

# Rotorinstabilitäten infolge sanfter Statorberührung - Spiral Vibrations

R. Liebich

*Spiralbewegungen in Turbomaschinen sind die Folge eines reibenden Kontakts zwischen Rotor und Labyrinthdichtungen oder anderen nichtrotierenden Teilen des Gehäuses. Die Schwingungsantworten des Rotors beschreiben oft, dargestellt in Polarkoordinaten, eine Spirale. Es gibt nur wenige Arbeiten über den thermischen Effekt des Reibkontakts in rotierenden Maschinen. Unter Verwendung des thermo-elastischen Rotormodells von Kellenberger werden die Bewegungsgleichungen für den Kontinuumsrotor aufgestellt, modal diskretisiert und gelöst. Eine Näherung für die thermisch bedingte Verkrümmung des Rotors wird angegeben.*

## 1 Einleitung

Der Rotor-Stator-Kontakt ist wohlbekannt seit den frühen Experimenten von Newkirk im Jahre 1926. Bis heute wurden mehrere verschiedene Theorien zur Beschreibung dieses Phänomens veröffentlicht. Die meisten dieser Veröffentlichungen beschreiben die mechanische Komponente des Kontakts mit ihren Reib- und Kontaktkräften. Muszynska (1989) hat Ende der achtziger Jahre eine Literaturübersicht zu dieser Thematik herausgegeben, in der sie die verschiedenen physikalischen Phänomene bei Rotor-Stator-Kontakt beschreibt, wie z.B: Reibung, Stoß, Torsionslast, Kopplungseffekte, Versteifungseffekte und thermische Effekte. Der letztgenannte Aspekt, der thermische Effekt, ist selten untersucht worden. Es gibt nur wenige Aufsätze, die den thermischen Effekt beim Reibkontakt von rotierenden Maschinen beschreiben. Einer davon wurde von Kellenberger (1980) veröffentlicht.

In seinem Aufsatz entwickelte Kellenberger ein einfaches Rotorkontaktmodell, welches in der Lage ist, das thermoelastische Verhalten des Rotors zu beschreiben. Dieses Modell basiert auf zwei Differentialgleichungen, einer rotordynamischen Gleichung zweiter Ordnung, welche die Wellenauslenkungen beschreibt, und einer thermischen Gleichung erster Ordnung für das thermo-elastische Verhalten infolge des Reibungswärmeeinflusses. Das thermo-elastische Verhalten wird maßgeblich durch die thermische Verformung am Kontaktpunkt des Rotors beschrieben. Beide Differentialgleichungen sind gekoppelt: In der rotordynamischen Gleichung hängt die wirksame Rückstellkraft von der thermischen Verformung ab, während die Reibungswärme in der thermischen Gleichung wiederum von der elastischen Verformung des Rotors infolge Unwucht oder anderer Einflüsse abhängt. Für eine konstante Drehzahl führen diese Gleichungen zu einem typischen reibbedingten Rotorverhalten, welches zuerst von Kroon und Williams (1937) erklärt und als "Spiral Vibration" benannt wurde. In Bild 1 sind die Polarplots von reibinduzierten Schwingungsantworten in horizontaler und vertikaler Richtung dargestellt. Sie wurden in einem Lager einer 34 MW Gas- und Dampfturbine gemessen, die am Gehäuse anstriefte. Die Richtung der Spiralbewegung verlief entgegengesetzt zur Drehrichtung des Rotors. Man beachte die konstante Drehzahl des Rotors. Die dominante Antwort der reibbedingten Schwingung ist drehzahlfrequent. Oft berichten Autoren von einhalbfach oder doppelt umlauffrequenten Schwingungen in Zusammenhang mit Rotor-Stator-Kontakten. Diese sind allerdings bei dieser Messung verschwindend gering und werden deshalb nicht dargestellt.

Das Kellenberger Modell liefert nur drehzahlfrequente Lösungen. Allerdings läßt sich mit Hilfe dieses Modells die Zeitperiode für die Spiralbewegung im Rahmen der theoretischen Annahmen exakt bestimmen. Des weiteren läßt das Modell relativ einfache Stabilitätsuntersuchungen zu und kann rückwärts- wie vorwärtsdrehende Spiralen erzeugen. Letztere wurden gerade in jüngsten Schadensberichten erwähnt, Bently (1996). Alle Bedingungen, die das Stabilitätsverhalten der Spirale beeinflussen, hängen im wesentlichen von zwei thermischen Parametern ab, die die materialabhängigen wärmespezifischen Parameter des Rotors und die Geometrie am Reibort beinhalten.

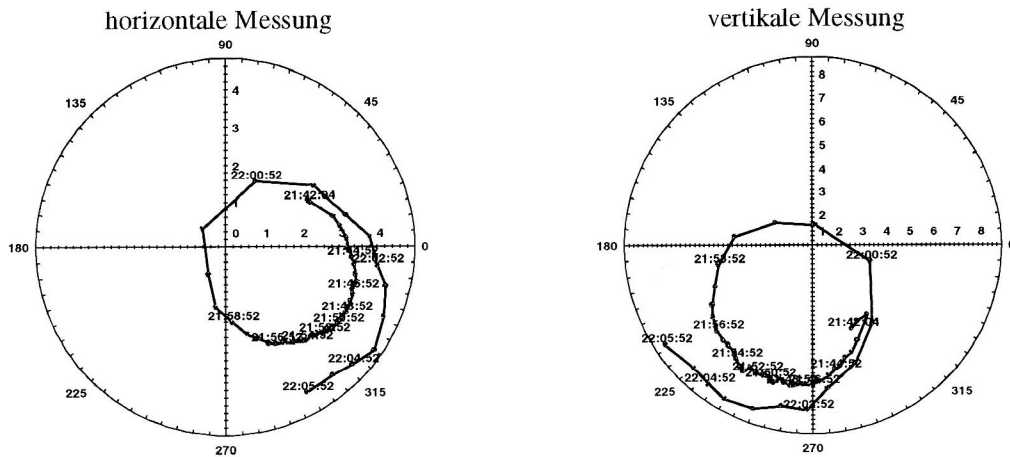


Bild 1. Langsam rückwärtsdrehende Unwuchtsanzeige (Polar-Plot einer Spiral-Vibration), Drechsler (1995), Lager in Generatornähe, konstante Drehzahl 3000 U/min.

