

Eine einfache Methode zur Ermittlung aller Querspannungen in Faserverbundplatten als Voraussetzung einer verbesserten Versagensanalyse

R. Rolfes, K. Rohwer

Es wird eine erweiterte 2D-Methode zur Berechnung aller Querspannungen in geschichteten Faserverbundplatten vorgestellt, die auf der Schubverformungstheorie erster Ordnung basiert. Diese Theorie wird auch für die meisten Schalenelemente in kommerziellen FE-Programmen benutzt. Ihr großer Vorzug besteht darin, daß nur C^0 -Stetigkeit der Ansatzfunktionen benötigt wird und der numerische Aufwand gering ist. Im Gegensatz dazu erfordern viele der in den vergangenen Jahren entwickelten Theorien höherer Ordnung wesentlich größeren Aufwand und/oder setzen C^1 -Stetigkeit voraus, was eine Umsetzung in finite Elemente erheblich erschwert. Die grundlegende Idee der erweiterten 2D-Methode besteht darin, durch Anwendung der dreidimensionalen Gleichgewichtsbedingungen sowie unter Vernachlässigung des Einflusses der Membrankräfte und der Annahme zweier zylindrischer Biegezustände die Querschubspannungen direkt aus den Querkräften zu berechnen. Es werden keine Schubkorrekturfaktoren benötigt, da die Methode gleichzeitig verbesserte Querschubsteifigkeiten liefert. Durch einmalige Ableitung der Querkräfte nach den Membrankoordinaten kann sogar die Quernormalspannung sehr genau bestimmt werden. Im Vergleich zur herkömmlichen Gleichgewichtsmethode wird eine Ableitungsordnung der Ansatzfunktionen eingespart, so daß nur quadratische Polynome erforderlich sind, um alle Ableitungen auf Elementebene berechnen zu können. Anhand numerischer Berechnungen von symmetrischen Kreuzverbunden und antisymmetrischen Winkelverbunden wird die gute Approximation der dreidimensionalen Lösung gezeigt. Die Methode ist in das Nachlaufprogramm TRAVEST implementiert und kann daher mit geringem Aufwand an kommerzielle FE-Programme (z.B. MSC/NASTRAN) angepaßt werden.

1 Einführung

Moderne Versagenskriterien für Faserverbunde berücksichtigen den Einfluß aller sechs Komponenten des Spannungstensors. Dies ist besonders wichtig im Falle von Druckbeanspruchung senkrecht zur Faser. Unter bestimmten Umständen kann dann Versagen durch Abscheren senkrecht zur Laminatenebene erfolgen, wodurch das gesamte Laminat aufgesprengt werden kann. Die Quernormalspannung spielt eine große Rolle bei der Initiierung von Delaminationen.

Die weitaus überwiegende Zahl der in kommerziellen FE-Programmen angebotenen Versagenskriterien für Faserverbunde basiert auf der Annahme eines ebenen Spannungszustandes.

Auch alle derzeit in MSC/NASTRAN implementierten Versagenskriterien (Hill, Hoffman, Tsai-Wu, Maximaldehnung) sind ebener Art, die Komponenten in Querrichtung werden nicht berücksichtigt. Auf derselben Voraussetzung basieren die Platten- und Schalenelemente (QUAD4, QUAD8) in MSC/NASTRAN, die für die Spannungsanalyse von Faserverbunden angeboten werden. Spannungsanalyse und Versagenskriterien sind also aufeinander abgestimmt, vernachlässigen aber drei Spannungskomponenten, die in einigen Fällen erheblichen Einfluß haben. Deshalb ist in jüngster Zeit, insbesondere von der Fa. CAD-FEM in Zusammenarbeit mit der TU München, eine verstärkte Hinwendung zu dreidimensionalen Kriterien zu verzeichnen (Gleichmar, 1997).

Zur Verbesserung der Situation ist neben der sorgfältigen Auswahl und der Implementation eines dreidimensionalen Versagenskriteriums eine effiziente Methode zur Ermittlung aller Komponenten des Spannungstensors erforderlich.

