

Das Kollinearitätsprinzip

F.P.J. Rimrott

Herrn Professor Dr. techn. Dr. h.c. Franz Ziegler zum 60. Geburtstag gewidmet

Durch Beobachtung von Kreiselssystemen und durch Versuchsergebnisse stößt man auf folgendes Prinzip:

Jedes selbständige Kreiselssystem strebt nach Kollinearität.

Die nun folgende Abhandlung ist der Interpretation dieses Axioms gewidmet und seiner Anwendung auf Festkörperkreisel, Mehrkörperkreisel und Trabantensysteme.

1 Einleitung

Unter einem selbständigen Kreiselssystem wollen wir ein Kreiselssystem verstehen, auf welches keine äußeren Drehmomente einwirken, dessen Gesamtdrall \mathbf{H} also konstant bleibt. Unter Kollinearität verstehen wir, daß sich alle Drallvektoren der Einzelkreisel eines Systems im Laufe der Zeit parallel und gleichsinnig zueinander ausrichten, und das bei kleinstmöglichem Energiepegel. Für den Extremfall eines Starrkörperkreisels läßt sich nur *ein* Drall definieren, dafür aber eine Winkelgeschwindigkeit anstelle eines zweiten Dralles. Für einen Starrkörperkreisel stellt Kollinearität eine parallele gleichsinnige Ausrichtung von Drallvektor und Winkelgeschwindigkeitsvektor dar. Als Energie bezeichnen wir die mechanische Energie, d.h. die Summe von kinetischer und potentieller Energie.

2 Hintergrund

Die Kreisellehre war ja bis zu Sputnik (1957) dadurch gekennzeichnet, daß sie sich mit Starrkörpern befaßte und Begriffe wie Energiedissipation nicht vorkamen (Grammel, 1950). Lagerreibung und Luftwiderstand kamen nur als *äußere* Einflüsse vor. Interessant ist es, sich zu vergegenwärtigen, daß Winkelhaltungsänderungen, oder zumindestens Neigungen zu Winkelhaltungsänderungen, in der Literatur schon früh auftreten (von Bohnenberger, 1819). Grammel (1950) spricht von der „Suche nach gleichstimmigem Parallelismus“ bei der Präzession eines spinnenden Starrkörperkreisels, Magnus (1971) von einer „Tendenz zu einem gleichsinnigen Parallelismus“ im Zusammenhang mit der Biegung einer elastischen Kreiselscheibe. Der Begriff Kollinearität taucht zum erstenmal bei Rimrott (1985) auf und zwar im Zusammenhang mit *inneren* Energieverlusten in einem Festkörperkreisel, dessen Winkelgeschwindigkeitsvektor sich im Endzustand gleichsinnig kollinear mit dem Drallvektor ausrichtet. Die „Tendenz zu gleichsinnigem Parallelismus“ ist eine hilfreiche Merkregel (von Fabeck, 1980) und hat mit dem hier behandelten Kollinearitätsprinzip - welches natürlich auch eine Tendenz und einen Übergang zu gleichsinnigem Parallelismus darstellt - wenig gemein.

In der vorliegenden Arbeit wird die Neigung zu Winkelhaltungsänderungen, d.h. das Streben nach gleichsinniger Kollinearität von Einzeldrallen und Winkelgeschwindigkeiten, bei kleinstmöglichem Energiepegel, auf Grund von *innerer* Energiedissipation angesprochen.

Wendet man sich der Astronomie zu, wo ganze Kreiselssysteme (Galaxien, Planetensysteme und andere Trabantensysteme (wie z.B. Saturn mit seinen Ringen und Monden)) mehr oder weniger drehmomentfrei existieren, dann fällt doch auf, daß alle Einzelkörper eines solchen Systems - mit einigen wenigen Ausnahmen - sich nahezu in einer Ebene bewegen und alle in einer Richtung; ein Zustand der darauf schließen läßt, daß es ein Axiom geben muß, nämlich das Kollinearitätsprinzip, dem alle diese Kreiselssysteme unterworfen sind.

3 Festkörperkreisel

Die Annahme, daß das Verhalten eines Festkörperkreisels durch das Verhalten eines Starrkörperkreisels annähernd beschrieben werden kann, ist die Grundlage der gesamten technischen Kreisellehre. Für einen Starrkörperkreisel kann eine Winkelgeschwindigkeit definiert werden

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (1)$$

Das $Cxyz$ -Koordinatensystem sei körperfest und habe seinen Ursprung im Massenmittelpunkt C des Starrkörperkreisels. Außerdem stellt es ein Hauptachsensystem dar. Die Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ wiederum ermöglicht es, einfache Ausdrücke zu finden für den Drall

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A\omega_x \\ B\omega_y \\ C\omega_z \end{bmatrix} \quad (2)$$

und für die kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{H} = \frac{1}{2} (A\omega_x^2 + B\omega_y^2 + C\omega_z^2) \quad (3)$$

Dabei sind A, B, C die Hauptträgheitsmomente des Starrkörperkreisels.

