

Ergänzung zur Theorie der Torsionsschwingungssysteme mit endlich vielen Freiheitsgraden.

Teil II: Wirkung einer periodisch veränderlichen Zugbelastung auf das Verhalten von Torsionssystemen

Z. Szolgay

Der Teil II der Arbeit beschäftigt sich mit Torsionsschwingungssystemen, die einer periodisch veränderlichen Zugbelastung unterworfen sind. Es werden das System mit einem Freiheitsgrad und ein spezielles System mit endlich vielen Freiheitsgraden untersucht. Die Numerierung der einzelnen Punkte und der Gleichungen ist die Fortsetzung der im Teil I (Szolgay, 1995) begonnenen Numerierung.

8 Die Bewegungsgleichung des Torsionsschwingungssystems mit einem Freiheitsgrad

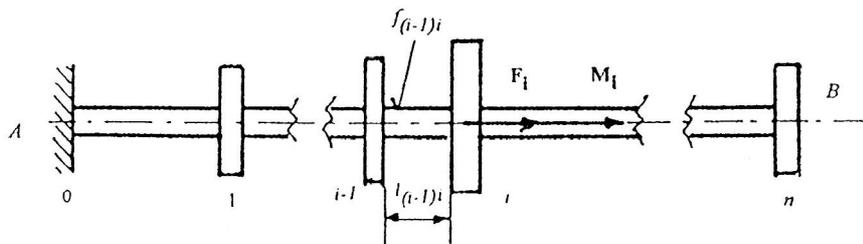


Bild 2. Das Torsionsschwingungssystem

Es wird das Torsionsschwingungssystem nach Bild 2 mit $n = 1$ betrachtet. Dementsprechend können in diesem Abschnitt die Indizes weggelassen werden.

Ist die Kraft F nicht konstant, sondern verändert sie sich periodisch mit der Zeit, so verändert sich damit auch der Charakter der Schwingungen. Für F gilt im einfachsten Falle

$$F = X + Y \cos \omega t \quad (8.1)_{II}$$

wobei X und Y Konstanten sind.

In der Formel (2.17)_I ist $\sigma = F/A$ die durchschnittliche Zugspannung.

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{X}{A} + \frac{Y}{A} \cos \omega t = x + y \cos \omega t \quad (8.2)_{II}$$

Dieser Ausdruck soll in die Gleichung (3.1)_I eingesetzt werden.

$$J\ddot{\alpha} + \frac{I_p G}{l} \left(1 + \frac{x}{G} + \frac{y}{G} \cos \omega t \right) \alpha = M \quad (8.3)_{II}$$

Mit einer weiteren Umformung werden wir eine übliche Gestalt der Mathieuschen Gleichung erhalten.

Im weiteren beschränken wir uns auf die homogene Gleichung. Es sei

$$v_0^2 = \frac{I_p G}{Jl} \qquad 2\tau = \omega t \qquad (8.4)_{II}$$

und dementsprechend

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{\omega}{2}$$

Die Bewegungsgleichung erhält dann die Form

$$\alpha'' + 4 \frac{v_0^2}{\omega^2} \left[1 + \frac{x}{G} + \frac{y}{G} \cos 2\tau \right] \alpha = 0 \qquad (8.5)_{II}$$

oder

$$\alpha'' + (\lambda + 2\mu \cos 2\tau)\alpha = 0 \qquad (8.6)_{II}$$

mit den oft üblichen Bezeichnungen

$$\lambda = 4 \frac{v_0^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{x}{G} \right) \qquad \mu = 2 \frac{v_0^2}{\omega^2} \frac{y}{G} \qquad (8.7)_{II}$$

9 Die Stabilität der Bewegung. Hauptinstabilitätsbereich des Systems

Die homogene Mathieusche Gleichung hat nur dann begrenzte Lösungen, wenn gewisse Bedingungen befriedigt sind. Werden diese Bedingungen nicht befriedigt, dann wächst wenigstens eine Lösung des Fundamentalsystems der Differentialgleichung über alle Grenzen.

Sind beide Lösungen des Fundamentalsystems begrenzt, dann werden die allgemeine Lösung und auch das Schwingungssystem selbst stabil genannt. Sonst sind sie instabil oder labil.

