

# Das biegesteife Seil unter Fliehkraftbeanspruchung

S. Koczyk, W. Weese, M. Kahnt

Bei modernen Verfahren zur Herstellung von Drahtseilen müssen Drähte und Litzen innerhalb des Rotors einer Verseilmaschine oft größere Abstände zwischen zwei Führungspunkten in einer sogenannten Freiflugphase überbrücken und sind dabei erheblichen Fliehkraftbelastungen ausgesetzt. Der vergleichbare Fall der Belastung eines biegeschlaffen Seils durch sein Eigengewicht führt auf die bekannte Kettenlinie. Die analytische Bestimmung der geometrischen Form des durch Fliehkraft belasteten biegeschlaffen Seiles erfordert jedoch schon die Einführung elliptischer Funktionen. Berücksichtigt man zusätzlich die Biegesteifigkeit, so kommt man auf ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen, welches im allgemeinen nur noch numerisch gelöst werden kann. Bei einem Seil oder einem Draht geringer Biegesteifigkeit bereitet die Lösung als Anfangswertproblem erhebliche numerische Probleme, da die Lösung exponentiell anwachsende Anteile enthält. Es wird daher ein Verfahren entwickelt, welches die Lösung des biegeschlaffen Seils als Basislösung benutzt, und die exponentiell veränderlichen Biegeanteile als Randstörung auffaßt. Das Verfahren wird an einem speziellen Zahlenbeispiel erläutert.

## 1 Das biegeschlaffe Seil

### 1.1 Die Differentialgleichungen des biegeschlaffen Seils

Die Vernachlässigung der Biegesteifigkeit eines Seiles führt zu einer Vereinfachung der differentiellen Beziehungen zur Beschreibung seiner geometrischen Konfiguration unter der gegebenen Belastung. Diese Vereinfachung ist dann gerechtfertigt, wenn der Abstand zwischen den Stützpunkten hinreichend groß und die Biegesteifigkeit des Seiles entsprechend gering ist. Da eine Berücksichtigung der Biegesteifigkeit zu einem umfangreicheren System von Differentialgleichungen führt, ist ihre Vernachlässigung oft auch zur Gewinnung einer Vergleichslösung in Grenzfällen sinnvoll. Die Herleitung der differentiellen Beziehungen ist anhand von Bild 1 leicht auszuführen. Da der wesentliche Teil der Untersuchungen sich auf das rotierende Seil bezieht, wird ein  $r$ - $z$ -Koordinatensystem eingeführt, dessen  $z$ -Achse der Drehachse entspricht. Die Belastung in  $z$ -Richtung wird Null gesetzt. Die Belastung durch Eigengewicht ist darin als Spezialfall enthalten.

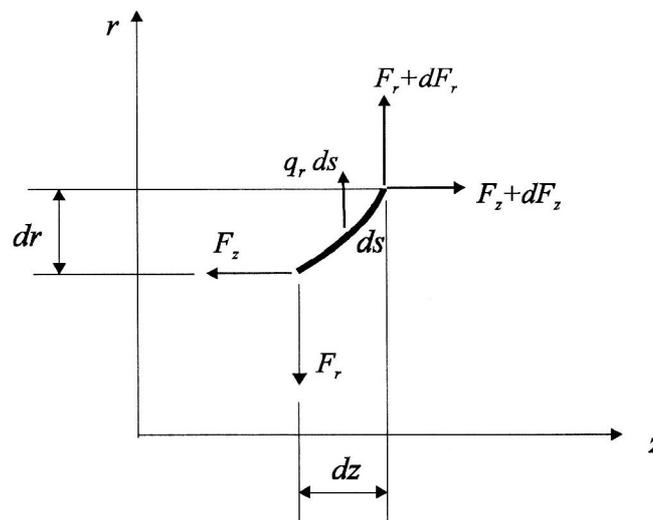


Bild 1. Kräfte am biegeschlaffen Seilelement

Die Gleichgewichtsbetrachtung an einem kleinen Seilelement (Bild 1) ergibt

$$\frac{dF_z}{ds} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{dF_r}{ds} = -q_r \quad (2)$$