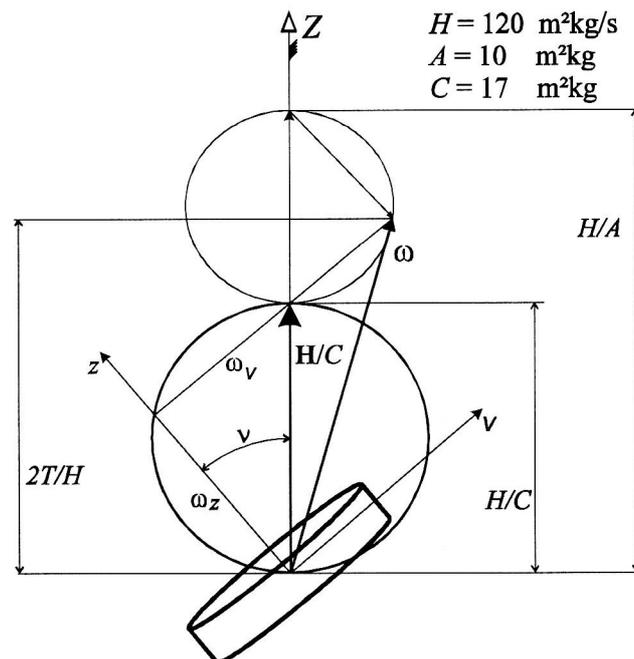


Bild 1. Winkelhaltungsdiagramm für einen Starrkörperkreisel mit $A = B < C$, Drallvektor \mathbf{H} , Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ und Haltungs (=Nutations)-Winkel ν . Bei einem Festkörperkreisel wird durch Energiedissipation im Laufe der Zeit $\nu \rightarrow 0^\circ$, und Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ und Drall \mathbf{H} werden kollinear mit $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{H}/C$.

Drall \mathbf{H} und Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ sind im allgemeinen nicht kollinear (Bild 1). Nun kann man einen Festkörperkreisel jedoch sehr gut durch einen Starrkörperkreisel annähern und diese Annahme dazu benutzen, viele Bewegungsabläufe - mit Ausnahme der durch die inneren Energieverluste verursachten - zufriedenstellend genau anzugeben. Starrkörperannahme und Energieverluste durch innere Reibung sind allerdings zwei Konzepte, die sich gegenseitig ausschließen, und einiges Fingerspitzengefühl ist notwendig, um zur richtigen

$$T_0 = \frac{1}{2}(C\omega_0^2 + C\omega_0^2) = C\omega_0^2 = \frac{H^2}{2C} \quad (4)$$

Die in den Lagern vorhandene Reibung wird zu einer Kollinearisierung der Einzeldralle führen. Nehmen wir der Einfachheit halber an, daß nur das rechte Lager Reibung aufweist und daß das linke Lager reibungsfrei ist. Dann wird sich im Laufe der Zeit das System so einstellen, wie das in Bild 4 gezeigt ist. Der linke Kreisel wird sich weiterhin mit der Winkelgeschwindigkeit ω_0 um seinen Massenmittelpunkt drehen. Sein Massenmittelpunkt wird mit der Winkelgeschwindigkeit ω_2 den Gesamtmassenmittelpunkt umlaufen. Jeder Einzelkreisel habe die Masse m . Die Rotation des rechten Einzelkreisels hat aufgehört. Sein Massenmittelpunkt läuft nun mit ω_2 um den Gesamtmassenmittelpunkt. Da der Drall H erhalten bleibt, kann man schreiben

$$H = \sqrt{2} C\omega_0 = C\omega_0 + (A + 2ml^2)\omega_2 \quad (5)$$

woraus sich, mit $A = C/2$, ergibt

$$\omega_2 = \frac{\sqrt{2}-1}{1 + \frac{4ml^2}{C}} \omega_0 \quad (6)$$

Die kinetische Energie ist nun

$$T = \frac{1}{2} C\omega_0^2 + \frac{1}{2} (A + 2ml^2)\omega_2^2 \quad (7)$$

welches schließlich zu

$$T = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2(\sqrt{2}-1)^2}{\left(1 + \frac{4ml^2}{C}\right)} \right) C\omega_0^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2(\sqrt{2}-1)^2}{\left(1 + \frac{4ml^2}{C}\right)} \right) T_0 \quad (8)$$

wird. Man erkennt, daß $T < T_0$. Im Laufe der Zeit hat sich also Kollinearität der Einzeldralle eingestellt. Dieser Vorgang ist von einem Verlust an kinetischer Energie begleitet. (Das System hat keine potentielle Energie.)

