

Nichtlineare Viskoelastizität von gummiartigen Werkstoffen: Experimentelle Untersuchung, Modellierung und Identifikation

K. Sedlan, P. Haupt

In diesem Bericht werden verschiebungsgesteuerte kombinierte Zug- und Torsionsversuche an zylindrischen Proben eines rußgefüllten Gummi-Werkstoffs vorgestellt. Anhand der experimentellen Ergebnisse wird deutlich, daß der Werkstoff ein nichtlinear-viskoelastisches Verhalten aufweist. Zur Beschreibung des Materialverhaltens formulieren wir ein phänomenologisches Modell der finiten Viskoelastizität, bei dem die Spannung additiv in zwei Anteile zerlegt wird: Für den geschwindigkeitsunabhängigen Anteil, die Gleichgewichtsspannung, wird eine isotrope Verzerrungsenergiefunktion gewählt. Der geschwindigkeits-abhängige Anteil, die Überspannung, wird durch eine Reihe von parallelgeschalteten verallgemeinerten Maxwell-Elementen beschrieben, die eine Zerlegung der Gesamtdehnung in elastische und inelastische Anteile motivieren. Die Berechnung der einzelnen Anteile basiert auf je einer multiplikativen Zerlegung des Deformationsgradienten. Die Viskositäten der Dämpferelemente hängen von einer weiteren inneren Variablen ab, um die im Experiment festgestellten thixotropen Effekte zu beschreiben. Mit Hilfe eines linearen und nichtlinearen Optimierungsverfahrens werden die im Modell enthaltenen Materialparameter identifiziert. Numerische Simulationen zeigen, daß das Modell in der Lage ist, die im Experiment beobachteten Phänomene nicht nur qualitativ sondern auch quantitativ zu beschreiben.

1 Einleitung und Motivation

Gummi ist ein Werkstoff, der sich in erster Linie durch seine Fähigkeit auszeichnet, große elastische Deformationen ausführen zu können. Neben der Elastizität weisen die meisten industriell eingesetzten Werkstoffe dieser Art auch ein inelastisches Verhalten auf, das durch ein mehr oder weniger stark ausgeprägtes Hystereseverhalten gekennzeichnet ist. Die inelastischen Eigenschaften hängen hauptsächlich von der Art der verwendeten Füllstoffe und deren Konzentration ab.

Im Maschinenbau werden diese Werkstoffe beispielsweise für Gummi-Metall-Verbindungen verwendet, die aus einer Gummifeder bestehen, an deren Enden zwei Metallplatten anvulkanisiert sind. Diese Bauteile übernehmen in erster Linie Federungs- und Dämpfungsaufgaben. Das Hystereseverhalten des für die Gummifedern verwendeten Materials ist im Hinblick auf die Dämpfungseigenschaften von großer Bedeutung. Weitere Anwendungsmöglichkeiten bietet die Reifenindustrie. Für Reifenkonstrukteure ist die Kenntnis des mechanischen Reifenverhaltens enorm wichtig. Der Rollwiderstand ist beispielsweise eine charakteristische Kenngröße, die durch die inelastischen Eigenschaften der verwendeten Werkstoffe beeinflusst wird.

Das elastische Materialverhalten von gummiartigen Werkstoffen war in der Vergangenheit Gegenstand intensiver Forschung. Umfangreiche experimentelle Untersuchungen wurden z.B. von Rivlin und Saunders (1951) und James et al. (1975) durchgeführt, wobei letztere dazu sowohl gefüllte als auch ungefüllte Werkstoffe verwendet haben. Zur Materialbeschreibung wurden ebenso zahlreiche Modelle der Hyperelastizität vorgeschlagen und an experimentelle Daten angepaßt. Die bekanntesten sind das Ogden-Modell und das Mooney-Rivlin-Modell. Eine Zusammenstellung von Modellen der Hyperelastizität findet man z.B. bei Drozdov (1996) (S.103-111).

Zur Beschreibung des inelastischen Verhaltens reichen die Methoden der Elastizitätstheorie nicht aus. Das in diesem Bericht vorgestellte Modell der finiten Viskoelastizität ist in der Lage, neben der nichtlinearen Elastizität auch inelastische Phänomene, wie z.B. nichtlineare Geschwindigkeitsabhängigkeit, zu beschreiben. Bei der Formulierung des Modells wurden grundlegende Methoden von Lubliner (1985) sowie Haupt und Tsakmakis (1989) verwendet. Das Modell basiert auf einer Materialtheorie mit inneren Variablen, die vom Dehnungs-Typ sind. Ein solcher Zugang bei der Entwicklung von Modellen der finiten Viskoelastizität wurde ebenfalls von LeTallec et al. (1993), Govindjee und Reese (1997) sowie Lion (1997) gewählt.

2 Experimente

In diesem Abschnitt werden Ergebnisse aus Zug- und Torsionsversuchen an Vollzylinderproben diskutiert, die von der Fa. Continental in Hannover zur Verfügung gestellt wurden und dort für Zug-Druckversuche verwendet werden. Der relevante Meßbereich hat im undeformierten Zustand einen Durchmesser und eine Länge von 20 mm. Bei dem Probenmaterial handelt es sich um eine rußgefüllte Gummimischung der Härte 74° Shore A. Die Durchführung der Experimente erfolgte im Labor des Institutes für Mechanik der Universität Kassel.

Alle Proben wurden vor der Durchführung der für die Modellierung wesentlichen Experimente einem Vorprozeß unterworfen, bei dem sie 13 mal zyklisch bis zu einer maximalen Dehnung von ca. 100% belastet wurden. Durch den Vorprozeß konnte die bei neuen Gummiprobe auftretende starke Entfestigung nach der ersten zyklischen Belastung von den übrigen Phänomenen getrennt werden. Die starke Spannungsabnahme nach dem ersten Zyklus wird in der Literatur häufig als Mullins-Effekt bezeichnet (vgl. Büche, 1961). Im Anschluß an den Vorprozeß folgte eine Ruhephase von ca. 12h. Die Proben blieben dabei in der Prüfmaschine eingespannt. Die Spannungsrelaxation war nach dieser Zeit vollständig abgeschlossen.