Für  $F_z$  erhält man somit einen konstanter Wert. Aus der Gleichgewichtsbedingung der Momente folgt:

$$\frac{dr}{dz} = \frac{F_r}{F_z} \quad (3)$$

Es kann zweckmäßiger sein, anstelle der Bogenlänge  $s$  die Koordinate  $z$  als unabhängige Variable zu benutzen. Aus den Gleichungen (2) und (3) ergibt sich dann

$$\frac{dF_r}{dz} = -\frac{q_r}{F_z} \sqrt{F_z^2 + F_r^2} \quad (4)$$

Durch die Differentialgleichungen (3) und (4) und die noch zu formulierenden Randbedingungen ist das Problem des biegeschlaffen Seils somit vollständig bestimmt. Die Seilkraft  $F_s$  folgt aus  $F_z$  und  $F_r$  zu

$$F_s = \sqrt{F_z^2 + F_r^2} \quad (5)$$

## 1.2 Beanspruchung durch Eigengewicht, die Kettenlinie

Die Streckenlast  $q_r$  ist im Falle der Belastung durch Eigengewicht

$$q_r = -\rho g A \quad (6)$$

Dabei sind  $\rho$  die Dichte,  $g$  die Erdbeschleunigung und  $A$  die Querschnittsfläche des Seils. Die Koordinate senkrecht zur Erdoberfläche wird hier mit  $r$  bezeichnet, und die Achse  $z$  ist horizontal gerichtet. Die Lösung des Systems (3) und (4) ist allgemein bekannt. Mit den Integrationskonstanten  $C$  und  $D$  erhält man

$$r = \frac{F_z}{\rho g A} \cosh\left(\frac{\rho g A}{F_z} z + C\right) + D \quad (7)$$

Die Konstanten  $C$  und  $D$  und falls erforderlich den Horizontalzug  $F_z$  bestimmt man aus den Randbedingungen. Folgende Fälle sind möglich:

1. Das Seil ist zwischen zwei Punkten aufgehängt, und  $F_z$  ist bekannt.
2. Es sind wieder zwei Punkte der Seillinie gegeben, aber anstelle von  $F_z$  ist die Länge des Seiles zwischen beiden Punkten bekannt.
3. Das Seil ist an einem Punkt befestigt und wird am zweiten Punkt über eine Rolle geführt und durch entsprechende Gewichte vorgespannt, d.h. anstelle von  $F_z$  ist die Seilkraft  $F_s$  in diesem Punkt gegeben und man erhält eine entsprechende Bedingung zur Bestimmung von  $F_z$ .

Diese Randbedingungen treten in gleicher Form beim rotierenden biegeschlaffen Seil auf.

## 1.3 Beanspruchung durch Fliehkraft

Zur Bestimmung der Gleichgewichtslage des rotierenden biegeschlaffen Seils geht man wieder von Gleichung (4) aus. Die Belastung durch Fliehkraft ist jetzt

$$q_r = \rho \omega^2 A r \quad (8)$$

Damit entsteht aus Gleichung (4)

$$\frac{dF_r}{dz} = -\frac{\rho \omega^2 A r}{F_z} \sqrt{F_z^2 + F_r^2} \quad (9)$$

Die Lösung des Systems (3) und (9) kann mit Hilfe elliptischer Funktionen durchgeführt werden. Entsprechende Hinweise befinden sich z. B. in Czichos (1989). Die Bestimmung der Integrationskonstanten erfolgt entsprechend den in Abschnitt 1.2 formulierten Randbedingungen. Sie gestaltet sich jedoch recht schwierig, so daß hier dem numerischen Verfahren nach Runge - Kutta der Vorzug gegeben wird.

Falls die Seillänge zwischen zwei Punkten gegeben ist, kann man die Bogenlänge  $s$  als dritte zu bestimmende Größe hinzufügen. Bezeichnet  $p$  die Ableitung von  $r$  nach  $z$ , so gilt

$$\frac{ds}{dz} = \sqrt{1 + p^2} \quad (10)$$

#### 1.4 Berücksichtigung der Dehnbarkeit des Seiles

Die aus der Beanspruchung durch Eigengewicht oder Fliehkraft resultierende Seilkraft  $F_s$  kann zu Dehnungen führen, die die Seillinie erheblich verändern. Ein Bogenelement  $ds$  besitzt gegenüber dem unbelasteten Zustand  $ds_0$  die Länge

$$ds = \left(1 + \frac{F_s}{EA_0}\right) ds_0 \quad (11)$$

$A_0$  ist dabei die Querschnittsfläche im lastfreien Zustand. Setzt man voraus, daß das Volumen eines Elementes bei Belastung konstant bleibt, so gilt für  $A$

$$A = \frac{A_0}{1 + \frac{F_s}{EA_0}} \quad (12)$$

Die aus der Gleichgewichtsbedingung (2) mit den Gleichungen (6) und (8) entwickelten Beziehungen ändern sich deshalb nicht, während bei allen anderen  $ds$  durch Gleichung (11) zu ersetzen ist. Da sich die Dehnbarkeit eines Drahtes oder eines Seiles besonders bei geringem Durchhang und vorgegebener Seillänge auswirkt, muß man sie in diesen Fällen berücksichtigen.

