

Riffelbildung auf Schienen mit orts- und zeitabhängigen Verschleißkoeffizienten

M. Meywerk

Es wird die Riffelbildung auf Eisenbahnschienen untersucht. Betrachtet wird dazu ein elastischer Eisenbahnradatz, der über nachgiebige Schienen geführt wird. Die Kontaktkräfte und Schlüpfen zwischen den Rädern und Schienen ziehen Verschleiß der Laufflächen nach sich. Voraussetzung für die Verschleißberechnung ist die in der Literatur oft eingesetzte Aufteilung in ein Kurz- und ein Langzeitsystem. Das Kurzzeitsystem erfaßt die Schwingungsantwort von Radatz und Schienen beim Lauf auf rauen Schienen. Aus dieser Antwort werden Reibarbeit und Vertikalkraft bestimmt, welche über die Gleichungen des Langzeitmodells den Materialabtrag von den Schienenlaufflächen bzw. die Verfestigung laufflächennaher Schichten bestimmen. Der Materialabtrag ist der Reibleistung proportional. Die Verfestigung wird durch ein einfaches phänomenologisches Modell beschrieben, in das die Vertikalkraft und der momentane Verschleißkoeffizient eingehen.

1 Einleitung

Die Riffelbildung auf Eisenbahnschienen ist eine seit über hundert Jahren bekannte Verschleißerscheinung im Eisenbahnwesen. Riffel sind eine unregelmäßige Folge heller Erhebungen und dunkler Vertiefungen auf den Schienenlaufflächen. Die Wellenlängen liegen zwischen 3 cm und 8 cm. Da Riffel zu hohen Belastungen des Fahrweges und der Fahrzeuge führen, müssen sie abgeschliffen werden. Bisherige Versuche, die Riffelbildung rechnerisch vorherzusagen, gingen meist von einer Resonanz des Gleises als Ursache aus, die der sogenannten Pinned-Pinned-Mode zugeordnet ist. Bei dieser Eigenschwingung besitzt die Eigenform der Schiene sinusförmige Gestalt. Die Schwellen befinden sich bei den Nullstellen dieser sinusförmigen Schwingung (vgl. Hempelmann, 1994). In dieser Arbeit stellen wir ein Modell vor, das die Riffelbildung ohne die diskrete Bettung erklärt. Aus kleinen Anfangsrauigkeiten entwickeln sich im Laufe der Zeit die Riffelmuster.

2 Modell

Wir gehen davon aus, daß wir den Schienenverschleiß berechnen können, indem wir das Gesamtmodell in ein Kurz- und ein Langzeitmodell aufteilen (Engl u.a. (1983) haben dieses Vorgehen zur Berechnung von Verschleißerscheinungen vorgeschlagen; zahlreiche andere Autoren, so z.B. Hempelmann (1994) oder Valdivia (1988), haben dieses Vorgehen aufgegriffen, um die Riffelbildung auf Schienen zu berechnen; Brommundt (1996a) begründet die Aufteilung in ein Kurz- und ein Langzeitmodell durch eine Störungsrechnung mit multiplen Zeitskalen). Das Kurzzeitmodell erfaßt bei dem in dieser Arbeit vorgestellten Modell den Lauf eines Radsatzes auf rauen Schienen. Das Langzeitmodell beschreibt, wie sich die Schienenkopfradien und die Verschleißkoeffizienten der Schienenlaufflächen im Laufe der Zeit (langsam) verändern. Zunächst stellen wir die Kopplung von Kurz- und Langzeitmodell vor, anschließend skizzieren wir beide Modellteile. Bild 1 zeigt das Gesamtsystem schematisch als Regelkreis. Eingangsgrößen sind die Anfangsrauigkeiten der Schienen und die Anfangswerte für die Verschleißkoeffizienten. Wir gehen davon aus, daß sowohl die Rauigkeiten als auch die Verschleißkoeffizienten neben der Zeit auch vom Ort abhängen und bezüglich des Ortes periodisch mit dem Schwellenabstand als Periodenlänge sind. Da sich die Rauigkeiten nur sehr langsam ändern, kann der Einschwingvorgang des Kurzzeitsystems, bei vorgegebenen und als fest angenommenen Rauigkeiten, vernachlässigt werden. Aus dem eingeschwungenen Zustand des Kurzzeitsystems werden Reibleistung und Vertikalkraft für beide Rad-Schiene-Kontakte ermittelt. Die Reibleistung und der (ortsabhängige) Verschleißkoeffizient bestimmen den Materialabtrag und damit die Änderungen der Rauigkeiten (oberer Zweig in Bild 1). Die veränderten Rauigkeiten gehen wiederum als Fremderregung in das Kurzzeitmodell ein. Dabei gehen wir davon aus, daß Steifigkeiten, Massebelegungen usw. des Kurzzeitsystems trotz veränderter Rauigkeiten gleich bleiben. Die Vertikalkräfte und die momentanen Verschleißkoeffizienten hingegen bestimmen die Verfestigungen und damit die Änderungen der Verschleißkoeffizienten (unterer Zweig in Bild 1). Die veränderten Verschleißkoeffizienten

bilden Eingangsgrößen für den Materialabtrag und für die Veränderungen der Verschleißkoeffizienten. Das Kurzzeitmodell ist linear, die Evolutionsgleichungen für die Rauigkeiten und die Verschleißkoeffizienten sind nichtlinear.

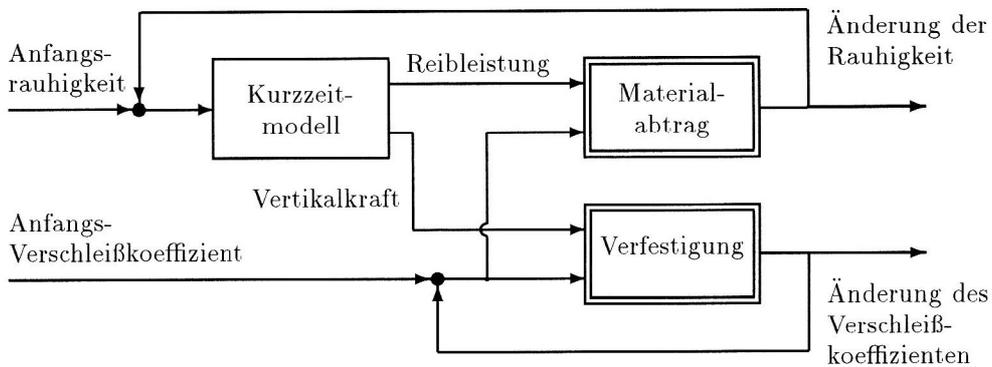


Bild 1. Kopplung von Kurzzeitmodell und Langzeitmodell (Materialabtrag und Verfestigung)

Kurzzeitmodell

In diesem Abschnitt stellen wir das Kurzzeitmodell vor. Es beschreibt das Verhalten eines verformbaren Eisenbahnwagensatzes, der über gebettete, nachgiebige Schienen geführt wird. Wir beschränken uns auf eine qualitative Beschreibung, ohne die zugrunde liegenden Gleichungen anzugeben. Bild 2 zeigt eine Ansicht des Gesamtmodells. Es besteht aus dem Wagensatz, der mit Hilfe des Fahrgestells über die beiden Schienen geführt wird. (Da sich das Fahrgestell nicht um die vertikale Richtung drehen kann, ziehen wir den Begriff Fahrgestell an Stelle der Bezeichnung Drehgestell vor.) Die Enden der Radachse sind jeweils über drei Feder-Dämpfer-Paare mit dem Fahrgestell verbunden.