Die Energieänderung beträgt

$$\Delta E = T - T_0 = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{2(\sqrt{2}-1)^2}{1 + \frac{4ml^2}{C}} \right) T_0 \quad (9)$$

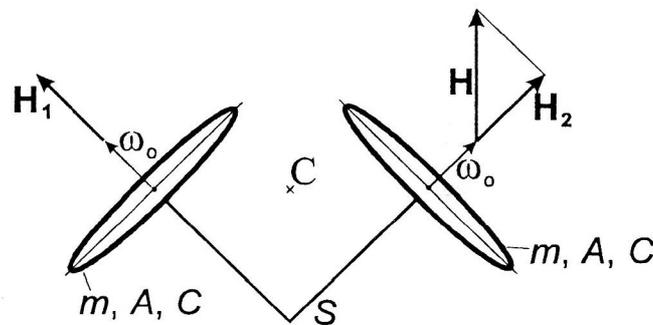


Bild 3. Kreiselsystem mit zwei starren Scheibenkreiseln und Lagerreibung

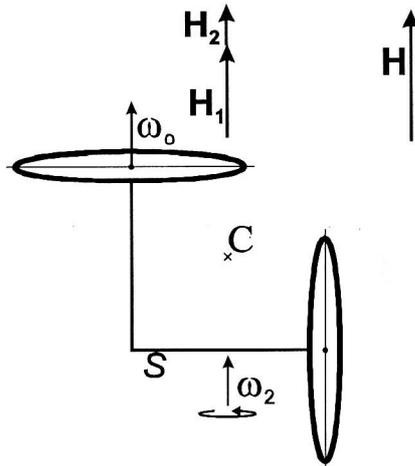


Bild 4. Endzustand

Als weiteres Beispiel sei noch der in Bild 5 dargestellte drehmomentfreie, aus dünnen Kreisscheiben bestehende Doppelkreisel untersucht. Scheibe 1 drehe sich mit ω_1 und habe einen Drall von

$$\mathbf{H}_1 = C\omega_1 \quad (10)$$

und Scheibe 2 mit denselben Abmessungen drehe sich mit $\omega_2 > \omega_1$ und habe einen Drall von

$$\mathbf{H}_2 = C\omega_2 \quad (11)$$

Die beiden Dralle seien bereits kollinear. Der konstante Gesamtdrall ist also $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2$. Zwischen den beiden Scheiben herrsche jedoch Reibung, so daß am Ende beide mit derselben Geschwindigkeit ω umlaufen. Nach dem Drallsatz gilt

$$2C\omega = C\omega_1 + C\omega_2 \quad (12)$$

und somit

$$\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \quad (13)$$

Die kinetische Energie zu Anfang war

$$T_0 = \frac{1}{2}(C\omega_1^2 + C\omega_2^2) = \frac{C}{2}(\omega_1^2 + \omega_2^2) \quad (14)$$

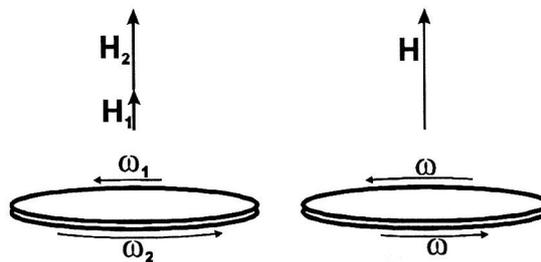


Bild 5. Zwei starre Kreisscheiben mit Reibung.

Am Ende des Reibungsvorganges ist sie

$$T = \frac{1}{2}(2C)\omega^2 = C\frac{(\omega_1 + \omega_2)^2}{4} \quad (15)$$

Die Energieänderung beträgt

$$\Delta E = T - T_0 = -\frac{1}{4} C (\omega_2 - \omega_1)^2 \quad (16)$$

Das Beispiel ist gewählt worden, um zu betonen, daß Kollinearität der Dralle verbunden sein muß mit einem Minimum an Energie.

In den meisten bisher als Beispiel aufgeführten Kreiselssystemen spielt die kinetische Energie eine herausragende Rolle. Das nun folgende Beispiel ist gewählt worden, um zu zeigen, daß auch die potentielle Energie eine Rolle spielen kann. In Bild 6 ist ein Kreisel gezeigt, der aus zwei gleichen Punktmassen besteht, die auf einer masselosen Stange gleiten können und durch Federn mit der Steifigkeit k miteinander verbunden sind. Zu Anfang befinden sich die Punktmassen im Abstand $2r_0$ und haben den Drall

$$H = 2mr_0^2\omega_0 \quad (17)$$

Nach Durchtrennen eines masselosen Fadens nehmen sie nach einiger Zeit den Abstand $2r$ voneinander ein, bei gleichbleibendem Drall

$$H = 2mr^2\omega \quad (18)$$

woraus sich für die neue Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = \frac{r_0^2}{r^2} \omega_0 \quad (19)$$

ergibt.