Der übliche und auch von MSC/NASTRAN offerierte Weg besteht in der Benutzung finiter Volumenelemente. Numerische Untersuchungen haben gezeigt, daß mindestens drei bis fünf Elemente pro Schicht erforderlich sind, um befriedigende Querspannungen zu erzielen (Taeschner, 1997). Bei Mehrschichtlaminaten, die zumeist aus mindestens zehn bis über 100 Schichten bestehen, ist der numerische Aufwand unakzeptabel hoch. Allenfalls können mit dieser Methode Detailuntersuchungen kleiner Strukturteile oder -ausschnitte, wie z.B. Lasteinleitungs- oder Verbindungsbereiche, durchgeführt werden.

Wesentlich geringer ist der numerische Aufwand, wenn man zweidimensionale Elemente (Platte oder Schale) anwendet. Deshalb sind in den vergangenen fünfzehn Jahren viele Schichttheorien höherer Ordnung entwickelt worden. Sie können in die beiden Klassen der laminatweisen (z.B. Senthilnathan u. a., 19987; Murthy, 1981; Reddy, 1984; Kwon und Akin, 1987; Pandya und Kant, 1988) und der schichtweisen Theorien (z.B. Reddy, 1984; di Sciuva, 1986; Chaudhuri, 1986) eingeteilt werden.

Rohwer (1992) hat durch einen Vergleich der laminatweisen Ansätze mit analytischen Lösungen gezeigt, daß die Schubverformungstheorie erster Ordnung einen guten Kompromiß zwischen geringem Aufwand und hoher Genauigkeit darstellt. Die Untersuchungen wurden an Platten bis hinab zu einem Schlankheitsgrad von fünf durchgeführt. Die meisten Theorien höherer Ordnung benötigen C^1 -Stetigkeit der Ansatzfunktionen (Senthilnathan u. a., 1987; Murthy, 1981; Reddy, 1984) und sind damit für FE-Anwendungen kaum geeignet. Andere Methoden erfordern doppelt so viele funktionale Freiheitsgrade wie die Schubverformungstheorie erster Ordnung (Pandya und Kant, 1988) oder liefern keine besseren Ergebnisse als diese (Kwon und Akin, 1987).

Bei den schichtenweisen Theorien werden stückweise Polynome für die Verteilung der Membranverschiebungen in Dickenrichtung des Laminates angesetzt. Damit wird der Hauptnachteil der laminatweisen Ansätze, nämlich die Stetigkeit der Querschubwinkel über die Laminatdicke, beseitigt. Allerdings ist die Anzahl der funktionalen Freiheitsgrade von der Schichtanzahl abhängig, wodurch der numerische Aufwand dem einer 3D-Analyse vergleichbar wird (Chaudhuri, 1986; Robbins und Reddy, 1993). Durch Anwendung der Gleichgewichtsbedingungen an den Schichtgrenzen kann die Anzahl der Freiheitsgrade zwar drastisch reduziert werden (di Sciuva, 1986; He Ling-Hui, 1994), aber zugehörige finite Elemente benötigen entweder C^1 -Stetigkeit oder basieren auf einem gemischten Variationsfunktional (Cheung und Shenglin Di, 1993). Das Problem der Konvergenz und Stabilität gemischter finiter Elemente ist aber bislang nicht befriedigend gelöst.

Die Schubverformungstheorie erster Ordnung liefert für übliche Schlankheitsgrade ausreichend genaue Verschiebungen und Spannungen in der Membranebene. Darauf aufbauend wird eine erweiterte 2D-Methode zur Berechnung der Querschubspannungen (Rolfes und Rohwer, 1997) und der Quernormalspannung entwickelt. Dabei werden die dreidimensionalen Gleichgewichtsbedingungen und das Materialgesetz für die Querkräfte benutzt.

