\eta_i$  (Bild 2a und Bild 2b) benutzt. Wenn der  $i$ -te Körper mit konstanter Geschwindigkeit auf der Brücke fährt, gilt

$$\eta_i = v_i(t - \tau_i) \quad (1)$$

Zur Bestimmung der Kopplungskräfte wird die relative Koordinate des  $i$ -ten Körpers  $y_i$  mit der Beziehung

$$z_i = y_i + w_{\eta_i} \quad w_{\eta_i} = w(x, t) \Big|_{x=\eta_i} \quad (2)$$

eingeführt.

Nach Bild 2b erhält man die Kopplungskraft

$$F_i = k_i y_i + d_i \dot{y}_i \quad (3)$$

Mit dem Impulsatz läßt sich die Differentialgleichung der Schwingungen des  $i$ -ten Körpers herleiten:

$$m_i \ddot{z}_i = m_i g + G_i \sin \varphi_i - F_i \quad (i=1, \dots, N) \quad (4)$$

Dabei wird die Substitution  $\varphi_i = \Omega_i t + \alpha_i$  eingeführt. Wenn man die Gleichung (2) berücksichtigt, lautet die Kopplungskraft (3)

$$F_i = k_i (z_i - w_{\eta_i}) + d_i (\dot{z}_i - \dot{w}_{\eta_i}) \quad (5)$$

Wird nun der Ausdruck (5) in die Gleichung (4) eingesetzt, erhält man die Schwingungsgleichung für den Körper  $m_i$

$$m_i \ddot{z}_i + d_i \dot{z}_i + k_i z_i = m_i g + G_i \sin \varphi_i + d_i \dot{w}_{\eta_i} + k_i w_{\eta_i} \quad \tau_i \leq t \leq T_i + \tau_i \quad (6)$$

Zur günstigen Darstellung der Bewegungsgleichung der Fahrzeuge auf der Brücke führen wir die sogenannte Signal-Funktion ein. Die Signal-Funktion  $L_i(t)$  wird nach der Beziehung

$$L_i(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } \tau_i \leq t \leq T_i + \tau_i \\ 0 & \text{für } t < \tau_i \text{ und } t > T_i + \tau_i \end{cases} \quad (7)$$

definiert und hat folgende Eigenschaften

$$\frac{dL_i(t)}{dt} = 0 \quad [L_i(t)]^n = L_i(t) \quad n = 1, 2, \dots \quad (8)$$

Mit Hilfe der Signal-Funktion läßt sich die Differentialgleichung der Schwingungen des Fahrzeugs auf der Brücke in folgender Form schreiben:

$$L_i(t)(m_i \ddot{z}_i + d_i \dot{z}_i + k_i z_i) = L_i(t)(m_i g + G_i \sin \varphi_i + d_i \dot{w}_{\eta_i} + k_i w_{\eta_i}) \quad (i = 1, \dots, N) \quad (9)$$

Nun werden die Biegeschwingungen des Brückenträgers mit konstantem Querschnitt betrachtet. Die Herleitung der Bewegungsgleichung kann durch Anwendung der Grundgesetze der Mechanik auf ein herausgeschnittenes Trägerelement erfolgen (Hagedorn, 1989). Wenn man die Beziehung zwischen der Normalspannung  $\sigma$  und der Dehnung  $e$

$$\sigma = E \left( e + \alpha \frac{\partial e}{\partial t} \right) \quad (10)$$

benutzt, erhält man die partielle Differentialgleichung der Biegeschwingungen des Brückenträgers in der Form

$$EI \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \alpha \frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial t} \right) + \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial w}{\partial t} \right) = p(x, z, t) \quad (11)$$