Die ursprüngliche kinetische Energie war

$$T_0 = \frac{1}{2} 2mr_0^2\omega_0^2 = mr_0^2\omega_0^2 \quad (20)$$

Da r_0 die unausgelenkte Länge einer Feder ist, gilt für die ursprüngliche potentielle Energie $V_0 = 0$.

Die neue kinetische Energie ist

$$T = \frac{1}{2} 2mr^2\omega^2 = \frac{r_0^2}{r^2} mr_0^2\omega_0^2 \quad (21)$$

Sie ist kleiner als T_0 . Nun sind die Federn jedoch ausgelenkt und enthalten eine potentielle Energie von

$$V = \frac{1}{2} 2k(r - r_0)^2 \quad (22)$$

Aus Zentrifugalkraft und Federkraft läßt sich

$$mr\omega^2 = k(r - r_0) \quad (23)$$

bilden und folglich

$$V = mr\omega^2(r - r_0) = m\frac{r_0^4}{r^3}\omega_0^2(r - r_0) \quad (24)$$

oder

$$V = \frac{r_0^2}{r^2} \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) m r_0^2 \omega_0^2 \quad (25)$$

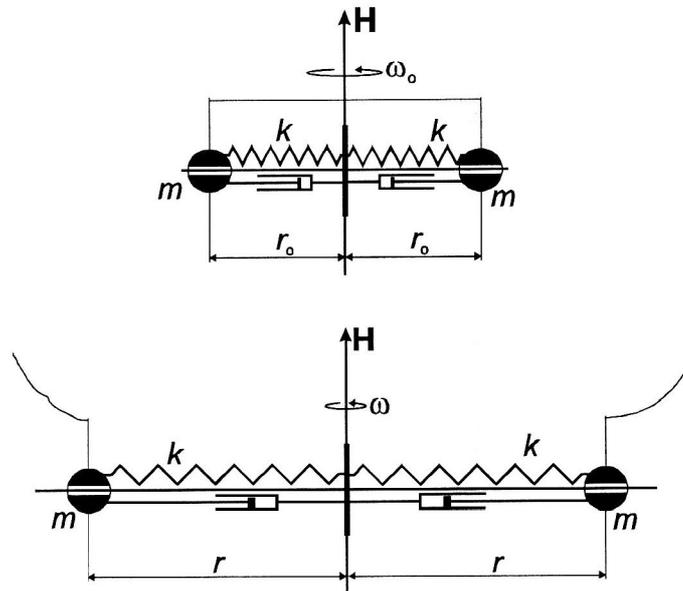


Bild 6. Drehmomentfreies Kreiselsystem mit zwei Punktmassen. Durch Energiedissipation in den Dämpfern wird schließlich $r_0 \rightarrow r$.

Die Gesamtenergie des Kreiselsystems ist nun also

$$T + V = \frac{r_0^2}{r^2} \left(2 - \frac{r_0}{r}\right) m r_0^2 \omega_0^2 \quad (26)$$

oder

$$T + V = \frac{r_0^2}{r^2} \left(2 - \frac{r_0}{r}\right) T_0 \quad (27)$$

Da $r > r_0$, ist auch

$$T + V < T_0 \quad (28)$$

d.h., im Endzustand ist die Gesamtenergie kleiner als im Anfangszustand. Die Energieänderung ist

$$\Delta E = T + V - T_0 = - \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \left(2 - \frac{r_0}{r}\right)\right) T_0 \quad (29)$$

Das Kollinearitätsprinzip trifft selbstverständlich auch bei Mehrkörperkreiseln mit elastischen und dissipativen Elementen zu, die sich in sogenannten Energiefallen fangen. Diese sehr interessante Problematik geht etwas über den Rahmen unserer Betrachtungen hinaus (siehe z.B. Rimrott und Janabi-Sharifi, 1992).

In Anbetracht des gefundenen Ergebnisses können wir wiederum Kollinearitätssätze aussprechen, die nun folgendermaßen lauten:

- (1) Ein drehmomentfreies Mehrkreiselsystem wird wegen innerer Energieverluste auf diejenige Haltung zu-driften, bei der seine Energie, zulässig bei konstantem Drall, ihren Minimalwert erreicht.
- (2) Wenn alle Drallvektoren kollinear sind und die mechanische Energie ihren Minimalwert erreicht hat, findet keine Energiedissipation mehr statt.

(3) Solange die einzelnen Drallvektoren nicht kollinear sind, findet innere Energiedissipation statt, wobei die zu dissipierende Energie aus der mechanischen Energie des Kreiselsystems entnommen wird.