2 Theorie

Die Schubverformungstheorie erster Ordnung geht von einer linearen Verteilung der Membranverschiebungen über die Plattendicke aus. Im Gegensatz zur klassischen Schichtentheorie werden Querschubverformungen durch Einführung unabhängiger Querschnittsverdrehungen berücksichtigt. Die Membranspannungen σ_m können dann wie folgt ausgedrückt werden:

$$\sigma_m = \mathbf{Q}^{(k)} (\boldsymbol{\varepsilon}^0 + z\boldsymbol{\kappa}) \quad (1)$$

$\mathbf{Q}^{(k)}$ sind die reduzierten Steifigkeiten der Einzelschichten, die sich aus der dreidimensionalen Steifigkeitsmatrix für transversal isotropes Material ergeben, wenn die Quernormalspannung zu Null gesetzt wird. $\boldsymbol{\varepsilon}^0$ und $\boldsymbol{\kappa}$ stellen die Verzerrungen und Krümmungen der Bezugsebene dar. Die Querschubspannungen lassen sich ebenfalls unter Verwendung des Materialgesetzes ermitteln,

$$\boldsymbol{\tau}_z^{(k)} = \begin{bmatrix} \tau_{xz}^{(k)} \\ \tau_{yz}^{(k)} \end{bmatrix} = \mathbf{G}^{(k)} \boldsymbol{\gamma} \quad (2)$$

wobei $\mathbf{G}^{(k)}$ die Querschubmoduli der Einzelschichten und $\boldsymbol{\gamma}$ die über die Dicke konstanten Querschubverzerrungen sind. Die so ermittelten Spannungen sind schichtweise konstant. Die dreidimensionale Lösung ergibt aber stetige Verläufe mit Knicken an den Schichtgrenzen und Nullstellen an den Laibungen. Mit Gleichung (2) können daher weder die Randbedingungen noch die interlaminaren Schubspannungen zutreffend wiedergegeben werden. Die Querkräfte ergeben sich durch Integration von Gleichung (2) über die Dicke zu

$$\mathbf{R} = \mathbf{H}\boldsymbol{\gamma} \quad (3)$$

Die Querschubsteifigkeiten \mathbf{H} sind zu groß, weil sie auf der Annahme eines konstanten Schubwinkels basieren. Zur Abminderung werden daher in der Literatur verschiedene Schubkorrekturfaktoren vorgeschlagen. Jedoch ist keiner der Werte allgemein anwendbar (Wittrick, 1988).

Besser ist es daher, die dreidimensionalen Gleichgewichtsbedingungen zur Bestimmung der Querschubspannungen heranzuziehen. Dazu müssen die Membranspannungen einmal nach den Membrankoordinaten abgeleitet und über z integriert werden,

$$\boldsymbol{\tau}_z = \begin{bmatrix} \tau_{xz}^{(k)} \\ \tau_{yz}^{(k)} \end{bmatrix} = - \int_{\zeta=0}^{\zeta=z} \begin{pmatrix} \sigma_{x,x}^{(k)} + \tau_{xy,y}^{(k)} \\ \sigma_{y,y}^{(k)} + \tau_{xy,x}^{(k)} \end{pmatrix} d\zeta + \begin{bmatrix} g_1(x,y) \\ g_2(x,y) \end{bmatrix} \quad (4)$$

Durch Einsetzen von Gleichung (1) in Gleichung (4) erhält man

$$\boldsymbol{\tau}_z = \int_{\zeta=0}^{\zeta=z} \left(\mathbf{B}_1 \mathbf{Q}^{(k)} (\boldsymbol{\varepsilon}_{,x}^0 + z \boldsymbol{\kappa}_{,x}) + \mathbf{B}_2 \mathbf{Q}^{(k)} (\boldsymbol{\varepsilon}_{,y}^0 + z \boldsymbol{\kappa}_{,y}) \right) d\zeta \quad (5)$$

wobei \mathbf{B}_1 und \mathbf{B}_2 Boolesche Matrizen sind (vgl. Rolfs und Rohwer, 1997). Zur Berechnung der Quernormalspannung wird eine weitere Differentiation der Spannungen durchgeführt,

$$\sigma_z(z) = - \int_{\zeta=z}^{\zeta=z} (\tau_{xz,x} + \tau_{yz,y}) d\zeta + p_0 \quad (6)$$

Daher sind mindestens kubische Ansatzfunktionen für die Verschiebungen erforderlich, um die Quernormalspannung auf Elementebene berechnen zu können.

