

# Rechnerische Ermittlung des bezogenen Spannungsgefälles für homogene prismatische Stäbe mit Hohlprofil und Kerben am Innenrand bei Torsion

E. Bazant

Die vorliegende Arbeit bildet eine Fortsetzung zu früheren Arbeiten und behandelt Hohlprofile mit Innenkerben. Es werden geschlossene Lösungen durch die Anwendung der konformen Abbildung und der Elastizitätstheorie erreicht.

## 1 Berechnungsgrundlagen

In einem Beitrag von Bazant (1997) wird eine allgemeine Lösung für die rechnerische Ermittlung des bezogenen Spannungsgefälles für homogene prismatische Stäbe mit Vollquerschnitt (und Kerben am Außenrand) bei Torsion dargelegt. Die vorliegende Arbeit bildet eine Ergänzung zum o.g. Beitrag. Ferner zeigen die Untersuchungen von Bazant (1989, 1991 a, 1991 b, 1992 c, 1993 d, 1994 e und 1994 f) Lösungswege, Rechenprogramme und Berechnungsbeispiele zur Bestimmung des Torsionsträgheitsmoments, der Spannung und des Spannungsgefälles (am gesamten Profil) sowie der Formzahl für Wellen mit Vollquerschnitt und Kerben am Außenrand (z.B. Keilwellenprofile) und für Hohlprofile mit Kerben am Innenrand (z.B. Keilnabenprofile). Hierbei werden keine Näherungslösungen angewendet, sondern es werden geschlossene Lösungen durch die Anwendung der konformen Abbildung und der Elastizitätstheorie erreicht. Mit diesen Berechnungsgrundlagen und der Methode von Siebel und Stieler (1955) kann man die Kerbwirkungszahl für viele technisch wichtige Wellenverbindungen mit Längsnuten (im nicht überdeckten Bereich) berechnen.

Die Berechnung des bezogenen Spannungsgefälles für Torsion erfolgt durch die Anwendung der konformen Abbildung und der Elastizitätstheorie. Das Problem kann als gelöst betrachtet werden, wenn es gelingt, das vorgegebene Hohlprofil auf den Kreisring abzubilden. Das bezogene Spannungsgefälle für Torsion wird mit der Funktion

$$\bar{G} = \frac{\left(\frac{d\tau}{dr}\right)_{\max}}{\tau_{\max}} \quad (1)$$

berechnet. Für die Hohlwelle mit zentrischer Bohrung (nach Bild 1) wird beispielsweise

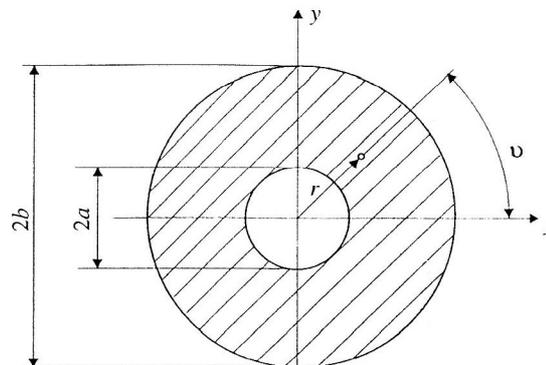


Bild 1. Kreisquerschnitt mit zentralem Kreisloch

$$\tau = G\vartheta r \qquad \frac{d\tau}{dr} = G\vartheta \qquad \tau_{r=a} = G\vartheta a \qquad \tau_{r=b} = G\vartheta b$$

und damit  $\bar{G}_{r=a} = \frac{1}{a}$   $\bar{G}_{r=b} = \frac{1}{b}$

Hierbei sind

$G =$  Schubmodul in MPa

$\vartheta =$  Verdrehwinkel je Längeneinheit

In Anlehnung an Naimann (1958) kann man für die konforme Abbildungsfunktion einer Hohlwelle mit Kerben am Innenrand (z.B. für ein Keilnabenprofil) folgenden Ansatz machen:

