

Nichtlineare Schalentheorie in konvektiver Beschreibung mit anisotroper Plastizität

V. Ulbricht, T. Pyttel, R. John

Ausgehend von den Grundgleichungen des dreidimensionalen Kontinuums wird eine geometrisch und physikalisch nichtlineare Schalentheorie in konvektiver Metrik angegeben. Kern des nichtlinearen Anfangs- Randwertproblems ist ein lineares Randwertproblem für die Geschwindigkeiten. Dieses lineare Randwertproblem wird mit der Methode der Finiten Elemente gelöst und ist in ein DGL- System 1. Ordnung bezüglich der Zeit eingebettet. Anhand von zwei Beispielen wird die Anwendbarkeit des programmierten Algorithmus auf Probleme mit großen Deformationen unter Berücksichtigung von elastisch-plastischem, anisotropem Materialverhalten demonstriert.

1 Kinematik des dreidimensionalen Kontinuums

Die Vielfalt der unterschiedlichen Beschreibungsweisen der Kontinuumsmechanik hat ihre Ursache darin, daß es bei der Wahl der unabhängigen Koordinaten, des Basisvektorensystems sowie der kinetischen und kinematischen Variablen jeweils mehrere Möglichkeiten gibt. Die klassischen Beschreibungsweisen sind die Lagrangesche und die Eulersche. Im Rahmen dieses Artikels wird die konvektive Beschreibung verwendet. Sie vereint einfache kinematische Beziehungen mit gut interpretierbaren kinetischen Variablen. Als unabhängige Koordinaten werden die zeitlich konstanten Parameter θ^λ und die Zeit t verwendet. Im Gegensatz zu den beiden erstgenannten Beschreibungsweisen sind die Form der Koordinatenlinien, das Basisvektorensystem und die Metrik zeitlich veränderlich.

Ausgangspunkt der Betrachtungen ist die Bewegung eines materiellen Teilchens, die durch den Ortsvektor

$$\vec{r} = x^k(\theta^\lambda, t) \vec{e}_k \quad (1)$$

beschrieben wird. Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist \vec{r} identisch mit dem die Ausgangskonfiguration kennzeichnenden Vektor \vec{R} . Die Beziehung zwischen den Differentialen dieser Vektoren vermittelt der Deformationsgradient

$$d\vec{r} = \mathbf{F} \cdot d\vec{R} \quad (2)$$

Durch partielle Ableitung des Ortsvektors nach den Parametern θ^λ ist das veränderliche Basisvektorensystem

$$\vec{g}_\lambda = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta^\lambda} = \vec{g}_\lambda(\theta^\lambda, t) \quad (3)$$

definiert. Die Differenz zwischen den Vektoren \vec{R} und \vec{r} beschreibt der Verschiebungsvektor \vec{u} , woraus durch die materielle Zeitableitung der Geschwindigkeitsvektor \vec{v} bestimmt wird. Mit Hilfe des eingeführten Deformationsgradienten kann der Eulersche Verzerrungstensor und der Geschwindigkeitsgradient in der Form

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - (\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T)^{-1}) \quad \mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{d} + \mathbf{w} \quad (4)$$

gebildet werden. Die Beachtung der Festlegungen bezüglich der konvektiven Beschreibung liefert die folgenden linearen Beziehungen zwischen den Koordinaten der Deformationsgeschwindigkeit \mathbf{d} und der materiellen Zeitableitung der Koordinaten des Eulerschen Verzerrungstensors sowie zwischen den Koordinaten der Deformationsgeschwindigkeit und der kovarianten Ableitung der Koordinaten des Geschwindigkeitsvektors:

$$d_{\lambda\mu} = \dot{\varepsilon}_{\lambda\mu} \quad d_{\lambda\mu} = \frac{1}{2}(v_\lambda |_\mu + v_\mu |_\lambda) \quad (5)$$

2 Kinetik des dreidimensionalen Kontinuums

Spannungstensoren definieren den Zusammenhang zwischen einem gerichteten Flächenelement und einem Spannungsvektor. Diese Definition kann in der Referenzkonfiguration, in einer beliebigen Zwischenkonfiguration sowie in der Momentankonfiguration in der Form

$$d\vec{S}_0 = \mathbf{T}^T \cdot d\vec{A}_0 \quad d\vec{S}_z = \mathbf{T}_z^T \cdot d\vec{A}_z \quad d\vec{S} = \boldsymbol{\sigma}^T \cdot d\vec{A} \quad (6)$$

erfolgen. Die so festgelegten Tensoren sind der 2. Piola-Kirchhoffsche Spannungstensor \mathbf{T} , der Eulersche Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ sowie ein auf die Zwischenkonfiguration bezogener Spannungstensor \mathbf{T}_z . Durch das Überschieben der Gleichgewichtsbedingung und der Randbedingung

$$\vec{G} = \vec{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma}^T + \rho \vec{f} = \vec{0} \quad \vec{R} = \vec{p} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n} = \vec{0} \quad (7)$$

mit der virtuellen Geschwindigkeit $\delta \vec{v}$ in der Form

$$\int_V (\sqrt{g} \vec{G}) \cdot \delta \vec{v} dV + \int_{O_p} (\vec{R}) \cdot \delta \vec{v} dA = 0 \quad (8)$$

und die Anwendung des Green-Gaußschen Integralsatzes entsteht das Variationsprinzip für die Geschwindigkeiten

$$0 = \delta \Pi_i + \delta \Pi_a$$

$$\delta \Pi_i = - \int_V \{ \overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} : \delta \mathbf{d} + \mathbf{I} : (\mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\sigma}^T \cdot \delta \mathbf{L}^T) \} dV \quad \delta \Pi_a = \int_{O_p} (\vec{p} dA) \cdot \delta \vec{v} + \int_V (\rho \dot{\vec{f}} \cdot \delta \vec{v}) dV \quad (9)$$