Die Entwicklung der erweiterten 2D-Methode beginnt mit der Formulierung des Elastizitätsgesetzes der Mehrschichtverbunds,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^0 \\ \boldsymbol{\kappa} \end{bmatrix} \quad (7)$$

Unter der Annahme, daß die Normalkräfte \mathbf{N} sehr geringen Einfluß auf die Querschubspannungen haben, können die Verzerrungen und Krümmungen der Bezugsebene in Gleichung (5) durch die Momente ersetzt werden. Man erhält

$$\boldsymbol{\tau}_z = -\mathbf{B}_1 \mathbf{F}(z) \mathbf{M}_{,x} - \mathbf{B}_2 \mathbf{F}(z) \mathbf{M}_{,y} \quad (8)$$

wobei \mathbf{F} die Funktionsmatrix

$$\mathbf{F}(z) = (\mathbf{a}(z) \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} - \mathbf{b}(z)) \mathbf{D}^{*-1} \quad (9)$$

darstellt. Sie hängt nur von den Eigenschaften des Laminates und nicht etwa den Belastungen ab. $\mathbf{a}(z)$ und $\mathbf{b}(z)$ sind partielle Membran- und Koppelsteifigkeiten des Laminats bis zur Koordinate z ,

$$\mathbf{a}(z) = \int_{\zeta=0}^{\zeta=z} \mathbf{Q} d\zeta \quad (10)$$

$$\mathbf{b}(z) = \int_{\zeta=0}^{\zeta=z} \mathbf{Q} d\zeta \quad (11)$$

\mathbf{D}^* berechnet sich aus den Laminatmatrizen wie folgt

$$\mathbf{D}^* = \mathbf{D} - \mathbf{B}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \quad (12)$$

Die Momentenableitungen in Gleichung (8) können durch die Querkräfte ausgedrückt werden, wenn man zwei zylindrische Biegezustände annimmt. Es ergibt sich die einfache Formulierung

$$\boldsymbol{\tau}_z = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{32} \\ F_{31} & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{xz} \\ R_{yz} \end{bmatrix} = \mathbf{f}(z) \mathbf{R} \quad (13)$$

Damit ist die Berechnung der Querschubspannungsverteilungen allein aus den Querkräften möglich. Diese

werden unter Ausnutzung des Materialgesetzes (Gleichung (3)) bestimmt. Dabei ist von entscheidender Bedeutung, daß verbesserte Querschubsteifigkeiten benutzt werden. Sie können unter Verwendung von Gleichung (13) aus der komplementären Formänderungsenergie hergeleitet werden (Rohwer, 1988)

$$\tilde{\mathbf{H}} = \left[\int_{(h)} \mathbf{f}^T \mathbf{G}^{(k)-1} \mathbf{f} dz \right]^{-1} \quad (14)$$

Die Quernormalspannung ergibt sich durch Einsetzen von Gleichung (13) in die Gleichgewichtsbedingung (Gleichung 6). Man erhält

$$\sigma_z(z) = -[\mathbf{f}_x^{*T} \mathbf{R}_{,x} + \mathbf{f}_y^{*T} \mathbf{R}_{,y}] + p_0 \quad (15)$$

wobei \mathbf{f}_x^{*T} und \mathbf{f}_y^{*T} die Zeilen der integrierten Funktionsmatrix sind,

$$\mathbf{F}^*(z) = \int_{\zeta=0}^{\zeta=z} \mathbf{F}(\zeta) d\zeta = [\mathbf{a}(z) \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} - \mathbf{d}(z)] \mathbf{D}^{*-1} \quad (16)$$

$\mathbf{a}(z)$ und $\mathbf{d}(z)$ sind die Integrale der partiellen Steifigkeitsmatrizen $\mathbf{a}(z)$ und $\mathbf{b}(z)$.