Aus Sicht der Kontinuumsmechanik stellt sich ganz allgemein die Frage, welche Deformationen sinnvoll sind, um Materialeigenschaften zu untersuchen. Ein allgemeines Kriterium ist die Erfüllung der Gleichgewichtsbedingung $\text{div}\mathbf{T} = \mathbf{0}$ für jede spezielle Form der Stoffgleichung. Man kann nachweisen, daß die Zug-Druck-Torsionsbewegung eines kreiszylindrischen Stabes dieser Bedingung genügt (siehe z. B. Fosdick, 1968). Voraussetzung ist die Isotropie und die Inkompressibilität des Materials. Die Koordinatendarstellung dieser Bewegung lautet

$$r = \frac{R}{\sqrt{\lambda(t)}} \quad \varphi = \Phi + \frac{\alpha(t)}{L_0} Z \quad z = \lambda(t)Z \quad (1)$$

wobei R , Φ , Z die Koordinaten in der Referenz- und r , φ , z die Koordinaten in der Momentankonfiguration sind. Die Bewegung (1) kann in einem mittleren Bereich der Probe in guter Näherung realisiert werden. Die Zug-Druck-Deformation führt zu einer Änderung der Querschnittsflächen. Bei der Torsionsbewegung führen die Querschnittsflächen reine Drehungen aus, und die Mantellinien des Zylinders gehen in Schraubenlinien über. Die kreiszylindrische Form bleibt bei dieser Bewegung erhalten. Die Funktionen $\lambda(t)$ bzw. $\alpha(t)$ beschreiben die Streckung des Zylinders bzw. die relative Verdrehung der Stirnflächen.

In Bild 1 sind verschiebungsgesteuerte monotone Zugversuche dargestellt. Die Ingenieurspannung ist über der Ingenieurdehnung aufgetragen. Die Dehnungsgeschwindigkeit wurde bei vier Versuchen jeweils um den Faktor 10 geändert. Sie hatte die Werte $3 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1}$, $3 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$, $3 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ und $3 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$. Man beobachtet einen nichtlinearen Verlauf der Kennlinien. Außerdem stellt man fest, daß die Spannung unterlinear mit steigender Geschwindigkeit zunimmt. Die nichtlineare Geschwindigkeitsabhängigkeit ist eine typische Eigenschaft dieser Werkstoffe. Sie wurde u.a. auch von Bergström und Boyce (1998) bei rußgefülltem Chloropren-Gummi festgestellt.

In einem weiteren Experiment wurde der Deformationsprozeß durch fünf Haltezeiten unterbrochen, bei denen die Dehnung konstant gehalten wurde. Während der Haltezeiten, die eine Dauer von 5½ Stunden hatten, relaxiert die Spannung auf einen annähernd konstanten Wert. Wesentlich ist hierbei, daß die Spannungswerte am Ende der Haltezeiten unterhalb der Werte liegen, die bei dem Experiment mit der geringsten Geschwindigkeit erreicht wurden.

In den Bildern 2a und 2b sind verschiebungsgesteuerte monotone Torsionsversuche dargestellt, die analog zu den Zugversuchen durchgeführt wurden. Das gemessene Moment und die gemessene Normalkraft sind jeweils über der Drillung aufgetragen. Die Drillungsgeschwindigkeit betrug $2 \text{ m}^{-1}\text{s}^{-1}$, $2 \times 10^{-1} \text{ m}^{-1}\text{s}^{-1}$, $2 \times 10^{-2} \text{ m}^{-1}\text{s}^{-1}$ und $2 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}\text{s}^{-1}$. Auch anhand der Moment- und Kraftverläufe ist eine unterlineare Geschwindigkeitsabhängigkeit zu beobachten. Sie ist bei der Normalkraft, die ein Effekt zweiter Ordnung ist, nur sehr schwach ausgeprägt.

In den Bildern 3 und 4 sind zwei zyklische Zugversuche mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten dargestellt. Zu Vergleichszwecken ist in Bild 3 zusätzlich der monotone Versuch mit Haltezeiten aufgetragen. Bei zyklischer Belastung weist der Werkstoff ein Hystereseverhalten auf. Die Hysteresen sind im Vergleich zu metallischen Werkstoffen sehr schwach ausgeprägt, was auf überwiegend elastische Materialeigenschaften hindeutet. Bei kürzerer Zyklendauer ist die Fläche der Hysterese größer.