$$z = x + iy = \omega(\zeta) \tag{2}$$

$$z = R \left[ \zeta + \frac{\lambda_1}{p-1} \zeta^{-p+1} + \frac{\lambda_2}{2p-1} \zeta^{-2p+1} + \dots + \frac{\lambda_n}{np-1} \zeta^{-np+1} \right]$$

mit  $0 \leq |\lambda_i| \leq 1$

$p =$  Symmetriefaktor ( $p = 1, 2, 3, \dots$ )

und  $\zeta = e^{u+iv}$

Aus Gleichung (2) wird für die  $z$ -Ebene

$$x = R \left[ e^u \cos v + \frac{\lambda_1}{p-1} e^{(-p+1)u} \cos(p-1)v + \frac{\lambda_2}{2p-1} e^{(-2p+1)u} \cos(2p-1)v + \dots + \frac{\lambda_n}{np-1} e^{(-np+1)u} \cos(np-1)v \right]$$

$$y = R \left[ e^u \sin v - \frac{\lambda_1}{p-1} e^{(-p+1)u} \sin(p-1)v - \frac{\lambda_2}{2p-1} e^{(-2p+1)u} \sin(2p-1)v - \dots - \frac{\lambda_n}{np-1} e^{(-np+1)u} \sin(np-1)v \right] \tag{3}$$

und  $r^2 = x^2 + y^2$

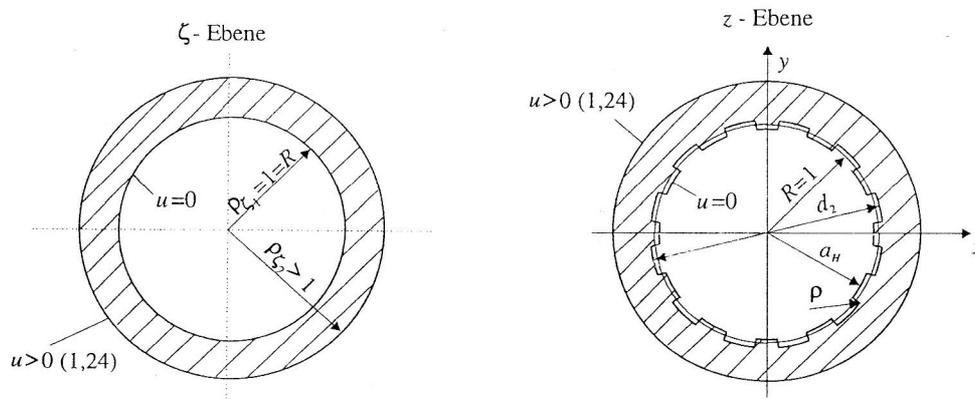


Bild 2. Schematische Darstellung zur konformen Abbildung auf den Kreisring

Setzt man  $u = 0$ , so entsteht die Profil-Innenrandkurve ( $R_i$ ) in Parameterdarstellung

$$\begin{aligned}
x_{Ri} = R \left[ \cos v + \frac{\lambda_1}{p-1} \cos(p-1)v + \frac{\lambda_2}{2p-1} \cos(2p-1)v + \dots \right. \\
\left. + \frac{\lambda_n}{np-1} \cos(np-1)v \right] \\
y_{Ri} = R \left[ \sin v - \frac{\lambda_1}{p-1} \sin(p-1)v - \frac{\lambda_2}{2p-1} \sin(2p-1)v - \dots \right. \\
\left. - \frac{\lambda_n}{np-1} \sin(np-1)v \right]
\end{aligned} \tag{4}$$

und

$$r_{Ri}^2 = x_{Ri}^2 + y_{Ri}^2$$

Für prismatische Stäbe mit zweifach zusammenhängendem Querschnitt (s.a. Bild 2) muß die Spannungsfunktion  $\phi$  die Differentialgleichung

$$\Delta\phi = -2G\vartheta \tag{5}$$

erfüllen. Bei krummlinigen Koordinaten und zweidimensionalen Problemen ist der Laplace-Operator