Die Herleitung macht deutlich, daß die erweiterte 2D-Methode (Gleichungen (13) und (15)) Polynome niedrigeren Grades benötigt als die herkömmliche Gleichgewichtsmethode (Gleichungen (5) und (6)). In der nachfolgenden Tabelle sind die jeweils benötigten Polynomordnungen gegenübergestellt.

Funktionale Freiheitsgrade	Zur Berechnung der Querschubspannungen (Quernormalspannung) benötigter Grad der Polynome		
	Herkömmliche Gleichgewichtsmethode voll	Gleichgewichtsmethode reduziert	Erweiterte 2D-Methode
u_0	2 (3)	1 (1)	1 (1)
v_0	2 (3)	1 (1)	1 (1)
w_0	1 (1)	1 (1)	1 (2)
ϑ_x	2 (3)	2 (3)	1 (1)
ϑ_y	2 (3)	2 (3)	1 (1)

Tabelle 1. Zusammenstellung der Polynomordnungen

Eine weiterer wichtiger Vorteil der vorgestellten Methode besteht darin, daß im Gegensatz zu anderen Verfahren (Rohwer, 1988; Engblom und Ochon, 1996) die Randbedingungen für die Querschub- und Quernormalspannungen an den Laibungen exakt erfüllt werden.

3 Numerische Beispiele

Die Bilder 1 und 2 zeigen Querschubspannungsverteilungen für ein dreilagiges, symmetrisches Kreuzlaminat ($E_L = 138\text{GPa}$, $E_T = 5,52\text{GPa}$, $\nu_{LT} = 0,25$, $G_{LT} = 2,76\text{GPa}$, $G_\pi = 1,104\text{GPa}$) unter doppelt-sinusförmiger Last und einen zweischichtigen, antisymmetrischen Winkelverbund ($E_L = 276\text{GPa}$, $E_T = 6,9\text{GPa}$, $\nu_{LT} = 0,25$, $G_{LT} = 3,4\text{GPa}$, $G_\pi = 1,4\text{GPa}$) unter gleichförmiger Belastung. In beiden Fällen liegen die Resultate der Autoren wesentlich näher an der 3D-Lösung als die Klassische Schichtentheorie unter Verwendung der herkömmlichen Gleichgewichtsmethode (CLT). Des weiteren ist eine deutliche Verbesserung gegenüber den Verläufen mit verschiedenen Schubkorrekturfaktoren (WP n) zu verzeichnen. MSC/NASTRAN liefert Werte nur an den Schichtgrenzen. Beim Winkelverbund beträgt die Abweichung von der 3D-Lösung etwa 28%, während die erweiterte 2D-Methode bei unter 8% liegt. Alle Vergleichslösungen (bis auf die NASTRAN-Lösung) wurden von di Sciuva (1986) übernommen.

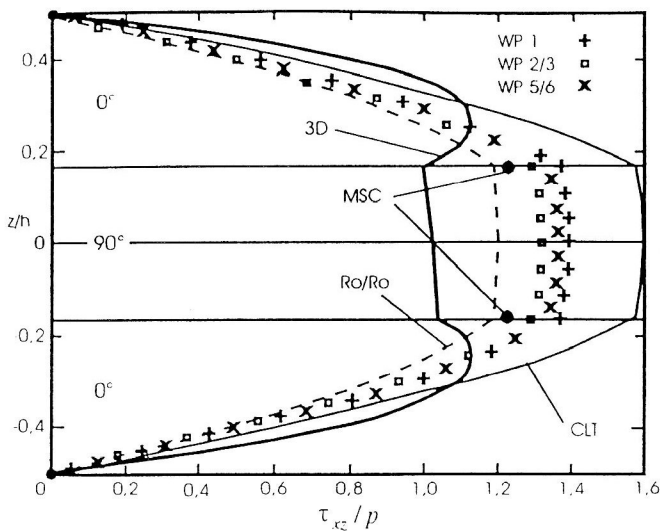


Bild 1. Querschubspannungen in einem quadratischen (0/90/0)-Laminat; $x=a/2, y=0; a/h=4$

