TECHNISCHE MECHANIK, Band 18, Heft 1, (1998), 79-84
Manuskripteingang: 04. Juli 1997

Anwendung der Lagrangeschen Gleichungen 1. Art zur Untersuchung der nichtlinearen Querschwingungen von Balken mit unverschieblichen Lagern

M.P. Juschkov

In der Arbeit wird eine neue Herleitung der nichtlinearen Gleichungen der Querschwingungen des Balkens mit unverschieblichen Lagern gegeben. Mittels der erhaltenen Gleichungen der ersten und der zweiten Näherung wird der Einfluß der Materialdämpfung auf die Amplituden der erzwungenen Schwingungen des Balkens erörtert.

1 Einleitung

Im folgenden wird eine Methode zur Untersuchung der Eigenschwingungen eines Systems untereinander verbundener elastischer Körper von S.A. Zegshda und dem Autor des vorliegenden Artikels beschrieben, über die gegenwärtig weitere Publikationen in Vorbereitung sind und die sich auf die Anwendung der Lagrangeschen Gleichungen erster Art stützt.

Die Lösung einer solchen Aufgabe wird mit Hilfe der bekannten Eigenfunktionen und Eigenfrequenzen der einzelnen elastischen Körper konstruiert. Die Schwingungen der Punkte des komplizierten Gesamtsystems können als Summe von Produkten der bekannten Eigenfunktionen der einzelnen Körper dargestellt werden, die von den Koordinaten des Systems abhängen, mit unbekannten Zeitfunktionen, die die Rolle Lagrangescher Koordinaten spielen.

Die Verbindung dieser Körper miteinander kann in Form einer endlichen Anzahl holonomer Bindungen beschrieben werden, die die Gleichheit der Verschiebungen und Drehwinkel gemeinsamer Punkte der verbundenen Körper zum Ausdruck bringen. Das Vorhandensein dieser Bindungen gestattet es, zur Bestimmung der unbekannten Lagrangeschen Koordinaten den Apparat der Lagrangeschen Gleichungen erster Art in verallgemeinerten Koordinaten anzuwenden (nach einer anderen Terminologie den Apparat der Lagrangeschen Gleichungen zweiter Art mit unbestimmten Multiplikatoren). Es ist wesentlich, daß die Lagrangeschen Multiplikatoren in diesem Falle die verallgemeinerten Reaktionen der eingeführten holonomen Bindungen sind. Deshalb schwingen sie bei den Eigenschwingungen des Systems mit derselben Frequenz wie auch alle verallgemeinerten Koordinaten. Im Ergebnis kann man für die Bestimmung der Amplituden der Schwingungen der inneren Kräfte eine endliche Anzahl von homogenen linearen algebraischen Gleichungen aufstellen. Das Nullsetzen der Determinante dieses Systems gestattet es, die Eigenfrequenzen des untersuchten komplizierten Systems von Körpern zu finden, und aus den Eigenvektoren der Koeffizientenmatrix des algebraischen Systems können die Eigenfunktionen dieses Systems elastischer Körper bestimmt werden, wobei sie durch die Eigenfunktionen der einzelnen Körper ausgedrückt werden.

Bei allen diesen Untersuchungen besteht ein Nachteil darin, daß in den erhaltenen Ausdrücken für die dynamischen Einflußkoeffizienten unendliche Summen erscheinen, was für die Lösung von Aufgaben der Elastizitätstheorie charakteristisch ist. Zur näherungsweisen Lösung der Aufgabe wird bei der gegebenen Methode vorgeschlagen, eine endliche Anzahl erster Glieder dynamisch und die verbleibenden unendlich vielen Glieder quasistatisch zu berechnen. Ein solches Vorgehen gestattet es, bei der Lösung dynamischer Aufgaben der Elastizitätstheorie die statischen Lösungen der Aufgabe zu benutzen. Der für eine Reihe konkreter Aufgaben durchgeführte Vergleich der nach der vorgeschlagenen Methode berechneten Resultate mit den bekannten genauen Lösungen zeigte eine gute Genauigkeit; die relativen Fehler der Berechnung der Grundfrequenz überschritten 1 % nicht.