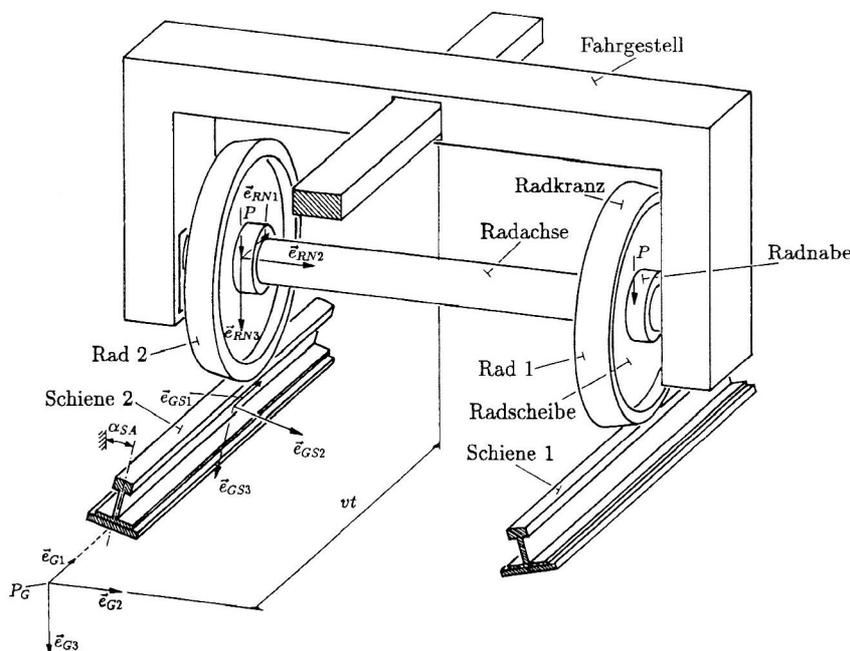


Bild 2. Gesamtansicht des Modells

Das Fahrgestell bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit v in die \vec{e}_{G1} -Richtung. Radachse, Schienen und Radkränze werden als Kontinua mit einem funktionalen Freiheitsgrad im Modell nachgebildet, die Radscheiben als Kontinua mit zwei funktionalen Freiheitsgraden. Die Radnaben sind starr. Bei der Herleitung der partiellen Differentialgleichungen (der Feldgleichungen für die Kontinua) gehen wir von der linearen Elastizitätstheorie und einem viskoelastischen Werkstoffgesetz aus: $\sigma_{ij} = E_{ij}^{kl} (1 + \eta \partial / \partial t) \epsilon_{kl}$. Hier ist E_{ij}^{kl} der Elastizitätstensor und η die sogenannte Relaxationszeit (vgl. Fung, 1965, S.22).

Die Verformungen der Radachse (vgl. Bild 3) u_{RA} und w_{RA} in die \vec{e}_{G1} - bzw. \vec{e}_{G3} -Richtung werden je durch ein partielles Differentialgleichungssystem eines Timoshenko-Balkens erfaßt. Da sich die Achse dreht (mittlere Winkelgeschwindigkeit Ω), sind die beiden Differentialgleichungssysteme gekoppelt

(Wauer, 1985). Die partielle Differentialgleichung für einen Torsionsstab und für einen Dehnstab bestimmen die Verdrehung β_{RA} um die \vec{e}_{G2} -Richtung bzw. die Verformung v_{RA} in die \vec{e}_{G2} -Richtung. Die sechs Starrkörperfreiheitsgrade pro Radnabe werden durch die Auslenkungen u_{RN} , v_{RN} , w_{RN} und die Verdrehungen α_{RN} , β_{RN} , γ_{RN} beschrieben (vgl. Bild 4). Diese Freiheitsgrade sind über geometrische Randbedingungen und Krastrandbedingungen mit den Auslenkungen der Radachse an deren Enden gekoppelt.

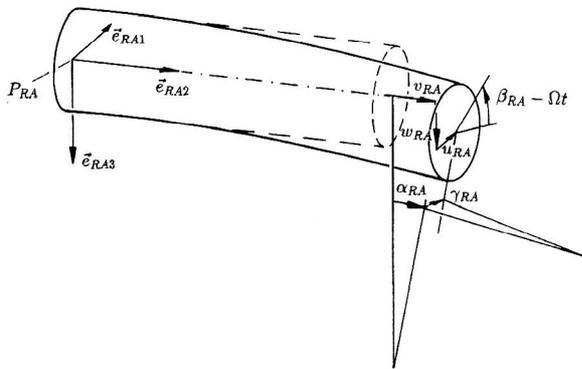


Bild 3. Die Auslenkungen der Radachse

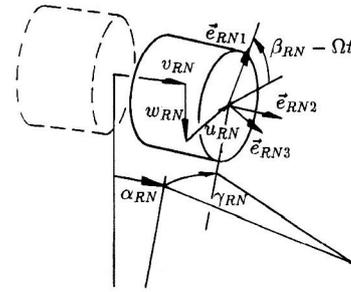


Bild 4. Die Starrkörperfreiheitsgrade der Radnabe

Die Radscheiben stellen wir uns an den Radnaben fest eingespannt vor; die rechten Winkel zwischen den Radscheiben und den Naben ändern sich also nicht. Die Verformungen der Scheiben senkrecht zu ihrer Mittelebene werden durch die Kirchhoffsche Plattentheorie erfasst, die Verformungen in dieser Ebene durch die Scheibengleichungen (vgl. Washizu, 1975, S. 159). Die Verformungen werden durch die von r , φ und t abhängenden Funktionen v_{RS} , u_{RSr} und $u_{RS t}$ beschrieben (vgl. Bild 5).