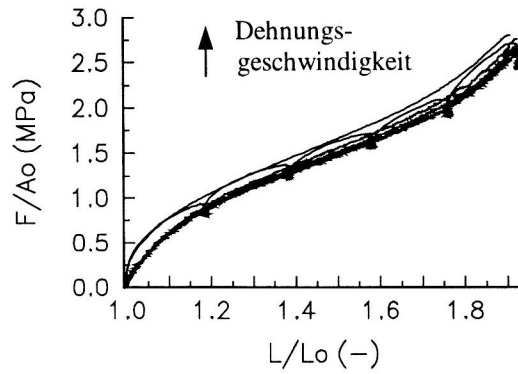


Bild 1. Monotone Zugversuche

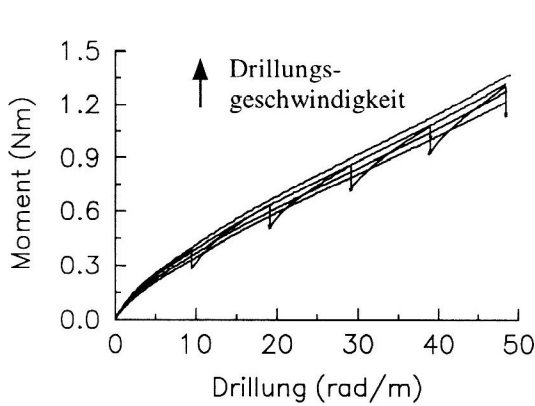


Bild 2a. Monotone Torsionsversuche, Moment

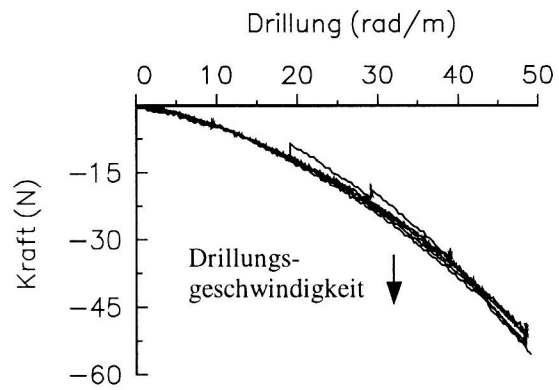


Bild 2b. Monotone Torsionsversuche, Kraft

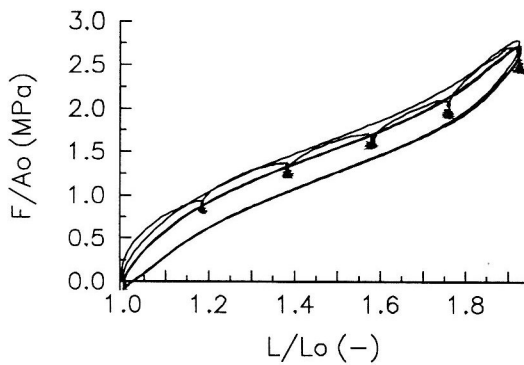


Bild 3. Zyklischer und monotoner Zugversuch mit Haltezeiten, $\pm 3 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1}$

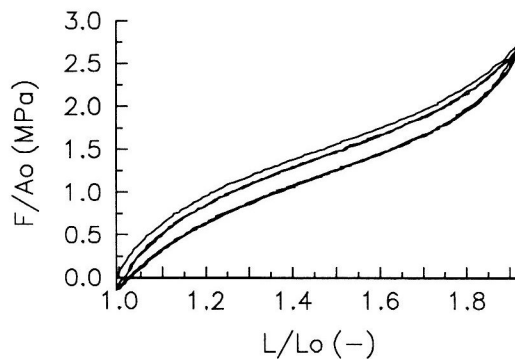


Bild 4. Zyklischer Zugversuch, $\pm 3 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$

Bei beiden zyklischen Experimenten ist eine Spannungsabnahme nach dem ersten Belastungszyklus zu beobachten. Danach wird ein stationärer Zyklus erreicht, der durch eine stationäre Hysterese gekennzeichnet ist. Diese Entfestigung wird auf die Zerstörung von physikalischen Bindungen zurückgeführt, die allerdings unter bestimmten Bedingungen wieder neu entstehen können. Werden Mikrostrukturen im Material aufgrund von Deformationsprozessen zerstört und erfolgt der Wiederaufbau während der Ruhephasen ohne äußere Einwirkung, so spricht man in der Rheologie der Kunststoffe von thixotropen Vorgängen (vgl. Barnes, 1997). Im makroskopischen Verhalten treten aufgrund thixotroper Mechanismen Ver- und Entfestigungsphänomene auf.

Vergleicht man den monotonen mit dem zyklischen Versuch in Bild 3, so lassen sich zwei weitere interessante Phänomene feststellen:

1. Die Relaxationsabbruchpunkte liegen innerhalb der stationären Hysterese.
 2. Bei erneuter Belastung nach den Haltezeiten werden Spannungswerte erreicht, die außerhalb der stationären Hysterese liegen und annähernd so groß sind, wie vor der Entfestigung.
- Das zweite Phänomen läßt auf thixotrope Erholungseffekte des Materials während der Ruhephasen schließen.

Die Abhängigkeit des Relaxationsverhaltens von der Prozeßgeschichte kann ebenfalls auf thixotrope Effekte zurückgeführt werden. In den Bildern 5 und 6 sind zur Verdeutlichung dieser Abhängigkeit die Relaxationsverläufe der Spannung bei unterschiedlichen Vorbelastungen aufgetragen. Bei den Kennlinien, die mit (a) gekennzeichnet sind, handelt es sich um die Meßkurven des monotonen Zugversuchs aus Bild 1 bzw. 3. Zum Vergleich sind zwei weitere Relaxationsverläufe (Kennlinien (b)) bei jeweils gleicher Dehnung dargestellt, die nach vorheriger zyklischer Belastung aufgenommen wurden. Bei allen vier Meßkurven ist ein charakteristischer Relaxationsverlauf zu erkennen: Die Spannung nimmt am Anfang sehr schnell und dann immer langsamer ab. Der größte Teil der Spannungsrelaxation erfolgt innerhalb weniger Minuten. Wesentliche Unterschiede bestehen in der Größe des Spannungsabfalls, die bei dem Versuch mit vorheriger zyklischer Belastung geringer ist als bei dem mit monotoner Vorbelastung. Ferner stellt man fest, daß die Spannungswerte der Meßkurven (b) zu vergleichbaren Zeiten kleiner sind als die der Meßkurven (a). Ein weiterer Unterschied ist bei der Relaxationsdauer zu beobachten: Die Relaxation bei Versuch (b) in Bild 5 ist beispielsweise bereits nach ca. 3 Stunden abgeschlossen. Nach dieser Zeit läßt sich keine weitere Spannungsabnahme feststellen. Hingegen ist die Relaxation bei Versuch (a) selbst nach 5½ Stunden noch nicht beendet.