#### 1.5 Beispiel einer Verseilmaschine

Die Integration eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen nach Runge - Kutta erfordert die Kenntnis der Anfangswerte aller unbekanntenen Variablen. Da aber nicht alle an dem Rand gegeben sind, von dem aus die Integration startet, müssen die unbekanntenen Randwerte zunächst geschätzt und anschließend iterativ so verbessert werden, damit sie den Randbedingungen am anderen Ende des Bereichs genügen. Die hier interessierende Führung der Litze einer nach dem Doppelschlagprinzip arbeitenden Verseilmaschine ist aus Bild 2 ersichtlich. Das Seil bzw. die Litze wird im Punkt A aus der Rotationsachse der Verseilmaschine herausgeführt und in B zusätzlich geführt. Zwischen B und D befindet sich die sogenannte Freiflugphase und in E erfolgt die Rückführung zur Rotationsachse. Auf die Erläuterung konstruktiver Einzelheiten wird hier verzichtet.

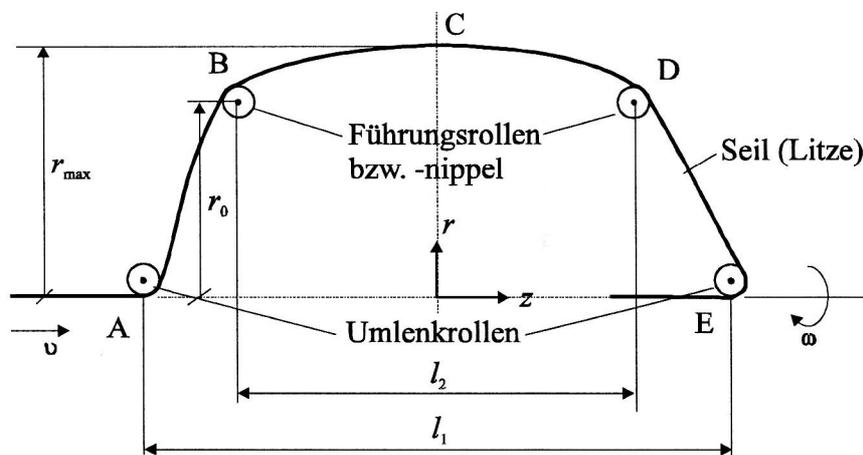


Bild 2. Drahtführung in einer Verseilmaschine

Folgende Abmessungen sind gegeben:  $l_1 = 1360 \text{ mm}$ ,  $l_2 = 710 \text{ mm}$ ,  $r_0 = 325 \text{ mm}$ ,  $r_{\max} = 425 \text{ mm}$ .

Für die Fläche  $A$  wird angenommen  $A = 1 \text{ mm}^2$  (Kreisquerschnitt),

mit dem Flächenträgheitsmoment  $I = 0,079577 \text{ mm}^4$ .

Der Elastizitätsmodul ist  $E = 2,0 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$ ,

die Dichte  $\rho = 7,85 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$

und die Drehzahl sei  $n = 3400 \text{ U/min}$  ( $\omega = 356,05 \text{ s}^{-1}$ ).

Eine Vergrößerung der Querschnittsfläche  $A$  bedingt eine entsprechende Zunahme von  $F_z$ . Da die Biegesteifigkeit zunächst gleich Null gesetzt wird, kann sich der Neigungswinkel in den Punkten B und D sprunghaft ändern. Unter gewissen Voraussetzungen können daher die Abschnitte A - B bzw. D - E und B - D getrennt betrachtet werden. In den folgenden Untersuchungen wird der Draht bzw. die Litze ferner als dehnstarr angenommen und Reibeffekte in den Umlenkpunkten werden vernachlässigt.

Die Seillinie soll aufgrund der Symmetrie durch den Punkt C mit einer horizontalen Tangente gehen. Sie soll ferner die Punkte B und D enthalten. Weiter sind Seillinie und Horizontalzug im Abschnitt A - B bzw. D - E gesucht.

Zur Bestimmung der Seillinie beginnt man mit der Integration im Punkt C, wobei  $F_z$  so variiert wird, daß die Seillinie auch Punkt D passiert. Beim Übergang vom Abschnitt C - D zum Abschnitt D - E ändert sich die Seilkraft  $F_s$  nicht, da die Reibung in D bzw. B vernachlässigt wird. Unbekannt ist in D noch der Neigungswinkel, von dessen Größe dann der Horizontalzug im Abschnitt D - E abhängt. Da hier nur jeweils eine Größe unbekannt ist, kann man diese durch Vergleich des berechneten mit dem vorgeschriebenen Randwert schon nach wenigen Iterationsschritten bestimmen.

Die Berechnung führte zu folgenden Resultaten:

Horizontalzug im Abschnitt B - C - D:  $F_z = 262,12 \text{ N}$ ,

Ableitungen  $r' = p$  in B bzw. D  $p_B / p_D = \pm 0,5522$ ,

Seilkraft in den Punkten B und D:  $F_s = 299,43 \text{ N}$ .

