

# Zur Objektivität mikromechanisch motivierter Kriechgleichungen

H. Balke

*Die Zähigkeit einer kontinuumsmechanisch postulierten Kriechgleichung wird am Beispiel einer polykristallinen Keramik auf das bekannte Modell der Korngrenzendiffusion zurückgeführt. Es zeigt sich, daß als Triebkraft für den Diffusionsstrom außer dem Korngrenzennormalspannungsgradienten im rotierenden Bezugssystem auch spezifische Volumenkräfte auftreten, die von der Drehgeschwindigkeit abhängen. Infolge dieses Effektes wird das Objektivitätsprinzip durch die mikromechanisch motivierte Kriechgleichung geringfügig verletzt.*

## 1 Einleitung

Materialgleichungen der Kontinuumsmechanik werden üblicherweise als objektiv vorausgesetzt. Dies bedeutet (Truesdell und Noll, 1992; Bertram und Svendsen, 1997), daß sie, falls mit objektiven Tensoren aufgeschrieben, in jedem Bezugssystem, das sich von anderen Bezugssystemen nur durch eine Starrkörperbewegung und eine Zeitverschiebung unterscheidet, die gleiche Form besitzen oder, gleichbedeutend damit, daß sie invariant bezüglich überlagerter Starrkörperbewegungen sind, was im Rahmen der ingenieurmäßigen Beobachtungsgenauigkeit mit der experimentellen Erfahrung übereinstimmt.

Die Materialgleichungen der Kontinuumsmechanik enthalten häufig eine starke Unbestimmtheit der Materialfunktionen oder -parameter, die rein empirisch festzulegen sind. Es ist deshalb wünschenswert, diese Unbestimmtheit durch Hinzunahme von Informationen über die jeweils spezielle Struktur eines Materials zu verringern. Am Beispiel des Diffusionskriechens polykristalliner Keramik wird gezeigt, daß auf dieser Ebene ein Einfluß von Starrkörperbewegungen erscheint, der allerdings im Hinblick auf die potentielle Anwendung der angestrebten Materialgleichung vernachlässigbar ist, und somit die Objektivität der Materialgleichung in guter Näherung erfüllt bleibt.

## 2 Viskose Kriechgleichung

Für ein inkompressibles Material sei eine lineare Kriechgleichung mit der Viskosität  $\eta$  gegeben

$$s_{kl} = 2\eta d_{kl} \quad s_{kl} = t_{kl} - \frac{1}{3} t_{nn} \delta_{kl} \quad (1)$$

Hier bezeichnen  $t_{kl}$  den Cauchy-Spannungstensor,  $s_{kl}$  seinen Deviator,  $d_{kl}$  die Deformationsgeschwindigkeit und  $\delta_{kl}$  den Einheitstensor. Alle Tensorkoordinaten seien zunächst auf ein raumfestes kartesisches Inertialsystem bezogen, in dem die Koordinaten  $x_k$  der aktuellen Position des typischen Teilchens, welches sich zur Zeit  $t = 0$  in einer Bezugsposition  $X_k$  (gemessen im selben System) befand, zur Zeit  $t$  gemessen werden.

Ein spezieller Wechsel des Bezugssystems, welcher über eine starre Drehung die Koordinaten  $x_k$  in andere kartesische Koordinaten  $\bar{x}_k$  überführt, sei durch den eigentlich orthogonalen, von der Zeit abhängenden Tensor  $Q_{kl}(t)$  gegeben

$$\bar{x}_k = Q_{kl}(t)x_l \quad Q_{kl}Q_{ml} = \delta_{km} \quad |Q_{kl}| = 1 \quad (2)$$