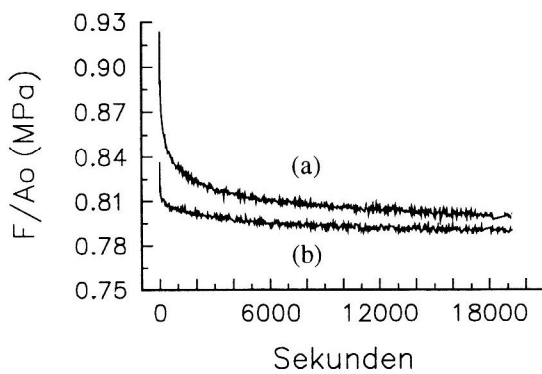


Bild 5. Relaxation nach zyklischer (b) und monotoner (a) Belastung, 18% Dehnung

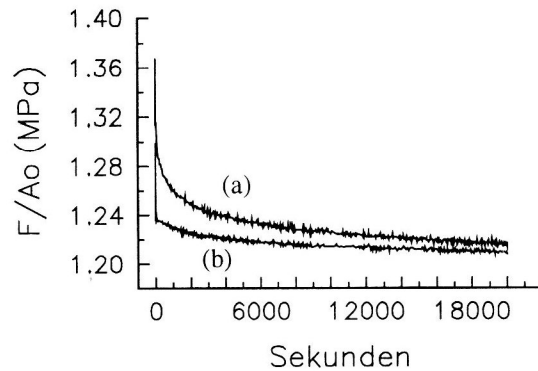


Bild 6. Relaxation nach zyklischer (b) und monotoner (a) Belastung, 38% Dehnung

Zum Abschluß des experimentellen Teils sind in den Bildern 7 und 8 zyklische kombinierte Zug-Torsionsversuche dargestellt. In der Verschiebungsebene (λ - α -Ebene) wurden bestimmte Geometrien (Sanduhr, Rechteck) in verschiedenen Richtungen durchlaufen. Deutlich zu erkennen ist die Abhängigkeit der Materialantwort von der Belastungsrichtung.

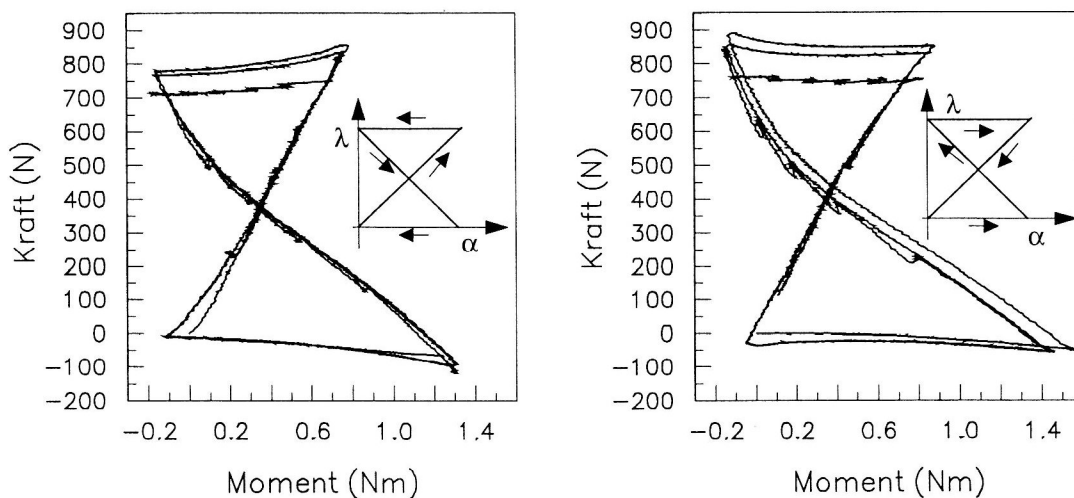


Bild 7. Zyklische Zug-Torsionsversuche, Geschwindigkeit: $\pm 3 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$, $\pm 2 \times 10^0 \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-1}$

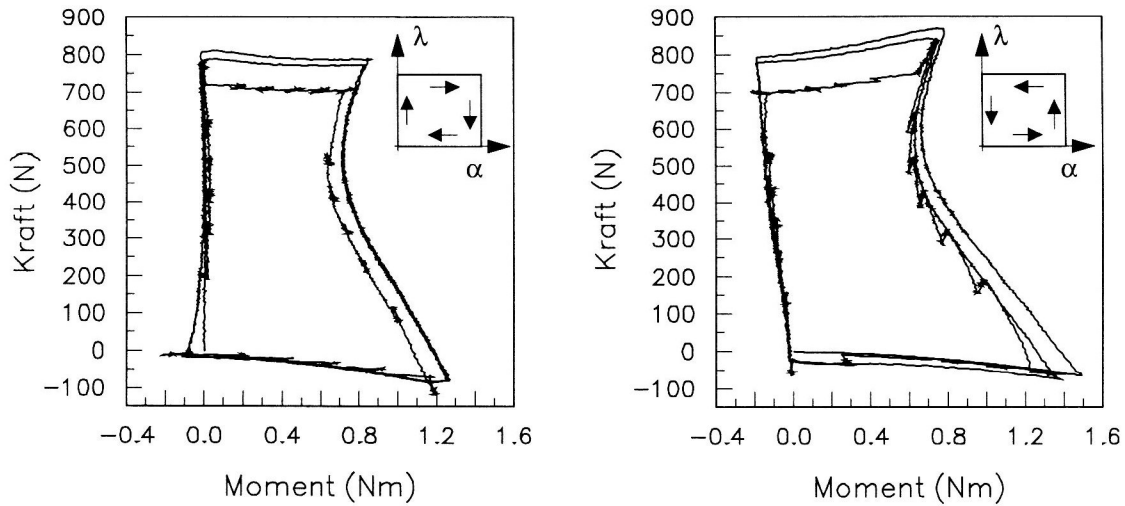


Bild 8. Zyklische Zug-Torsionsversuche, Geschwindigkeit: $\pm 3 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$, $\pm 2 \times 10^0 \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-1}$

3 Materialmodell

In diesem Abschnitt wird das entwickelte Materialmodell vorgestellt. Um die grundlegende Struktur des Modells zu erläutern und diese physikalisch zu motivieren, wird von einem rheologischen Feder-Dämpfermodell ausgegangen. Ein wesentlicher Vorteil bei dieser Vorgehensweise besteht darin, daß die im Experiment beobachteten Phänomene den Elementen des Modells zugeordnet werden können. Außerdem erhält man Hinweise über die Struktur der zu formulierenden Materialgleichungen.