Dabei sind

$E$ : Elastizitätsmodul des Trägerquerschnittes

$I$ : axiales Flächenträgheitsmoment des Trägerquerschnittes

$\mu$ : Masse pro Länge des Trägers

$\beta$ : äußere Dämpfungskonstante

$\alpha$ : innere Dämpfungskonstante

Zur Bestimmung der Streckenlast  $p(x, z, t)$  wird die Dirac-Funktion benutzt. Die Dirac-Funktion wird nach der folgenden Beziehung definiert:

$$\delta(x-a) = 0 \text{ für } x \neq a \text{ und } \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a) dx = 1 \quad (12)$$

Sie hat die wichtige Eigenschaft

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x-a) dx = f(a) \quad (13)$$

Mit Hilfe der Dirac-Funktion läßt sich die Streckenlast  $p(x, z, t)$ , die von den Fahrzeugen auf die Brücke wirkt, folgendermaßen darstellen (siehe Bild 1):

$$p(x, z, t) = \sum_{i=1}^N L_i(t)(m_i g + G_i \sin \varphi_i - m_i \ddot{z}_i) \delta(x - \eta_i) \quad (14)$$

Mit den Gleichungen (11), (14) und (9) hat das Differentialgleichungssystem zur Beschreibung der Biegeschwingungen des Brückenträgers unter mehreren bewegten Körpern die folgende Form

$$EI \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \alpha \frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial t} \right) + \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial w}{\partial t} \right) = p(x, z, t) \quad (15)$$

$$L_i(t)(m_i \ddot{z}_i + d_i \dot{z}_i + k_i z_i) = L_i(t)(m_i g + G_i \sin \varphi_i + d_i \dot{w}_{\eta_i} + k_i w_{\eta_i}) \quad (i = 1, \dots, N) \quad (16)$$

Das Schwingungsgleichungssystem (15), (16) ist ein gemischtes System aus einer partiellen Differentialgleichung und  $N$  gewöhnlichen Differentialgleichungen. Zur Lösung dieses Differentialgleichungssystems braucht man die Randbedingungen sowie die Anfangsbedingungen. Für den einfachen Brückenträger nach Bild 1 lauten die Randbedingungen

$$x = 0: \quad w(0, t) = \frac{\partial^2 w(0, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (17)$$

$$x = l: \quad w(l, t) = \frac{\partial^2 w(l, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (18)$$

Die Anfangsbedingungen haben folgende Form:

$$t = \tau_i \quad (i = 1, 2, \dots, N):$$

$$w(x, \tau_i) = f_i^{(1)}(x) \quad \frac{\partial w(x, \tau_i)}{\partial t} = f_i^{(2)}(x) \quad (19)$$

$$z_i(\tau_i) = z_{0j}(\tau_i) \quad \dot{z}_j(\tau_i) = \dot{z}_{0j} \quad (j = 1, \dots, N) \quad (20)$$

### 3 Lösungsansatz und Transformation auf ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem

Zur Transformation des gemischten Differentialgleichungssystems (15), (16) benutzen wir den Ritz-Ansatz

$$w(x, t) = \sum_{r=1}^n q_r(t) \sin \frac{r \pi x}{l} \quad (21)$$

Daraus ergibt sich

$$w_{\eta_i} = L_i w(\eta_i, t) = L_i(t) \sum_{r=1}^n q_r(t) \sin \frac{r \pi \eta_i}{l} \quad (22)$$

Wenn wir die Annahme  $\eta_i = v_i(t - \tau_i)$  nach Gleichung (1) benutzen, erhalten wir die Ableitung von  $w_{\eta_i}$  nach der Zeit

$$\dot{w}_{\eta_i} = L_i(t) \sum_{r=1}^n \left( \dot{q}_r \sin \frac{r \pi \eta_i}{l} + q_r \frac{r \pi v_i}{l} \cos \frac{r \pi \eta_i}{l} \right) \quad (23)$$