Wir zeigen, wie ein solches Vorgehen bei der Untersuchung der nichtlinearen Querschwingungen eines Balkens mit unverschieblichen Lagern angewendet werden kann. Wir erinnern daran, daß die Lagrangeschen Gleichungen 1. Art in den verallgemeinerten Koordinaten (oder die Lagrangeschen Gleichungen zweiter Art mit unbestimmten Multiplikatoren), wenn den verallgemeinerten Koordinaten $q_1,\ldots, q_s$ des Systems holonome Bindungen

$$f_k\left(t, q_1, \ldots, q_s\right) = 0 \qquad k = \overline{1, n} \tag{1}$$

auferlegt werden, in folgender Form geschrieben werden können:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma} - \frac{\partial T}{\partial q_\sigma} = Q_\sigma + \sum_{k=1}^{n} \Lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial q_\sigma} \qquad \sigma = \overline{1, s} \tag{2}$$

Diese Gleichungen (2) enthalten s Unbekannte $q_1,...,q_s$ und n Unbekannte $\Lambda_1,...,\Lambda_n$. Deshalb müssen sie gemeinsam mit den Bindungsgleichungen (1) gelöst werden. Das ist charakteristisch für die Lagrangeschen Gleichungen 1. Art, weshalb wir die Gleichungen, dem Buch von Butenin und Fufaev (1991) folgend, auch Lagrangesche Gleichungen 1. Art in verallgemeinerten Koordinaten nennen.

2 Nichtlineare Schwingungen eines Balkens mit unverschieblichen Lagern

Wir charakterisieren die Quer- bzw. die Längsschwingungen eines Stabes durch die Funktionen $y(x, t)$ bzw. $u(x, t)$. Die Querschwingungen eines gelenkig gelagerten Balkens und die Längsschwingungen eines Stabes der Masse M mit eingespanntem linken und freiem rechten Ende können in folgender Form dargestellt werden (Timoshenko, 1955):

$$y(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} q_i \sin\frac{i\pi x}{l} \qquad \omega_i^2 = \frac{i^2\pi^2 EI}{\rho S l^2}$$

$$u(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} u_{2j-1} \sin\frac{(2j-1)\pi x}{2l} \qquad p_{2j-1}^2 = \frac{(2j-1)^2\pi^2 E}{(2l)^2\rho}$$

Hier sind l die Stablänge, I das Flächenträgheitsmoment des Querschnittes bezüglich der neutralen Achse, S die Fläche des Stabquerschnittes, E bzw. ρ der Elastizitätsmodul bzw. die Dichte des Materials des Stabes.
Wir bemerken, daß q_1, q_2, ... und u_1, u_3, ... entsprechend den letzten Formeln in den Lagrangeschen Gleichungen (2) die Rolle der verallgemeinerten Koordinaten spielen.
Es gilt für die kinetische und die potentielle Energie des Stabes bei seinen Querschwingungen

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{\rho S}{2}\int_0^l \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 dx = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty} m_i\,\dot{q}_i^2 \qquad m_i = \frac{\rho S l}{2} = \frac{M}{2} \\ \Pi_1 &= \frac{EI}{l}\int_0^l \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2 dx = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty} \omega_i^2\, m_i\, q_i^2 \end{aligned} \tag{3}$$

und bei seinen Längsschwingungen

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{\rho S}{2}\int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty} m_{2j-1}\,\dot{u}_{2j-1}^2 \qquad m_{2j-1} = \frac{M}{2} \\ \Pi_2 &= \frac{ES}{2}\int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty} p_{2j-1}^2\, m_{2j-1}\, u_{2j-1}^2 \end{aligned} \tag{4}$$

Wir berechnen die Verlängerung des Stabes ΔS bei den Querschwingungen

$$\Delta S = \int_0^l \sqrt{1 + (y_x')^2}\,dx - l = \frac{1}{2}\int_0^l (y_x')^2\,dx = \frac{\pi^2}{4l}\sum_{i=1}^{\infty} i^2 q_i^2 \tag{5}$$

und seine Verlängerung bei den Längsschwingungen

$$u\big|_{x=l} = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} u_{2j-1} \tag{6}$$