5 Trabantensysteme

Als Trabanten seien alle Körper bezeichnet, die einen Herrenkörper umlaufen, also z.B. Planeten, Asteroiden, Kometen und Raumfahrzeuge um die Sonne, Mond und Raumfahrzeuge und deren Trümmer um die Erde oder Ringe und Monde um Saturn. Trabantensysteme sind Kreiselsysteme, die man auch vereinfachend als aus Punktmassen bestehend beschreiben kann. Denken wir einmal an das Sonnensystem. Der Drall der Sonne ist der Eigenspindrall der Sonne (Tabelle 1). Der Bahndrall des Merkur um die Sonne sei

$$H_{\text{Merkur}} = m_{\text{Merkur}} \sqrt{\mu_{\text{Sonne}} \cdot p_{\text{Merkur}}} \quad (30)$$

mit m = Masse, μ = Gravitationsparameter und p = Bahnparameter, wobei der Einfachheit halber angenommen sei, daß Merkur aus einer Punktmasse bestehe. Ähnliche Ausdrücke ergeben sich für alle anderen Planeten. Die Summe aller Einzeldralle ergibt den Gesamtdrall \mathbf{H} des solaren Planetensystems. Wir stellen dabei fest, daß alle Einzeldralle (fast) kollinear sind.

Auf Bild 7 sind die Bahnen der inneren Planeten und die Bahn des Asteroiden 3753 (1986 TO) zu erkennen (Wiegert u.a., 1997). Sein Bahndrall um die Sonne ist offensichtlich nichtkollinear mit den anderen Drallen. Das solare Planetensystem wird der Kollinearität näher kommen, wenn der Asteroid 3753 auf einen Planeten trifft und sich mit diesem - unter Energieverlust - vereint.

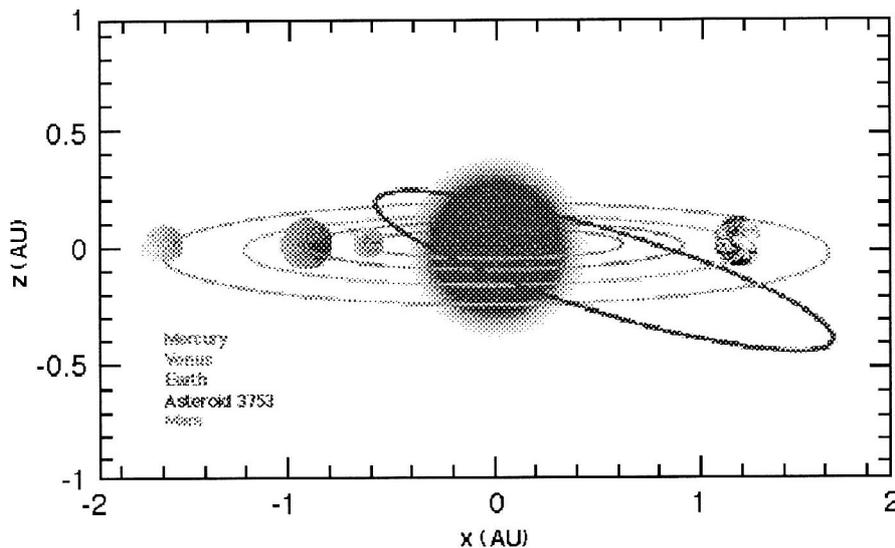


Bild 7. Trabantensystem mit den inneren Planeten und dem Asteroiden 3753 (1986 TO) (nach Wiegert u.a., 1997).

Als geeignetes Beispiel für ein Trabantensystem sei ein denkbar einfaches Modell betrachtet, nämlich ein Kreiselsystem bestehend aus zwei umlaufenden Punktmassen (Bild 8). Beide haben jeweils die gleiche (kleine) Masse m und laufen auf Kreisbahnen gleichen Halbmessers r_0 um. Die Ebenen der Kreisbahnen stehen rechtwinklig aufeinander. Die Einzeldralle $H_1 = C\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}H$ und $H_2 = C\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}H$ sind nicht kollinear. Der gemeinsame Drall sei $\mathbf{H} = \text{konstant}$, d.h., kein äußeres Drehmoment wirke auf das Kreiselsystem ein. Sehr kleine Abweichungen von der angenommenen Gleichheit aller Größen führen schließlich zu einer Kollision, bei der sich beide Trabanten zu einem Körper der Masse $2m$ vereinigen. Nach dem Zusammenstoß wird sich die Masse $2m$ mit der Geschwindigkeit v weiterbewegen, wobei nach dem Schwungssatz (Impulssatz)

$$\frac{mv_0}{\sqrt{2}} + \frac{mv_0}{\sqrt{2}} = 2m v \quad (31)$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{2}} v_0 \quad (32)$$