Das rheologische Modell besteht aus einer Feder und einer Anzahl N parallelgeschalteter Maxwell-Elemente. Das Modell motiviert eine additive Zerlegung der Spannung in *Überspannung* σ_{ov} , die sich durch Superposition der einzelnen Maxwell-Elemente ergibt, und *Gleichgewichtsspannung* σ_{eq} , die der oberen Feder zuzuordnen ist.

$$\sigma = \sigma_{eq} + \sigma_{ov} \quad \sigma_{ov} = \sum_{i=1}^N \sigma_{ovi} \quad (2)$$

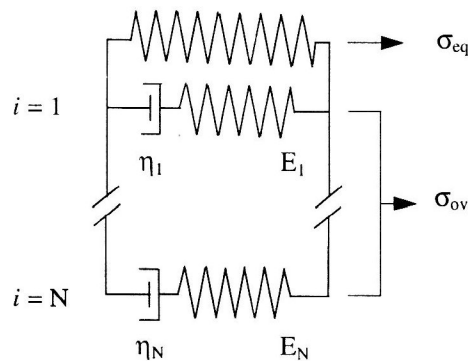


Bild 9. Rheologisches Modell

Im Falle konstanter Federsteifigkeiten E_i und konstanter Viskositäten η_i erhält man die Differentialgleichung

$$\dot{\sigma}_{ovi} = E_i \dot{\epsilon} - \frac{1}{\tau_i} \sigma_{ovi} \quad \tau_i = \eta_i / E_i \quad (3)$$

für die Überspannung, wie sie aus der linearen Viskoelastizität bekannt ist. Bei den Parametern τ_i handelt es sich um Relaxationszeiten. Modelle der linearen Viskoelastizität sind nicht geeignet, das Verhalten des untersuchten

Werkstoffs wiederzugeben. Das folgende Modell (Gleichungen (4) - (6)) ist hingegen in der Lage, die im Experiment beobachteten Phänomene, wie z.B. nichtlineare Geschwindigkeitsabhängigkeit und thixotrope Effekte, qualitativ zu beschreiben.

$$\dot{\sigma}_{ovi} = E_i \dot{\epsilon} - \zeta_i |\dot{\epsilon}| \sigma_{ovi} - \frac{1}{\tau_i} \sigma_{ovi} \quad (4)$$

$$\tau_i = \tau_{maxi}(1 - q) + \tau_{mini}q \quad \tau_{maxi} \gg \tau_{mini} \quad (5)$$

$$\dot{q} = \zeta |\dot{\epsilon}| (1 - q) - \frac{1}{\tau_q} q^\kappa \quad 0 < \kappa < 1 \quad (6)$$

Ohne den letzten Term auf der rechten Seite entspricht Gleichung (4) einer geschwindigkeitsunabhängigen Materialgleichung vom Armstrong-Frederick-Typ und ohne den mittleren Term erhält man bei konstanten Relaxationszeiten τ_i die Gleichung (3), der linearen Viskoelastizität. Die Relaxationszeiten sind hier lineare Funktionen einer zusätzlichen inneren Variablen q , die thixotrope Effekte beschreiben soll. Variablen dieses Typs werden in der Literatur oft als Strukturvariablen bezeichnet (vgl. Barnes, 1997). Die Differentialgleichung (6) beschreibt die Evolution dieser Variablen.

Das Differentialgleichungssystem (4) - (6) läßt sich nicht analytisch lösen. Für einige Spezialfälle kann man dennoch qualitative Aussagen über das Modellverhalten machen. Einer davon ist der zyklische Deformationsprozeß, für den $|\dot{\epsilon}| = \text{konstant}$ gilt. Die Strukturvariable erreicht dabei einen stationären Wert q_{stat} , der durch die transzendente Beziehung

$$\zeta |\dot{\epsilon}| q_{stat} + \frac{1}{\tau_q} q_{stat}^\kappa - \zeta |\dot{\epsilon}| = 0 \quad (7)$$

gegeben ist. Bei steigendem Wert von q nehmen die Relaxationszeiten nach Gleichung (5) ab, womit ein Entfestigungsverhalten beschrieben wird. Nimmt der Wert von q hingegen bei konstanter Deformation ($|\dot{\epsilon}| = 0$) ab, werden die Relaxationszeiten wieder größer. Dies führt zu einer erneuten Verfestigung.

Im weiteren werden die auf der Basis des rheologischen Modells formulierten Materialgleichungen verallgemeinert. Wir beginnen mit der additiven Zerlegung des Cauchyschen Spannungstensors:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_{eq} + \mathbf{T}_{ov} \quad (8)$$

Unter Berücksichtigung der Inkompressibilität folgt daraus

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{1} + \mathbf{S}_{eq} + \mathbf{S}_{ov} \quad (9)$$

wobei p der hydrostatische Druck ist, der aus Gleichgewichts- und Randbedingungen bestimmt wird. Für die Gleichgewichtsspannung \mathbf{S}_{eq} gilt die Potentialbeziehung $\mathbf{S}_{eq} = 2\mathbf{B}\partial W_{eq}/\partial\mathbf{B}$. Der Tensor \mathbf{B} ist der linke-Cauchy-Green-Tensor, den man aus dem Deformationsgradienten \mathbf{F} durch die Berechnungsvorschrift $\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$ erhält. Für die spezifische elastische Verzerrungsenergie W_{eq} wird eine Funktion der beiden Hauptinvarianten von \mathbf{B} verwendet:

$$W_{eq} = C_1(I-3) + C_2(II-3) + C_3(I-3)(II-3) + C_4(II-3)^2 + C_5(I-3)^3 \quad (10)$$

Zur Entwicklung von Materialgleichungen, welche die Teil-Überspannungen \mathbf{S}_{ovi} beschreiben, wird von einer multiplikativen Zerlegung des Deformationsgradienten in elastische und inelastische Anteile ausgegangen:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{el} \mathbf{F}_{ini} \quad (11)$$