Der mit der aktuellen Position des Teilchens verbundene Cauchy-Spannungstensor, welcher die körperinneren Kontaktkräfte beschreibt, ist per Definition objektiv, d.h., es gilt für dasselbe Teilchen (Truesdell und Noll, 1992)

$$\bar{t}_{kl} = Q_{km}t_{mn}Q_{ln} \quad (3)$$

Die Objektivität der Deformationsgeschwindigkeit ergibt sich aus der Definitionsgleichung für  $d_{kl}$

$$\bar{d}_{kl} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial x_l} + \frac{\partial \dot{x}_l}{\partial x_k} \right) \quad \dot{x}_k = \frac{\partial x_k(X_l, t)}{\partial t} \quad (4)$$

wegen

$$\dot{\bar{x}}_k = (Q_{km} x_m)^\cdot = Q_{km}^\cdot x_m + Q_{km} \dot{x}_m \quad \frac{\partial x_m}{\partial \bar{x}_l} = Q_{lm} \quad (5)$$

und

$$\frac{\partial \dot{\bar{x}}_k}{\partial \bar{x}_l} = Q_{km}^\cdot Q_{lm} + Q_{km} Q_{ln} \frac{\partial \dot{x}_m}{\partial x_n} \quad (6)$$

bzw.

$$\frac{\partial \dot{\bar{x}}_l}{\partial \bar{x}_k} = Q_{lm}^\cdot Q_{km} + Q_{ln} Q_{km} \frac{\partial \dot{x}_n}{\partial x_m} \quad (7)$$

durch Addition der letzten beiden Gleichungen unter Berücksichtigung von

$$(Q_{kl} Q_{ml})^\cdot = \delta_{km}^\cdot = 0 \quad (8)$$

zu

$$\dot{\bar{d}}_{kl} = Q_{km} \dot{d}_{mn} Q_{ln} \quad (9)$$

Mit den Gleichungen (3), (9) entsteht aus Gleichung (1)

$$\bar{s}_{kl} = 2\bar{\eta} \bar{d}_{kl} \quad \bar{s}_{kl} = \bar{t}_{kl} - \frac{1}{3} \bar{t}_{nn} \delta_{kl} \quad (10)$$

wo  $\bar{\eta} = \eta$  ungeändert bleibt.

Die Form der Gleichung (1) unterscheidet sich also, wie gefordert, nicht von der Form der Gleichung (10), deren Bezugssystem wegen der Zeitabhängigkeit  $Q_{kl}(t)$  nicht notwendig inertial ist.

### 3 Mikromechanisches Modell

Die Kriechgleichung (1) mit ihrem Materialparameter  $\eta$  soll für spezielle Materialien mikromechanisch motiviert werden. Es werde eine verunreinigungsfreie polykristalline Keramik (z.B. Aluminiumoxid) betrachtet. In einem solchen Material kann in einem gewissen Temperaturbereich längs der Korngrenzen infolge Selbstdiffusion Materie transportiert werden (Riedel, 1987). Die Materie, welche an einer Stelle einer Korngrenze wegdiffundiert, lagert sich an einer anderen Stelle derselben oder einer anderen Korngrenze wieder an. Die infolge unterschiedlicher Winkel aneinander grenzender Körner gestörte Struktur der Korngrenzen bleibt dabei erhalten. Üblicherweise wird dieser Vorgang zur Vereinfachung in einer ebenen Anordnung betrachtet (Riedel, 1987). Als Antriebskraft für den Diffusionsstrom  $J$  von Molekeln je Zeit- und Längeneinheit der Korngrenzenbreite dient der Gradient des chemischen Potentials (Müller, 1973), welches hier durch die Normalspannungsverteilung  $\sigma_n(z)$  auf der Korngrenze gegeben ist (Riedel, 1987)

$$J = \frac{\delta D_b}{kT} \frac{d\sigma_n(z)}{dz} \quad (11)$$

Hier bezeichnen  $\delta$  die Korngrenzendicke,  $D_b$  den von der absoluten Temperatur  $T$  exponentiell abhängigen Diffusionskoeffizienten,  $k$  die Boltzmann-Konstante und  $z$  eine Koordinate in der als Gerade idealisierten Korngrenze. Für das chemische Potential  $\sigma_n$  wird die thermodynamische Forderung nach Stetigkeit gestellt, und  $J$  muß die Massebilanz erfüllen, welche auf der Korngrenze zu einer Normalverschiebungsgeschwindigkeit

$$\dot{u}_n = -\Omega \frac{dJ}{dz} \quad (12)$$

infolge der Anlagerung von Molekeln des Volumens  $\Omega$  führt.