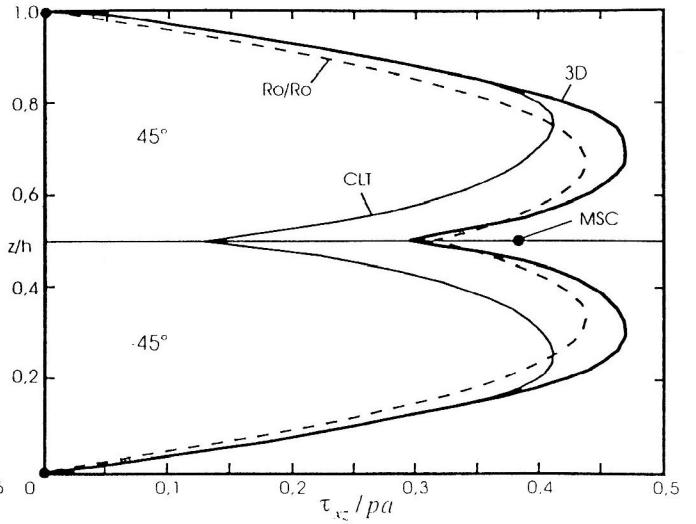


Bild 2. Querschubspannungen in einem quadratischen (+45/-45)-Laminat; $x=17a/36, y=a/36; a/h=6$

Die Quernormalspannung für Kreuzverbunde mit gleichen und unterschiedlichen Schichtdicken ($E_L = 138\text{GPa}, E_T = 9,3\text{GPa}, \nu_{LT} = 0,30, G_{LT} = 4,6\text{GPa}, G_\pi = 3,1\text{GPa}$) ist den Bildern 3 und 4 zu entnehmen.

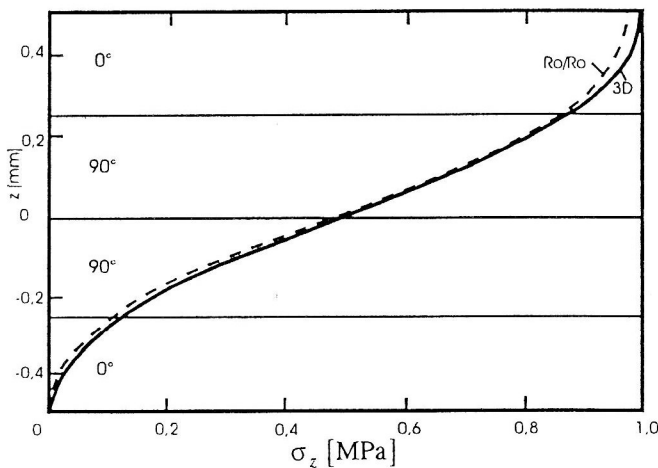


Bild 3. Quernormalspannung in einem (0/90)_s-Laminat am Mittelpunkt; $a/b=1,48; a/h=5$; gleiche Schichtdicken

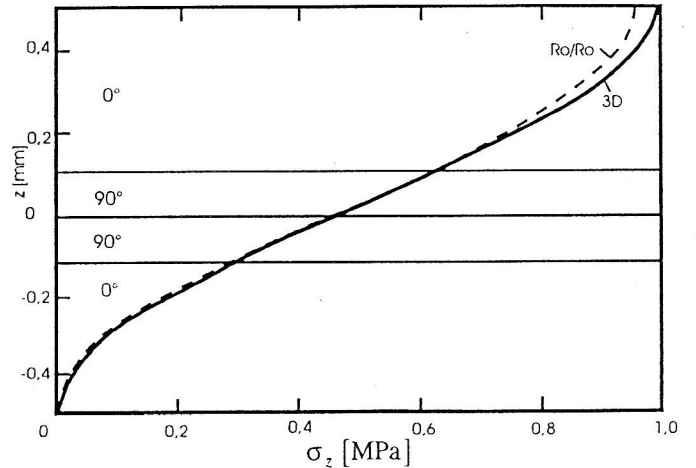


Bild 4. Quernormalspannung in einem (0/90)_s-Laminat am Mittelpunkt; $a/b=1,91; a/h=5$; unterschiedliche Schichtdicken