Bei den Querschwingungen des Stabes mit unverschieblichen Lagern müssen die Ausdrücke (5) und (6) jedoch zusammenfallen, was man als eine nichtlineare nichtholonome Bindung

$$f = \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j+1} u_{2j-1} - \frac{\pi^2}{4l}\sum_{i=1}^{\infty} i^2 q_i^2 = 0 \tag{7}$$

betrachten kann, die unseren verallgemeinerten Koordinaten q_1, q_2, ... und u_1, u_3, ... auferlegt wird. Unter Benutzung der Formeln (3) und (4) und Berücksichtigung der Bindung (7) schreiben wir die Lagrangeschen Gleichungen erster Art in verallgemeinerten Koordinaten (2)

$$\ddot{q}_i + \omega_i^2 q_i = -\Lambda \frac{\pi^2 i^2}{Ml} q_i \qquad i = 1, 2, \dots, \tag{8}$$

$$\ddot{u}_{2j-1} + p_{2j-1}^2 u_{2j-1} = (-1)^{j+1} \frac{2\Lambda}{M} \qquad j = 1, 2 \dots, \tag{9}$$

Für die näherungsweise Lösung der Aufgabe werten wir die Gleichung (9) quasistatisch aus, nachdem wir $\ddot{u}_{2j-1} = 0$, $j = 1, 2, \dots$ gesetzt haben. Dann haben wir

$$u_{2j-1} = (-1)^{j+1} \frac{2\Lambda}{M\rho_{2j-1}^2} \qquad j = 1, 2, \dots,$$

und deshalb

$$u\big|_{x=l} = \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j+1} u_{2j-1} = \frac{2\Lambda}{M}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{p_{2j-1}^2} = \frac{\Lambda}{c} \qquad c = \frac{ES}{l}$$

Kraft dieser Formel kann die Bindungsgleichung (7) wie folgt umgeschrieben werden:

$$\frac{\Lambda}{c} - \frac{\pi^2}{l^2}\sum_{i=1}^{\infty} i^2 q_i^2 = 0$$

Wenn man jetzt hier in der unendlichen Summe nur ein Glied beibehält, dann erhält man in erster Näherung

$$\Lambda^{(1)} = \frac{c\pi^2}{4l}\left(q_1^{(1)}\right)^2$$

Indem man diesen Wert der verallgemeinerten Reaktion in die erste Gleichung des Systems (8) einsetzt, erhält man zur Bestimmung der Funktion $q_1^{(1)}$ die nichtlineare Duffingsche Gleichung

$$\ddot{q}_1^{(1)} + \omega_1^2 q_1^{(1)} + \mu\left(q_1^{(1)}\right)^3 = 0 \qquad \mu = \frac{E\pi^4}{4\rho l^4}$$

In der Arbeit von Čuvikovskij (1959) wurde diese Gleichung mittels eines anderen Verfahrens hergeleitet.
Die zweite Näherung erhalten wir, wenn wir im System (9) die erste Gleichung dynamisch und alle übrigen quasistatisch berechnen. Dann kann man das folgende System zweier nichtlinearer Differentialgleichungen für die Bestimmung der Funktionen $q_1^{(2)}$ und $u_1^{(2)}$ aufschreiben:

$$\ddot{q}_1^{(2)} + \omega_1^2 q_1^{(2)} = -\frac{\pi^2}{Ml} q_1^{(2)} \Lambda^{(2)}$$

$$\ddot{u}_1^{(2)} + p_1^2 u_1^{(2)} = \frac{2}{M} \Lambda^{(2)}$$

$$\Lambda^{(2)} = \frac{cc_1}{c_1 - c} \left(\frac{\pi^2}{4l} \left(q_1^{(2)} \right)^2 - u_1^{(2)} \right)$$

$$c_1 = m_1 p_1^2 = \frac{\pi^2 ES}{8l} \qquad c = \frac{ES}{l}$$

3 Nichtlineare Schwingungen des Balkens mit Materialdämpfung

Wir betrachten (Čuvikovskij, 1959; Juschkov et al., 1986) den Einfluß der Materialdämpfung auf die nichtlinearen erzwungenen Schwingungen eines Balkens, die durch die inhomogene Duffingsche Gleichung