Die wesentlichen Zusammenhänge zwischen den mikromechanischen Annahmen und der makroskopischen Zähigkeit  $\eta$  sowie die Linearität von Gleichung (1) können durch ein einfaches Modell im ebenen Verzerrungszustand erklärt werden (Riedel, 1987; Coble, 1963). Dabei wird hier zur weiteren Vereinfachung von repräsentativen starren Sechseckkörnern des Polykristalls auf weniger realistische Quadrate übergegangen, wodurch sich nur ein Zahlenfaktor ändert, der für die anschließende Argumentation nicht wesentlich ist. Aus Symmetriegründen wird nur ein Viertel des repräsentativen Kornes betrachtet, das unter einachsiger Zug  $\sigma$  steht (Bild 1).

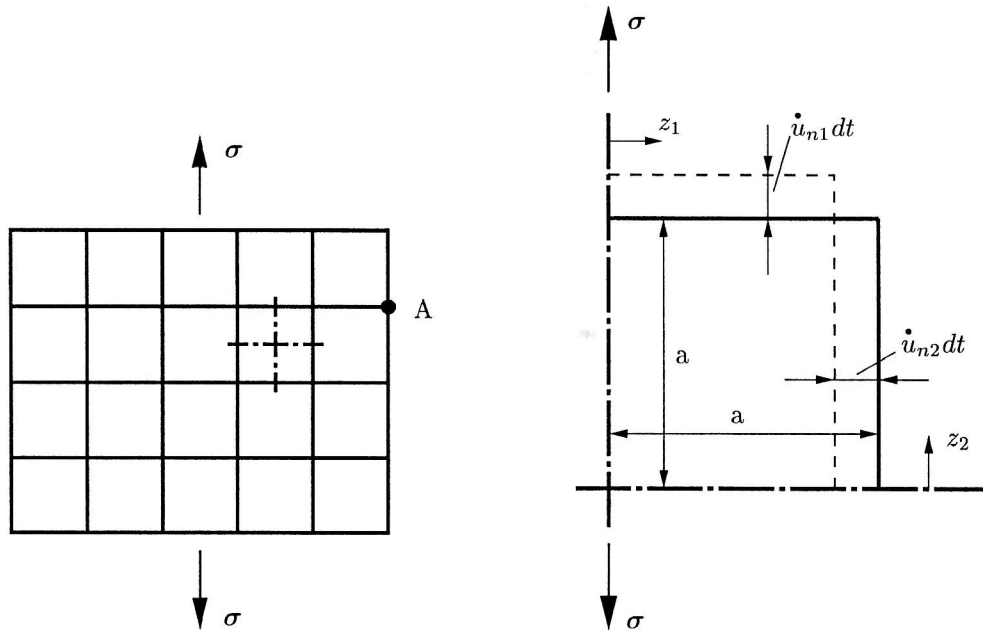


Bild 1. Repräsentatives Korn unter einachsiger Zugspannung

Die Normalverschiebungen  $\dot{u}_{ni}$  sind aus Symmetriegründen unabhängig von den Korngrenzenkoordinaten  $z_i$ . Deshalb kann Gleichung (12) mit Gleichung (11) unter Weglassung des linearen Terms integriert werden

$$\sigma_{ni} = -\frac{kT}{\Omega\delta D_b} \dot{u}_{ni} \left( \frac{1}{2} z_i^2 + B_i \right) \quad (13)$$