Die partiellen Ableitungen  $\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}$ ,  $\frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial t}$ ,  $\frac{\partial w}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$  lassen sich aus dem Ausdruck (21) berechnen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} &= \sum_{r=1}^n \left( \frac{r \pi}{l} \right)^4 q_r \sin \frac{r \pi x}{l} \\ \frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial t} &= \sum_{r=1}^n \left( \frac{r \pi}{l} \right)^4 \dot{q}_r \sin \frac{r \pi x}{l} \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= \sum_{r=1}^n \dot{q}_r \sin \frac{r \pi x}{l} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \sum_{r=1}^n \ddot{q}_r \sin \frac{r \pi x}{l} \end{aligned} \quad (24)$$

Setzt man die Ausdrücke (24) in die partielle Differentialgleichung (15) ein, so erhält man

$$\sum_{r=1}^n \left\{ \ddot{q}_r + \left[ \frac{EI\alpha}{\mu} \left( \frac{r\pi}{l} \right)^4 + \beta \right] \dot{q}_r + \frac{EI}{\mu} \left( \frac{r\pi}{l} \right)^4 q_r \right\} \sin \frac{r\pi x}{l} = \frac{1}{\mu} p(x, z, t) \quad (25)$$

Multipliziert man beide Seiten der Gleichung (25) mit  $\sin \frac{s\pi x}{l}$  und integriert man danach auf beiden Seiten über  $x$  von 0 bis  $l$  unter Berücksichtigung von

$$\int_0^l \sin \frac{r\pi x}{l} \sin \frac{s\pi x}{l} dx = \begin{cases} 0 & \text{für } r \neq s \\ l/2 & \text{für } r = s \end{cases}$$

erhält man die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\ddot{q}_s + \left[ \frac{EI\alpha}{\mu} \left( \frac{s\pi}{l} \right)^4 + \beta \right] \dot{q}_s + \frac{EI}{\mu} \left( \frac{s\pi}{l} \right)^4 q_s = \frac{2}{\mu l} \int_0^l p(x, z, t) \sin \frac{s\pi x}{l} dx \quad (26)$$

Unter Benutzung der Eigenschaft (13) der Dirac-Funktion erhält man für das Integral auf der rechten Seite der Gleichungen (26)

$$\begin{aligned} \int_0^l p(x, z, t) \sin \frac{s\pi x}{l} dx &= \sum_{i=1}^N L_i(t) (m_i g + G_i \sin \varphi_i - m_i \ddot{z}_i) \int_0^l \delta(x - \eta_i) \sin \frac{s\pi x}{l} dx \\ &= \sum_{i=1}^N L_i(t) (m_i g + G_i \sin \varphi_i - m_i \ddot{z}_i) \sin \frac{s\pi \eta_i}{l} \end{aligned} \quad (27)$$

Durch Einsetzen des Ausdrucks (27) in die Gleichungen (26) ergibt sich das gewöhnliche Differentialgleichungssystem zur näherungsweisen Beschreibung der Biegeschwingungen des Brückenträgers

$$\ddot{q}_s + \left[ \frac{EI\alpha}{\mu} \left( \frac{s\pi}{l} \right)^4 + \beta \right] \dot{q}_s + \frac{EI}{\mu} \left( \frac{s\pi}{l} \right)^4 q_s = \frac{2}{\mu l} \sum_{i=1}^N L_i(t) (m_i g + G_i \sin \varphi_i - m_i \ddot{z}_i) \sin \frac{s\pi \eta_i}{l} \quad (28)$$

$(s = 1, \dots, n)$

Setzt man die Ausdrücke (22) und (23) in die Gleichungen (16) ein, erhält man die gewöhnlichen Differentialgleichungen zur näherungsweisen Beschreibung der Schwingungen der bewegten Körper

$$\begin{aligned} L_i(t) (m_i \ddot{z}_i + d_i \dot{z}_i + k_i z_i) &= L_i(t) \left[ m_i g + G_i \sin \varphi_i + \sum_{r=1}^n \left( d_i \sin \frac{r\pi \eta_i}{l} \right) \dot{q}_r \right. \\ &\quad \left. + \sum_{r=1}^n \left( k_i \sin \frac{r\pi \eta_i}{l} + d_i \frac{r\pi v_i}{l} \cos \frac{r\pi \eta_i}{l} \right) q_r \right] \quad (i = 1, \dots, N) \end{aligned} \quad (29)$$