Die kinetische Energie vor dem Zusammenstoß war

$$T_0 = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} m v_0^2 = m v_0^2 \quad (33)$$

Unmittelbar nach dem Zusammenstoß ist sie

$$T = \frac{1}{2} (2m) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} v_0 \right)^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} T_0 \quad (34)$$

Die Flughöhe der Trabanten hat sich nicht geändert; deshalb ist die potentielle Energie gleichgeblieben. Die Gesamtenergieänderung ist daher

$$\Delta E = T - T_0 = -\frac{1}{2} m v_0^2 \quad (35)$$

Wir stellen also fest, daß bei gleichbleibendem Drall gleichsinnige Kollinearität der beiden Einzeldralle erreicht worden ist. Dies ist mit einem Energieverlust verbunden. Das Kreiselsystem hat nun den kleinstmöglichen Energiepegel, bei gleichbleibendem Drall, erreicht.

Unter Zuhilfenahme bekannter Beziehungen aus der Satellitendynamik können wir nun - der Vollständigkeit halber - noch einige Daten der neuen Umlaufbahn berechnen. Nach dem Zusammenstoß gehen die bisherigen Kreisbahnen von Radius r_0 über in eine elliptische Bahn mit großer Halbachse

$$a = \frac{2}{3} r_0 \quad (36)$$

Vor dem Zusammenstoß war die Gesamtenergie

$$E_0 = -\frac{\mu m}{2r_0} - \frac{\mu m}{2r_0} = -\frac{\mu m}{r_0} \quad (37)$$

Nach dem Zusammenstoß ist sie

$$E = -\frac{\mu(2m)}{2a} = -\frac{3 \mu m}{2 r_0} \quad (38)$$

Die Energieänderung ist

$$\Delta E = E - E_0 = -\frac{1}{2} \frac{\mu m}{r_0} \quad (39)$$

Die Energie ist also um $\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} \frac{\mu m}{r_0}$ kleiner als vor dem Zusammenstoß, bei gleichgebliebenem Drall

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} m r_0^2 v_0 + \frac{1}{\sqrt{2}} m r_0^2 v_0 = \sqrt{2} m r_0^2 v_0 \quad (40)$$

vor dem Zusammenstoß und

$$H = (2m)r_0^2 v = (2m)r_0^2 \frac{v_0}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}m r_0^2 v_0 \quad (41)$$

nach dem Zusammenstoß. Die Exzentrizität der neuen Bahn ergibt sich zu

$$\varepsilon = 0,5 \quad (42)$$

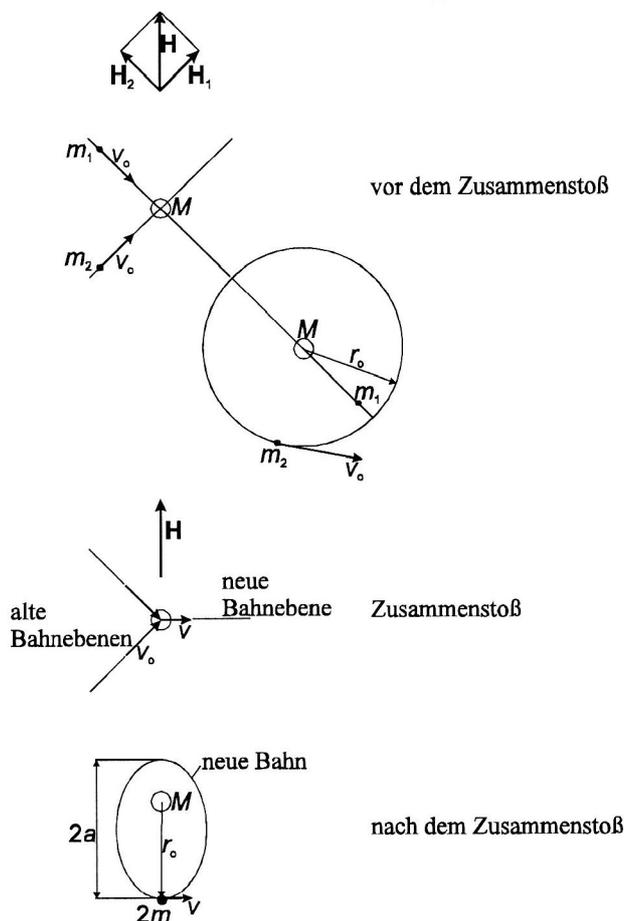


Bild 8. Trabantensystem mit zwei Punktmassen.