$$\Delta\phi = \frac{1}{h_u h_v} \left\{ \left[ \frac{h_v}{h_u} \phi_{,u} \right]_{,u} + \left[ \frac{h_u}{h_v} \phi_{,v} \right]_{,v} \right\} \tag{6}$$

mit den Verzerrungsfaktoren

$$\begin{aligned}
h_u = \left[ (x_{,u})^2 + (y_{,u})^2 \right]^{1/2} \\
h_v = \left[ (x_{,v})^2 + (y_{,v})^2 \right]^{1/2}
\end{aligned} \tag{7}$$

Durch die Anwendung der konformen Abbildung entsteht ein orthogonales Koordinatensystem und es ergeben sich folgende Vereinfachungen

$$h = h_u = h_v$$

und

$$\Delta\phi = \frac{1}{h^2} [\phi_{,uu} + \phi_{,vv}] = -2G\vartheta \tag{9}$$

Für dieses Koordinatensystem ist

$$\bar{G} = \frac{\left( \frac{\partial \tau}{\partial r} \right)_{\max}}{\tau_{\max}} \tag{1.1}$$

Die weitere Berechnung zur Bestimmung des bezogenen Spannungsgefälles - für Hohlprofile mit Kerben am Innenrand - erfolgt im Prinzip wie es [für die Vollwelle mit Kerben am Außenrand] in Bazant (1997) dargelegt wurde; denn in beiden Fällen werden krummlinige orthogonale Koordinaten angewendet.

Das bezogene Spannungsgefälle wird für die maximale Spannung am Innenrand ( $u=0$ ) ermittelt. Am Profil-Innenrand (und -Außenrand) ist die Radialspannung Null.

$$(\tau_u)_{\text{Rand}} = \left( \frac{\phi_{,v}}{h} \right)_{\text{Rand}} = 0 \quad (10)$$

Aus Gleichung (9) wird

$$(\Delta\phi)_{\text{Rand}} = -2G\vartheta = \frac{\phi_{,uu}}{h^2} \quad (11)$$

Mit

$$\tau_v = -\frac{\phi_{,u}}{h} = \tau \quad (12)$$

und

$$\frac{\partial\tau}{\partial r} = \frac{\partial\tau}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial r} \quad (13)$$

wird

$$\frac{\partial\tau}{\partial u} = (\tau_v)_{,u} = -\left( \frac{\phi_{,u}}{h} \right)_{,u} = \frac{1}{h} [-\phi_{,uu} + \tau_v h_{,u}] \quad (14)$$

Den Krümmungsradius  $\rho$  am Profilrand ( $u = \text{konst.} = 0$ ) kann man mit

$$\rho = \frac{h^2}{h_{,u}} \quad (15)$$

ermitteln (Vocke, 1969 und Neuber, 1958). Ferner ist nach Wunsch (1973)

$$\left| \frac{\partial r}{\partial u} \right| = h \quad (16)$$

und nach Bazant (1991a)

$$(\tau_v)_{\text{max}} = G\vartheta R\bar{\alpha}_v \quad (17)$$

Somit wird aus Gleichung (13)

$$\frac{\partial\tau}{\partial r} = -\frac{\phi_{,uu}}{h^2} + \frac{\tau_v \cdot h_{,u}}{h^2} = 2G\vartheta + \frac{\tau_v}{\rho} \quad (18)$$

und

$$\bar{G} = \frac{2}{R\bar{\alpha}_v} + \frac{1}{\rho} \quad [1 / \text{mm}] \quad (19)$$

Unter Berücksichtigung der Mikrostützwirkung und mit

$$R = \frac{a_H}{K_{H2}} \quad (20)$$

wird schließlich das bezogene Spannungsgefälle bei Torsion (s.a. Bild 2)

$$\boxed{\bar{G} = \frac{2K_{H2}}{a_H\bar{\alpha}_v} + \frac{1}{\rho_1}} \quad [1 / \text{mm}] \quad (21)$$