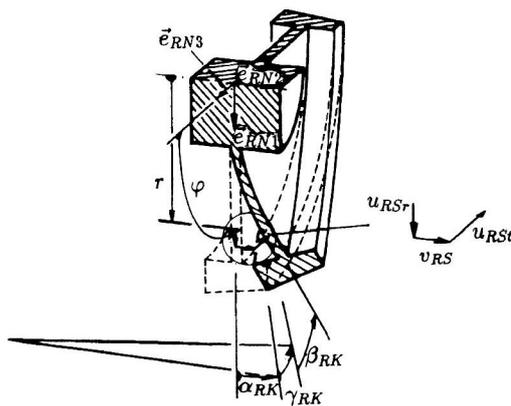


Bild 5. Die Verformungen der Radscheibe

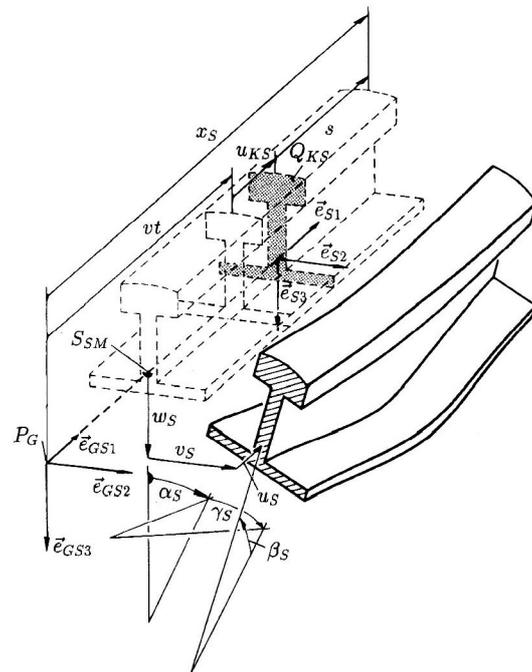


Bild 6. Die Verformungen der Schiene

Die Radkränze werden im Modell als Timoshenko-Balken, Torsionsstab und Dehnstab nachgebildet. Das prinzipielle Vorgehen zur Herleitung der Gleichungen findet sich bei Teichmann (1980). Die Auslenkungen der Radkränze und der äußeren Scheibenränder sind gekoppelt.

Die Scheiben- und Radkranzauslenkungen gehorchen partiellen Differentialgleichungssystemen, die Starrkörperbewegungen der Naben werden mittels gewöhnlicher Differentialgleichungssysteme erfasst. Diese partiellen und gewöhnlichen Differentialgleichungssysteme sind gekoppelt.

Die Verformungen der Schienen v_S und w_S in die \vec{e}_{G2} - bzw. \vec{e}_{G3} -Richtung werden durch die partiellen Differentialgleichungssysteme für Timoshenko-Balken bestimmt (vgl. Bild 6). Die zugeordneten Verdrehwinkel der Querschnitte sind γ_S bzw. β_S . Die Verdrehungen α_S um die \vec{e}_{G1} -Richtung und die Verformung u_S in die \vec{e}_{G1} -Richtung gehorchen der partiellen Differentialgleichung eines Torsionsstabes bzw. der eines Dehnstabes. Die Verformungen $u_S, v_S, w_S, \alpha_S, \beta_S, \gamma_S$ können Bild 6 entnommen werden; sie sind jeweils Funktionen der Ortskoordinate s und der Zeit t .

Die Bindungen zwischen den Rädern und den dazugehörigen Schienen werden durch die Kalkersche Kontakttheorie (Kalker, 1990), durch linearisierte Hertzsche Steifigkeiten und durch geometrische Zusammenhangsbedingungen bestimmt. Zusammen mit den Übergangsbedingungen für die Kontinua an den Kontaktpunkten nennen wir diese Gleichungen Kontaktgleichungen.

Im folgenden untersuchen wir, wie sich Radsatz und Schienen bei harmonischen Anregungen auf Grund von Schienenrauigkeiten verhalten. Der Lösungsanteil auf Grund der Vorlasten P ist im mit der Geschwindigkeit v mitgeführten Koordinatensystem stationär. Wir spalten diesen Anteil ab und linearisieren die Hertzchen Steifigkeiten um die stationäre Abplattung.

Der gesamte Gleichungssatz besteht dann aus den partiellen und den gewöhnlichen Differentialgleichungssystemen für die Räder und die Radachse, den partiellen Differentialgleichungssystemen für die Schienen und den Kontaktgleichungen. Der Gleichungssatz ist bei glatten Schienen linear, homogen und autonom.

Wir gehen davon aus, daß die Rauigkeiten der Schienenlaufflächen periodisch bezüglich des Ortes sind, wobei der Schwellenabstand L_{SS} die Periodenlänge ist. Aus diesen periodischen Rauigkeiten folgen harmonische Anregungen. Wegen der Linearität des Kurzzeitmodells ist es ausreichend, exemplarisch eine Anregung mit der Kreisfrequenz $\omega = n2\pi v/L_{SS}$ zu untersuchen. Stellvertretend für diese harmonische Anregung schreiben wir $\underline{z}_r = \hat{z}_r e^{j\omega t}$ (j : imaginäre Einheit) als rechte Seite des Gleichungssatzes. Wir gehen davon aus, daß das Kurzzeitmodell asymptotisch stabil im Sinne von Lyapunow ist. Der eingeschwungene Zustand $\underline{z}_e e^{j\omega t}$ für das Kurzzeitmodell existiert also, und wir skizzieren im folgenden, wie wir diesen bestimmen. Die Zeitabhängigkeit $e^{j\omega t}$ kann für alle beschreibenden Veränderlichen abgespalten und so aus dem Gleichungssatz eliminiert werden. Die partiellen Differentialgleichungssysteme, die die Verformungen der Schienen beschreiben, vereinfachen sich nach Abspalten der Zeitabhängigkeit zu gewöhnlichen Differentialgleichungssystemen. Diese werden mit Hilfe eines $e^{\kappa_S s}$ -Ansatzes gelöst. Dieser Ansatz führt auf ein gewöhnliches Eigenwertproblem in den Ortseigenwerten κ_S , die numerisch berechnet werden. In den partiellen Differentialgleichungssystemen, die die Radverformungen beschreiben, tauchen nach Abspalten der Zeit noch die radiale und die tangential unabhängige Veränderliche r bzw. φ auf. Diese Veränderlichen separieren wir. Für die r -Abhängigkeit wählen wir polynomiale Ansatzfunktionen und für die φ -Abhängigkeit einen $e^{\kappa_R \varphi}$ -Ansatz. Dieses Vorgehen führt wie bei der Schiene auf ein gewöhnliches Eigenwertproblem in κ_R , das wiederum numerisch gelöst wird. Man erhält aus dem geschilderten Vorgehen einen Satz algebraischer Gleichungen, deren Koeffizienten von ω abhängen. Invertiert man die zugeordnete Koeffizientenmatrix $\underline{M}(\omega)$, so erhält man die erzwungenen Schwingungen $\underline{z}_e e^{j\omega t} = \underline{M}^{-1}(\omega) \underline{z}_r e^{j\omega t}$ des Kurzzeitmodells. Die Inverse $\underline{M}^{-1}(\omega)$ existiert für reelle Werte von ω wegen der vorausgesetzten asymptotischen Stabilität des Kurzzeitmodells.

Langzeitmodell

Wir wenden uns zunächst den beiden Anregungen des Systems zu, die die rechte Seite \underline{z}_r bilden. Dazu betrachten wir lediglich eine Schiene; die Überlegungen für die zweite Schiene sind analog durchzuführen und werden daher hier nicht ausgeführt.