Das Ziel dieses Aufsatzes ist die Herleitung und Untersuchung der allgemeinen, gekoppelten rotordynamischen/thermo-elastischen Bewegungsgleichungen für mehrfach gelagerte Kontinuumrotoren unter Verwendung des Kellenberger Modells für den Rotor-Stator-Kontakt. Es sollen das mathematische Modell des mehrfach gelagerten Rotors auf seine Stabilität untersucht und die Schwingungsantworten infolge Rotor-Stator-Kontakts berechnet werden. Zum besseren Verständnis und um die physikalische Plausibilität des Modells zu demonstrieren, wird zunächst ein zweifach gelagerter Kontinuumsrotor vorgestellt.

## 2 Spiralschwingungen - Eine kurze Einführung

Der Rotor-Stator-Kontakt ist ein Folgefehler, welcher aus einem Primärfehler, wie z.B. einer Unwucht oder einer statischen Vorkrümmung, resultiert. Bild 2a zeigt das Vektordiagramm der Rotorantwort eines einfachen elastischen Rotors unter Unwuchterregung in inertialen Koordinaten. In Bild 2b ist dieselbe Rotorantwort in *mitrotierenden* Koordinaten dargestellt. Diese erzeugt bei konstanter Drehzahl einen einzigen Punkt. Zwischen dem Vektor der Exzentrizität  $\vec{e}$  und dem Antwortvektor  $\vec{\rho}_{Unwucht}$  liegt die bekannte dämpfungs- und drehzahlabhängige Phasenlage  $\gamma$ . Streift der Rotor, wie im darauffolgenden Bild 2c zu sehen ist, an, so wird dies am höchsten Punkt H des Rotors geschehen, also an dem Punkt, der am weitesten vom Ursprung entfernt ist. Die Folge dieses Anstreichens ist eine thermische Krümmung des Rotors in Richtung dieses Kontaktpunktes. Diese Krümmung  $\vec{\rho}_T$  wirkt wie ein Schlag. Der Rotor reagiert auf diesen Schlag durch eine Richtungsänderung seiner Rotorantwort  $\vec{\rho}$  (Bild 2d). Zwischen einem Schlag und der Rotorantwort liegt ein Phasenwinkel  $\alpha$ . Dieser Phasenwinkel ist gleich der Phasenlage  $\gamma$  des Schwerpunktes. Die Rotorantwort abzüglich der Rotorantwort bei reiner Unwuchterregung eilt der thermischen Krümmung  $\vec{\rho}_T$  um den Winkel  $\alpha$  nach. Es gilt:  $\alpha = \angle[(\vec{\rho} - \vec{\rho}_{Unwucht}), \vec{\rho}_T]$ . Wir stellen fest, die Rotorantwort hat sich bezüglich des mitdrehenden Koordinatensystems verändert. In Bild 2d ist die Verlagerung infolge der als Schlag wirkenden thermischen Krümmung dargestellt. Der Anstreifort H hat bezüglich des Rotors seine Position nicht verändert. Er ist bei der Verlagerung des Wellenmittelpunkts W im gleichen Maße mitbewegt worden. Bild 2e zeigt die Ausgangsposition für den nächsten Reibvorgang, der in Bild 2f dargestellt wird. Es entsteht wieder eine thermische Krümmung  $\vec{\rho}_T$ , die als Schlag auf den Rotor wirkt. Letzterer muß durch eine Richtungsänderung wieder den Phasenwinkel  $\alpha$  zur thermischen Krümmung  $\vec{\rho}_T$  einhalten. Als Folge verlagert sich der Wellenmittelpunkt weiter. Wenn man diese Betrachtung des thermisch bedingten Wanderns der Rotorantwort weiter verfolgt, so erhält man, dargestellt in mitrotierenden Koordinaten, ein spiralförmiges Herauslaufen der Rotoramplitude in entgegengesetzter Drehrichtung des Rotors. Im letzten Bild 2g ist dieses reibbedingte Rotorverhalten aufgezeigt.

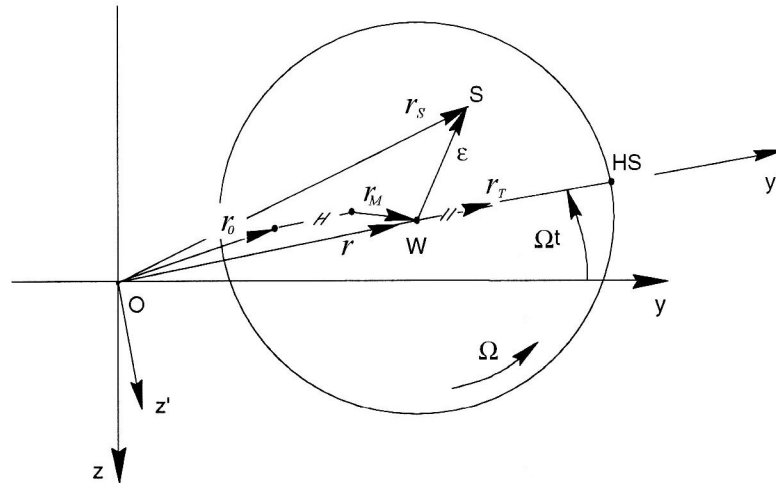


Bild2a. Rotor unter Unwuchterregung in inertialen Koordinaten  $x, y$

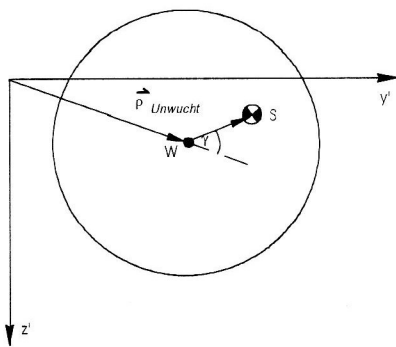


Bild 2b. Rotor unter Unwuchterregung in mitrotierenden Koordinaten

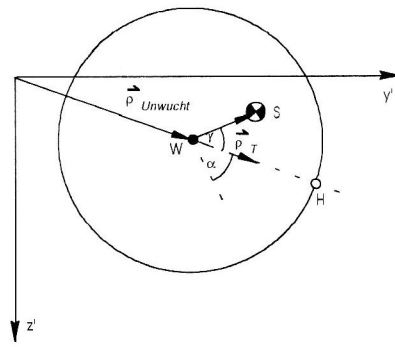


Bild 2c. Reibung erfolgt am Kontaktpunkt H und induziert eine thermische Krümmung  $\bar{p}_T$ .

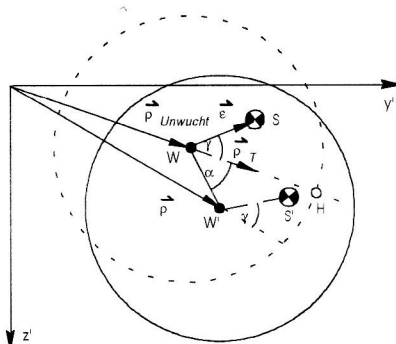


Bild 2d. Der Rotor reagiert auf die thermische Krümmung mit einer Richtungsänderung.