Die mit der vorgestellten Methode ermittelten Verläufe stimmen nahezu exakt mit der 3D-Lösung (Rohwer, 1992) überein. Die geringfügigen Abweichungen an der oberen Laibung sind auf numerische Fehler in den Querkraftableitungen zurückzuführen. Die Bilder 5 und 6 ($E_L = 200\text{GPa}, E_T = 8,0\text{GPa}, \nu_{LT} = 0,25, G_{LT} = 5,0\text{GPa}, G_\pi = 2,2\text{GPa}$) zeigen Ergebnisse für ein Winkellaminat. Wiederum ist die Approximation der 3D-Kurven (Savoia und Reddy, 1992) ausgezeichnet.

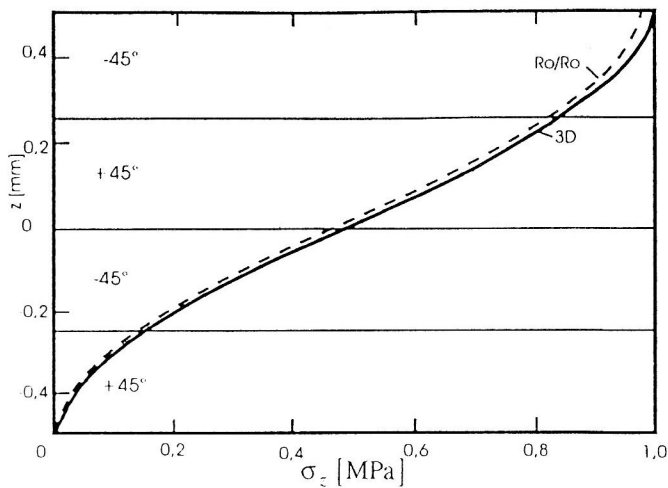


Bild 5. Quernormalspannung in einem quadratischen (-45/+45/-45/+45)-Laminat am Mittelpunkt; $a/h=5$

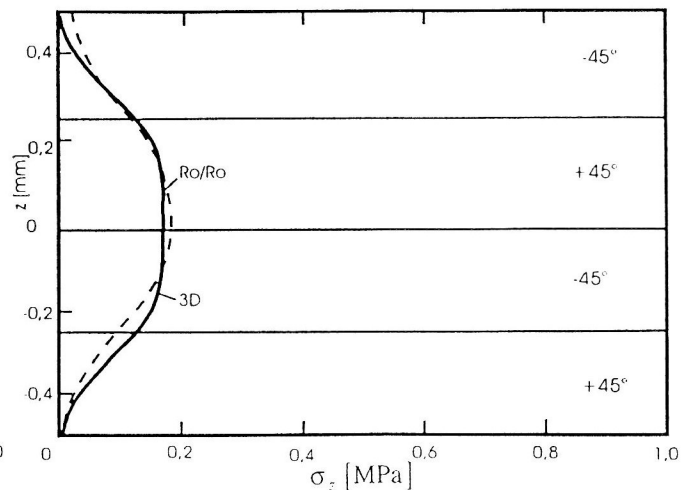


Bild 6. Quernormalspannung in einem quadratischen (-45/+45/-45/+45)-Laminat am Eckpunkt; $a/h=5$

4 Zusammenfassung und Ausblick

Die erweiterte 2D-Methode liefert für Faserverbundplatten unter mechanischer Belastung alle sechs Spannungskomponenten. Schlankheitsgrade bis hinab zu fünf können mit genügender Genauigkeit behandelt werden. Übliche 8-Knoten-Elemente (z.B. QUAD8 in MSC/NASTRAN) sind ausreichend, um alle benötigten Ableitungen auf Elementebene durchführen zu können. Desweiteren werden verbesserte Querschubsteifigkeiten ermittelt, so daß keine Schubkorrekturfaktoren mehr benötigt werden.

Zukünftige Arbeiten sollten der Ausweitung der Methode auf thermische Lasten sowie der Übertragung auf Schalen dienen.