Die erste Anregung erfolgt über die Vertikalkraft F_{K3} , die sich nach der Linearisierung der Hertzchen Gleichungen für jedes Rad-Schiene-Paar schreiben läßt als:

$$F_{K3} = P + k_H \underbrace{(f_R - f_S + \tilde{R}_{SK} - R_{SK0})}_{:=\Delta f} \quad (1)$$

Hier ist k_H die Steifigkeit des Hertz-Kontaktes nach der Linearisierung. Der Ausdruck Δf spiegelt die zeitabhängige, gemeinsame Abplattung von Rad und Schiene wider. Diese setzt sich zusammen aus den Abplattungen f_R infolge der Radauslenkungen und -verformungen, der Abplattung f_S infolge der Schienenverformungen und dem Term $\tilde{R}_{SK} - R_{SK0}$. Die Größen f_R und f_S sind Funktionen der Verformungen $u_{RN}, v_{RN}, \dots, v_{RS}, \dots$ bzw. u_S, v_S, \dots des Kurzzeitmodells; sie hängen von der Zeit ab. Durch den

Ausdruck $\tilde{R}_{SK} - R_{SK0}$ wird die Abweichung des Schienenkopfradius \tilde{R}_{SK} am Kontaktpunkt vom mittleren Radius R_{SK0} des Schienenkopfes erfaßt. Der Radius \tilde{R}_{SK} weicht vom Nennradius R_{SK0} zu Beginn der Verschleißrechnung auf Grund von Anfangsrauigkeiten ab. Im Verlauf der Verschleißrechnung wird diese Abweichung infolge des Verschleißes größer.

Eine weitere Gleichung, die für die Anregung auf Grund der Schienenrauigkeiten wichtig ist, rührt von der geometrischen Forderung her, daß die Tangentialebenen von Rad und Schiene im Kontaktpunkt zusammenfallen müssen. Wir geben diese Gleichungen hier nicht an.

Wir setzen voraus, daß der Schienenkopfradius eine periodische Funktion der Schienenlängskoordinate x_S und der langsamen Zeit τ ist:

$$R_{SK} = R_{SK}(\tau, x_S) \quad R_{SK}(\tau, x_S + L_{SS}) = R_{SK}(\tau, x_S)$$

Weiter gehen wir davon aus, daß der Schienenkopfradius quer zur Laufrichtung gleichmäßig abnimmt. Die langsame Änderung mit der Zeit wird durch die τ -Abhängigkeit erfaßt. Auf Details der Abhängigkeit und die damit verbundene Störungsrechnung mit multiplen Zeitskalen gehen wir hier nicht ein; eine ausführlichere Beschreibung findet sich in Brommundt (1996b).

Den Schienenkopfradius entwickeln wir in eine Fourierreihe, die wir nach N Gliedern abbrechen:

$$R_{SK}(\tau, x_S) = R_{SK0}(\tau) + \sum_{\substack{n=-N \\ n \neq 0}}^N C_{SKn}(\tau) e^{jn2\pi x_S/L_{SS}}$$

Die Fourierkoeffizienten C_{SKn} sind Funktionen der langsamen Zeit τ und die Koeffizienten C_{SKn} sind komplex konjugiert zu $C_{SK(-n)}$. Der Kontakt zwischen Rad und Schiene befindet sich, abgesehen von Gliedern höherer Ordnung (nämlich u_{KS} , vgl. Bild 6), bei $x_S = vt$. In Gleichung (1) für die Vertikalkraft F_{K3} geht also eine Anregung mit der schnellen Zeit t über $\tilde{R}_{SK} = R_{SK}(\tau, vt)$ ein:

$$F_{K3} = P + k_H \left(f_R - f_S + \sum_{\substack{n=-N \\ n \neq 0}}^N C_{SKn}(\tau) e^{jn2\pi vt/L_{SS}} \right)$$

Die Summanden der Fourierreihe bilden äußere Anregungen des Kurzzeitmodells mit der Kreisfrequenz $\omega = n2\pi v/L_{SS}$. Wir bringen die Anregungsterme auf die rechte Seite der Systemgleichungen und lösen den Gleichungssatz wie im Abschnitt über das Kurzzeitmodell beschrieben. Für die weitere Verschleißrechnung werden lediglich die Reibleistung und die Vertikalkraft im Kontaktgebiet benötigt. Wir rechnen die von der langsamen und der schnellen Zeit abhängende Vertikalkraft (d_{F_n} ergibt sich aus \underline{z}_e)

$$F_{K3}(\tau, t) = P + \underbrace{\sum_{\substack{n=-N \\ n \neq 0}}^N C_{SKn} d_{F_n} e^{jn2\pi vt/L_{SS}}}_{:= \tilde{F}_{K3}}$$

um auf die von der langsamen Zeit und dem Ort x_S abhängige Kraft:

$$F_{K3}(\tau, x_S) = P + \sum_{\substack{n=-N \\ n \neq 0}}^N C_{SKn}(\tau) d_{F_n} e^{jn2\pi x_S/L_{SS}} \quad (2)$$

Die Reibleistung P_{reib} ergibt sich zu

$$P_{\text{reib}}(\tau, x_S) = Gab(C_{11}\nu_1^2 + C_{22}\nu_2^2 + abC_{33}\Phi_3^2) \quad (3)$$

Hier sind ν_1 der Längsschlupf (in \vec{e}_{G1} -Richtung), ν_2 der Querschlupf (in \vec{e}_{G2} -Richtung) und Φ_3 der Bohrschlupf. Diese Gleichungen lassen sich ebenfalls als Fourierreihe schreiben:

$$\begin{aligned} \nu_1(\tau, x_S) &= \sum_{\substack{n=-N \\ n \neq 0}}^N C_{SKn}(\tau) d_{\nu 1n} e^{jn2\pi x_S/L_{SS}} \\ \nu_2(\tau, x_S) &= \sum_{\substack{n=-N \\ n \neq 0}}^N C_{SKn}(\tau) d_{\nu 2n}(\tau) e^{jn2\pi x_S/L_{SS}} \\ \Phi(\tau, x_S) &= -\Omega\alpha_{RK} + \sum_{\substack{n=-N \\ n \neq 0}}^N C_{SKn}(\tau) d_{\Phi n} e^{jn2\pi x_S/L_{SS}} \end{aligned}$$

Hier sind Ω die mittlere Winkelgeschwindigkeit der Räder und α_{RK} der Konizitätswinkel von Rad 1 (für Rad 2 ergibt sich $+\Omega\alpha_{RK}$ in der Gleichung für Φ ; $d_{\nu 1}$, $d_{\nu 2}$ und $d_{\Phi n}$ erhält man aus z_e). In Bild 7 ist ein Beispiel für eine raue Schiene 1 mit $R_{SK} = R_{SK0} + C_{SKn} e^{jn2\pi x_s/L_{SS}}$ ($C_{SKn} = 10 \mu\text{m}$) dargestellt. Das Kurzzeitsystem wird also mit einer Frequenz von $f_A = nv/L_{SS}$ angeregt. Schiene 2 ist für diese Rechnung glatt. In den Diagrammen sind jeweils die in einem Schwellenfach auftretenden maximalen Reibleistungen und Vertikalkräfte für eine mittlere Radsatzgeschwindigkeit von $v = 65 \text{ m/s}$ aufgetragen. Um Resonanzphänomene im Kurzzeitmodell zu verdeutlichen, wurden auch nichtganzzahlige Werte für n gewählt, so daß die Anregungsfrequenz f_A das gesamte Spektrum durchläuft. Die in den Diagrammen zu erkennenden Resonanzspitzen treten dann nicht alle genau bei $v = 65 \text{ m/s}$ auf, sie spielen aber bei geringfügig kleineren oder größeren Geschwindigkeiten eine Rolle. Die Reibleistungen und die Vertikalkräfte sind in Diagramm a) für das Rad-Schiene-Paar 1 und in Diagramm b) für das Rad-Schiene-Paar 2 wiedergegeben.

