TECHNISCHE MECHANIK, Band 18, Heft 2, (1998), 89-94
Manuskripteingang: 16. Juni 1997

Ergänzung zur Theorie der Torsionsschwingungssysteme mit endlich vielen Freiheitsgraden. Teil III: Torsionsschwingungssysteme mit einer an beiden Enden eingespannten Torsionswelle

Z. Szolgay

Der Teil III der Arbeit beschäftigt sich mit Torsionsschwingungssystemen, deren Torsionswelle an beiden Enden eingespannt ist. Zuerst wird ein System mit einem Freiheitsgrad untersucht, mit und ohne Dämpfung und Erregung, dann ein spezielles System mit endlich vielen Freiheitsgraden. Die Bedingungen A.2 - A.8 des Teiles I (Szolgay, 1995) werden auch hier beibehalten. Die Numerierung der einzelnen Punkte und der Gleichungen ist fortlaufend und erfolgt in Fortsetzung der Numerierung des Teiles II (Szolgay, 1998a).

11 Die Eigenschwingungen des ungedämpften Torsionsschwingungssystems mit einem Freiheitsgrad (Bild 4)

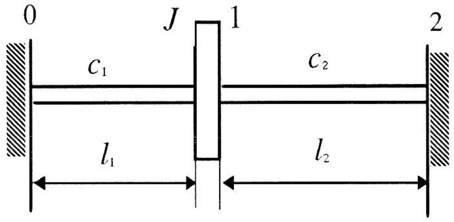

Bild 4. Ungedämpftes Torsionsschwingungssystem mit einem Freiheitsgrad

Wir betrachten das System nach Bild 4.
Es wird gezeigt, daß die Schwingungen dieses Systems nichtlinear sind, wenn die Bedingungen A.2 - A.8 erfüllt sind. Die wesentlichen Eigenschaften der untersuchten Erscheinung sind schon hier gut zu erkennen.

Bestimmte Punkte der Welle werden mit 0, 1, 2 gekennzeichnet (siehe Bild 4). Die charakteristischen Daten beider Wellenstrecken werden mit den an den Streckenenden befindlichen Nummern als Indizes versehen. Das Trägheitsmoment der Drehscheibe ist J, die Federkonstanten der Wellenstrecken sind c_1 und c_2. Die Drehscheibe wird nur durch die Federmomente belastet.

Am rechten Ende (2) der Welle wird die Einspannung beseitigt und durch eine Kraft F_2 und ein Moment M_2 ersetzt. Diese haben die Aufgabe, die Verschiebung und die Verdrehung des Wellenendes zu verhindern, so daß die Randbedingungen an dieser Stelle

$$y_2 \equiv 0 \qquad\qquad \alpha_2 \equiv 0 \qquad (11.1)_{\mathrm{III}}$$

sind.

Die Bewegungsgleichung der Scheibe ist dann

$$J\ddot{\alpha}_1 + (c_1 + c_2)\alpha_1 = 0 \qquad (11.2)_{\mathrm{III}}$$

wobei im Sinne der Formel $(10.1)_{\mathrm{II}}$

$$c_1 = c_1' + c_1'' = \frac{I_p G}{l_1} + \frac{I_p \sigma}{l_1} \qquad\qquad c_2 = c_2' + c_2'' = \frac{I_p G}{l_2} + \frac{I_p \sigma}{l_2} \qquad (11.3)_{\mathrm{III}}$$

gilt. (In diesen Formeln ist $\sigma = F/A$ mit der Abkürzung $F = F_2$.)

Diese Formeln sind auf den einfachsten Fall bezogen, für den die Radien beider Federwellen gleich, ihre Längen jedoch unterschiedlich sind. D.h, es gilt $R_1 = R_2 = R$. Was das Wesentliche betrifft, würde auch der allgemeine Fall zu keinem anderen Ergebnis führen.