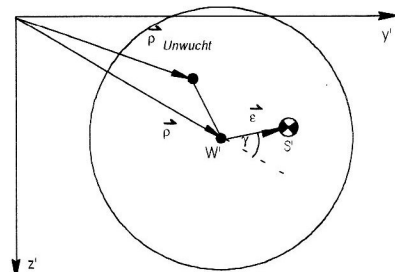


Bild 2e. Ausgangssituation für den nächsten Reibvorgang.

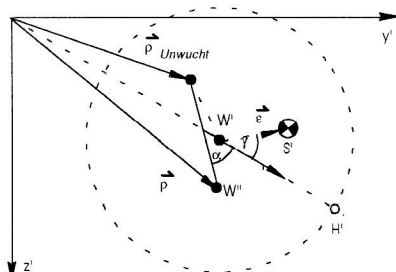


Bild 2f. Der Rotor streift wieder am Kontaktpunkt H an und induziert eine neue thermische Krümmung. Der Rotor reagiert darauf wieder mit einer Richtungsänderung.

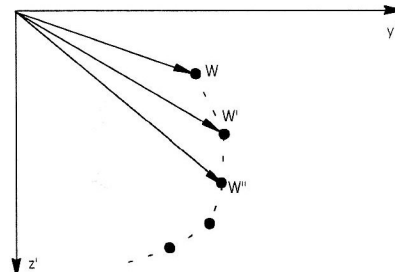


Bild 2g. Die Folge der Richtungsänderung der Rotorantwort ist eine spiralförmige Bewegung des Wellendurchstoßpunktes in mitrotierenden Koordinaten entgegengesetzt der Drehrichtung des Rotors.

### 3 Gekoppelte rotordynamische/thermische Gleichungen

Die rotordynamischen Gleichungen werden über das Prinzip der virtuellen Verrückungen hergeleitet. Zum leichteren Verständnis werden die Gleichungen in komplexen Koordinaten aufgestellt, damit man die Größen im Vektordiagramm von Bild 2 wiederfindet. Diese komplexe Schreibweise setzt isotrope Lagerungen voraus. Die Berechnungen und die folgenden Analysen der Rechenbeispiele werden mit realen, orthotropen Lagern durchgeführt. Die dafür notwendigen komplizierteren Gleichungen werden ihrer Länge wegen nicht aufgeführt.

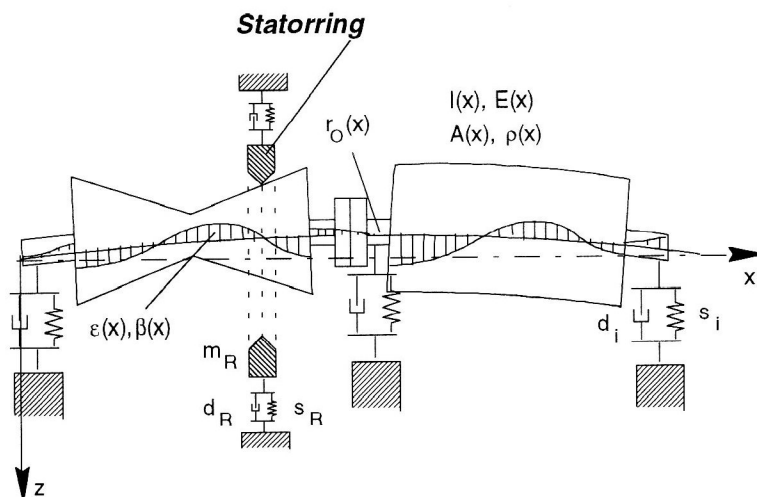


Bild 3. Modell eines realen Rotors mit Unwuchtverteilung und statischer Vorkrümmung bei ständigem Statorkontakt

Bild 3 zeigt eine vereinfachende Skizze eines realen Rotors, der infolge einer Unwuchtverteilung sowie einer statischen Schlagverformung dynamisch ausgelenkt wird. Der elastische Rotor ist an mehreren Stellen elastisch und gedämpft gelagert. Durch die unwucht- und schlagbedingten Auslenkungen berührt der Rotor einen Statorring, der an einem beliebigen Ort über der Rotorlänge positioniert wurde. Der Statorring ist ebenfalls elastisch und gedämpft gelagert. Er repräsentiert in einfacher Form ein Gehäuse mit Labyrinthdichtungen zwischen den einzelnen Turbinenstufen oder auch Dichtringe an Lagern gegen Öllecks.

Das Prinzip der virtuellen Verrückungen für einen allgemeinen realen Rotor in komplexen, inertialen Koordinaten lautet (mit der imaginären Größe  $j = \sqrt{-1}$ ):

$$\int E(x) I(x) r_M''(x) \delta r''(x) dx + \int \rho(x) A(x) \ddot{r}_s(x) \delta r(x) dx + \sum_{i=1}^L d_i \dot{r}|_{x_i} \delta \tilde{r}|_{x_i} + \sum_{i=1}^L s_i r|_{x_i} \delta r|_{x_i} + (1 + j\mu) F_{kN} \delta r|_{x_{hs}} = 0 \quad (1)$$

$L$  ist hierbei die Anzahl der Rotorlagerungen. Mit den Vektoren aus Bild 2a)

$$\begin{aligned} r_V &= r_O(x) e^{j\Omega t} \\ r_M &= r(x) - r_T(x) - r_V(x) \\ r_s &= r(x) + e(x) = r(x) - \Omega^2 \bar{\epsilon}(x) e^{j\Omega t} \end{aligned} \quad (2)$$

erhält man für die Gleichungen (1) folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned}
& \int E(x) I(x) r''(x) \delta r''(x) dx - \int E(x) I(x) r_T''(x) \delta r''(x) dx \\
& + \int \rho(x) A(x) \ddot{r}(x) \delta r(x) dx + \sum_{i=1}^L d_i \dot{r}|_{x_i} \delta r|_{x_i} + \sum_{i=1}^L s_i r|_{x_i} \delta r|_{x_i} \\
& - \sum_{i=1}^L s_i r_T|_{x_i} \delta r|_{x_i} + (1 + j\mu) F_{kN} \delta r|_{x_{hs}} = \int E(x) I(x) r_O''(x) e^{j\Omega t} \delta r''(x) dx \\
& + \sum_{i=1}^L s_i r_O|_{x_i} e^{j\Omega t} \delta r|_{x_i} + \Omega^2 \int \rho(x) A(x) \bar{\epsilon}(x) e^{j\Omega t} \delta r(x) dx
\end{aligned} \tag{3}$$

Die Kontaktkraft an der axialen Kontaktstelle  $x_{hs}$  wird gemäß dem erweiterten Lavalmodell von Kellenberger (1980) gewählt.

$$F_{kN} = s_R r|_{x_{hs}} + d_R \dot{r}|_{x_{hs}} + m_R \ddot{r}|_{x_{hs}} \tag{4}$$

Das bedeutet, die Trägheits-, Dämpfungs- und Elastizitätskräfte des Stators werden zwar berücksichtigt, aber seine Größen Masse, Dämpfung und Steifigkeit werden dem Rotorsystem nur additiv zugeschlagen. Der Stator führt somit keine Eigenbewegung aus.