Es bedeuten

$$\rho_1 = \rho + s\rho^*$$

$\rho_1$  fiktiver Krümmungsradius

$\rho$	Krümmungsradius
$s$	Faktor zur Berücksichtigung der Beanspruchungsarten und Festigkeitshypothesen (Neuber, 1968)
$\rho^*$	Ersatzstrukturlänge

## 2 Berechnungsbeispiel

Berechnung des bezogenen Spannungsgefälles  $\bar{G}$  für einen prismatischen Stab mit Keilnabenprofil und zehn Keilen bei Torsion und folgenden speziellen Werten:

$$d_2 = 86 \text{ mm} \quad (\text{s.a. Bild 2})$$

$$\rho_1 = 0,27 \text{ mm} \quad \bar{\alpha}_v = 2,75$$

$$K_{H2} = \frac{a_H}{R} = 0,95 \quad a_H = 40 \text{ mm}$$

Mit Gleichung (21) wird

$$\bar{G} = \frac{2K_{H2}}{a_H \bar{\alpha}_v} + \frac{1}{\rho_1} = \frac{2 \cdot 0,95}{40 \cdot 2,75} + \frac{1}{0,27}$$

$$\bar{G} = 0,01727 + 3,7087 = \underline{\underline{3,721 \text{ 1/mm}}}$$

## 3 Berechnungsergebnisse

In der bisherigen Fachliteratur sind für das bezogene Spannungsgefälle  $\bar{G}$  für homogene prismatische Stäbe mit Vollquerschnitt und Kerben am Außenrand bei Torsion nur Näherungsgleichungen für relativ wenig Profilvarianten angegeben, z.B. in Göldner (1978), Wächter (1987), der TGL 19340 (1984) und Assmann (1995).

Für Hohlprofile mit Kerben am Innenrand sind für  $\bar{G}$  noch keine Werte zu finden.

Demgegenüber zeigen die vorliegende Arbeit und der Beitrag von Bazant (1997) je eine allgemeine Lösung hinsichtlich  $\bar{G}$  für prismatische Stäbe mit Vollquerschnitt und Kerben am Außenrand und auch für Hohlprofile mit Kerben am Innenrand bei Torsion.

Hierbei kann man  $\bar{G}$  für z.B. die folgenden, häufig verwendeten Antriebselemente berechnen:

- Wellen und Naben mit Paßfedernuten
- Kerbzahnwellen- und Kerbzahnnaben-Profile
- Zahnwellen- und Zahnnaben-Profile usw.

$\bar{G}$  berücksichtigt hierbei auch den Einfluß der Mikrostützwirkung und damit den kerbspannungsmäßig bedeutsamen Bereich der Spitzkerben.

Das Berechnungsbeispiel für ein Keilnabenprofil zeigt, daß die Haupteinflußgröße für  $\bar{G}$  der wirksame kritische Kerbradius  $\rho_1$  ist.

### Anmerkung

In dem Beitrag von Bazant (1997) wurde  $\bar{G}$  für prismatische Stäbe mit Kerben am Außenrand und Vollquerschnitt durch die Anwendung der konformen Abbildung auf den Kreis berechnet. Mit der konformen Abbildung auf den Kreisring könnte man ergänzend  $\bar{G}$  noch für prismatische Stäbe mit Kerben am Außenrand und zentrischer Innenbohrung berechnen, z.B. für Keilwellenprofile mit Innenbohrung.

#### 4 Zusammenfassung

Nach Siebel und Stieler (1955) genügen zur Berechnung der Kerbwirkungszahl das bezogene Spannungsgefälle, die Formzahl und die Stützziffer.

Die Berechnung der Formzahl ist durch die Anwendung der konformen Abbildung und der Elastitätstheorie für viele technisch wichtige Profile in geschlossener Form möglich. Die Bestimmung der Formzahl kann aber auch noch nach anderen Methoden erfolgen, z.B. nach der Methode der finiten Elemente.