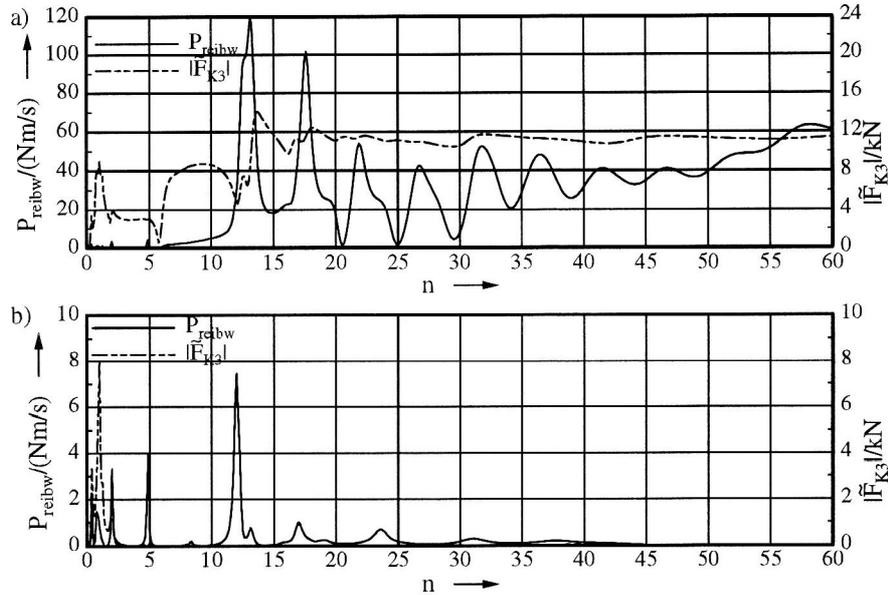


Bild 7. Die Amplituden des zeitabhängigen Anteils der Vertikalkraft und des Wirkanteils der Reibleistung

Ausgehend von der Reibarbeitshypothese (vgl. Krause und Poll, 1986) läßt sich die Evolutionsgleichung für den Schienenkopfradius R_{SK} schreiben als

$$\frac{\partial R_{SK}}{\partial \tau}(\tau, x_S) = -v_{SV}(\tau, x_S) \int_{x=x_S-a_K}^{x_S+a_K} m_K(x-x_S) P_{\text{reib}}(\tau, x_S) dx \quad (4)$$

Hier gibt v_{SV} den ortsabhängigen Verschleißkoeffizienten wieder. Wir nennen v_{SV} die Verschleißfunktion. Über die Mittelungsfunktion m_K berücksichtigen wir die endliche Ausbreitung des Kontaktgebietes in Längsrichtung (vgl. Brommundt, 1996b; a_K ist der Kontakt-Halbellipsenmesser in Längsrichtung). Wir wählen für m_K einen kubischen B-Spline (vgl. Bild 3). Eine Definition für einen B-Spline findet sich z.B. in Hämmerlin und Hoffmann (1989).

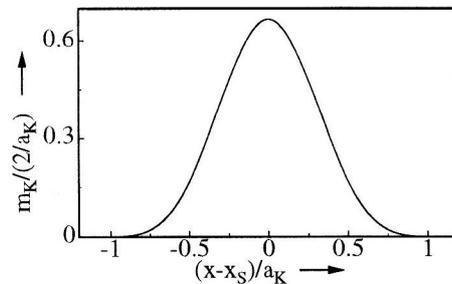


Bild 8. Die Mittelungsfunktion m_K

Die Verschleißfunktion v_{SV} ändert sich langsam mit der Zeit gemäß der folgenden Evolutionsgleichung:

$$\frac{\partial v_{SV}}{\partial \tau}(\tau, x_S) = -(v_{SV}(\tau, x_S) - v_{SV0}) \int_{x=x_S-a_K}^{x_S+a_K} m_K(x-x_S) n_{SV} F_{K3}(\tau, x_S) dx \quad (5)$$

Hinter dieser Evolutionsgleichung steht die Idee, daß der Verschleißkoeffizient auf Grund von Verfestigungen oberflächennaher Randschichten langsam kleiner wird. Da die Vertikalkraft größer ist als die Lateral- und Longitudinalkräfte, berücksichtigen wir hier lediglich F_{K3} . Die Konstante v_{SV0} stellt einen Sättigungswert für den Verschleißkoeffizienten dar. Die Bedeutung dieses Begriffs wird klar, wenn man in Gleichung (5) eine ortsunabhängige Vertikalkraft $F_{K3} \equiv P$ einsetzt, denn dann gilt:

$$v_{SV}(\tau, x_S) = v_{SV0} \left(1 + \frac{v_{SV}(0, x_S) - v_{SV0}}{v_{SV0}} e^{-n_{SV} P \tau} \right)$$

wobei $v_{SV}(0, x_S) \geq v_{SV0}$ ist. Ähnliches exponentielles Verhalten von phänomenologischen Werkstoffparametern findet sich beim Werkstoffmodell von Jiang und Sehitoglu (1996). Wie für den Schienenkopfradius setzen wir für v_{SV} eine Fourierreihe an

$$v_{SV}(\tau, x_S) = \sum_{n=-N}^N C_{SVn}(\tau) e^{jn2\pi x_S / L_{SS}} \quad (6)$$

Setzt man die Reibleistung (3), die Vertikalkraft (2) und die Verschleißfunktion (6) in die Gleichungen (4) und (5) ein und projiziert man die sich ergebenden Gleichungen auf den von den Funktionen $e^{-jN2\pi x_S / L_{SS}}, e^{-j(N-1)2\pi x_S / L_{SS}}, \dots, e^{jN2\pi x_S / L_{SS}}$ aufgespannten Raum (Skalarprodukt $\langle f, g \rangle := \int_0^{2\pi} \bar{f}(x_S)g(x_S) dx_S$), so erhält man ein gewöhnliches, nichtlineares Differentialgleichungssystem für die Fourierkoeffizienten C_{SKn}, C_{SVn} ($n = -N, \dots, N$), das numerisch als Anfangswertproblem gelöst werden kann.