In Anbetracht des gefundenen Ergebnisses können wir das Kollinearitätsprinzip wiederum in Kollinearitätssätze fassen, die nun folgendermaßen lauten:

- (1) Ein drehmomentfreies Trabantensystem wird wegen innerer Energieverluste (bei Kollisionen) auf diejenige Gestalt zudriften, bei der seine Energie, zulässig bei konstantem Drall, ihren Minimalwert erreicht.
- (2) Wenn alle Drallvektoren kollinear sind und alle Trabanten auf konzentrischen Kreisbahnen umlaufen, können keine Kollisionen mehr stattfinden, also auch keine Energiedissipation.
- (3) Solange die einzelnen Drallvektoren nicht kollinear sind, findet innere Energiedissipation (durch Kollisionen) statt, wobei die zu dissipierende Energie aus der kinetischen Energie der kollidierenden Trabanten entnommen wird.

Für Trabantensysteme läuft das Kollinearitätsprinzip letztlich darauf hinaus, daß alle Trabanten danach streben, ihren Herrn in ein und derselben Ebene in ein und derselben Richtung zu umlaufen. Da Energieverluste nur bei Kollisionen auftreten und Kollisionen nicht mehr stattfinden können, wenn jeder Trabant auf einer Kreisbahn umläuft, streben auch alle Trabanten eine kreisförmige Umlaufbahn in ein und derselben Ebene an.

Betrachtet man z.B. das Kreiselssystem Saturn, einschließlich seiner Ringe und Monde, dann kommt man zu dem Schluß, daß das Saturnsystem seinem Endzustand von gleichsinniger Kollinearität bei kleinstmöglichem Energiepegel schon sehr nahe ist.

Etwas ähnliches läßt sich auch über das gesamte Sonnensystem mit all seinen Trabanten, d.h. mit seinen Planeten einschließlich ihrer Monde und Ringe, Raumfahrzeuge und Raumfahrzeugtrümmer und seinen Asteroiden, Meteoroiden und Kometen, sagen. Bei Meteoroiden und Kometen vor allen Dingen ist es mit der Drallkollinearität nicht weit her, jedoch wird das Einschlagen von Kometen auf Planeten (z.B. Tunguska auf die Erde, 1908; oder Shoemaker-Levy 9 auf Jupiter, 1994) das Gesamtsystem der gleichsinnigen Kollinearität bei gleichbleibendem Drall und kleinstmöglichem Energiepegel näher bringen.

6 Das Sonnensystem

Unser Sonnensystem ist dadurch gekennzeichnet, daß es sich, dem Kollinearitätsprinzip folgend, bereits so eingestellt hat, daß alle Dralle fast gleichsinnig kollinear sind. Abweichungen von Bahndrallen liegen alle bei nur wenigen Graden (siehe Tabelle 1). Die Vektorsumme aller Bahndralle um die Sonne und aller Eigenspindralle aller Trabanten ergibt den Gesamtdrall des Sonnensystems, der seit dessen Entstehen konstant geblieben ist und konstant bleiben wird, es sei denn ein äußeres Drehmoment wirke auf das Sonnensystem ein oder die Sonne strahle soviel Masse in den Weltraum ab, daß ihre Anziehungskraft merklich nachläßt.

Himmelskörper	Masse m kg	Bahnparameter p m	Drall H kg m ² /s	Neigung gegen Ekliptiknormale
Sonne	1,989 (10 ³⁰)	-	163,4 (10 ³⁹)	7°15'
Merkur	0,3346 (10 ²⁴)	57,910 (10 ⁹)	0,9276 (10 ³⁹)	7°
Venus	4,822 (10 ²⁴)	108,21 (10 ⁹)	18,27 (10 ³⁹)	3°24'
Erde	5,976 (10 ²⁴)	149,6 (10 ⁹)	26,63 (10 ³⁹)	0°
Mars	0,642 (10 ²⁴)	227,9 (10 ⁹)	3,531 (10 ³⁹)	1°51'
Jupiter	1900 (10 ²⁴)	778,3 (10 ⁹)	19 310,02 (10 ³⁹)	1°19'
Saturn	568,3 (10 ²⁴)	1427,0 (10 ⁹)	7 820,08 (10 ³⁹)	2°29'
Uranus	86,65 (10 ²⁴)	2870 (10 ⁹)	1 691,15 (10 ³⁹)	0°46'
Neptun	102,8 (10 ²⁴)	4497 (10 ⁹)	2 491,8 (10 ³⁹)	1°46'
Pluto	0,01305 (10 ²⁴)	5946 (10 ⁹)	0,379 (10 ³⁹)	17°06'
Summe*			31 525,7876 (10 ³⁹)	

* nur ungefähr, da nicht völlig kollinear !