Als Startwert für den Neigungswinkel in D für den Abschnitt D - E wählt man zweckmäßigerweise die Neigung der Verbindungsgeraden DE und erhält dann nach wenigen Durchläufen:

Horizontalzug in den Abschnitten A - B bzw. D - E:  $F_z = 235,07 \text{ N}$ ,

Ableitungen  $r' = p$  in B bzw. D für A - B bzw. D - E:  $p_B / p_D = \pm 0,789$ ,

Ableitungen  $r' = p$  in A bzw. E:  $p_A / p_E = \pm 1,1144$ ,

Seilkraft in A bzw. E:  $F_s = 352,0 \text{ N}$ .

In den Punkten A und E, die auf der Drehachse liegen, wird der Draht bzw. die Litze wieder in die horizontale Richtung gelenkt. Vernachlässigt man auch hier mögliche Reibeffekte, so entspricht die in A bzw. E berechnete Seilkraft genau der Vorspannkraft, mit der Draht oder Litze gehalten werden müssen. Da eine effektive Querschnittsfläche  $A = 1 \text{ mm}^2$  angenommen wurde, entsteht die maximale Spannung  $\sigma_{\max}$  in den Punkten A und E, wo die größte Seilkraft auftritt und ist  $\sigma_{\max} = 352 \text{ N/mm}^2$ .

## 2 Das biegesteife Seil

### 2.1 Die Differentialgleichungen des biegesteifen Seils

Bisher wurde die Biegesteifigkeit des Seils (Draht oder Litze) vernachlässigt. In der Umgebung von Lagerstellen, Umlenkrollen oder Haltepunkten wird es jedoch unter Umständen so stark gekrümmt, daß die Vernachlässigung der Biegesteifigkeit zu größeren Ungenauigkeiten besonders bei der Berechnung der Spannungen führen kann.

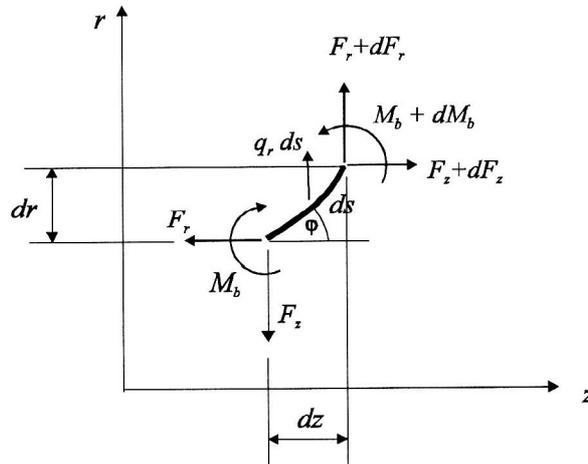


Bild 3. Kräfte am biegesteifen Seilelement

Anhand von Bild 3 findet man durch eine Gleichgewichtsbetrachtung zusätzlich zu den Gleichungen (1) und (2) die Momentengleichung

$$\frac{dM_b}{ds} = F_z \frac{dr}{ds} - F_r \frac{dz}{ds} \quad (13)$$

Zusammen mit der Momenten-Krümmungs-Beziehung

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{M_b}{EI} \quad (14)$$

und den geometrischen Relationen

$$\frac{dr}{ds} = \sin \varphi \quad (15)$$

$$\frac{dz}{ds} = \cos \varphi \quad (16)$$

erhält man ein System von 6 Differentialgleichungen 1. Ordnung.

Da man hier voraussetzen kann, daß der Biegewinkel  $\varphi$  dem Betrage nach  $< \pi/2$  bleibt, ist es zweckmäßig, anstelle der Bogenlänge  $s$  wieder  $z$  als Koordinate einzuführen. Berücksichtigt man ferner, daß  $F_z$  konstant ist, so erhält man das folgende System von 4 Differentialgleichungen 1. Ordnung:

$$\frac{dF_r}{dz} = -q_r \sqrt{1 + \tan^2 \varphi} \quad (17)$$

$$\frac{dM_b}{dz} = F_z \tan \varphi - F_r \quad (18)$$

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_b}{EI} \sqrt{1 + \tan^2 \varphi} \quad (19)$$

$$\frac{dr}{dz} = \tan \varphi \quad (20)$$

Dieses System von Differentialgleichungen gilt in gleicher Weise für das rotierende Seil mit  $q_r = \rho\omega^2 Ar$  und für die Belastung durch Eigengewicht mit  $q_r = -\rho g A$ . Es gilt auch für den Balken bei großer Durchbiegung. Da aber in diesem Fall dessen Länge gegeben ist und der Biegewinkel  $\varphi$  auch Werte  $\geq \pi/2$  annehmen kann, ist es wiederum zweckmäßiger, in diesem Fall die Bogenlänge  $s$  anstelle von  $z$  als Koordinate einzuführen. Im allgemeinen wird man zur Lösung wieder ein numerisches Verfahren (z. B. Runge-Kutta) benutzen. Ist die Biegesteifigkeit  $EI$  im Verhältnis zur betrachteten Seillänge jedoch sehr klein, so können sich numerische Probleme ergeben, da die Biegung des Seils dann nur noch die Rolle einer Randstörung spielt.