Die Frage der Stabilität hängt von der Gruppe der veränderbaren konstanten Parameter ab. Im vorliegenden Falle gibt es drei solche Parameter: x , y und ω .

Die Praxis zeigt, daß eine wirkliche Resonanzgefahr bei den praktisch möglichen Werten dieser Parameter nur im sog. Hauptinstabilitätsbereich des hier untersuchten idealisierten mechanischen Modells auftreten kann. Die folgenden Ausführungen beschäftigen sich mit dem *Problem des Hauptinstabilitätsbereiches*.

Im Sinne technischer Erfahrungen ist es meistens ausreichend, sich bei der Bestimmung der Grenzen des Hauptinstabilitätsbereiches auf lineare Annäherungen zu beschränken. Diese können mit Hilfe von λ und μ dargestellt werden.

$$\lambda = 1 + \mu \qquad (9.1)_{II}$$

bzw.

$$\lambda = 1 - \mu \qquad (9.2)_{II}$$

Dann gilt für die inneren Punkte des gesuchten Instabilitätsbereiches

$$1 - \mu < \lambda < 1 + \mu \qquad (9.3)_{II}$$

Wegen der Gleichung (8.7)_{II} können die Gleichungen (9.1)_{II} und (9.2)_{II} in der Form

$$\lambda - \mu - 1 = 4 \frac{v_0^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{x}{G} - \frac{y}{2G} \right) - 1 = 0 \quad (9.4)_{II}$$

und

$$\lambda + \mu - 1 = 4 \frac{v_0^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{x}{G} + \frac{y}{2G} \right) - 1 = 0 \quad (9.5)_{II}$$

geschrieben werden. Dividieren wir beide Gleichungen durch $\frac{4v_0^2}{\omega^2}$ so folgt

$$1 + \frac{x}{G} - \frac{y}{2G} - \frac{\omega^2}{4v_0^2} = 0 \quad (9.6)_{II}$$

und

$$1 + \frac{x}{G} + \frac{y}{2G} - \frac{\omega^2}{4v_0^2} = 0 \quad (9.7)_{II}$$

Diese Gleichungen sind für die Parameter x , y und ω^2 linear, so daß sie in einem entsprechenden Koordinatenraum durch je eine Ebene dargestellt werden können (Bild 3).

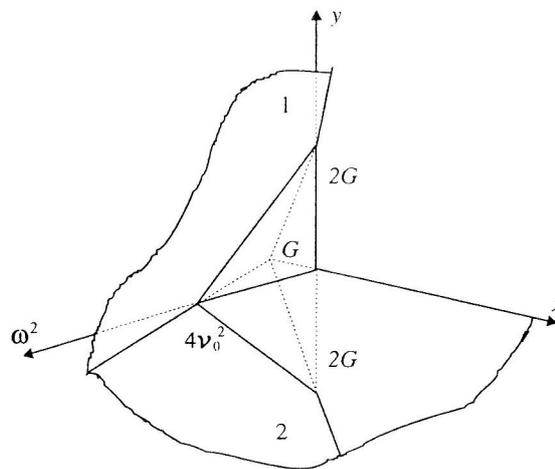


Bild 3. Grenzen des Hauptinstabilitätsbereiches im Koordinatenraum x, y, ω^2

Die der Gleichung (9.6)_{II} entsprechende Ebene schneidet

$$\begin{aligned} \text{die } x\text{-Achse bei} & \quad x = -G, \\ \text{die } y\text{-Achse bei} & \quad y = 2G, \\ \text{die } \omega^2\text{-Achse bei} & \quad \omega^2 = 4v_0^2 \end{aligned}$$

Entsprechend sind die Schnittpunkte der Ebene (9.7)_{II}

$$x = -G \quad y = -2G \quad \omega^2 = 4v_0^2$$

Diese beiden Ebenen sind Spiegelbilder voneinander bezüglich der Koordinatenebene $x \omega^2$.