Es gilt wegen vorausgesetzter Inkompressibilität

$$\dot{u}_{n1} = -\dot{u}_{n2} \quad (14)$$

Die thermodynamische Stetigkeitsforderung für das chemische Potential

$$\sigma_{n1}(a) = \sigma_{n2}(a) \quad (15)$$

liefert mit den Gleichungen (13), (14)

$$B_1 + B_2 = -a^2 \quad (16)$$

Horizontales Kräftegleichgewicht

$$\int_0^a \sigma_{n2} dz_2 = 0 \quad (17)$$

ergibt  $B_2 = -a^2/6$  bzw.  $B_1 = -5a^2/6$ . Aus dem vertikalen Kräftegleichgewicht

$$\int_0^a \sigma_{n1} dz_1 = \sigma a \quad (18)$$

folgt mit der Korngröße  $L = 2a$  und der effektiven Deformationsgeschwindigkeit  $d_{11} = 2\dot{u}_{n1}/L$  in Gleichung (1)

$$\sigma = \frac{kTL^3}{12\Omega \delta D_b} d_{11} = 3\eta d_{11} \quad (19)$$

Die Linearität von Gleichung (1) wird also bestätigt. Außerdem teilt Gleichung (19) die wichtigen Informationen über die Korngrößen- und Temperaturabhängigkeit (letztere vor allem exponentiell in  $D_b$  enthalten) der Zähigkeit mit. Die Lastgeschichtsunabhängigkeit der Zähigkeit und die ermittelte Korngrößenabhängigkeit bleiben allerdings nur für kleine Verzerrungen bestehen, da sich sonst die Kornform ändert, so daß die Herleitung von Gleichung (19) modifiziert werden muß. Dies hat auch Konsequenzen für die Verwendung der mikromechanisch begründeten Zähigkeit in der isotropen tensoriellen Verallgemeinerung der Gleichung (1). Denn einerseits erscheint es zwar wünschenswert, die gegenüber einem isotropen Ausgangszustand eingeführten, künstlich anmutenden Symmetrien von Bild 1 in der Verallgemeinerung der Gleichung (1) wieder zu vergessen. Damit wird aber andererseits auch der infolge der mikromechanischen Modellierung zu erwartende Effekt einer Belastungsrichtungsänderung eliminiert.

Ergänzend sei noch angemerkt, daß die vorausgesetzten Symmetriebedingungen an den Außenrändern des Polykristalls nicht notwendig gelten. So verschwinden an den freien Rändern die von der Umgebung verursachten Normalspannungen identisch, so daß sich die ursprünglich geraden Oberflächen an den Tripelpunkten A (Bild 1) unter der Wirkung der Korngrenzen- bzw. Oberflächenspannung krümmen (Mullins, 1957).

#### 4 Bezugssystemwechsel

Die benutzten mikromechanischen Voraussetzungen gelten in einem Inertialsystem. Geht man unter Benutzung der Beziehungen (2) auf ein rotierendes Bezugssystem über, so bleibt die makroskopische Kriechgleichung in ihrer Form, wie gezeigt wurde, erhalten. Die durch die Drehung verursachten Massenkräfte sind in den makroskopischen Gleichgewichtsbedingungen zu berücksichtigen. Das mikromechanische Modell muß jedoch überdacht werden. Während sich die spezifischen Massenkräfte der Komponenten von Flüssigkeitsmischungen nicht unterscheiden und deshalb bei der Diffusion herausheben (Müller, 1973), liegt bei der Diffusion von „Korngrenzenmaterie“ an einem Festkörper wegen der unterschiedlichen Beweglichkeit von Korngrenzen- und Kornmaterie eine andere Situation vor.

In einem möglichen Gedankenversuch wird eine quadratische Scheibe betrachtet, die in der Scheibenebene um einen zur Vermeidung von Abgleitungen ganzer Korngruppen symmetrisch angeordneten, festen Drehpunkt mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega = Q_{2k}^* Q_{1k}$  rotiert (Bild 2).