## 2.2 Rand- und Übergangsbedingungen

Durch die Einbeziehung der Biegesteifigkeit verdoppelt sich die Zahl der Differentialgleichungen gegenüber dem biegeschlaffen Seil und demzufolge auch die Zahl der Randbedingungen. Legt man wieder die in Bild 2 dargestellte Führung des Seils zugrunde, so gelten im Symmetrieschnitt, von dem aus die Koordinate  $z$  gezählt wird, die folgenden Randbedingungen:

$$\varphi|_{z=0} = 0 \quad (21)$$

$$F_r|_{z=0} = 0 \quad (22)$$

Falls die maximale Auslenkung gegeben ist, gilt zusätzlich

$$r|_{z=0} = r_{\max} \quad (23)$$

An der Übergangsstelle der beiden Abschnitte  $z = z_1$  gilt

$$r^{(1)}|_{z=z_1} = r_0 \quad (24)$$

$$r^{(2)}|_{z=z_1} = r_0 \quad (25)$$

Weiterhin müssen Biegewinkel und Biegemoment übereinstimmen, d.h.

$$\varphi^{(1)}|_{z=z_1} = \varphi^{(2)}|_{z=z_1} \quad (26)$$

$$M_b^{(1)}|_{z=z_1} = M_b^{(2)}|_{z=z_1} \quad (27)$$

Schließlich sind noch die Randbedingungen beim Übergang in die Rotationsachse (Pkt. A bzw. E in Bild 2) zu formulieren. Diese relativ große Richtungsänderung kann durch eine kleine Rolle realisiert werden. Im Extremfall erhält man eine Einspannung, die allerdings noch eine Längsverschiebung zuläßt. Von einem Extremfall muß man deshalb sprechen, weil aufgrund der geringen Biegesteifigkeit eine sehr große Krümmung beim Übergang von der Rotationsachse in die Flugphase entsteht, die fast einem Abknicken gleichkommen kann. Realisiert man diesen Übergang durch eine Rolle mit einem definierten Krümmungsradius, so wäre dieser kleine Abschnitt als weiterer Bereich an den zweiten anzuschließen. Unmittelbar am Übergang zwischen beiden Abschnitten ergibt sich eine fast sprunghafte Änderung der Krümmung und damit eine entsprechende Änderung des Biegemomentes. Andererseits kann man davon ausgehen, daß kein großer Fehler entsteht, wenn man diesen kleinen Übergangsbereich im Hinblick auf die globale Flugkurve vernachlässigt und einen Punkt verschwindender Krümmung direkt auf der Rotationsachse plaziert. Damit ergeben sich schließlich näherungsweise die folgenden Randbedingungen für  $z = z_2$

$$r|_{z=z_2} = 0 \quad (28)$$

$$M_b|_{z=z_2} = 0 \quad (29)$$

Unbekannt sind das Biegemoment für  $z = 0$  und die Horizontalkräfte in beiden Bereichen. Diese müssen so bestimmt werden, daß die Seillinie die Punkte D und E bzw. A und B passiert und das Biegemoment in A bzw. E verschwindet. Im Gegensatz zum biegeschlaffen Seil hat man jetzt also drei unbekannte Größen zu ermitteln, damit die formulierten Bedingungen erfüllt sind.

### 3 Numerische Lösung als Anfangswertproblem

#### 3.1 Die Randstörung bei kleiner Biegesteifigkeit

Je nach der Problemstellung wird man bei der numerischen Lösung die Koordinate  $z$  oder die Bogenlänge  $s$  als unabhängige Variable bevorzugen, d.h. man wird einmal von den Differentialgleichungen (17) bis (20) oder aber von den Gleichungen (1) und (2) in Verbindung mit den Gleichungen (6) und (8) sowie den Gleichungen (13) bis (16) ausgehen. Benutzt man das Verfahren von Runge - Kutta zur Lösung eines Systems von Differentialgleichungen 1. Ordnung, so hängt die Stabilität des Verfahrens wesentlich davon ab, ob die Lösung exponentiell anwachsende Teile enthält. In diesem Fall wird die mit diesem Verfahren gewonnene Lösung instabil, wenn sich die Integration über einen größeren Bereich erstreckt. Bei einem Balken mit großer Durchbiegung ist die Biegesteifigkeit  $EI$  im allgemeinen hinreichend groß, und eine Instabilität der Lösung ist demzufolge nicht zu erwarten. Bei dem hier betrachteten Problem eines rotierenden Seiles ist die Biegesteifigkeit jedoch sehr gering und das Verfahren von Runge - Kutta führt selbst dann, wenn man die Anfangswerte schon recht genau geschätzt hat, nicht zu einer brauchbaren Lösung.