Bisher ist noch keine Aussage über die Form der thermischen Krümmung  $r_T(x)$  gemacht worden. Es wird zunächst eine noch unbekannte Einheitsverschiebungsfigur in Form einer Funktion  $f(x)$  eingeführt. Diese Einheitsverschiebungsfigur hängt mit ihren Amplituden linear von der thermischen Auslenkung am Kontaktpunkt  $r_T|_{x_{hs}}$  ab. Näheres wird im nachfolgenden Kapitel erläutert.

$$r_T(x) = r_T|_{x_{hs}} f(x) \tag{5}$$

Setzt man die Gleichungen (4) und (5) in Gleichung (3) ein, so erhält man die folgende Schreibweise des Prinzips:

$$\begin{aligned}
& \int E(x) I(x) r''(x) \delta r''(x) dx - \int E(x) I(x) r_T|_{x_{hs}} f''(x) \delta r''(x) dx \\
& + \int \rho(x) A(x) \ddot{r}(x) \delta r(x) dx + \sum_{i=1}^L d_i \dot{r}|_{x_i} \delta r|_{x_i} + \sum_{i=1}^L s_i r|_{x_i} \delta r|_{x_i} \\
& - \sum_{i=1}^L s_i r_T|_{x_{hs}} f(x_i) \delta r|_{x_i} + (1 + j\mu) \left[ s_R r|_{x_{hs}} + d_R \dot{r}|_{x_{hs}} + m_R \ddot{r}|_{x_{hs}} \right] \delta r|_{x_{hs}} = \\
& \int E(x) I(x) r_O''(x) e^{j\Omega t} \delta r''(x) dx + \sum_{i=1}^L s_i r_O|_{x_i} e^{j\Omega t} \delta r|_{x_i} \\
& + \Omega^2 \int \rho(x) A(x) \bar{\epsilon}(x) e^{j\Omega t} \delta r(x) dx
\end{aligned} \tag{6}$$

Dieser Ausdruck des Prinzips der virtuellen Verrückungen wird nun mit Hilfe von Eigenformen des Rotors modal diskretisiert. Die Eigenformen werden aus Ermangelung an Meßdaten über eine vorherige dynamische Finite-Element-Berechnung des konservativen (keine Dämpfung) Rotorsystems mit Berücksichtigung der Statorsystemgrößen, aber ohne thermische Effekte ermittelt. Mit den so gewonnenen Eigenformen beziehungsweise Eigenfunktionen  $\Phi_n(x)$  kann man einen modalen Ansatz für die unbekanntenen Auslenkungen des zu behandelnden Rotors formulieren:

$$r(x) = \sum_{n=1}^N \Phi_n(x) q_n \quad \text{für die realen Auslenkungen,} \tag{7a}$$

$$\delta r(x) = \sum_{m=1}^N \Phi_m(x) \delta_m \quad \text{für die virtuellen Auslenkungen.} \tag{7b}$$

Hier sind  $q_n$  modale Freiheitsgrade und  $\delta_m$  virtuelle Größen.

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{S} \mathbf{q} = \mathbf{b} + \mathbf{u} + \mathbf{t} r_T|_{x_{hs}} \quad (8)$$

Die lineare thermo-elastische Differentialgleichung erster Ordnung lautet für die axiale Kontaktstelle  $x_{hs}$  in inertialen Koordinaten:

$$\dot{r}_T|_{x_{hs}} - \kappa_1^* \mu \Omega R F_{kN} + (\kappa_2^* - j\Omega) r_T|_{x_{hs}} = 0 \quad (9)$$

wobei  $\kappa_1^* \mu \Omega R$  ein Ausdruck für die Reibungswärme ist, die in den Rotor fließt, und  $(\kappa_2^* - j\Omega)$  den Anteil der Wärme steuert, der über die Rotoroberfläche während der gleichen Zeit an die Umgebung abgegeben wird. Die beiden thermischen Koeffizienten  $\kappa_1^*, \kappa_2^*$  enthalten wärmeleitungsrelevante Materialkonstanten und Geometriedaten.

Hier erkennt man auch den Grund für die Formulierung der thermischen Krümmung  $r_T(x)$  als Produkt aus der Einheitsfunktion  $f(x)$  und der thermischen Verformung am Kontaktpunkt  $r_T|_{x_{hs}}$  in Gleichung (5). Die thermo-elastische Differentialgleichung wurde nur für den Reibort hergeleitet. Sie kennt somit keine Krümmungsfigur in Abhängigkeit von der axialen Koordinate  $x$ , sondern nur die lokale thermische Auslenkung am Reibort  $r_T|_{x_{hs}}$ . Deshalb wurde die thermische Krümmungsfigur im Prinzip der virtuellen Verrückungen auf die thermische Auslenkung  $r_T|_{x_{hs}}$  reduziert.