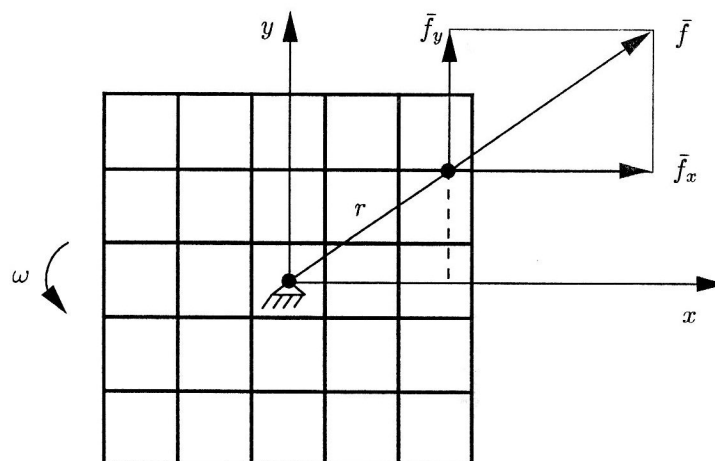


Bild 2: Korngrendiffusion im rotierenden Bezugssystem  $x, y$

Am Punkt  $(x, y) \hat{=} (\bar{x}_1, \bar{x}_1)$  wirkt bei einer Massendichte  $\rho$  die spezifische Volumenkraft

$$\bar{f} = \rho r \omega^2 \quad (20)$$

die sich in die Komponenten

$$\bar{f}_y = \rho\omega^2 y \quad \bar{f}_x = \rho\omega^2 x \quad (21)$$

zerlegen läßt. Die Volumenkraft verursacht über die makroskopischen Gleichgewichtsbedingungen

$$\bar{t}_{kl,k} + \bar{f}_l = 0 \quad (22)$$

in Verbindung mit den Gleichungen (1), (4) und den Bedingungen über die lastfreien Ränder ein Deformationsgeschwindigkeitsfeld. Unter der Wirkung der Komponenten (21) fließen jedoch in den Korngrenzen zusätzliche Diffusionsströme

$$J_\omega = \frac{\delta D_b}{kT} \bar{f}_z \quad (23)$$

wo  $z$  für  $x$  oder  $y$  steht, die mit Gleichung (12) zusätzliche Normalverschiebungsgeschwindigkeiten

$$\dot{u}_{n\omega} = -\frac{\Omega\delta D_b}{kT} \rho\omega^2 \quad (24)$$

liefern. In der Anordnung von Bild 2 verringert sich deshalb die Korngröße zugunsten lokaler Materialanhäufungen in der Umgebung der Randtripelpunkte. Dieser durch die Drehbewegung verursachte Heterogenisierungsvorgang mit der Konsequenz  $\eta \neq \bar{\eta}$  steht nicht im Einklang mit der mikromechanisch motivierten Kriechgleichung (19), wo die Korngröße  $L$  konstant ist, bzw. wo sich im zu modifizierenden Fall großer Kornverzerrungen eine Kornabmessung bei Erhalt der Fläche auf Kosten der anderen ändert.

Abschließend werden die beiden Normalverschiebungsbeiträge abschätzend verglichen. Hierzu wird eine Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  für

$$\dot{u}_{n1} = c|\dot{u}_{n\omega}| \quad (25)$$

bei einer einachsigen Kriechspannung  $\sigma \approx 1\text{MPa}$ , Dichte  $\rho \approx 4\text{gcm}^{-3}$ , Korngröße  $L \approx 100\mu\text{m}$  und  $c = 100$  berechnet.

Aus Gleichung (25) folgt mit den Gleichungen (19), (24)

$$\omega^2 = \frac{6\sigma}{cL^2\rho} \approx 1.5 \cdot 10^9 \text{s}^{-2} \quad (26)$$

bzw.  $\omega \approx 4 \cdot 10^4 \text{s}^{-1}$ . Dieser technisch unrealistisch hohe Wert, der bei Körpern makroskopischer Abmessungen zur Überschreitung der Festigkeit führen kann, gibt Anlaß zur Vernachlässigung des Effektes eines Bezugssystemwechsels auf die mikromechanisch motivierte Kriechgleichung.