Diese Zerlegung wurde von Lubliner (1985) sowie von Lion (1997) bei der Formulierung von Materialmodellen der finiten Viskoelastizität angewendet. Sie erfolgt hier N -mal ($i = 1, 2, \dots, N$) und induziert N inelastische Zwischenkonfigurationen. Zur Formulierung von geeigneten Tensoren, welche die inelastischen Verzerrungen

sowie deren Raten messen, wird das von Haupt und Tsakmakis (1989) entwickelte Konzept der Dualen Variablen angewendet. Dabei wird der Greensche Verzerrungstensor $\mathbf{E} = 1/2(\mathbf{F}^T\mathbf{F}-\mathbf{1})$ auf die jeweilige Zwischenkonfiguration transformiert:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i = \mathbf{F}_{ini}^{T-1} \mathbf{E} \mathbf{F}_{ini}^{-1} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_{eli}^T \mathbf{F}_{eli} - \mathbf{1}) + \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{F}_{ini}^{T-1} \mathbf{F}_{ini}^{-1}) := \boldsymbol{\varepsilon}_{eli} + \boldsymbol{\varepsilon}_{ini} \quad (12)$$

Die Verzerrungstensoren $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ zerlegen sich additiv in elastische Anteile $\boldsymbol{\varepsilon}_{eli}$ vom Green-Typ und in inelastische Anteile $\boldsymbol{\varepsilon}_{ini}$ vom Almansi-Typ. Die zugehörigen Raten sind Oldroyd-Ableitungen und werden mit derselben Transformation aus der materiellen Zeitableitung von \mathbf{E} gewonnen:

$$\overset{\Delta}{\boldsymbol{\varepsilon}}_i = \mathbf{F}_{ini}^{T-1} \dot{\mathbf{E}} \mathbf{F}_{ini}^{-1} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i + \mathbf{L}_{ini}^T \boldsymbol{\varepsilon}_i + \boldsymbol{\varepsilon}_i \mathbf{L}_{ini} = \overset{\Delta}{\boldsymbol{\varepsilon}}_{eli} + \overset{\Delta}{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ini} \quad \mathbf{L}_{ini} = \dot{\mathbf{F}}_{ini} \mathbf{F}_{ini}^{-1} \quad (13)$$

Für die zugehörigen Dualen Spannungen $\boldsymbol{\tau}_{ovi} = \mathbf{F}_{eli}^{-1} \mathbf{S}_{ovi} \mathbf{F}_{eli}^{T-1}$ gilt die folgende Potentialbeziehung:

$$\boldsymbol{\tau}_{ovi} = 2 \frac{\partial W_{ovi}}{\partial \mathbf{C}_{eli}} \quad \mathbf{C}_{eli} = \mathbf{F}_{eli}^T \mathbf{F}_{eli} \quad (14)$$

Die einzelnen Anteile der Verzerrungsenergie W_{ovi} können anschaulich als die in den Federn der Maxwell-Elemente gespeicherte Energie interpretiert werden. Für sie wird eine Beziehung vom „Neo-Hooke-Typ“ gewählt:

$$W_{ovi} = \mu_i(I_{C_{eli}} - 3) \quad (15)$$

Mit den Größen der Zwischenkonfiguration läßt sich die Fließregel

$$\overset{\Delta}{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ini} = \frac{1}{\eta_i} \left[\mathbf{C}_{eli} \boldsymbol{\tau}_{ovi} - \frac{1}{3} \text{Sp}(\mathbf{C}_{eli} \boldsymbol{\tau}_{ovi}) \mathbf{1} \right] \quad \eta_i > 0 \quad (16)$$

formulieren, die in einer Arbeit von Lion (1997) vorgeschlagen wurde. Die Materialparameter η_i können physikalisch als Viskositäten interpretiert werden. Die experimentellen Ergebnisse motivieren eine Abhängigkeit dieser Größen von der Dehnungsgeschichte.

In Analogie zum eindimensionalen Modell wird folgende Beziehung formuliert:

$$\eta_i = \mu_i \frac{f(\mathbf{B})}{\xi_i \|\mathbf{D}\| + 1 / \tau_i} \quad \tau_i = \tau_{maxi}(1-q) + \tau_{mini}q \quad (17)$$

mit $\|\mathbf{D}\| = \sqrt{\mathbf{D} \cdot \mathbf{D}}$. Der Tensor \mathbf{D} ist der Verzerrungsgeschwindigkeitstensor, der aus dem symmetrischen Anteil des Geschwindigkeitsgradienten gebildet wird: $\mathbf{D} = 1/2(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T)$. Bei $f(\mathbf{B})$ handelt es sich um eine skalare Tensorfunktion, die eine Abhängigkeit der Viskositäten von der aktuellen Dehnung beschreibt. Hier wurde die Norm des Tensors $f(\mathbf{B}) = \|\mathbf{B}\|$ gewählt. Die Koeffizienten ξ_i sind dimensionslose Materialparameter. Die Parameter τ_i können als Relaxationszeiten interpretiert werden. Sie sind wie im eindimensionalen Modell Funktionen einer Strukturvariablen q , für die folgende Evolutionsgleichung gelten soll:

$$\dot{q} = \zeta \|\mathbf{D}\| (1-q) - 1 / \tau_q q^\kappa \quad 0 < \kappa \leq 1 \quad (18)$$

Die Parameter ζ und κ sind dimensionslos. Der Parameter τ_q beschreibt die Relaxation der Variablen q .

4 Identifikation und Modellrechnungen

Um Deformationsprozesse numerisch zu simulieren, werden die auf der Zwischenkonfiguration formulierten Größen (Gleichungen (14), (16)) durch die Transformationsvorschriften

$$\mathbf{F}_{ini}^{-1} \boldsymbol{\tau}_{ovi} \mathbf{F}_{ini}^{T-1} \quad \text{und} \quad \mathbf{F}_{ini}^T \overset{\Delta}{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ini} \mathbf{F}_{ini}$$

auf die Referenzkonfiguration abgebildet. Nach einigen algebraischen Umformungen erhält man daraus folgende Modellgleichungen:

$$\dot{\mathbf{C}}_{ini} = \frac{4\mu_i}{\eta_i} \left(\mathbf{C} - \frac{1}{3} (\mathbf{C} \cdot \mathbf{C}_{ini}^{-1}) \mathbf{C}_{ini} \right) \quad (19)$$

$$\tilde{\mathbf{T}} = -p \mathbf{C}^{-1} + \tilde{\mathbf{S}}_{eq} + \sum_{i=1}^N \mu_i \mathbf{C}_{ini}^{-1} \quad (20)$$

Der zweite Piola-Kirchhoffsche Spannungstensor $\tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{T} \mathbf{F}^{T-1}$ setzt sich additiv aus mehreren Anteilen zusammen. Zur Berechnung des letzten Terms auf der rechten Seite werden die Evolutionsgleichungen (19) für die inelastischen Dehnungen numerisch integriert. Der Gleichgewichtsanteil $\tilde{\mathbf{S}}_{eq}$ ist durch Gleichung (10) gegeben.