Die thermo-elastische Differentialgleichung (8) erster Ordnung wird nun mit dem Bewegungsgleichungssystem (9) zu einem linearen Differentialgleichungssystem erster Ordnung zusammengefaßt.

$$\dot{r}_T|_{x_{hs}} - \sum_{n=1}^N \kappa_n^s q_n - \sum_{n=1}^N \kappa_n^d \dot{q}_n - \sum_{n=1}^N \kappa_n^m \ddot{q}_n + (\kappa_2^* - j\Omega) r_T|_{x_{hs}} = 0 \quad (10)$$

Beide Differentialgleichungen (8) und (9) haben als Freiheitsgrade die  $N$  modalen Freiheitsgrade  $q_1 \dots q_n \dots q_N$  und die thermische Auslenkung am Reibort  $r_T|_{x_{hs}}$ . Mit den Vektoren  $(\kappa^s)^T = \{\dots \kappa_n^s \dots\}$ ,  $(\kappa^d)^T = \{\dots \kappa_n^d \dots\}$  und  $(\kappa^m)^T = \{\dots \kappa_n^m \dots\}$  kann das lineare Differentialgleichungssystem erster Ordnung nun wie folgt formuliert werden:

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{c|c|c} \mathbf{M} & \mathbf{O} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{O} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \hline (-\kappa^m)^T & \mathbf{0}^T & 1 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{q} \\ r_T|_{x_{hs}} \end{array} \right\} \\ & \quad \mathbf{B} \quad \dot{\mathbf{v}} \\ & + \left[ \begin{array}{c|c|c} \mathbf{D} & \mathbf{S} & \mathbf{t} \\ \hline -\mathbf{I} & \mathbf{O} & \mathbf{0} \\ \hline (-\kappa^d)^T & (-\kappa^s)^T & (\kappa_2^* - j\Omega) \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ \tilde{\mathbf{q}} \\ \tilde{r}_T|_{x_{hs}} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{b} + \mathbf{u} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{array} \right\} \\ & \quad \mathbf{A} \quad \mathbf{v} \quad \mathbf{g} \end{aligned} \quad (11)$$

Die Systemmatrizen von  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  haben die Dimension  $[(2N+1) \times (2N+1)]$  (für komplexe Koordinaten), wobei  $N$  die Zahl der mechanisch-modalen Freiheitsgrade ist, zu der ein thermo-elastischer Freiheitsgrad tritt.

#### 4 Die thermische Krümmungsfigur

Der Approximation der thermischen Krümmung liegt eine ähnliche Überlegung zugrunde wie bei Schmied (1987). Es wird zunächst ein reibungsbedingter Wärmeeintrag in den Rotor am Kontaktpunkt angenommen. Weiterhin wird angenommen, daß der Rotor sich über die Dauer wegen der Wärmeverluste an der Oberfläche nicht durchheizt. Das bedeutet, daß der Rotor eine ständige Temperaturdifferenz zwischen dem Kontaktpunkt als heißem Punkt und seinem diametral gegenüber liegenden Punkt aufweist. Der Wärmefluß in axialer Richtung wird dabei auf einen sehr schmalen Bereich eingeschränkt und findet sich nicht in der thermischen Gleichung wieder. Diese Annahme wurde durch Experimente überprüft und stellte sich als zulässig heraus. Über diesen schmalen axialen Bereich weist der Rotor eine starke Verkrümmung auf.

In Bild 4 sind die wärmebedingten Verformungsfiguren von zwei verschiedenen Kontinuumsrotoren dargestellt. Der linke Rotor ist an jedem Ende gelagert. Die Verformung ist linear bis auf den schmalen Bereich am Kontaktpunkt. Der rechte Rotor ist mehrfach gelagert, so daß der Rotor nicht nur im Bereich des Kontaktpunkts eine Verkrümmung aufweist. Die hier gezeigten Verformungsfiguren werden vorab mit Hilfe eines statischen FEM-Programms berechnet bei einer gegebenen Einheitsverschiebung am Kontaktpunkt. Diese Einheitsverformungsfigur ist nur noch von der Größe des eigentlichen lokalen Verschiebungszustandes am Kontaktpunkt  $r_T|_{x_{hs}}$  abhängig. Dieser lokale Verschiebungszustand wird als Freiheitsgrad in die thermische Gleichung eingeführt. Mit der Einheitsverformungsfigur  $f(x)$ , die abhängig von der Lagerungsart und den Elastizitäten des Rotors ist, kann man die relevanten Funktionsausdrücke des Prinzips der virtuellen Verrückungen in den rotordynamischen Gleichungen ersetzen .

$$r_T(x) = r_T|_{x_{hs}} f(x)$$

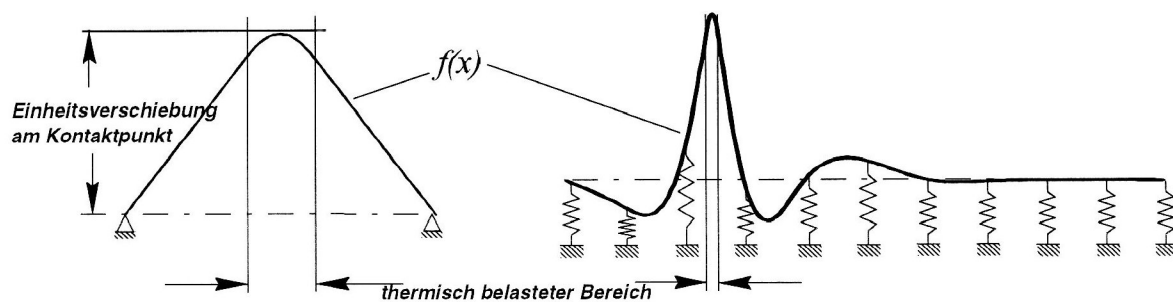


Bild 4. Wärmebedingte Verformungsfigur bei einem zweifach gelagerten und bei einem mehrfach gelagerten Kontinuumsrotor.

#### 5 Stabilitätsverhalten und Schwingungsantworten

In Bild 5 ist das Modell eines einfachen uniformen Kontinuumsrotors dargestellt. Die Rotorwelle ist beidseitig gelenkig gelagert und hat einen konstanten Durchmesser. Dieses Rotormodell wird einer Stabilitätsuntersuchung bezüglich seines Anstreifverhaltens bei verschiedenen Reiborten unterzogen. Zunächst wird, wie in Bild 5.a zu sehen ist, der Anstreifort in der Mitte der Rotorlänge gewählt. Der Anstreifort ist mit einem Pfeil gekennzeichnet. Für die modale Reduktion des Gleichungssystems wurden drei Eigenformen des Rotorsystems ohne thermische Effekte verwendet, die aus einer vorgehenden FE-Berechnung ermittelt wurden. Der untersuchte Drehzahlbereich beschränkte sich auf den Bereich der (auf die dritte Systemeigenfrequenz  $\omega_3$ ) bezogenen Drehzahl  $\eta = \Omega/\omega_3$  von  $\eta = 0$  bis  $\eta = 1,2$ .