Die Tatsache, daß mikromechanische Annahmen zur Aufstellung von makroskopischen Stoffgleichungen der Kontinuumsmechanik zu Widersprüchen mit dem Objektivitätsprinzip führen können, wurde bereits an Beispielen gezeigt, die auf kinetischen Theorien beruhen, so bei der Begründung des Fourierschen Wärmeleitgesetzes (Müller, 1976). Diesbezüglich werden in (Wilmanski, 1991) Winkelgeschwindigkeiten  $> 10^6 \text{s}^{-1}$  genannt, bei denen eine merkliche Wirkung des Bezugssystemwechsels erwartet wird. Gemeinsame Ursachen für den Effekt des Bezugssystemwechsels scheinen in der Relativbewegung einzelner Bestandteile des Kontinuums und im Auftreten von charakteristischen Längen im mikromechanischen bzw. mikroskopischen Skalenbereich zu liegen wie die Korngröße bzw. die mittlere freie Weglänge des Elektrons.

## 5 Zusammenfassung und Ausblick

Die für ein genaueres Verständnis spezieller makroskopischer Kriechgleichungen der Kontinuumsmechanik hinzuzunehmenden mikromechanischen Annahmen und Informationen führen dazu, daß die Forderung nach strenger Gültigkeit des Objektivitätsprinzips aufgegeben werden muß, wobei auf dem Skallenniveau konventioneller Anwendungen Effekte zu erwarten sind, die nicht bedeutsamer sein sollten als diejenigen, welche infolge der mikromechanischen Idealisierungen ohnehin vernachlässigt werden.

In den obigen Darlegungen wurden Volumendiffusionsströme von Zwischengitteratomen (Riedel, 1987) nicht einbezogen. Hier wäre ein ähnlich geringer Effekt überlagerter Starrkörperbewegungen zu erwarten wie im Fall der Korngrenzendiffusion. Die Modellierung beider Diffusionsströme und ihrer Wirkung auf die Form eines einzelnen Korns außerhalb der Mittelung für einen makroskopischen Körper sollte dagegen auf diesem Skalenniveau, das keinen Bezug auf kinetische Theorien nimmt, ohne Widersprüche zum Objektivitätsprinzip in einem Anfangsrandwertproblem möglich sein.

Der Autor dankt H.-J. Weiß, M. Bobeth, H.-A. Bahr und A. Bertram für die gewährten Fachdiskussionen und Th. Pyttel für die Druckvorbereitung des Manuskripts.

#### Literatur

1. Truesdell, C.; Noll, W.: The Non-Linear Field Theories of Mechanics, Berlin (1992)
2. Bertram, A.; Svendsen, B.: On Material Objectivity and Reduced Constitutive Equations, Preprint IFME 97/2, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg (1997)
3. Riedel, H.: Fracture at High Temperature, Berlin (1987)
4. Müller, I.: Thermodynamik, Grundlagen der Materialtheorie, Düsseldorf (1973)
5. Coble, R.L.: A Model for Boundary Diffusion Controlled Creep in Polycrystalline Materials, J. Appl. Phys. 34(1963), 1679-1682
6. Mullins, W.W.: Theory of Thermal Grooving, J. Appl. Phys. 28(1957), 333-339
7. Müller, I.: On The Frame Dependence of Electric Current and Heat Flux in a Metal, Acta Mechanica 24(1976), 117-128
8. Wilmanski, K.: Thermodynamics of Continua, Warsaw (1991)

---

*Anschrift:* Professor Dr.-Ing. Herbert Balke, Institut für Festkörpermechanik, Technische Universität Dresden, D-01062 Dresden