Für die numerische Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichungen (28) und (29) ist es vorteilhaft, diese Gleichungen in Matrizenform zu schreiben. Dazu werden die Differentialgleichungen (29) in der folgenden Form umgeschrieben.

$$\begin{aligned} L_i(t) \ddot{z}_i &= L_i(t) \left[ \sum_{r=1}^n \left( \frac{d_i}{m_i} \sin \frac{r\pi \eta_i}{l} \right) \dot{q}_r - \frac{d_i}{m_i} \dot{z}_i + \sum_{r=1}^n \left( \frac{k_i}{m_i} \sin \frac{r\pi \eta_i}{l} + \frac{d_i r \pi v_i}{l m_i} \cos \frac{r\pi \eta_i}{l} \right) q_r \right. \\ &\quad \left. - \frac{k_i}{m_i} z_i + g + \frac{G_i}{m_i} \sin \varphi_i \right] \quad (i = 1, \dots, N) \end{aligned} \quad (30)$$

Wenn die Gleichung (30) in die Gleichung (28) eingesetzt wird, ergibt sich

$$\begin{aligned}
\ddot{q}_s = & - \sum_{r=1}^n \left\{ \delta_r^s \left[ \frac{EI\alpha}{\mu} \left( \frac{\pi}{l} \right)^4 s^4 + \beta \right] + \frac{2}{\mu l} \sum_{i=1}^N L_i(t) d_i \sin \frac{s\pi\eta_i}{l} \sin \frac{r\pi\eta_i}{l} \right\} \dot{q}_r + \frac{2}{\mu l} \sum_{i=1}^N L_i(t) \left( d_i \sin \frac{s\pi\eta_i}{l} \right) \dot{z}_i \\
& - \sum_{r=1}^n \left[ \delta_r^s \frac{EI}{\mu} \left( \frac{\pi}{l} \right)^4 s^4 + \frac{2}{\mu l} \sum_{i=1}^N L_i(t) \left( d_i \frac{r\pi v_i}{l} \sin \frac{s\pi\eta_i}{l} \cos \frac{r\pi\eta_i}{l} + k_i \sin \frac{s\pi\eta_i}{l} \sin \frac{r\pi\eta_i}{l} \right) \right] q_r \\
& + \frac{2}{\mu l} \sum_{i=1}^N L_i(t) \left( k_i \sin \frac{s\pi\eta_i}{l} \right) z_i \quad (s = 1, \dots, n)
\end{aligned} \quad (31)$$

Dabei wird das Kronecker-Symbol

$$\delta_r^s = \begin{cases} 1 & \text{für } r = s \\ 0 & \text{für } r \neq s \end{cases}$$

Mit dem Vektor der verallgemeinerten Koordinaten

$$\mathbf{q} = [q_1, \dots, q_n, z_1, \dots, z_N]^T$$

können die Differentialgleichungen (31) und (30) in der folgenden Matrizenform geschrieben werden

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{B}(t)\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(t)\mathbf{q} + \mathbf{f}(t) \quad (32)$$

Dabei sind die Matrizen  $\mathbf{B}(t)$ ,  $\mathbf{C}(t)$  und der Vektor  $\mathbf{f}(t)$  Blockmatrizen. Die Matrix  $\mathbf{B}(t)$  hat folgende Form:

$$\mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} & b_{1,n+1} & \cdots & b_{1,n+N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} & b_{n,n+1} & \cdots & b_{n,n+N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n+1,1} & \cdots & b_{n+1,n} & b_{n+1,n+1} & \cdots & b_{n+1,n+N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n+N,1} & \cdots & b_{n+N,n} & b_{n+N,n+1} & \cdots & b_{n+N,n+N} \end{bmatrix}$$