Literatur

1. Chaudhuri, R.A.: An Equilibrium Method for Prediction of Transverse Shear Stresses in a Thick Laminated Plate, *Comput. Struct.* 23, 139-146 (1986).
2. Cheung, Y.K. and Shenglin Di: Analysis of Laminated Composite Plates by Hybrid Stress Isoparametric Element, *Int. J. Solids Structures* 30, 2843-2857 (1993).
3. Engblom, J.J. and Ochoa, O.O.: Through-the Thickness Stress Predictions for Laminated Plates of Advanced Composite Materials, *Int. J. Num. Meth. Eng.* 21, 1759-1776 (1985).
4. Engblom, J.J. and Ochoa, O.O.: Finite Element Formulation Including Interlaminar Stress Calculations, *Comput. Struct.* 23, 241-249 (1986).
5. Gleichmar, R.: Bewertung eines neuen Festigkeitskriteriums für Faserverbundlaminat und Integration in ein FE-Programm, Technischer Bericht, TUM-MW 64/9702-TB (1997).
6. He Ling-Hui: A Linear Theory of Laminated Shells Accounting for Continuity of Displacements and Transverse Shear Stresses at Layer Interfaces, *Int. J. Solids Structures* 31, 613-627 (1994).
7. Kwon, Y.W. and Akin, J.E.: Analysis of Layered Composite Plates Using High-order Deformation Theory, *Comput. Struct.* 27, 619-623 (1987).
8. Murthy, M.V.V.: An Improved Transverse Shear Deformation Theory for Laminated Anisotropic Plates, NASA technical paper 1903 (1981).
9. Pandya, B.N. and Kant, T.: Flexural Analysis of Laminated Composites Using Refined Higher-order C0 Plate Bending Elements, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* 66, 173-198 (1988).

10. Reddy, J.N.: A Simple Higher-order Theory for Laminated Composite Plates, *J. Appl. Mech.* 51, 745-752 (1984).
11. Reddy, J.N.: A Generalization of Two-dimensional theories of Laminated Composite Plates, *Commun. Appl. Numer. Meth.* 3, 173-180 (1987).
12. Robbins, D.H. and Reddy, J.N.: Modelling of Thick Composites Using a Layerwise Laminate Theory, *Int. J. Num. Meth. Eng.* 36, 655-677 (1993).
13. Rohwer, K.: Improved Transverse Shear Stiffnesses for Layered finite elements; DFVLR-FB 88-32, Braunschweig (1988).
14. Rohwer, K.: Application of Higher Order Theories to the Bending Analysis of Layered Composite Plates; *Int. J. Solids and Structures* 29, 105-119 (1992).
15. Rolfes, R.; Rohwer, K.: Improved Transverse Shear Stresses in Composite Finite Elements Based on First Order Shear Deformation Theory, *Int. J. Num. Meth. Eng.* 40, 51-60 (1997).
16. Taeschner, M.: Vergleich verschiedener Methoden zur Berechnung des dreidimensionalen Spannungszustandes in gekrümmten, dickwandigen Faserverbundstrukturen; DLR, IB 131-97/12, Braunschweig (1997).
17. Savoia, M. and Reddy, J.N.: A Variational Approach to Three-dimensional Elasticity Solutions of Laminated Composite Plates, *J. Applied Mechanics* 59, 166-175 (1992).
18. di Sciuva, M.: Bending, Vibration and Buckling of Simply Supported Thick Multilayered Orthotropic Plates: an Evaluation of a New Displacement Model, *J. Sound Vibration* 105, 425-442 (1986).
19. Senthilnathan, N.R. Lim, S.P.; Lee, K.H. and Chow, S.T.: Buckling of Shear-deformable Plates, *AIAA-J.* 25, 1268-1271 (1987).
20. Wittrick, W.H.: Analytical, Three-dimensional Elasticity Solutions to Some Plate Problems, and Some Observations on Mindlin's Plate Theory, *Int. J. Solids Structures* 23, 441-464 (1987).

Anschrift: DLR, Institut für Strukturmechanik, Braunschweig