In Bild 5a sind die Instabilitätsbereiche in Abhängigkeit vom Verhältnis der beiden thermischen Koeffizienten  $\kappa_1^*/\kappa_2^*$  über der bezogenen Drehzahl dargestellt. Nach der Stabilitätsanalyse bilden sich zwei separate instabile Bereiche aus. Es zeigt sich, daß sich die Instabilitätsbereiche in ihrer Art und Anzahl an den kritischen Drehzahlen orientieren. Die instabilen Bereiche bilden sich knapp unterhalb der kritischen Drehzahlen aus, während im überkritischen Bereich jeder Eigenfrequenz stabile Drehzahlgebiete liegen. Es fällt allerdings auf, daß innerhalb des betrachteten Drehzahlbereichs statt der zu erwartenden drei Instabilitätsbereiche sich nur zwei ausbilden. Es fehlt der zur zweiten Eigenfrequenz gehörige instabile Drehzahlbereich.

Betrachtet man die zugehörigen Eigenformen des Rotors (sinus-förmig), so erkennt man, daß der Anstreifort in der Mitte des Rotors genau im Knoten der zweiten Eigenform liegt. Im Bereich um die zweite Eigenfrequenz wird die Rotorantwort hauptsächlich mit der zweiten Eigenform schwingen und somit hat der Kontakt zwischen Rotor und Stator an der Stelle des Schwingungsknotens keinen Einfluß auf die Schwingungsantwort des Systems. Ein instabiler Bereich in der Stabilitätskarte knapp unterhalb der zweiten Eigenfrequenz kann sich damit nicht ausbilden.

Der gleiche, beidseitig gelagerte Kontinuumsrotor streift im nächsten Rechenbeispiel bei 1/4 der Rotorlänge am Stator an. Der Anstreifort ist wieder mit einem Pfeil gekennzeichnet. Es wird in gleicher Weise eine Stabilitätsuntersuchung des Rotorverhaltens unter diesem Anstreifvorgang vorgenommen und die Ergebnisse sind wieder in Form einer Stabilitätskarte in Bild 5b dargestellt. Im Gegensatz zur ersten Stabilitätskarte (Bild 5a) treten nun eindeutig drei Instabilitätsbereiche innerhalb des betrachteten Drehzahlbereichs von  $\eta = 0$  bis  $\eta = 1,2$  auf. Dies erscheint auch einleuchtend, wenn man die Eigenformen und ihre Knoten mit dem Anstreifort vergleicht. Beim Anstreifort von 1/4 der Rotorlänge hat keine der in der modalen Reduktion verwendeten Eigenformen einen Knoten und somit wirkt der Anstreifort auf alle an der Rotorantwort beteiligten Eigenformen.

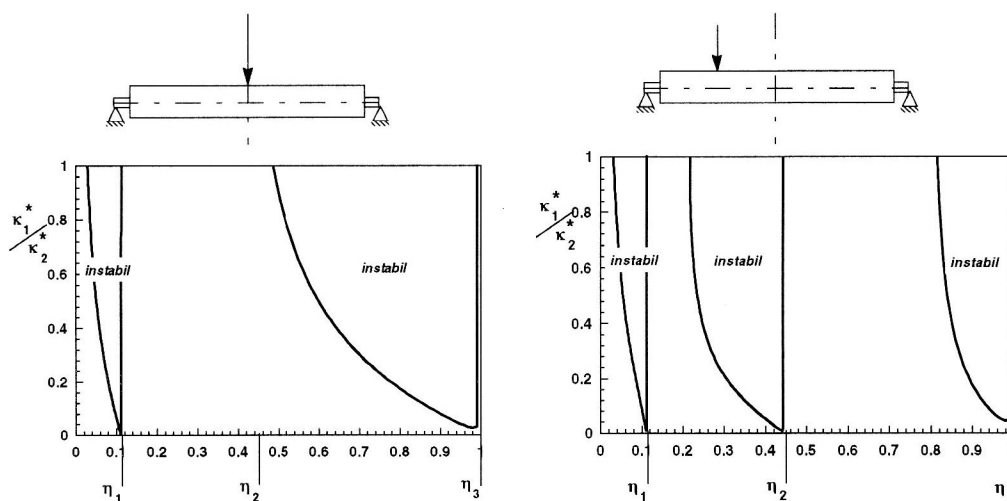


Bild 5. Verhältnis der thermischen Koeffizienten (Wärmeeingang/-abfuhr) über der bezogenen Drehzahl .  
 Stabilitätskarte eines einfachen kontinuierlichen Rotors im Fall  
 a) Reibkontakt in der Rotormitte                      b) Reibkontakt auf 1/4 der Rotorlänge

In Bild 6 ist für das erste Berechnungsbeispiel des beidseitig gelagerten Rotors (Anstreifort in der Mitte der Rotorlänge) die Spiralschwingung dargestellt. Die Lösungen aus dem Gleichungssystem erhält man in inertialen Koordinaten. Für die Darstellung der Spiralschwingungen wurden die Lösungen in mitrotierende Koordinaten umgerechnet.

Es wurden drei diskrete Punkte auf der Rotorlänge ausgewählt, in der Mitte und jeweils links und rechts davon auf 1/4 der Rotorlänge, an denen die Schwingungsantworten betrachtet wurden. Die Drehzahl wurde knapp unterhalb der ersten kritischen gewählt und das Verhältnis der thermischen Koeffizienten lag bei 0,4. Die Spiralschwingungen sind bei dieser Parameterwahl, wie in Bild 5a ersichtlich ist, instabil, die Amplituden der Rotorantwort klingen mit der Zeit ab. Da die Erregerdrehzahl dicht bei der ersten kritischen liegt, dominiert in der Schwingungsform des Rotors die erste Eigenform. Diese ist (1/2-sinus-förmig) zur Rotormitte symmetrisch und damit sind die Schwingungsantworten an den Berechnungspunkten  $x = 0,25 L$  und  $x = 0,75$  gleich.



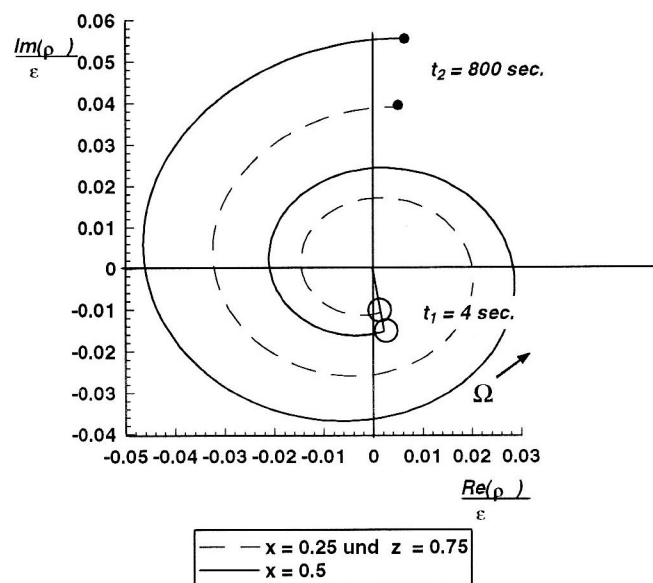


Bild 6. Instabile Spiralschwingung des beidseitig gelagerten Kontinuumrotors, berechnet an drei axialen Punkten des Rotors. Der Anstreifort befand sich in der Mitte der Rotorlänge,  
 $\kappa_1^*/\kappa_2^* = 0,4 [m/W]$  ,  $\kappa_2^* = 10^{-3} [1/s]$