Dabei sind

$$b_{sr} = -\delta_r^s \left[ \frac{EI\alpha}{\mu} \left( \frac{\pi}{l} \right)^4 s^4 + \beta \right] - \frac{2}{\mu l} \sum_{i=1}^N L_i(t) d_i \sin \frac{s\pi v_i(t-\tau_i)}{l} \sin \frac{r\pi v_i(t-\tau_i)}{l} \quad (s, r = 1, \dots, n)$$

$$b_{s,n+i} = \frac{2}{\mu l} L_i(t) d_i \sin \frac{s\pi v_i(t-\tau_i)}{l} \quad (s = 1, \dots, n; i = 1, \dots, N)$$

$$b_{n+i,r} = L_i(t) \frac{d_i}{m_i} \sin \frac{r\pi v_i(t-\tau_i)}{l} \quad (r = 1, \dots, n; i = 1, \dots, N)$$

$$b_{n+i,n+j} = -L_i(t) \delta_i^j \frac{d_i}{m_i} \quad (i, j = 1, \dots, N)$$

Analog ergibt sich

$$\mathbf{C}(t) = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} & c_{1,n+1} & \cdots & c_{1,n+N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nm} & c_{n,n+1} & \cdots & c_{n,n+N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n+1,1} & \cdots & c_{n+1,n} & c_{n+1,n+1} & \cdots & c_{n+1,n+N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n+N,1} & \cdots & c_{n+N,n} & c_{n+N,n+1} & \cdots & c_{n+N,n+N} \end{bmatrix}$$

$$c_{sr} = -\delta_r^s \frac{EI}{\mu} \left( \frac{\pi}{l} \right)^4 s^4 - \frac{2}{\mu l} \sum_{i=1}^N L_i(t) \left[ d_i \frac{r \pi v_i}{l} \cos \frac{r \pi v_i (t - \tau_i)}{l} \right. \\ \left. k_i \sin \frac{r \pi v_i (t - \tau_i)}{l} \right] \sin \frac{s \pi v_i (t - \tau_i)}{l} \quad (s, r = 1, \dots, n)$$

$$c_{s,n+i} = \frac{2}{\mu l} L_i(t) k_i \sin \frac{s \pi v_i (t - \tau_i)}{l} \quad (s = 1, \dots, n; i = 1, \dots, N)$$

$$c_{n+i,r} = L_i(t) \left[ \frac{d_i}{m_i} \frac{r \pi v_i}{l} \cos \frac{r \pi v_i (t - \tau_i)}{l} + \frac{k_i}{m_i} \sin \frac{r \pi v_i (t - \tau_i)}{l} \right] \quad (r = 1, \dots, n; i = 1, \dots, N)$$

$$c_{n+i,n+j} = -L_i(t) \delta_i^j \frac{k_i}{m_i} \quad (i, j = 1, \dots, N)$$

Der Vektor  $\mathbf{f}(t)$  hat die Form

$$\mathbf{f}(t) = [f_1, \dots, f_n, f_{n+1}, \dots, f_{n+N}]^T$$

mit

$$f_s = 0 \quad (s = 1, \dots, n)$$

$$f_{n+i} = L_i(t) \left[ g + \frac{G_i}{m_i} \sin(\Omega_i t + \alpha_i) \right] \quad (i = 1, \dots, N)$$

#### 4 Anwendungsbeispiele

Mit dem in Abschnitt 3 dargestellten Verfahren wurde an der Technischen Universität Hanoi ein Rechenprogramm zur Berechnung der Biegeschwingungen des Brückenträgers unter mehreren bewegten Körpern für Personalcomputer (PC) entwickelt. Mit diesem Rechenprogramm wurden die Biegeschwingungen für mehrere Brückenträger in Vietnam berechnet. Die Berechnungsergebnisse stimmen mit den gemessenen Ergebnissen gut überein. In den Bildern 3 und 4 sind die numerischen Berechnungsergebnisse und die gemessenen Ergebnisse für zwei in Vietnam gebaute Brücken unter einem Fahrzeug dargestellt. Die Bilder 5 und 6 zeigen die Schwingungsverläufe von einer Brücke unter zwei Fahrzeugen mit verschiedenen Geschwindigkeiten. Dabei sind die durchgezogenen Linien die berechneten Verläufe und die gestrichelten Linien die experimentell ermittelten Verläufe.