$$\ddot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 + \mu q_1^3 = P \sin \omega t \tag{10}$$

beschrieben werden können.
Es existiert eine große Anzahl von Hypothesen zur Berücksichtigung der Energiedissipation des Materials bei Schwingungen (Sorokin, 1954; Panovko, 1953 und 1960). Wir verwenden eine von ihnen. Gewöhnlich sind die Dämpfungskräfte um die Größe $\pi/2$ phasenverschoben bezüglich der elastischen Kraft. In der Arbeit von Panovko (1960) ist gezeigt, daß das Vorhandensein von Kräften der Materialdämpfung das sinusoidale Gesetz der Schwingungen nicht stört. Deshalb ist es möglich, die Kräfte der nichtlinearen Materialdämpfung nach der Gestalt der elastischen Kräfte zu konstruieren, indem man die Koordinate $q_1(t)$ durch die Geschwindigkeit $\dot{q}_1(t)$ ersetzt, wodurch auch die Phasenverschiebung um $\pi/2$ berücksichtigt wird. Außerdem werden wir dabei den erhaltenen Ausdruck mit der Größe $\varphi = \eta/\omega$ multiplizieren, wo η den Verlustkoeffizienten bedeutet (Panovko, 1953). So werden wir voraussetzen, daß der Kraft der Elastizität

$$\omega_1^2 q_1 + \mu q_1^3 = \omega_1^2 q_1 \left(1 + \mu q_1^2 / \omega_1^2\right)$$

eine Kraft der Materialdämpfung entspricht

$$\varphi\, \omega_1^2\, \dot{q}_1 \left(1 + \mu q_1^2 / \omega_1^2\right)$$

Weil die Schwingungen sinusoidalen Charakter haben (Panovko, 1960) ersetzen wir im letzten Ausdruck q_1^2 durch $\dot{q}_1^2 / \omega^2$. So können wir zur Bestimmung der Funktion $q_1(t)$ anstelle der Gleichung (10) schreiben:

$$\ddot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 + \mu q_1^3 + \varphi \omega_1^2 \dot{q}_1 + \varphi \mu \dot{q}_1^3 / \omega^2 = P \sin \omega t \tag{11}$$

Wenn wir die durch Gleichung (11) beschriebenen stationären erzwungenen Schwingungen nach der Methode von Bubnov-Galerkin (Skudrzyk, 1968) ermitteln, indem wir

$$q_1(t) = f_1 \cos \omega t + f_2 \sin \omega t$$

setzen, dann erhalten wir zur Bestimmung der Amplitude $f = \sqrt{f_1^2 + f_2^2}$ der Schwingungen die bikubische Gleichung

$$\begin{aligned} &\frac{9}{16}\mu^2\left(1+\varphi^2\omega^2\right) f^6 + \frac{3}{2}\mu\left(\omega_1^2 - \omega^2 + \varphi^2\omega_1^2\omega^2\right) f^4 + \\ &+ \left[\left(\omega_1^2 - \omega^2\right)^2 + \varphi^2\, \omega_1^4\, \omega^2\right] f^2 = P^2 \end{aligned} \tag{12}$$