Die Identifikation der in den Modellgleichungen enthaltenen Parameter basiert auf dem Optimierungsproblem

$$F(\mathbf{p}) = \sum_{j=1}^M W_j \left| S_j^{mess} - S(\mathbf{p})_j^{modell} \right|^2 \rightarrow \text{Min} \quad (21)$$

bei dem das Minimum der Zielfunktion $F(\mathbf{p})$ gesucht wird. Diese ist definiert als gewichtete Summe der Abstandskvadrat zwischen gemessenen S_j^{mess} und berechneten Größen $S(\mathbf{p})_j^{modell}$. M ist die Anzahl der in das Identifikationsverfahren eingehenden Meßwerte. Die Materialparameter sind in dem Vektor \mathbf{p} zusammengefaßt. Aufgrund der additiven Zerlegung der Spannung in Gleichgewichts- und Überspannung, kann die Identifikation in zwei Schritten erfolgen. Im ersten Schritt werden die Parameter, die in der Elastizitätsbeziehung (3.9) enthalten sind ($\mathbf{p}_{eq} = [C_1 \ C_2 \ C_3 \ C_4 \ C_5]^T$), identifiziert. Hierzu werden die nach vollständiger Relaxation gemessenen Kräfte und Momente aus dem Torsionsversuch (Bild 2a,b) sowie entsprechende Kräfte aus dem Zugversuch (Bild 1) herangezogen. Das Optimierungsproblem vereinfacht sich, da die Elastizitätsbeziehung linear in den gesuchten Parametern ist. Die Identifikation erfolgt mit Hilfe des klassischen least-square-Verfahrens, mit dem das globale Minimum von (21) gefunden werden kann.

Auf Basis der monotonen und zyklischen Zugversuche werden im zweiten Schritt die übrigen Parameter identifiziert. Hierbei kommt der Nelder-Mead-Algorithmus zum Einsatz, der in seiner Originalform von Nelder und Mead (1965) entwickelt wurde. Es handelt sich dabei um eine direkte Suchmethode, die bei nichtlinearen Optimierungsproblemen angewendet werden kann. Für dieses Verfahren sind nur Funktionswerte der Zielfunktion erforderlich. Eine ausführliche Beschreibung des Nelder-Mead-Algorithmus findet der interessierte Leser z.B. bei Nash (1990) (S.168-182).

Die identifizierten Parameter sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

Gleichgewichtsspannung		Überspannung			
Parameter		Parameter		Parameter	
		μ_1	0.3 MPa	μ_3	0.3 MPa
C_1	0.14 MPa	ξ_1	2	ξ_3	10
C_2	0.69 MPa	τ_{max1}	200 s	τ_{max3}	20000 s
C_3	0.40 MPa	τ_{min1}	10 s	τ_{min3}	20 s
C_4	-0.65 MPa				
C_5	0.02 MPa	μ_2	0.8 MPa	ζ	2.4
		ξ_2	30	τ_q	40000 s
		τ_{max2}	200000 s		
		τ_{min2}	20 s	κ	0.5

Tabelle 1. Identifizierte Materialparameter

In den folgenden Bildern werden abschließend einige Modellrechnungen gezeigt, die gute Übereinstimmung mit den experimentellen Daten aufweisen.

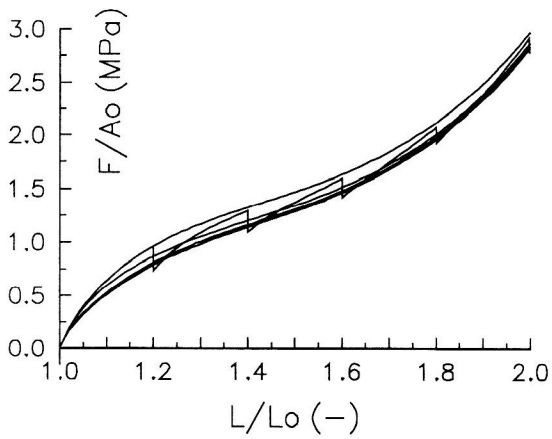


Bild 10. Monotone Zugversuche, (vgl. Bild 1)

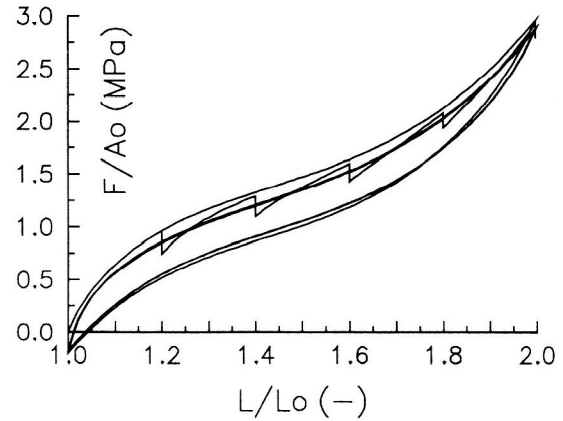


Bild 11. Zyklischer und monotoner Zugversuch mit Haltezeiten, (vgl. Bild 3)

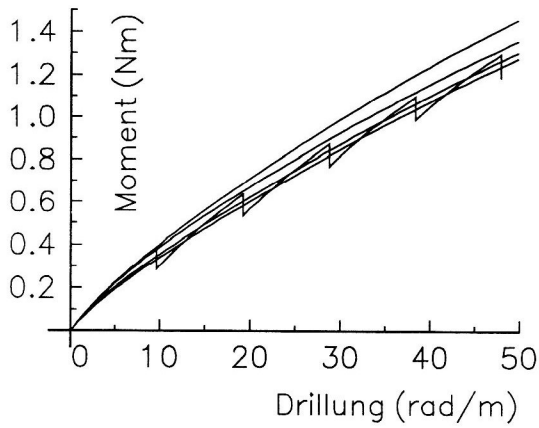


Bild 12. Monotone Torsionsversuche, Moment, (vgl. Bild 2a)