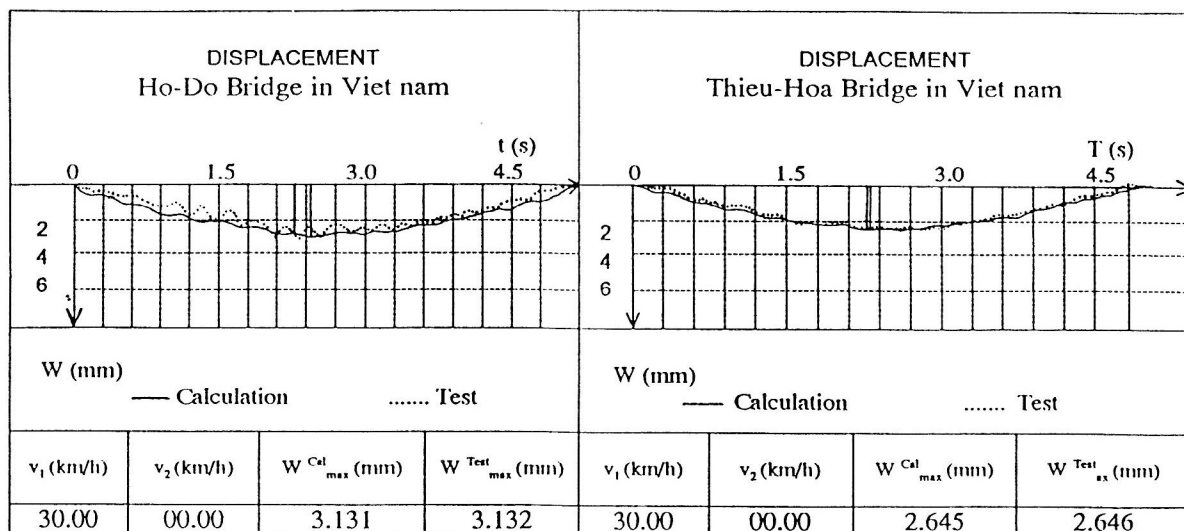


Bild 3. Schwingungsverlauf der Ho-Do Brücke unter einem Fahrzeug

Bild 4. Schwingungsverlauf der Thieu-Hoa Brücke unter einem Fahrzeug

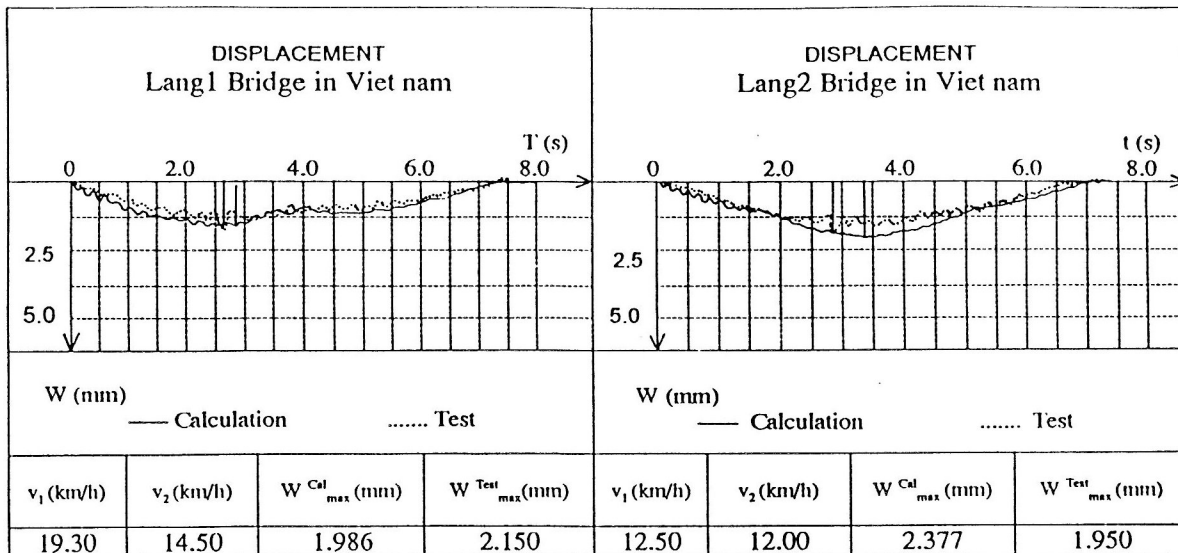


Bild 5. Schwingungsverlauf der Lang 1 Brücke unter zwei Fahrzeugen

Bild 6. Schwingungsverlauf der Lang 2 Brücke unter zwei Fahrzeugen

## 5 Zusammenfassung

Bei Berechnung und Konstruktion von Brücken ist es notwendig, die dynamischen Beanspruchungen zu analysieren. In dieser Arbeit wurde die Berechnung der Biegeschwingungen einfacher Brückenträger unter mehreren bewegten Körpern behandelt. Das Differentialgleichungssystem dieses mechanischen Modells ist ein gemischtes System aus einer partiellen Differentialgleichung und  $N$  gewöhnlichen Differentialgleichungen. Zur Lösung dieses komplizierten Systems wird ein numerischer Algorithmus angegeben. Die Berechnungen der Schwingungen von Brückenträgern auf elastischen sowie auf starren Zwischenlagern werden in anderen Arbeiten veröffentlicht.

An der Technischen Universität Hanoi wurde ein Rechenprogramm zur Berechnung der Schwingungen von Brückenträgern entwickelt. Mit diesem Rechenprogramm wurden Schwingungen von über 20 Brücken in Vietnam berechnet. Die Berechnungsergebnisse stimmen gut mit experimentellen Ergebnissen überein.