Aufgrund von Gleichung $(11.3)_{III}$ dürfen wir schreiben

$$c = c_1 + c_2 = I_p \frac{G+\sigma}{l_0} \qquad (11.4)_{III}$$

mit

$$\frac{1}{l_0} = \frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} \qquad (11.5)_{III}$$

Die Verschiebung y_2 des rechten Wellenendes ist eine Funktion der spezifischen Verdrehungen

$$\psi_1 = \frac{\alpha_1 - \alpha_0}{l_1} = \frac{\alpha_1}{l_1} \qquad \psi_2 = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{l_2} = -\frac{\alpha_1}{l_2} \qquad (11.6)_{III}$$

Dadurch entstehen die spezifischen Verkürzungen

$$\zeta_{z1} = \frac{1}{2} R^2 \psi_1^2 = -\frac{R^2 \alpha_1^2}{2 l_1^2} \qquad \zeta_{z2} = \frac{1}{2} R^2 \psi_2^2 = -\frac{R^2 \alpha_2^2}{2 l_2^2} \qquad (11.7)_{III}$$

Dementsprechend ist die Verschiebung des rechten Wellenendes infolge der Torsion

$$y_{2t} = \zeta_{z1} l_1 + \zeta_{z2} l_2 = -\frac{R^2 \alpha_1^2}{2 l_0} \qquad (11.8)_{III}$$

Entsprechend den vorgeschriebenen Randbedingungen gilt $y_2 = 0$. Die axiale Kraft F muß also eine Verlängerung der Welle $y_{2z} = -y_{2t}$ bewirken, und weil F als Zugbelastung entlang der Welle konstant ist, ist die entsprechende Verlängerung

$$y_{2z} = \frac{F}{EA}(l_1 + l_2)$$

Letzten Endes ist

$$\sigma = \frac{F}{A} = -\frac{y_{2t} E}{l_1 + l_2} = \frac{ER^2}{2(l_1 + l_2) l_0} \alpha_1^2$$

Nach Einsetzen von l_0 entsprechend Gleichung $(11.5)_{III}$ erhalten wir

$$\sigma = \frac{ER^2}{2 l_1 l_2} \alpha_1^2 = -\frac{1}{2} ER^2 \psi_1 \psi_2 \qquad (11.9)_{III}$$

Werden die Werte von c und σ in die Bewegungsgleichung $(11.2)_{III}$ eingeführt, so ergibt sich

$$J\ddot{\alpha}_1 + \frac{I_p G}{l_0} \alpha_1 + \frac{I_p E R^2}{2 l_0 l_1 l_2} \alpha_1^3 = 0 \qquad (11.10)_{III}$$

Diese Gleichung ist für α_1 eine nichtlineare Differentialgleichung von Duffingschem Typ, die die ungedämpften Schwingungen des Systems beschreibt. Ihre angenäherte periodische Lösung pflegt man in der Form

$$\alpha_1 = A_1 \cos \omega t \tag{11.11$_{\text{III}}$}$$

zu suchen, wobei ω bekanntlich eine Funktion von A_1 ist. Weiterhin ist

$$\alpha_1^3 = A_1^3 \left(\frac{3}{4} \cos \omega t + \frac{1}{4} \cos 3\omega t \right)$$

Man kommt zu der allgemein anerkannten Näherungslösung, wenn das zweite Glied dieses Ausdruckes vernachlässigt wird. Setzt man nämlich diese Ausdrücke in die Bewegungsgleichungen ein, so erhält man die folgende Gleichung:

$$\left[-\omega^2 J A_1 + \frac{I_p G}{l_0} A_1 + \frac{3}{4} \frac{1}{2} \frac{I_p E}{l_0} \frac{R^2}{l_1 l_2} A_1^3 \right] \cos \omega t = 0 \tag{11.12$_{\text{III}}$}$$

Da diese Gleichung bei jedem Wert von t erfüllt werden muß, ist es notwendig, daß der Koeffizient von $\cos \omega t$ verschwindet. So kann ω^2 als Funktion von A_1 dargestellt werden.