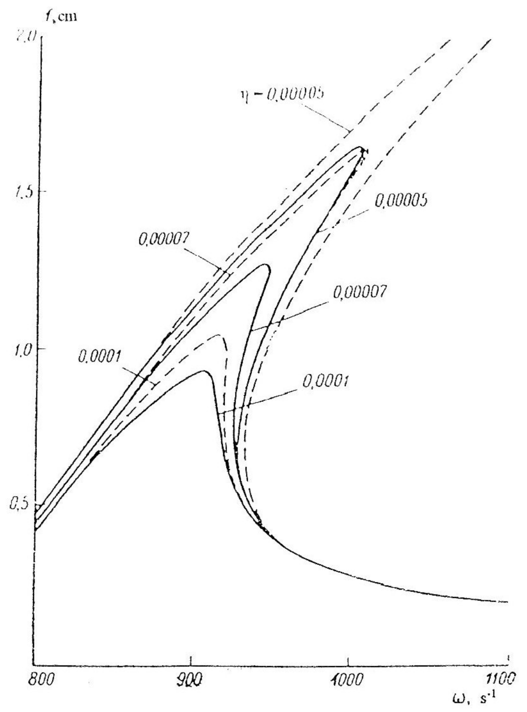

Bild 1. Amplituden-Frequenzgänge

Auf dem Bild 1 sind die Amplituden-Frequenzgänge für einen Stahlbalken mit eingespannten Rändern mit der Länge l = 78 cm, der Höhe h = 0,42 cm und der Breite b = 10 cm dargestellt. Bei der Berechnung wurde angenommen, daß die anfängliche Axialspannung im Balken $\sigma_0 = 0{,}2760 \cdot 10^3$ N/cm^2 und die Amplitude der Vertikalschwingungen der Lager w_0= 0,05 cm betragen und daß für die Größe P der Ausdruck $P = 0{,}083\ \omega^2$ cm s^{-2} gilt. Der Gleichung (12) entsprechen die ausgezogenen Linien. Die dargestellten Amplituden-Frequenzgänge zeigen, daß ihre Gestalt wesentlich von unbedeutenden Änderungen des Verlust-Koeffizienten abhängt, wobei ein Amplitudensprung erst bei kleinen Werten von η beobachtet wird. Im betrachteten Falle ist bei η = 0,00007 noch ein Amplitudensprung vorhanden, aber bei η = 0,0001 verschwindet er.
Einen großen Einfluß auf den Amplituden-Frequenzgang hat das kubische Glied in der Kraft der Materialdämpfung. Wird es nicht berücksichtigt, so erhalten wir anstelle der Gleichung (12)

$$\frac{9}{16}\mu^2 f^6 + \frac{3}{2}\mu\left(\omega_1^2 - \omega^2\right)f^4 + \left[\left(\omega_1^2 - \omega^2\right)^2 + \varphi^2\omega_1^4\omega^2\right]f^2 = P^2$$

Nach dieser Formel berechnete Amplituden-Frequenzgänge sind auf dem Bild 1 durch punktierte Linien dargestellt. Jetzt haben die Amplituden-Frequenzgänge bei gleichen Werten η heftigere Amplitudensprünge und -rücksprünge, wobei die Punkte des Sprunges und des Rücksprunges weiter voneinander entfernt sind als bei den nach Gleichung (12) konstruierten Kurven.

Literatur

1. Butenin, N.V.; Fufaev, N.A.: Einführung in die analytische Mechanik, Izd-vo Nauka, Moskau, (1991) (russ.)

2. Čuvikovskij, V.S.: Querschwingungen von Stäben und Platten, Inženernyj sbornik, Tom 25, (1959), 81-91 (russ.)

3. Juschkov, M.P.; Abakirov, B.A.; Fedorčenko, L.G.: Einfluß der Material-Dämpfung auf die nichtlinearen Schwingungen von Balken und Platten, Vestnik Leningr.Univ., Serija 1, Vypusk 4, (1986), 17 - 19 (russ.)

4. Panovko, J.G.: Innere Reibung bei Schwingungen von Systemen, Izd-vo Nauka, Moskau, (1960), (russ.)

5. Panovko, J.G.: Über die Berechnung des Hysterese-Verlustes in Aufgaben der angewandten Schwingungstheorie, Žurn. techn. fiziki, Tom 30, Vypusk 3, (1953), 486 - 497 (russ.)

6. Poljachov, N.N.; Zegshda, S.A.; Juschkov, M.P.: Theoretische Mechanik, Izd-vo Leningr. Univ., Leningrad, (1985), (russ.)

7. Skudrzyk, E.: Simple and Complex Vibratory Systems, The Pennsylvania State Univ. Press, Univ. Park and London, (1968)

8. Sorokin, E.S.: Zur Frage der nichtelastischen Dämpfung von Baumaterialien bei Schwingungen, Fizmatgiz, Moskau (1954) (russ.)

9. Timoshenko, S.: Vibration Problems in Engineering, D. van Nostrand Company, Inc., Toronto/New York/London, (1955)

Anschrift: Professor M.P. Juschkov, Fakultät für Mathematik und Mechanik, Staatsuniversität St. Petersburg, Bibliotheksplatz 2, Stary Peterhof, RUS-198904 Sankt-Petersburg