Vergleicht man mit der Lösung des biegeschlaffen Seils, so treten die durch die Biegesteifigkeit des Seiles verursachten Abweichungen als Randstörungen auf. Eine Möglichkeit zu einem sinnvollen Ergebnis zu gelangen besteht darin, die Lösung des biegeschlaffen Seiles als Basislösung zu benutzen, der zusätzliche Biegeanteile als Randstörung überlagert werden. Dieses Verfahren ist von ähnlichen mechanischen Problemen her bekannt (Theorie der Rotationsschalen) und wird im folgenden näher untersucht. Die Dehnbarkeit des Seiles (Abschnitt 1.4) wird vernachlässigt.

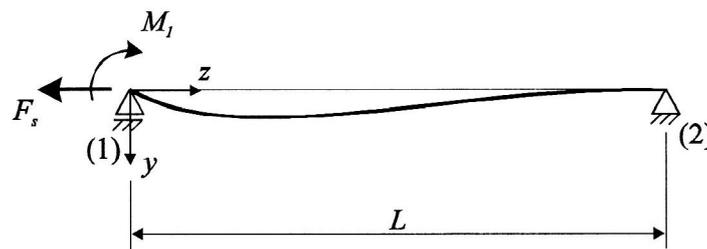


Bild 4. Durch Biegemoment belastetes Seil

Ein Seil sei gemäß Bild 4 zwischen zwei Punkten 1 und 2 durch die Seilkraft  $F_s$  gespannt und werde zusätzlich durch ein Moment  $M_1$  belastet. Dieses sei hinreichend klein, so daß die Durchbiegung noch als klein angesehen werden kann. Die Stützweite  $l$  ist in diesem Fall gleich der Seillänge  $L$ . Es gilt  $z \approx s$  und

$$\frac{dy}{ds} = \sin \varphi \approx \varphi \quad (30)$$

Mit der Momenten-Krümmungs-Beziehung

$$\frac{d\varphi}{ds} = -\frac{M_b}{EI} \quad (31)$$

und der Gleichgewichtsbedingung

$$M_b = M_1 \left(1 - \frac{s}{L}\right) - F_s y \quad (32)$$

erhält man die folgende Differentialgleichung

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} - \frac{F_s}{EI}\varphi = \frac{M_1}{LEI} \quad (33)$$

Ihre Lösung ist mit

$$\alpha = \sqrt{\frac{F_s}{EI}} \quad (34)$$

$$\varphi = C_1 e^{\alpha s} + C_2 e^{-\alpha s} - \frac{M_1}{F_s L} \quad (35)$$

Die Lösung der homogenen Differentialgleichung besitzt den Charakter einer Randstörung, die den Verlauf der Durchbiegung in der Umgebung der Lagerpunkte 1 und 2 beschreibt. Eine analoge Lösung für das durch Eigengewicht belastete Seil gibt Feyrer (1994) an.

### 3.2 Basislösung und Randstörung

Zur Lösung des Problems des biegesteifen Seils wird der Biegewinkel  $\varphi$  in zwei Anteile  $\varphi_0$  und  $\varphi_r$  zerlegt, entsprechend der Basislösung und der Randstörung, wobei  $\varphi_r$  als klein vorausgesetzt wird. Für den Winkel  $\varphi_0$  gelten die Beziehungen des biegeschlaffen Seils, d. h.,

$$\sin \varphi_0 = \frac{F_r}{F_s} \quad \text{und} \quad \cos \varphi_0 = \frac{F_z}{F_s} \quad \text{mit} \quad F_s = \sqrt{F_z^2 + F_r^2} \quad (36)$$

Somit gilt

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_r \quad (37)$$

und

$$\frac{dr}{ds} = \sin \varphi \approx \sin \varphi_0 + \varphi_r \cos \varphi_0 \quad (38)$$

sowie

$$\frac{dz}{ds} = \cos \varphi \approx \cos \varphi_0 - \varphi_r \sin \varphi_0 \quad (39)$$