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{3}{4} \omega_1^2 A_1^2 \tag{11.13$_{\text{III}}$}$$

wobei ω_0 und ω_1 Konstanten sind

$$\omega_0^2 = \frac{I_p G}{l_0 J} \qquad\qquad \omega_1^2 = \frac{1}{2} \frac{I_p E}{l_0 J} \frac{R^2}{l_1 l_2}$$

(Bei kleinen Auslenkungen kann das zweite Glied auf der rechten Seite der Gleichung $(11.13)_{\text{III}}$ vernachlässigt werden, und ω wird identisch mit der Eigenfrequenz des linearen Systems.)

12 Erregung und Dämpfung bei dem System mit einem Freiheitsgrad

Wirkt im System des vorigen Abschnittes eine lineare Dämpfung und wird die Scheibe durch ein Moment der Form $M_1 = M_{10} \cos \Omega t$ belastet, so lautet die Bewegungsgleichung

$$J\ddot{\alpha}_1 + b\dot{\alpha}_1 + (c_1 + c_2)\alpha_1 = M_{10} \cos \Omega t \tag{12.1$_{\text{III}}$}$$

Die Lösung soll auch diesmal die Form $(11.11)_{\text{III}}$ haben, mit Ω anstelle von ω. Wegen der Dämpfung sind aber Schwingung und Erregung nicht in Phase. Deshalb wollen wir diese Phasenverschiebung in der Formel für die Erregung berücksichtigen mit

$$M_1 = M_{10} \cos(\Omega t - \delta) \qquad\qquad \delta = \text{konst.}$$

So erhält die Bewegungsgleichung die Gestalt

$$\left[-\omega^2 J + (c_1 + c_2) \right] A_1 \cos \Omega t - b\omega A_1 \sin \Omega t = M_{10} \cos \delta \cos \Omega t + M_{10} \sin \delta \sin \Omega t$$

Diese Gleichung kann bei jedem Wert der Zeit t nur dann erfüllt werden, wenn die Koeffizienten von $\cos \Omega t$ bzw. $\sin \Omega t$ auf der linken und auf der rechten Seite identisch sind

$$-\Omega^2 + \omega_0^2 + \frac{3}{4}\omega_1^2 A_1^2 = \frac{m_{10}}{A_1}\cos\delta \qquad -\Omega\frac{A_1 b}{J} = m_{10}\sin\delta$$

Hier sind ω_0 und ω_1 die Konstanten der Gleichung $(11.13)_{\mathrm{III}}$, und für m_{10} gilt $m_{10} = M_{10}/J$.

In beiden Gleichungen sind A_1, Ω und δ voneinander nicht unabhängig. δ kann auch den Wert $\pi/2$ ($\cos\delta = 0$, $\sin\delta = 1$) annehmen. Auf der rechten Seite der ersten Gleichung steht dann Null, und zu der vorgeschriebenen Amplitude A_1 gehört ein Ω^2, das der Eigenfrequenz entspricht. Die zweite Gleichung gibt eine unmittelbare Verbindung zwischen A_1 und Ω.

Im Abschnitt 12 wurde gezeigt, daß ein Torsionssystem mit einem Freiheitsgrad mit einer an beiden Enden eingespannten Torsionswelle sich auch im Falle einer Dämpfung und einer Erregung als ein Duffing-System verhält.

13 Ein System mit endlich vielen Freiheitsgraden

Das System bestehe aus einer Torsionswelle mit konstantem Durchmesser, wobei aber die einzelnen Strecken unterschiedliche Längen haben können. Die Trägheitsmomente der n Drehscheiben seien auch unterschiedlich.

An den Scheiben wirken keine äußeren Kräfte und Momente.