Tabelle 1. Eigenspindrall der Sonne und Bahndralle der Planeten (ohne Monde etc.) um die Sonne

$$\text{Bahndrall } H = m\sqrt{\mu p}, \quad \mu = 1,32715 (10^{20}) \text{ m}^3/\text{s}^2 = \text{Gravitationsparameter der Sonne}$$

Ausnahmen gibt es bei den Eigenspindrallvektoren. Venus hat einen sehr, sehr kleinen Eigenspindrallvektor, der 177° vom Gesamtdrallvektor abweicht, bei Uranus und seinen Monden und Ringen sind es 98°. Die Bahndralle von vier Jupitermonden (Anake, Carme, Psiphae, Sinope) sind rückläufig. Dasselbe gilt für den Neptunmond Triton.

Beim Planeten Venus ist es nicht auszuschließen, daß dessen rückläufiger Eigenspin über Jahrmilliarden auf Null zurückgeht und sich dann langsam in gleichsinniger Richtung aufbaut, wie es das Kollinearitätsprinzip vorschreibt.

Wenn man das Neptunkreiselssystem für sich betrachtet, dann fällt auf, daß Neptun selbst und seine Monde und Ringe alle nahezu gleichsinnige kollineare Dralle haben mit Ausnahme des Mondes Triton, dessen Bahndrall um mehr als 160° abweicht. Astronomen schließen daraus, daß es sich dabei wahrscheinlich um einen eingefangenen Körper handelt, d.h. einen Körper, der noch nicht lange zum Neptunsystem gehört und noch nicht lange an dessen Kollinearierungsvorgang teilnimmt. Dieselbe Schlußfolgerung gilt für die vier rückläufigen Jupitermonde.

7 Zusammenfassung

Um gleichsinnige Kollinearität der Einzeldralle bei konstantem Gesamtdrall herbeizuführen, muß sich irgend etwas im Kreiselssystem ändern. Bei konstantem Gesamtdrall ist dies die mechanische Energie und zwar immer durch Dissipation, d.h., die mechanische Energieänderung ist negativ.

Während bei technischen Kreiselssystemen Reibung und Materialhysterese diese Aufgabe erfüllen, sind es bei Trabantensystemen vor allen Dingen Kollisionen (z.B. Kometen, Meteoroiden, Sternschnuppen usw.) sowie Reibungsverluste durch Windbewegungen in den Atmosphären einzelner Planeten und zwischen den Himmelskörpern (z.B. Sonnenwind). Auch dürfte es zu Energieverlusten durch Reibung bei gasförmigen oder flüssigen Himmelskörpern (z.B. im Erdinneren) kommen.

Im Zusammenhang mit dem Kollinearitätsprinzip erhebt sich die Frage nach dem Gesamtdrall des Weltalls. Da es kaum vorstellbar ist, daß das Weltall (z.B. beim Urknall!) je einen Drall besessen hat, und da es ebenso wenig vorstellbar ist, daß auf das Weltall von außen ein Drehmoment einwirkt, läßt sich folgende Hypothese aufstellen: *Der Gesamtdrall des Weltalls ist Null.*

Danksagung

Der Autor dankt Herrn Dipl.-Ing. Bernd Runau für seine Hilfe, der Alexander von Humboldt-Stiftung für finanzielle Unterstützung im Rahmen eines Forschungspreises und dem Land Sachsen-Anhalt für finanzielle Unterstützung unter Zuwendung FKZ - 1105A2110023.

Literatur

1. Bohnenberger, J.G.F. von: Beschreibung einer Maschine, welche die Gesetze der Umdrehung der Erde um ihre Achse und der Veränderung der Lage der Erdachse zu erläutern dient. Gilberts Annalen der Physik, 60, (1819), 60-71
2. Fabeck, W. von: Kreiselgeräte. Vogel-Verlag, (1980), 431 S.
3. Grammel, R.: Der Kreisel, seine Theorie und seine Anwendungen, Erster Band, Springer-Verlag, (1950), 281 S.
4. Magnus, K.: Kreisel, Theorie und Anwendungen. Springer-Verlag, (1971), 493 S.
5. Rimrott, F.P.J.: Dissipative Rigids in Gyrodynamics. ZAMM 65, 7, (1985), 287-300
6. Rimrott, F.P.J.: Introductory Attitude Dynamics. Springer-Verlag, (1989), 383 S.
7. Rimrott, F.P.J.; Janabi-Sharifi, F.: A Torquefree Flexible Model Gyro. ASME Journal of Applied Mechanics, 59, 2, (1992), 7-15
8. Rimrott, F.P.J.; Szczygielski, W.M.: Attitude Diagrams for Torquefree Gyros. CSME Transactions, 17, 1, (1993), 45-65
9. Wiegert, P. A.; Innanen, K. A.; Mikkola, S.: An Asteroidal Companion to the Earth. Nature, 387, (1997), 685-686

Anschrift: Professor F.P.J. Rimrott, Department of Mechanical and Industrial Engineering, University of Toronto, Toronto, Ontario, Canada M5S 3G8