Betrachtet man nun einen Abschnitt der Länge  $s = L$  zwischen zwei beliebigen Punkten (Bild 2), die hier mit 1 und 2 indiziert werden, so gilt

$$\varphi_r = \varphi_{r1} e^{-\alpha_1 s} + \varphi_{r2} e^{-\alpha_2 (L-s)} \quad (40)$$

wobei die kleinen Winkel  $\varphi_{r1}$  und  $\varphi_{r2}$  noch zu bestimmen sind. Zur Berechnung von  $\alpha$  nach Gleichung (34) wird jeweils die Seilkraft  $F_s$  an den Endpunkten des Bereichs benutzt. Da diese unterschiedlich groß sein können, ergeben sich zwei Werte  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$ . Zusammen mit den Beziehungen der Gleichung (36) erhält man schließlich aus den Gleichungen (38) und (39) das folgende System von Differentialgleichungen 1. Ordnung:

$$\frac{dr}{ds} = \frac{F_r}{\sqrt{F_z^2 + F_r^2}} + \left( \varphi_{r1} e^{-\alpha_1 s} + \varphi_{r2} e^{-\alpha_2 (L-s)} \right) \frac{F_z}{\sqrt{F_z^2 + F_r^2}} \quad (41)$$

$$\frac{dz}{ds} = \frac{F_z}{\sqrt{F_z^2 + F_r^2}} - \left( \varphi_{r1} e^{-\alpha_1 s} + \varphi_{r2} e^{-\alpha_2(L-s)} \right) \frac{F_r}{\sqrt{F_z^2 + F_r^2}} \quad (42)$$

$$\frac{dF_r}{ds} = -\rho \omega^2 A r \quad (43)$$

Den Winkel  $\varphi_0$  bestimmt man aus den Beziehungen der Gleichung (36) zu

$$\varphi_0 = \arctan\left(\frac{F_r}{F_z}\right) \quad (44)$$

und somit erhält man

$$\varphi = \arctan\left(\frac{F_r}{F_z}\right) + \varphi_{r1} e^{-\alpha_1 s} + \varphi_{r2} e^{-\alpha_2(L-s)} \quad (45)$$

und daraus das Biegemoment gemäß Gleichung (14) zu

$$M_b = -EI \left( \frac{F_z}{F_z^2 + F_r^2} \rho \omega^2 A r + \alpha_1 \varphi_{r1} e^{-\alpha_1 s} - \alpha_2 \varphi_{r2} e^{-\alpha_2(L-s)} \right) \quad (46)$$

In dem Ausdruck (40) wurden für  $\varphi_r$  die  $\alpha_i$  als konstant und bereits bekannt vorausgesetzt. Beides trifft streng genommen nicht zu. Man kann jedoch die zur Bestimmung der  $\alpha_i$  nach Gleichung (34) erforderlichen Seilkräfte  $F_{si}$  aus der Lösung des biegeschlaffen Seils entnehmen und diese Werte im Abklingbereich der Randstörung näherungsweise als konstant voraussetzen. Ebenso kann man für  $F_z$  die entsprechenden Werte übernehmen. Die Lösung des biegeschlaffen Seils muß also vorliegen. Dieses Ergebnis wird anschließend durch die Differentialgleichungen (41) bis (43) korrigiert. Die Bogenlänge  $L$  kann sich gegenüber dem biegeschlaffen Seil gleichfalls geringfügig ändern. Sie ist in diesem Fall so zu verändern, daß die vorgeschriebenen Randbedingungen erfüllt werden.

### 3.3 Anpassung an die vorgeschriebenen Randwerte

Legt man die Seilführung entsprechend Bild 2 zugrunde, so gelten die in Abschnitt 2.2 formulierten Rand- und Übergangsbedingungen, wobei die Koordinate  $z$  durch den entsprechenden Wert der Bogenlänge zu ersetzen ist. Aufgrund der Symmetrie und der vorgegebenen Drahtführung liegen zwei Abschnitte vor, die jeweils durch hochgestellte Indizes gekennzeichnet werden und in denen die Bogenlänge jeweils gesondert festgelegt wird. Aus der Bedingung (21) folgt zusammen mit den Gleichungen (22) und (45) im Punkt C (Bild 2)

$$\varphi_{r1}^{(1)} = 0 \quad (47)$$

Die Bedingungen (22) und (23) gehen unmittelbar als Anfangswerte in die Integration ein. Der Horizontalzug  $F_z$  und die Bogenlänge  $L$  zwischen den Punkten C und D sind gleichfalls noch unbekannt und sind so zu bestimmen, daß die Seillinie durch den Punkt D geht. Legt man jedoch die Werte des biegeschlaffen Seils zugrunde, so sind nun noch die Biegewinkel der Randstörung  $\varphi_{r2}^{(1)}$  und  $\varphi_{r1}^{(2)}$  so zu bestimmen, daß Biegewinkel und Biegemoment im Punkt D für beide Abschnitte übereinstimmen. Im folgenden werden die Winkel des biegeschlaffen Seils entsprechend Abschnitt 1.5 durch den Index 0 bezeichnet. Aus den Gleichungen (45) und (46) erhält man damit durch Gleichsetzen von Winkel bzw. Biegemoment in D

$$\varphi_{r2}^{(1)} - \varphi_{r1}^{(2)} = \varphi_0^{(2)} - \varphi_0^{(1)} \quad (= -0,6680 + 0,50453) \quad (48)$$

sowie

$$\alpha_2^{(1)} \varphi_{r2}^{(1)} + \alpha_1^{(2)} \varphi_{r1}^{(2)} = \rho \omega^2 A r_0 \left[ \frac{F_z^{(1)}}{(F_{s2}^{(1)})^2} - \frac{F_z^{(2)}}{(F_{s2}^{(2)})^2} \right] \quad (49)$$