**Danksagung:** Diese Arbeit wurde an der TU Hamburg-Harburg fertiggestellt. Ich danke dem DAAD herzlich für die Förderung meines Forschungsaufenthaltes an der TU Hamburg-Harburg.

## Literatur

- 1 Filippov, A. P.; Kochmaniuk, S. S.; Vorobiev, Iu. S.: Einwirkung dynamischer Belastungen auf Konstruktionselemente (russ.). Verlag des wissenschaftlichen Hauses, Kiev, (1974).
- 2 Hagedorn, P.: Technische Schwingungslehre, Band 2. Springer-Verlag, Berlin, (1989).
- 3 Holzweißig, F.; Dresig, H.: Lehrbuch der Maschinendynamik, 3. Auflage. Fachbuchverlag, Leipzig-Köln, (1992).
- 4 Nguyen Van Khang: Anwendung der Substrukturtechnik bei der dynamischen Analyse ebener Mechanismen mit elastischen Gliedern. ZAMM 75, Supplement 1, (1995), S. 119-120.
- 5 Petersen, C.: Dynamik der Baukonstruktion. Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, (1996).
- 6 Popp, K.; Schiehlen, W.: Fahrzeugdynamik. Teubner-Verlag, Stuttgart, (1993)
- 7 Schemmann, A. C.; Smith, H. A.: Vibration Control of Cable Stayed Bridges. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 27, Part 1, (1998), pp. 811-824, Part 2, (1998), pp. 825-843.
- 8 Walther, R.; Hauriet, B.; Isler, W.; Moia, P.: Cable Stayed Bridges. Thomas Telford, London, (1988).

*Anschrift:* Prof. Dr.-Ing. habil. Nguyen Van Khang, Dr.-Ing. Do Xuan Tho, Dipl.-Ing. Hoang Ha, Hanoi University of Technology, 1. Dai Co Viet, Hanoi, Vietnam