Auch bei großen Turbosätzen über 30 m Länge treten Anstreifprobleme auf. Die potentiellen Anstreiforte liegen bei den Dichtungen der Gleitlager und bei Labyrinthdichtungen zwischen den einzelnen Turbinenstufen. Das Problem hierbei ist die große Länge der Turbosätze. In einem 40 m langen Turbinenstrang ist das Auffinden des Reibortes durch Messungen nicht einfach. Die Schwingungsantworten geben zwar Auskunft über ein vorhandenes Anstreifproblem, aber bei der Suche nach dem Ort und damit der Ursache für das Anstreifen helfen die Messungen nicht unbedingt weiter. In solchen Fällen muß der gesamte Rotorstrang entkleidet werden und die mühselige Suche an den unzähligen potentiellen Reiborten beginnt.

Schmied (1987) hat in seiner Arbeit mit Hilfe der Stabilitätskarten versucht, den Anstreifort in einem Turbosatz zu identifizieren. Da diese Form der Identifikation gelang, gibt es eine Berechtigung, gerade für große Turbosätze vorab eine Analyse des instabilen Anstreifverhaltens der Maschine durchzuführen. Mit Hilfe von Schwingungsmessungen und den berechneten Stabilitätskarten wird es einfacher, die große Anzahl an potentiellen Reiborten einzugrenzen. Letzteres spart Zeit und Arbeit, ganz zu schweigen von den enormen Kosten, die entstehen, wenn eine Kraftwerksturbine allein für die Suche nach einem Anstreifort abgestellt werden muß.

In Bild 7 ist das FE-Modell eines Dampfturbosatzes dargestellt. Die Kraftwerksturbine ist 35 m lang und an sieben Stellen gleitgelagert. Zur modalen Reduktion des Systems wurden vier Eigenformen verwendet. Für einen beliebig gewählten Anstreifort ist die Stabilitätskarte, dargestellt in Bild 7, berechnet worden. Dort ist die Stabilitätsgrenze als Verhältnis der beiden thermischen Koeffizienten  $\kappa_1^*/\kappa_2^*$  über der auf die vierte Kritische bezogenen Drehzahl  $\eta = \Omega/\omega_4$  aufgetragen.

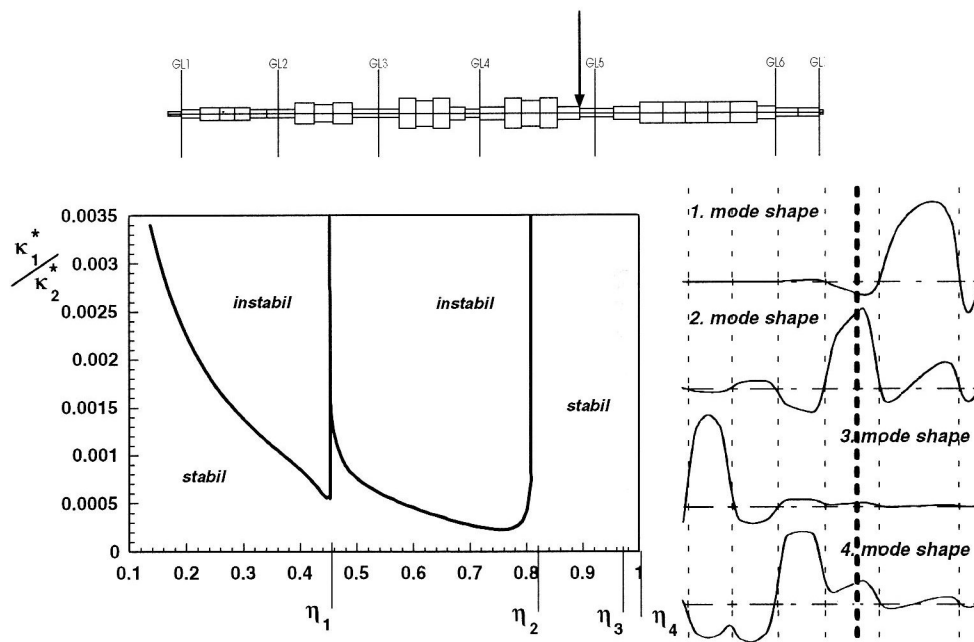


Bild 7. FEM-Modell und Stabilitätskarte des Turbinenstrangs mit Angabe des angenommenen Anstreifortes. Zugehörige Eigenformen, ..... Lagerebenen, ..... Anstreifebene

Es bilden sich zwei große instabile Bereiche unterhalb der ersten und der zweiten kritischen Drehzahl aus. Die zur dritten und vierten Kritischen gehörenden Instabilitätsgebiete sind nicht vorhanden. Zur Erklärung dieses Stabilitätsverhaltens dienen wieder die zugehörigen Eigenformen. In den Eigenformen (Bild 7) sind die Lagerebenen und der Ort des angenommenen Anstreifvorgangs eingetragen.

Für die stark ausgeprägten instabilen Bereiche sprechen die verhältnismäßig großen Amplituden der beiden ersten Eigenformen am Anstreifort. Vor allem die zweite Eigenform hat am Anstreifort eine sehr große Auslenkung, welches eine Erklärung für den ihr zugehörigen sehr breiten instabilen Drehzahlbereich wäre. Dieser breite zweite Instabilitätsbereich läßt nur noch einen extrem schmalen stabilen Bereich knapp oberhalb der ersten Kritischen zu.

Betrachtet man die Amplitude der dritten Eigenform am Anstreifort in Bild 7, so erkennt man, daß diese vernachlässigbar klein ist. Damit kann sich, vergleichbar mit den vorhergehenden Anwendungsbeispielen, keine instabile Schwingung einstellen. Am Anstreifort weist die dritte Eigenform zwar keinen Schwingungsknoten auf, aber die geringe Amplitude bewirkt den gleichen Effekt, nämlich, daß sich der Rotor im Drehzahlbereich um die dritte Kritische unbeeindruckt vom Anstreifprozeß zeigt.