3 Numerische Ergebnisse

In diesem Abschnitt geben wir einige Ergebnisse der numerischen Berechnungen für die Riffelbildung wieder. Ausgangspunkte für die Berechnungen sind jeweils zwei Anfangsrauigkeitsprofile für die beiden Schienen. In Bild 9 a) sind die Anfangsabweichungen $\Delta R_{SK} := R_{SK} - R_{SK0}$ der Schienenkopfradien $R_{SK}(0, x_S)$ vom Nennwert R_{SK0} für das zu untersuchende Schwellenfach gezeigt. Der Verschleißkoeffizient ist für $\tau = 0$ konstant: $v_{SV}(0, x_S) = 50.0 \cdot 10^{-12} 1/N$. Für den Sättigungswert setzen wir $v_{SV0} = 38.2 \cdot 10^{-12} 1/N$, für den Verfestigungsparameter $n_{SV} = 8.5 \cdot 10^{-12} 1/Ns$, den Konizitätswinkel $\alpha_{RK} = 0.05$ und die Vorlasten $P = 6 t$.

Wir betrachten ein Schwellenfach, über das täglich 9600 Achsen rollen und geben für die folgenden Beispielrechnungen jeweils die Liegezeit an, nach der sich ein Riffelmuster gebildet hat.

In Bild 9 b) ist die zeitliche Entwicklung von ΔR_{SK} für Schiene 1 und ΔR_{SK} für beide Schienen (Schiene 2 gestrichelt) nach einer Liegedauer von $T_G = 51.4 J$. ($1J \hat{=} 1 \text{ Jahr}$) dargestellt. Das oberste Profil in Diagramm b) bei $\Delta R_{SK} \approx -1.83 \mu m$ entsteht nach einer Liegedauer von $T_G = 42.2 J$. Die weiteren Profile werden nach jeweils $1.15 J$ berechnet. Man erkennt geringe Verschiebungen der Extrema nach links oder rechts im Laufe der Zeit. Im wesentlichen bleiben die Riffel aber ortsfest. Dies stimmt mit Beobachtungen überein (vgl. Frederick, 1986). Diagramm c) zeigt die Verschleißfunktionen der beiden Schienen zu den Endprofilen aus Diagramm b). Man erkennt größere Werte der Verschleißfunktion v_{SV} in den Tälern als auf den Bergen. Da wir uns vorstellen, daß sich die Verschleißfunktionen wegen plastischer Deformationen ändern, bedeutet dies, daß die Schiene auf den Riffelbergen mehr plastisch verformt wird als in den Tälern. Auch dieses entspricht Beobachtungen und Messungen (vgl. Frederick, 1986 oder Baumann u.a., 1996).

In Bild 10 ist ΔR_{SK} für beide Schienen nach einer Liegedauer von $T_G = 55.4 J$ gezeigt. Die Ausgangsprofile kann man Bild 9 a) entnehmen. Die Geschwindigkeit beträgt während der ersten 7.9 Jahre $v = 55 \text{ m/s}$, in den darauffolgenden 7.9 Jahren $v = 56 \text{ m/s}$ usw. bis $v = 61 \text{ m/s}$. In Diagramm a) ist ΔR_{SK} für beide Schienen über dem Ort dargestellt; in den Diagrammen b) und c) sind die Beträge der Fourierkoeffizienten C_{SKn} für Schiene 1 wiedergegeben. An den Darstellungen der Fourierkoeffizienten sind Maxima um $n = 10, n = 13$ und $n = 17$ zu erkennen. Da die Ordinatenanteile logarithmisch sind, treten sie nicht deutlich hervor; bei linearer Teilung wären sie besser erkennbar, besonders wenn man den Bereich $n \leq 3$ wegläßt. Diese Maxima entsprechen Wellenlängen von 60 mm, 46 mm und 35 mm. In Grassie und Kalousek (1993) wird berichtet, daß die Wellenlängen zwischen 25 mm und 80 mm liegen. Diese Beobachtung wird durch die Rechnungen wiedergegeben. Die Ausprägung der Fourierkoeffizienten

um $n = 10$ rührt vom Verfestigungsmechanismus her und ist Folge des breiten Maximums in der Vertikalkraft (vgl. Bild 7 a). Die Fourierglieder bei $n = 13$ und $n = 17$ entstehen wegen der Maxima der Reibleistung (vgl. Bild 7 a).

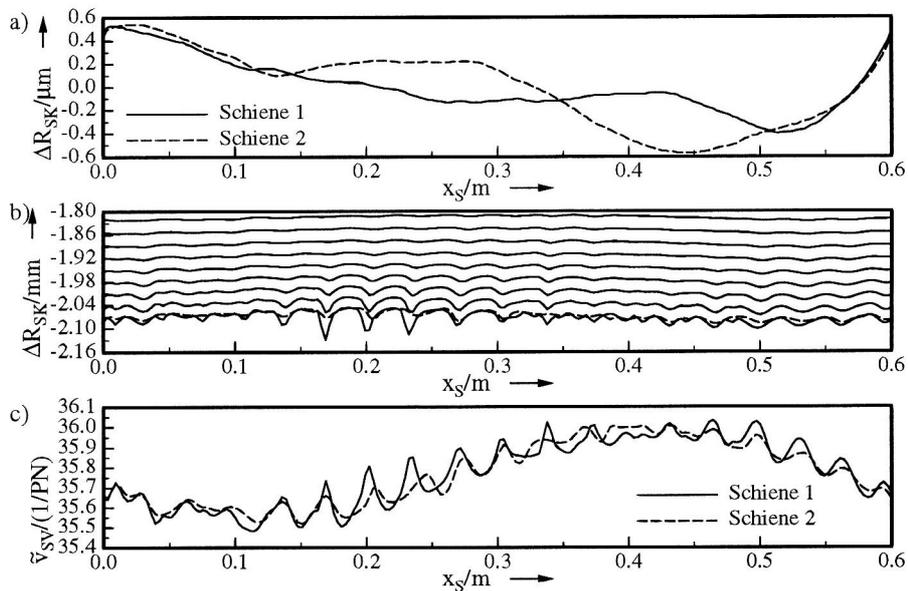


Bild 9. Verschleißentwicklung, $v = 60 \text{ m/s}$, $T_G = 51.4 \text{ J}$

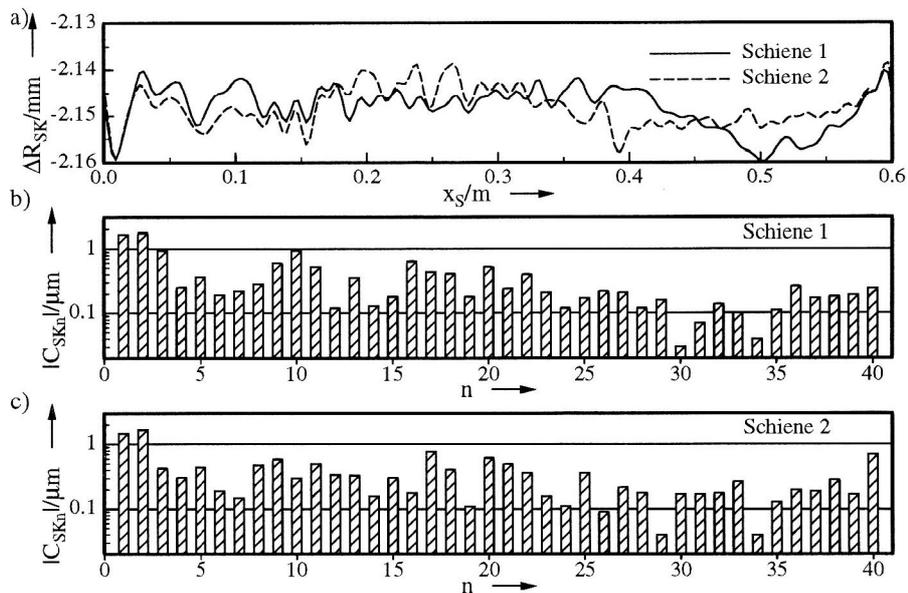


Bild 10. Verschleiß bei verschiedenen Geschwindigkeiten $v = 55 \text{ m/s}$ bis $v = 61 \text{ m/s}$ in 1 m/s -Schritten; $T_G = 55.4 \text{ J}$