Da zu beiden Seiten des Punktes D die Seilkraft gleich groß ist

$$F_{s2}^{(1)} = F_{s1}^{(2)} = F_{s0} \quad (50)$$

und somit auch

$$\alpha_2^{(1)} = \alpha_1^{(2)} = \alpha_0 \quad (51)$$

wird aus Gleichung (49)

$$\varphi_{r2}^{(1)} + \varphi_{r1}^{(2)} = \frac{\rho \omega^2 A r_0}{\alpha_0 F_{s0}^2} (F_z^{(1)} - F_z^{(2)}) \quad (= 0,71143 \cdot 10^{-3}) \quad (52)$$

Aus den beiden Gleichungen (48) und (52) bestimmt man schließlich die Biegewinkel der Randstörung zu

$$\varphi_{r2}^{(1)} = -0,08138 \quad (1. \text{ Abschnitt})$$

und

$$\varphi_{r1}^{(2)} = -0,08209 \quad (2. \text{ Abschnitt}).$$

Das Biegemoment in D folgt dann aus Gleichung (46) zu

$$M_b = -EI \left( \frac{F_z^{(1)}}{F_{s0}^2} \rho \omega^2 A r_0 - \alpha \varphi_{r2}^{(1)} \right) \quad (53)$$

und man erhält mit den gegebenen Zahlenwerten

$$M_b = -192,7 \text{ Nmm} .$$

Für den gegebenen Draht ergibt sich daraus eine Biegespannung von

$$\sigma_{b\max} = 1366,2 \text{ N / mm}^2 .$$

Nachdem die noch unbekannt Biegewinkel der Randstörung bekannt sind, kann mit Hilfe der Gleichungen (41) bis (43) eine genauere Bestimmung der Flugkurve vorgenommen werden, die allerdings bei Drähten mit geringer Biegesteifigkeit nur wenig von der des biegeschlaffen Seiles abweicht. Fordert man, daß auch der biegesteife Draht die vorgegebenen Punkte C und D (Bild 2) passiert, so vergrößert sich der Horizontalzug  $F_z$  in diesem Bereich von 262,1 N auf 263,8 N und die Seillänge  $L$  wächst nur unwesentlich von 372,86 mm auf 372,95 mm. Beide Werte wurden iterativ durch mehrmalige Integration des Systems (41) bis (43) mit veränderten Anfangswerten bestimmt.

#### 4 Zusammenfassung

Das Problem eines dünnen Drahtes oder biegesteifen Seiles unter Eigengewicht bzw. Fliehkraftbelastung ist eng verwandt mit dem eines Balkens bei großer Durchbiegung. Bedingt durch die geringe Biegesteifigkeit versagen jedoch Integrationsmethoden, die das System gewöhnlicher Differentialgleichungen als Anfangswertproblem behandeln. Die durch Biegung bedingten Effekte besitzen den Charakter einer Randstörung, die zur Basislösung des biegeschlaffen Seiles hinzugefügt werden und damit zu einer hinreichend genauen Lösung führen. In dem hier vorgestellten Beispiel führt die durch die Umlenkung des Drahtes bedingte Biegung zu erheblichen zusätzlichen Spannungen, die schon zu plastischen Verformungen führen können. Diese können prinzipiell durch Modifikation der Gleichung (14) berücksichtigt werden, falls entsprechende Materialkennwerte vorliegen. In dem hier vorgestellten Beitrag wurde diese Möglichkeit nicht weiter verfolgt. Ebenso wurden die durch die Abzugsgeschwindigkeit bedingten Corioliskräfte vernachlässigt.

#### Literatur

1. Czichos, H. (Hrsg.): HÜTTE Die Grundlagen der Ingenieurwissenschaften, 29. Auflage, Springer-Verlag Berlin / Heidelberg / New York, (1989)
2. Feyrer, K.: Drahtseile (Bemessung, Betrieb, Sicherheit) Springer-Verlag Berlin / Heidelberg / New York, (1994)

*Anschrift:* Prof. Dr.-Ing. Siegfried Koczyk, Prof. Dr.-Ing. Walter Weese, Dipl.-Ing. Michael Kahnt, Institut für Mechanik, Otto-von-Guericke-Universität, Postfach 4120, D-39016 Magdeburg