Die Enden der Welle sind eingespannt. Die Einspannstellen versehen wir mit den Nummern 0 bzw. $n+1$. Die Randbedingungen sind

$$\alpha_0 = \alpha_{n+1} = 0 \qquad y_0 = y_{n+1} = 0 \tag{13.1$_{\mathrm{III}}$}$$

An den Einspannungsstellen wird die Welle durch die veränderliche Zugkraft F und das Torsionsmoment M belastet. Da an der Welle keine anderen Zugkräfte angreifen, ist die Zugbelastung bei jedem Querschnitt gleichfalls F. Wir nehmen an, daß im Ruhezustand $F = 0$ gilt.

Unter diesen Bedingungen gilt die Bewegungsgleichung der Torsionsschwingungen

$$\mathbf{J}\ddot{\boldsymbol{\alpha}} + (\mathbf{C}' + \mathbf{C}'')\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0} \tag{13.2$_{\mathrm{III}}$}$$

mit

$$\mathbf{C}' = I_p G\tilde{\mathbf{C}} \qquad \mathbf{C}'' = I_p \sigma\tilde{\mathbf{C}} \tag{13.3$_{\mathrm{III}}$}$$

und

$$\tilde{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{l_1}+\frac{1}{l_2} & -\frac{1}{l_2} & \dots \\ -\frac{1}{l_2} & \frac{1}{l_2}+\frac{1}{l_3} & -\frac{1}{l_3} \\ & & \dots \end{bmatrix} \tag{13.4$_{\mathrm{III}}$}$$

Wäre das rechte Ende der Welle frei, dann müßte der Querschnitt $n+1$ unter der Torsionsbelastung eine Verschiebung ξ_{n+1} erleiden. ξ_{n+1} ist die Summe der Verkürzungen der einzelnen Wellenstrecken

$$-\xi_{n+1} = \frac{1}{2}R^2\sum_i \psi_i^2 l_i = \frac{1}{2}R^2\sum_i \frac{(\alpha_i - \alpha_{i-1})^2}{l_i} = \frac{1}{2}R^2\boldsymbol{\alpha}^T\tilde{\mathbf{C}}\boldsymbol{\alpha} \tag{13.5$_{\mathrm{III}}$}$$

Diese Verschiebung muß durch die Zugkraft F verhindert werden. Durch die Wirkung von F entsteht eine Verlängerung

$$\lambda_{n+1} = \frac{Fl}{AE} = \frac{l}{E}\sigma \qquad \left(l = \sum_i l_i\right) \tag{13.6)$_{\text{III}}$ }$$

Die Summe beider Verschiebungen muß im Sinne der Randbedingungen verschwinden:

$$\frac{l}{E}\sigma = -\xi_{n+1}$$

oder

$$\sigma = -\frac{E}{l}\xi_{n+1} \qquad (13.7)_{\text{III}}$$

Werden diese Ergebnisse in die Gleichung $(13.2)_{\text{III}}$ eingesetzt, so erhalten wir die nichtlineare Differentialgleichung

$$\mathbf{J}\ddot{\alpha} + \tilde{\mathbf{C}}\left(I_p G + \frac{I_p E}{2l}R^2\alpha^T\tilde{\mathbf{C}}\alpha\right)\alpha = \mathbf{0} \qquad (13.8)_{\text{III}}$$

Lösungen eines bestimmten Typs sind leicht aufzufinden. Wir zeigen, daß Näherungslösungen der Form

$$\alpha_k = \mathbf{A}_k T_k(t) = \mathbf{A}_k q_k \cos\omega_k t \qquad (13.9)_{\text{III}}$$

existieren, bei denen $\mathbf{A}_k$, q_k und ω_k Konstanten sind und $\mathbf{A}_k$ der k - te Eigenvektor desjenigen linearen Torsionsschwingungssystems ist, dessen Bewegungsgleichung die Form

$$\mathbf{J}\ddot{\alpha} + I_p G\tilde{\mathbf{C}}\alpha = \mathbf{0} \qquad (13.10)_{\text{III}}$$