Als letztes Ergebnis stellen wir ein Beispiel für den Einfluß der Größe der Schienenrauigkeiten, der Vorlasten und der Konizitätswinkel vor. Ausgangsprofile für die Rechnungen sind Bild 9 a) zu entnehmen, wobei diese Profile mit zehn multipliziert sind. Die Geschwindigkeits-Belastung ist die gleiche wie in der Rechnung zu Bild 10. In Bild 11 a) ist das Endprofil von Schiene 1 gezeigt. Ein deutlich schnelleres Riffelwachstum im Gegensatz zu Bild 10 ist erkennbar; es dauert lediglich 11.4 J bis sich die Riffel ausgebildet haben. Von dieser Beschleunigung der Riffelbildung bei größeren Anfangsrauigkeiten wird in Frederick (1986) berichtet. In Diagramm b) ist das Riffelbild für die gleichen Bedingungen wie in Diagramm a) dargestellt, lediglich die Vorlasten wurden auf $P = 6.6 \text{ t}$ erhöht. Eine deutliche Abnahme ist erkennbar.

Diese Rechnung deckt sich ebenfalls mit Beobachtungen, wonach Strecken, auf denen hauptsächlich unbelastete Züge verkehren, schneller verriffeln (vgl. Hempelmann, 1994). Diagramm c) zeigt das Ergebnis einer Riffelrechnung, bei denen die Ausgangsbedingungen wie für die Rechnung zu Diagramm a) gewählt wurden. Die Rechnung zu Diagramm c) wurde mit Konizitätswinkeln von $\alpha_{RK} = \pm 0.0416$ anstelle von $\alpha_{RK} = \pm 0.04$ durchgeführt. Eine deutliche Abnahme der Riffelbildung ist erkennbar. Die Abnahme der Riffelbildung könnte ein Grund dafür sein, daß sehr selten von Riffelbildung auf TGV- und Shinkansen-Strecken in der Literatur berichtet wird.

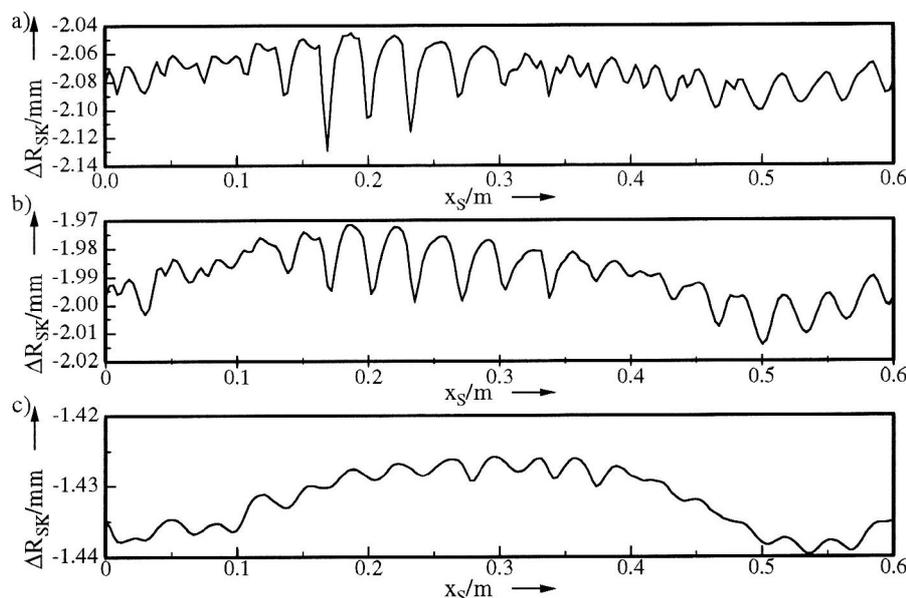


Bild 11. a) Verschleißentwicklung bei zehnmal rauheren Schienen und ortsabhängigen Verschleißfunktionen, $v = 60 \text{ m/s}$, $T_G = 11.4 \text{ J}$; b) erhöhte Vorlasten; c) erhöhte Konizitätswinkel der Räder

Bevor wir den Mechanismus beschreiben, der bei kleinen Anfangsrauigkeiten verantwortlich für die Riffelbildung in diesem Modell ist, stellen wir das letzte Rechenbeispiel, allerdings ohne Diagramm, vor. Setzt man $n_{SV} = 0$, so entsteht aus dem in Bild 9 a) gezeigten Anfangsprofil keine Verriffelung, sondern das Anfangsprofil wird langsam glatter.

Der riffelauslösende Mechanismus bei kleinen Anfangsrauigkeiten ist die ortsabhängige Verfestigung. Durch den konstanten Anteil $\pm \Omega \alpha_{RK}$ des Bohrschlupfes und die ortsveränderlichen Verschleißfunktionen kommt es zu ersten Riffeln. In diesem Modell sind das die Riffel mit einer Wellenlänge von etwa 60 mm. Bei größeren Anfangsrauigkeiten beginnt der ungleichförmige Verschleiß auch auf Grund der Maxima in der Reibleistungskurve. Dieser führt dann zu zusätzlichen Welligkeiten mit Wellenlängen von 35 mm und 46 mm. Der riffelauslösende Mechanismus ist auch bei zylindrischen Rädern wirksam, wenn ein anderer Schlupf konstant vorhanden ist, so zum Beispiel ein konstanter Längsschlupf bei angetriebenen Rädern oder ein (langsam veränderlicher) seitlicher Schlupf infolge des Sinuslaufs.

4 Zusammenfassung

Es wurde ein Modell vorgestellt, das die Riffelbildung auf Schienen erklärt. Qualitativ stimmen die Ergebnisse gut mit Beobachtungen überein. Der auslösende Mechanismus für die Riffelbildung ist die ortsabhängige Verfestigung, die zu ortsabhängigen Verschleißkoeffizienten führt. Der konstante Bohrschlupf führt in Verbindung mit ortsabhängigen Verschleißkoeffizienten zu ersten Riffeln, die sich im Laufe der Zeit verstärken.

Danksagung

Der Autor dankt der Deutschen Forschungsgemeinschaft für die gewährte Unterstützung.