Durch die oben dargelegte allgemeine Lösung für die rechnerische Bestimmung des bezogenen Spannungsgefälles  $\bar{G}$  wurde ein wesentlicher Schritt zur rechnerischen Bestimmung der Kerbwirkungszahl von prismatischen Stäben bei Torsion erreicht.

#### Literatur

1. Assmann, B.: Technische Mechanik, Band 2: Festigkeitslehre, 13. Auflage, Oldenbourg, (1995)
2. Bazant, E.: Zur Spannungskonzentration in der Längsnut der Welle bei Torsion, Maschinenbautechnik, Berlin, 2, (1989)
3. Bazant, E.: Rechnerische Ermittlung der Spannungskonzentration in Keilwellen bei Torsion, Maschinenbautechnik, Berlin, 6, (1991a)
4. Bazant, E.: Rechnerische Ermittlung des Torsionsträgheitsmomentes für homogene prismatische Stäbe mit Vollquerschnitt, unveröffentlicht, (1991b)
5. Bazant, E.: Rechnerische Ermittlung der Spannung und des Spannungsgefälles in homogenen prismatischen Stäben bei Torsion, unveröffentlicht, (1992c)
6. Bazant, E.: Berechnung der Torsionsspannung in einer Welle mit einer und mehreren Paßfedernuten, unveröffentlicht, (1993d)
7. Bazant, E.: Berechnung der Torsionsspannung in der Welle mit Paßfedernut, unveröffentlicht, (1994e)
8. Bazant, E.: Berechnung der Torsionsspannung in der Welle mit Paßfedernut - Teil 2, unveröffentlicht, (1994f)
9. Bazant, E.: Rechnerische Ermittlung des bezogenen Spannungsgefälles für homogene prismatische Stäbe mit Vollquerschnitt bei Torsion, Technische Mechanik, Band 17, Heft 1, (1997), 41- 49
10. Filonenko, M.M.; Boroditsch: Elastitätstheorie, Leipzig, VEB Fachbuchverlag, (1967)
11. Göldner, H.: Arbeitsbuch Höhere Festigkeitslehre, Leipzig, VEB Fachbuchverlag, (1978)
12. Göldner, H.: Lehrbuch Höhere Festigkeitslehre, Band 1, Leipzig, VEB Fachbuchverlag, (1979)
13. Göldner, H.: Lehrbuch Höhere Festigkeitslehre, Band 2, Leipzig, VEB Fachbuchverlag, (1979)
14. Göldner, H.; Holzweißig, F.: Leitfaden der Technische Mechanik, Leipzig, VEB Fachbuchverlag, (1985)
15. Naimann, M.J.: Torsion eines Kreiszyinders mit koaxialen Vieleckaussparungen (russ.), Sammlung „Festigkeitsberechnung“, 3, (1958), 170-193
16. Neuber, H.: Kerbspannungslehre, Springer Verlag, (1958)
17. Neuber, H.: Über die Berücksichtigung der Spannungskonzentration bei Festigkeitsproblemen, Konstruktion, Berlin, 1, (1968)
18. Sähn, S.; Göldner, H.: Bruch- und Beurteilungskriterien in der Festigkeitslehre, Leipzig, VEB Fachbuchverlag, (1989)

19. Siebel, E.; Stieler, M.: Ungleichförmige Spannungsverteilung bei schwingender Belastung, VDI-Zeitschrift 97, (1955), S. 127
20. TGL 19340: Dauerfestigkeit der Maschinenbauteile, Ausgabe (1984)
21. Vocke, W.: Räumliche Probleme der linearen Elastizität, Leipzig, VEB Fachbuchverlag, (1969)
22. Wächter, K.: Konstruktionslehre für Maschineningenieure, Berlin, (1987)
23. Wunsch, G.: Feldtheorie, Band 1, Berlin, VEB Verlag Technik, (1973)

---

*Adresse:* Dipl.-Ing. E. Bazant, Kornstraße 14, D-39387 Oschersleben/Bode