hat und für das die Randbedingungen

$$\alpha_0 = \alpha_{n+1} = 0 \qquad y_0 = 0 \qquad (13.11)_{\text{III}}$$

gelten. Die Eigenvektoren dieses Systems bilden ein orthogonales Vektorsystem bezüglich der Matrizen $\mathbf{J}$ und $\mathbf{C}$, was bedeutet, daß für $i \neq k$

$$\mathbf{A}_i^T\mathbf{J}\,\mathbf{A}_k = \mathbf{A}_i^T\tilde{\mathbf{C}}\,\mathbf{A}_k = \mathbf{0} \qquad (13.12)_{\text{III}}$$

gilt. Dieselben Ausdrücke sind größer als Null für $i = k$.

Die Eigenkreisfrequenzen des linearen Systems sind bekanntlich aus der Formel

$$\nu_i^2 = \frac{\mathbf{A}_i^T\mathbf{C}\mathbf{A}_i}{\mathbf{A}_i^T\mathbf{J}\mathbf{A}_i} I_p G \qquad (13.13)_{\text{III}}$$

zu errechnen.

Wird die angenommene Lösung $(13.9)_{\text{III}}$ in die Gleichung $(13.8)_{\text{III}}$ eingeführt, erhalten wir das Ergebnis

$$\left(\mathbf{J}\ddot{T}_k + \tilde{\mathbf{C}}I_p\left[G + \frac{E}{2l}R^2\mathbf{A}_k^T\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{A}_k T_k^2\right]T_k\right)\mathbf{A}_k = \mathbf{0} \qquad (13.14)_{\text{III}}$$

Wollen wir hier bezüglich der dritten Potenz von $\cos\omega t$ wieder die Annäherung anwenden wie im Abschnitt 4.1, dann kommen wir zu der Gleichung

$$\left[-\omega_k^{\ 2}\mathbf{J}+\tilde{\mathbf{C}}I_p\left(G+\frac{3}{4}\frac{E}{2l}R^2\mathbf{A}_k^{\ T}\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{A}_k q_k^{\ 2}\right)\right]\mathbf{A}_k=\mathbf{0} \qquad (13.15)_{\mathrm{III}}$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit $A_k^{\ T}$, dann erhalten wir für ω_k^2 den Ausdruck

$$\omega_k^{\ 2} = \nu_k^{\ 2}\left(1 + Q_k q_k^{\ 2}\right) \qquad (13.16)_{\mathrm{III}}$$

mit

$$Q_k = \frac{3}{4}\,\frac{E}{G}\,\frac{R^2}{2l}\,\mathbf{A}_k^{\ T}\,\tilde{\mathbf{C}}\,\mathbf{A}_k \qquad (13.17)_{\mathrm{III}}$$

Daraus folgt, daß Gleichung $(13.9)_{\mathrm{III}}$ eine mögliche Näherungslösung ist. Zu jedem Eigenvektor A_k gehört eine Kreisfrequenz ω_k, die eine Funktion der Amplitude ist, ähnlich wie beim System mit einem Freiheitsgrad.

Literatur

1. Szolgay, Z.: Ergänzung zur Theorie der Torsionsschwingungssysteme mit endlich vielen Freiheitsgraden.
   Teil I: Wirkung einer konstanten Zugbelastung auf die Eigenkreisfrequenzen von Torsionsschwingungssystemen. Technische Mechanik 15, 2, (1995), 159-167.

2. Szolgay, Z.: Ergänzung zur Theorie der Torsionsschwingungssysteme mit endlich vielen Freiheitsgraden.
   Teil II: Wirkung einer periodisch veränderlichen Zugbelastung auf das Verhalten von Torsionssystemen. Technische Mechanik 18, 1, (1998a)

Anschrift: Dr. Zsófia Szolgay, Institut für Angewandte Mechanik, TU Budapest, H-1111 Budapest, Müegyetem rkp 1-3.