Literatur

1. Baumann, G.; Fecht, H. J.; Liebelt, S.: Formation of White-Etching Layers on Rail Treads, *Wear* 191, (1996), 133–140.
2. Brommundt, E.: A Simple Mechanism for the Polygonalization of Railway Wheels by Wear, angenommen zur Veröffentlichung in *Mechanics Research Communications*, (1996a).
3. Brommundt, E.: Wechselwirkung zwischen Polygonalisation und Antrieb bei Eisenbahnrädern, *Technische Mechanik* 16(4), (1996b) 273–284.
4. Engl, A.; Meinke, P.; Stöckl, H.: Corrugations on Bearers as Effects of the Short Time Dynamics Investigated in the Long Time Wear Process, In K. Knothe und R. Gasch (Hrsg.), *Rail Corrugations. Papers presented at the Symposium on Rail Corrugation Problems, held at Berlin in June 1983*, Bd. 56 aus: ILR-Bericht, S. 41–70. Institut für Luft- und Raumfahrt, TU Berlin, (1983).
5. Frederick, C. O.: A Rail Corrugation Theory, In G. M. L. Gladwell, H. Ghonem und J. Kalousek (Hrsg.), *Contact Mechanics and Wear of Rail/Wheel System II, Proceedings of the International Symposium*, S. 181–212, University of Rhode Island: University of Waterloo Press, (1986).
6. Fung, Y. C.: *Foundations of Solid Mechanics*, Reihe: Prentice-Hall International Series in Dynamics, Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, (1965).
7. Grassie, S. L.; Kalousek, J.: Rail Corrugation: Characteristics, Causes and Treatments, *Proc. Instn. Mech. Engrs.* 207, (1993), 57–68.
8. Hämmerlin, G.; Hoffmann, K.-H.: *Numerische Mathematik*, Bd. 7 aus: Grundwissen Mathematik, Berlin u.a.: Springer-Verlag, (1989).
9. Hempelmann, K.: Short Pitch Corrugation on Railway Rails – A Linear Model for Prediction, Bd. 231 aus: *Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 12*, Düsseldorf: VDI-Verlag, (1994).
10. Jiang, Y.; Sehitoglu, H.: Modeling of Cyclic Ratchetting Plasticity, Part I: Development of Constitutive Relations, *Trans. ASME* 63, (1996), 720–725.
11. Kalker, J. J.: *Three-dimensional Elastic Bodies in Rolling Contact*, Bd. 2 aus: *Solid Mechanics and its Application*, Dordrecht: Kluwer Academic Press, (1990).
12. Krause, H.; Poll, G.: Wear of Wheel-Rail Surfaces, *Wear* 113, (1986), 103–122.
13. Teichmann, D.: Schwingungen von Kreisringbalken, *Z. Angew. Math. Mech.* 60, (1980), T81–T84.
14. Valdivia, A.: Die Wechselwirkung zwischen hochfrequenter Rad-Schiene-Dynamik und gleichförmigem Schienenverschleiß – ein lineares Modell, Bd. 93 aus: *Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 12*, Düsseldorf: VDI-Verlag, (1988).
15. Washizu, K.: *Variational Methods in Elasticity and Plasticity* (2. Aufl.), Bd. 9 aus: *International Series of Monographs in Aeronautics and Astronautics*, Oxford u.a.: Pergamon Press, (1975).
16. Wauer, J.: Stabilität viskoelastischer Wellen unter axialem Druck, *Z. Angew. Math. Mech.* 65(8), (1985), 379–380.

Symbole

v	Geschwindigkeit des Fahrgestells in \vec{e}_{G1} -Richtung
$\vec{e}_{G1}, \vec{e}_{G1}, \vec{e}_{G1}$	Vektoren des ortsfesten Koordinatensystems
u_{RA}	Verformung der Radachse in die \vec{e}_{G1} -Richtung
v_{RA}	Verformung der Radachse in die \vec{e}_{G2} -Richtung
w_{RA}	Verformung der Radachse in die \vec{e}_{G3} -Richtung
β_{RA}	Verdrehung der Radachse um die \vec{e}_{G2} -Richtung

u_{RN}	Auslenkung der Radnabe in die \vec{e}_{G1} -Richtung
v_{RN}	Auslenkung der Radnabe in die \vec{e}_{G2} -Richtung
w_{RN}	Auslenkung der Radnabe in die \vec{e}_{G3} -Richtung
u_{RSr}	Verformung der Radscheibe in radialer Richtung
u_{RSt}	Verformung der Radscheibe in tangentialer Richtung
v_{RS}	Verformung der Radscheibe in die \vec{e}_{RN2} -Richtung
r, φ	unabhängige Veränderliche für das Rad
t	schnelle Zeit
u_S	Verformung der Schiene in die \vec{e}_{G1} -Richtung
v_S	Verformung der Schiene in die \vec{e}_{G2} -Richtung
w_S	Verformung der Schiene in die \vec{e}_{G3} -Richtung
α_S	Verdrehung der Schiene um die \vec{e}_{G1} -Richtung
β_S	Verdrehung der Schiene um die \vec{e}_{G2} -Richtung
γ_S	Verdrehung der Schiene um die \vec{e}_{G3} -Richtung
s	Schienenlängskoordinate im bewegten Bezugssystem
P	statische Vorlast
L_{SS}	Schwellenabstand
ω	Anregungskreisfrequenz
z_r	rechte Seite
j	imaginäre Einheit
z_e	eingeschwungener Zustand des Kurzzeitmodells
\underline{M}	Systemmatrix des Kurzzeitmodells
\underline{F}_{K3}	Vertikalkraft im Kontaktbereich zwischen Rad und Schiene
k_H	Steifigkeit des Hertz-Kontaktes
Δf	Abplattung von Rad und Schiene
f_S	Abplattungsanteil auf Grund von Schienenverformungen
f_R	Abplattungsanteil auf Grund von Radverformungen
R_{SK0}	mittlerer Schienenradius
R_{SK}	zeit- und ortsabhängiger Schienenradius
τ	langsame Zeit
x_S	Schienenlängskoordinate
C_{SKn}	Fourierkoeffizient für die Rauigkeit
d_{Fn}	Antwortkoeffizient des Kurzzeitmodells für die Vertikalkraft
P_{reib}	Reibleistung
ν_1	Längsschlupf
ν_2	Querschlupf
Φ	Bohrschlupf
$d_{\nu 1n}$	Antwortkoeffizient des Kurzzeitmodells für den Längsschlupf
$d_{\nu 2n}$	Antwortkoeffizient des Kurzzeitmodells für den Querschlupf
$d_{\Phi n}$	Antwortkoeffizient des Kurzzeitmodells für den Bohrschlupf
α_{RK}	Konizitätswinkel der Räder
f_A	Anregungsfrequenz
m_K	Mittelungsfunktion für den Kontakt
v_{SV}	Verschleißfunktion
v_{SV0}	Sättigungswert für die Verschleißfunktion
n_{SV}	Verfestigungsparameter
C_{SVn}	Fourierkoeffizient für die Verschleißfunktion

Anschrift: Dr.-Ing. M. Meywerk, Institut für Technische Mechanik, Technische Universität Braunschweig, Postfach 3329, D-38023 Braunschweig