Im Koordinatenraum x, y, ω^2 entsprechen der Bedingung (9.3)_{II} die Grenzen

$$-\frac{y}{2G} < \left(1 + \frac{x}{G} - \frac{\omega^2}{4v_0^2} \right) < \frac{y}{2G} \quad (9.8)_{II}$$

Vom räumlichen Diagramm des Hauptinstabilitätsbereiches ist abzulesen, daß in der Umgebung des Wertes $4v_0^2$ der ω^2 -Achse Resonanz auch bei minimalen Werten von x und y auftritt. D. h., die Schwingungen des Systems zeigen hier eine über alle Grenzen wachsende Tendenz.

Diese Erscheinung wird jedoch durch zwei Umstände beeinflußt, die in unserem Modell nicht erfaßt sind. Erstens verhält sich das wirkliche System bei größeren Auslenkungen meistens nicht mehr linear, wie es hier vorausgesetzt ist, sondern es treten nichtlineare Effekte auf. Zweitens enthält unser Modell keine Dämpfung, was aber schon bei einem linearen Modell die Bedingungen der Instabilität verändert. Eine entsprechend kleine Umgebung des Punktes $\omega^2 = 4v_0^2$ wird schon bei der kleinsten Dämpfung prinzipiell stabil.

Bei kleinerer Dämpfung besteht jedoch immer noch die Gefahr, daß die Schwingungsamplituden, wenn auch nicht über alle Grenzen, so doch so weit wachsen, daß sie das System schädigen. Mit dem Anwachsen der Dämpfung vermindert sich diese Gefahr.

10 Ein Schwingungssystem mit endlich vielen Freiheitsgraden

Eine ähnliche Parameterresonanz kann auch bei Systemen mit endlich vielen Freiheitsgraden auftreten. Da die Ergebnisse der Untersuchung des allgemeinen Falles schwer zu überblicken sind, wollen wir uns auf Systeme beschränken, bei denen zwar die Massenträgheitsmomente der einzelnen Scheiben unterschiedlich sein können, aber der Durchmesser der Torsionswelle konstant ist. Weiterhin sind alle äußeren Kräfte F_i und Momente M_i bis auf F_n identisch Null. Statt F_n kann deshalb einfach F geschrieben werden. Jeder Querschnitt der Welle ist also mit F belastet.

F sei eine Funktion der Zeit nach Gleichung (8.1)_{II}, und für die Zugspannung gilt dementsprechend der Ausdruck (8.2)_{II}.

Aus der Gleichung (3.1)_I folgt für die i -te Feder:

$$c_i = \frac{I_p G}{l_i} \left(1 + \frac{\sigma}{G} \right) \quad (10.1)_{II}$$

Schreibt man für σ den Ausdruck entsprechend Gleichung (8.2)_{II}, so erhält man

$$c_i = \frac{I_p G}{l_i} \left(1 + \frac{x}{G} + \frac{y}{G} \cos \omega t \right) \quad (10.2)_{II}$$

Es sollen noch die Bezeichnungen

$$c_{i1} = \frac{I_p (G+x)}{l_i} \quad \text{und} \quad c_{i2} = \frac{I_p y}{l_i}$$

eingeführt werden. Damit erhalten wir für c_i den Ausdruck

$$c_i = c_{i1} + c_{i2} \cos \omega t$$

Mit diesen Bezeichnungen und mit den Teilmatrizen [siehe auch Gleichung (4.5)_I]

$$\mathbf{C}_1 = I_p (G+x) \begin{bmatrix} \frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} & -\frac{1}{l_2} & \dots \\ -\frac{1}{l_2} & \frac{1}{l_2} + \frac{1}{l_3} & -\frac{1}{l_3} \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} = I_p (G+x) \mathbf{I} \quad (10.3)_{II}$$

und

$$\mathbf{C}_2 = I_p(G + y)\mathbf{I} \quad (10.4)_{II}$$

kann die Matrix

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2 \cos \omega t$$

eingeführt werden, und man erhält die Matrixform der Bewegungsgleichung [siehe auch Gleichung (5.3)]

$$\mathbf{J}\ddot{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2 \cos \omega t) \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$$