Eine Erklärung für das Fehlen des vierten instabilen Drehzahlbereichs in der Stabilitätskarte von Bild 7 ist dagegen schwieriger. Die zugehörige vierte Eigenform hat eine zwar kleine, aber deutlich von null verschiedene Amplitude am Anstreifort. Somit müßte sich auch ein Instabilitätsbereich knapp unterhalb der vierten Kritischen ausbilden. Die vierte Kritische liegt im Drehzahlverhältnis sehr dicht an der dritten. Es liegt die Vermutung nahe, daß der stabile Bereich um die dritte Kritische so dominierend wirkt, daß sich die instabilen Bereiche der vierten nicht ausbilden können. Gerade oberhalb einer Kritischen herrschen, wie in den vorangegangenen Beispielen schon zu sehen war, immer stabile Drehzahlbereiche. Die Instabilitäten der nächstfolgenden Kritischen müssen, wie das Beispiel der zweiten Kritischen zeigte, sehr stark sein, um sich in diesem Drehzahlbereich behaupten zu können. Im Fall des vierten Instabilitätsgebiets reichte die Stärke, meßbar an den Amplituden der Eigenform am Reibort, nicht aus, um sich in dem schmalen Drehzahlbereich zwischen dritter und vierter kritischer Drehzahl auszubilden.

Die Stabilitätskarte des Dampfturbosatzes zeigt allerdings noch eine weitere Eigenart, die in den anderen Anwendungsbeispielen nicht auftrat beziehungsweise nicht zu erkennen war.

Die Stabilitätsgrenze unterhalb der zweiten Kritischen liegt etwas niedriger als die Stabilitätsgrenze unterhalb der ersten Kritischen. Das Absinken des Instabilitätsbereichs zu niedrigeren  $\kappa_1^*/\kappa_2^*$ -Verhältnissen ist ein Effekt der größeren Kopplung zwischen den rotodynamischen Bewegungsgleichungen und der thermo-elasti-

schen Gleichung. Diese Kopplung findet ihren Ursprung wieder in den Amplituden der zugehörigen Eigenformen. Die größeren Amplituden der zweiten Eigenform am Reibort nehmen auf die Kopplungsvektoren  $t$ ,  $\kappa^m$ ,  $\kappa^d$  und  $\kappa^s$  im gekoppelten Differentialgleichungssystem (11) großen Einfluß. Je stärker die Kopplung, desto mehr verlagern sich die Stabilitätsgrenzen in den Stabilitätskarten zu niedrigeren  $\kappa_1^*/\kappa_2^*$ -Verhältnissen. Physikalisch ist das durch den bei stärkerer Kopplung größer werdenden Wärmeeintrag erklärbar. Das System wird dann eher instabil, als bei geringerem Wärmeeintrag.

## 6 Zusammenfassung und Ausblick

Diese Arbeit zeigte eine mögliche Methode, mehrfach gelagerte Rotoren bei Rotor-Stator-Kontakt unter Berücksichtigung von thermischen Koeffizienten zu untersuchen. Basierend auf den thermo-elastischen Gleichungen für den einfachen Laval-Rotor von Kellenberger wurden die thermo-elastischen Bewegungsgleichungen für den allgemeinen Kontinuumrotor hergeleitet und gelöst. Es wurde gezeigt, daß die instabilen Drehzahlbereiche immer unmittelbar unterhalb der kritischen Drehzahlen liegen. Desweiteren ist die Ausbildung von Instabilitäten von den Eigenformen des Rotors abhängig. So kann es unter Umständen zu einem großen stabilen Drehzahlbereich trotz Anstreichens des Rotors kommen. Die Rotorantworten an verschiedenen Orten über der Länge können mit dem vorgestellten Modell berechnet werden. Die Abhängigkeit des Rotorverhaltens vom Wärmeeintrag durch Reibung werden durch zwei thermische Koeffizienten beschrieben, deren Größe von den Materialdaten und anderen zeit- wie temperaturabhängigen Parametern abhängt. In Zukunft wird eine genaue experimentelle Verifizierung dieser thermischen Koeffizienten angestrebt, um Schadensfälle mit diesem Modell nachzurechnen und Konstruktionsempfehlungen für Turbinen geben zu können.

## Literatur

1. Bently, D.E.: Basic Rotor-to-stator Thermal Rubs which Exhibit Rotative Speed (1X) symptom only, Orbit, 17 (3), (Sept. 1996).
2. Drechsler, J.: Vibration Measurement on a Gas- and Steamturbine Power Plant at Eschweiler Bergwerksverein in Alsdorf/Germany, (1995).
3. Kellenberger, W.: Spiral Vibrations due to the Seal Rings in Turbogenerators Thermally Induced Interaction between Rotor and Stator, J. Mech. Des., Vol 102, (1980), 177 -184.
4. Kroon, R.P., Williams, W.A.: Spiral Vibrations of Rotating Machinery, 5th Intl. Conf. of Applied Mechanics, Wiley NY, (1937), 712.
5. Muszynska, A.: Rotor-to-stationary Element Rub-related Vibration Phenomena in Rotating Machinery-Literature Survey, Shock and Vibration Digest, (March 1989), 3-11.
6. Newkirk, B. L.: Shaft Rubbing, Relative Freedom of Rotor Shafts from Sensitiveness to Rubbing Contact when Running above their Critical Speeds, Mech. Engrg., 48 (8), (Aug 1926), 830-832.
7. Schmied, J.: Spiral Vibrations of Rotors, Rotating Machinery Dyn., DE-Vol 2, ASME H00400B, Proc. 11th Biennial ASME Des. Engrg. Div. Conf., Vib. Noise, Boston MA, (1987), 449-456.

## Symbole

$E(x)$	E-Modul	$d$	Lagerdämpfung	$F_{kN}$	Normalkontaktkraft
$\rho(x)$	Dichte	$s$	Lagersteifigkeit	$\rho, r$	Rotorauslenkung
$I(x)$	Trägheitsmoment	$m$	Masse	$\rho_T, r_T$	Thermische Auslenkung
$A(x)$	Querschnittsfläche	$\delta$	virtuelle Größe	$\varepsilon$	Massenexzentrizität
$\kappa_1^*, \kappa_2^*$	Thermische Koeffizienten	$\Omega$	Drehzahl	$\omega$	Eigenkreisfrequenz
$\mu$	Reibkoeffizient	$R$	Rotorradius		

---

*Anschrift:* Dr.-Ing. Robert Liebich, Technische Universität Berlin, Institut für Luft- und Raumfahrt, Sekretariat F5, Marchstr. 12, D-10587 Berlin, e-mail: robert@rotor.fb12.tu-berlin.de