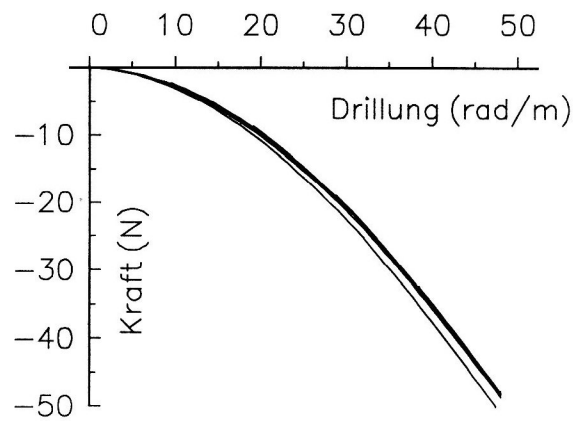


Bild 13. Monotone Torsionsversuche, Kraft, (vgl. Bild 2b)

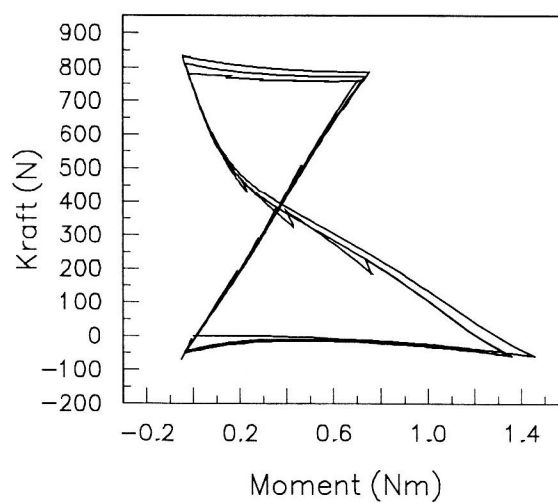
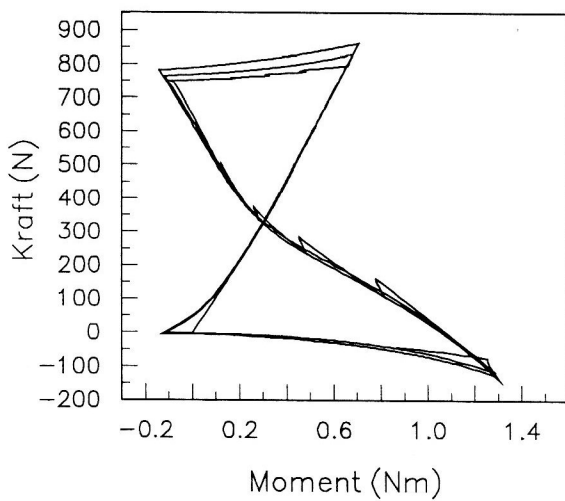


Bild 14. Zyklische Zug-Torsionsversuche, (vgl. Bild 7)

Literatur

1. Barnes, H.: Thixotropy - a review, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 70, (1997), 1-33.
2. Bergström, J.S., Boyce, M.C.: Constitutive modeling of the large strain time-dependent behavior of elastomers, *J. of the mechanics and physics of solids*, 46/5, (1998), 931-954.
3. Büche, F.: Mullins-Effect and rubber-filler interaction, *J. Appl. Polym.Sci.*, 5, (1961), 271-281.
4. Drozdov, A.D.: Finite elasticity and viscoelasticity, World Scientific Verlag, (1996), 103-118.
5. Fosdick, R.L.: Dynamically possible motions of incompressible simple materials, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 29, (1968), 272-288.
6. Govindjee, S., Reese, S.: A presentation and comparison of two large deformation viscoelasticity models, *ASME, J. Engineering Materials and Technology*, 119, (1997), 251-255.
7. Haupt, P.: On the mathematical modelling of material behavior in continuum mechanics, *Acta Mechanica* 100, (1993), 129-154.
8. Haupt, P., Tsakmakis, C.: On the application of dual variables in continuum mechanics, *Continuum Mech. Thermodyn.*, 1, (1989), 165-196.
9. James, A.G. et al.: Strain energy functions of rubber, I: Characterisation of gum vulcanisates, II: The characterisation of filled vulcanisates, *J. Appl. Polym. Sci.* 19, (1975), 2033-2058, 2319-2330.
10. Johnson, M.A., Beatty, M.F.: The mullins effect in uniaxial extension and its influence on the transverse vibration of a rubber string, *Contin.Mech.Thermodyn.*, 5, (1993), 83-115.
11. Le Tallec, P., Rahier, C., Kaiss, A.: Three-dimensional incompressible viscoelasticity in large strains: Formulation and numerical approximation, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 109, (1993), 233-258.
12. Lion, A.: A physically based method to represent the thermomechanical behaviour of elastomers, *Acta Mechanica*, 123, (1997), 1-25.
13. Lubliner, J.: A model of rubber viscoelasticity, *Mech. Research Communic.*, 12(2), (1985), 93-99.
14. Nash, J.C.: Compact numerical methods for computers - linear algebra and function minimisation, Adam Hilger imprint, (1990), 168-187.
15. Nelder, J.A., Mead, R.: A simplex method for function minimization, *Computer Journal*, 7, (1965), 308-313.
16. Rivlin, R.S., Saunders, D.W.: Large elastic deformation of isotropic materials : VII. Experiments on the Deformation of rubber, *Phil. Trans. R. Soc. A*, 243, (1951), 251-298.
17. Tschoegel, N. W.: The Phenomenological Theory of Linear Viscoelastic Behaviour - An Introduction, Springer Verlag New York, (1989).

Adresse: Dipl.-Ing. Konstantin Sedlan, Prof. Dr.-Ing. Peter Haupt, Institut für Mechanik, Universität Gesamthochschule Kassel, Mönchebergstraße 7, D-34109 Kassel