Setzt man

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{k} \boldsymbol{\varepsilon}$$

mit

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} J_1^{-\frac{1}{2}} & & & \\ & J_2^{-\frac{1}{2}} & & \\ & & \dots & \\ & & & \dots \end{bmatrix}$$

in die Bewegungsgleichung ein und multipliziert man diese von links mit der transponierten Matrix \mathbf{k}^T , so gelangt man mit den Bezeichnungen

$$\mathbf{I} = \mathbf{k}^T \mathbf{J} \mathbf{k} \quad \text{und} \quad \mathbf{D} = \mathbf{k}^T \mathbf{C} \mathbf{k}$$

zu der Differentialgleichung für die neue veränderliche $\boldsymbol{\varepsilon}$:

$$\mathbf{I}\ddot{\boldsymbol{\varepsilon}} + (\mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_2 \cos \omega t) \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}$$

Machen wir noch Gebrauch von der schon früher angewendeten Transformation $2\tau = \omega t$ und führen wir noch die Bezeichnungen

$$\boldsymbol{\lambda} = \frac{4}{\omega^2} \mathbf{D}_1 \quad \quad \quad 2\boldsymbol{\mu} = \frac{4}{\omega^2} \mathbf{D}_2$$

ein, so erhält die Bewegungsgleichung die folgende Form:

$$\mathbf{I}\ddot{\boldsymbol{\varepsilon}} + (\boldsymbol{\lambda} + 2\boldsymbol{\mu} \cos \omega t) \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0} \quad (10.5)_{II}$$

Im folgenden setzen wir die Kenntnis der Eigenwerte der Differentialgleichung

$$\mathbf{I}\ddot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}$$

und eines ihrer orthogonalen Eigenvektorsysteme voraus. Es seien $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \dots$ die auf 1 normierten Eigenvektoren und ν_1, ν_2, \dots die Eigenfrequenzen. Es ist bekannt, daß diese Gleichung durch die Transformation

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{E} \boldsymbol{\beta} \quad (10.6)_{II}$$

auf ein System von Differentialgleichungen mit je einer Veränderlichen entkoppelt werden kann, wenn die Spalten der \mathbf{E} -Matrix die \mathbf{E}_1 -Vektoren sind. Die Koeffizienten der neuen Bewegungsgleichung sind Diagonalmatrizen.

$$\mathbf{I}' = \mathbf{E}^T \mathbf{I} \mathbf{E} = \mathbf{I} \qquad \boldsymbol{\lambda}' = \mathbf{E}^T \boldsymbol{\lambda} \mathbf{E}$$

Weil die Matrizen $\boldsymbol{\lambda}$ und $\boldsymbol{\mu}$ sich voneinander nur durch einen skalaren Faktor unterscheiden, ist die transformierte Matrix

$$\boldsymbol{\mu}' = \mathbf{E}^T \boldsymbol{\mu} \mathbf{E}$$

ebenfalls diagonal. Das hat zur Folge, daß die Differentialgleichung (10.5)_{II} bei Anwendung der Transformation (10.6)_{II} in ein System von n skalaren Differentialgleichungen zerfällt.

Mit den eingeführten Diagonalmatrizen hat das System die Gestalt

$$\mathbf{I}' \ddot{\boldsymbol{\beta}} + (\boldsymbol{\lambda}' + 2\boldsymbol{\mu}' \cos 2\tau) \boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$$

bzw. in skalarer Form

$$\ddot{\beta}_1 + (\lambda'_1 + 2\mu'_1 \cos 2\tau) \beta_1 = 0$$

$$\ddot{\beta}_2 + (\lambda'_2 + 2\mu'_2 \cos 2\tau) \beta_2 = 0$$

...

...

$$\ddot{\beta}_n + (\lambda'_n + 2\mu'_n \cos 2\tau) \beta_n = 0$$

Diese Gleichungen sind voneinander unabhängige Mathiesche Gleichungen. Bei jedem Wert $\omega_i = 2 \nu_i$ der Erregerkreisfrequenz besteht Resonanzgefahr.

Literatur

1. Szolgay, Z.: Ergänzung zur Theorie der Torsionsschwingungssysteme mit endlich vielen Freiheitsgraden. Teil I. Wirkung einer konstanten Zugbelastung auf die Eigenkreisfrequenzen von Torsionsschwingungssystemen. Technische Mechanik, Band 15, Heft 2, (1995), 159 - 167.

Anschrift: Dr. Zsófia Szolgay, Institut für Angewandte Mechanik, TU Budapest, H-1111 Budapest, Műegyetem rkp 1-3.