Dabei repräsentiert die Größe $\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}}$ die Truesdellsche Spannungsgeschwindigkeit.

3 Konstitutive Beziehungen des dreidimensionalen Kontinuums

Um das Variationsprinzip (9) einer Lösung zugänglich zu machen, müssen konstitutive Beziehungen zwischen der Truesdellschen Spannungsgeschwindigkeit und der Deformationsgeschwindigkeit formuliert werden. Das Ziel ist ein Deformationsgesetz zur Beschreibung von anisotropem Materialverhalten bei großen elastisch-plastischen Deformationen. Dazu werden folgende Annahmen getroffen:

- Der Deformationsgradient \mathbf{F} wird multiplikativ in einen elastischen und einen plastischen Anteil zerlegt:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \cdot \mathbf{F}^p \quad (10)$$

- Dem Kontinuum wird eine **Substruktur** zugeordnet (Dafalias, 1987), deren Verhalten sich während des elastischen Deformationsanteils mit \mathbf{F}^e und während des plastischen Deformationsanteils mit einer reinen Drehung $\boldsymbol{\beta}$ beschreiben läßt.

Die so definierte Substruktur kann als ein zusätzliches Koordinatensystem verstanden werden, das ausgezeichnete Richtungen, z.B. die der Orthotropieachsen, kennzeichnet. Sie ist ein Hilfsmittel zur verbesserten Beschreibung von anisotropem Materialverhalten. Tensoren werden mit den Basisvektoren \vec{g}_μ in der Momentankonfiguration, mit \vec{G}_μ in der Referenzkonfiguration und mit $\vec{\gamma}_\mu$ in der durch die Zerlegung (10) eingeführten Zwischenkonfiguration dargestellt. Da das Deformationsgesetz in dieser im weiteren mit dem Fußzeiger z gekennzeichneten Zwischenkonfiguration definiert wird, sind entsprechende Transformationen in die Momentankonfiguration nötig. In Analogie zu der Beziehung zwischen Eulerschem und Lagrangeschem Verzerrungstensor sowie zwischen Cauchyschem und 2. Piola-Kirchhoffschem Spannungstensor erfolgen diese Transformationen unter Verwendung des elastischen Anteils des Deformationsgradienten in der Form

$$\mathbf{E}_z = \mathbf{F}^{eT} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{F}^e \quad \mathbf{T}_z = J^e \mathbf{F}^{e-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{e-T} \quad (11)$$

Die Zeitableitungen werden bezüglich der Referenz der Substruktur nach dem Konzept der Lee- Ableitungen gebildet

$$\hat{\underline{\mathbf{E}}}_z = \underline{\beta} \cdot (\underline{\beta}^T \cdot \underline{\mathbf{E}}_z \cdot \underline{\beta}) \bullet \cdot \underline{\beta}^T \quad \hat{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_z = \mathbf{F}^{e-T} \cdot \underline{\beta} \cdot (\underline{\beta}^T \cdot \mathbf{F}^{eT} \cdot \underline{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{F}^e \cdot \underline{\beta}) \bullet \cdot \underline{\beta}^T \cdot \mathbf{F}^{e-1} \quad (12)$$

Den Ausgangspunkt für die Definition eines elastischen Teildeformationsgesetzes bildet die elastische Ergänzungsenergie U_z^* . Sie ist eine Funktion des auf die Zwischenkonfiguration bezogenen Spannungstensors $\underline{\mathbf{T}}$ und eines Satzes von Strukturtenoren $\underline{\mathbf{A}}$. Durch die partielle Differentiation

$$\underline{\mathbf{E}}_z^e = \rho_z \frac{\partial U_z^*(\underline{\mathbf{T}}, \underline{\mathbf{A}})}{\partial \underline{\mathbf{T}}} \quad (13)$$

wird der elastische Anteil des Verzerrungstensors $\underline{\mathbf{E}}_z$ festgelegt. Den plastischen Deformationsanteil definiert die Fließbedingung

$$f_z(\underline{\mathbf{T}}, \underline{\mathbf{A}}) = 0 \quad (14)$$

und das Fließgesetz

$$\underline{\mathbf{D}}_z^p = \lambda \underline{\mathbf{N}}_z^p(\underline{\mathbf{T}}, \underline{\mathbf{A}}) \quad \underline{\mathbf{W}}_z^p = \lambda \underline{\boldsymbol{\Omega}}_z^p(\underline{\mathbf{T}}, \underline{\mathbf{A}}) \quad (15)$$

in der Zwischenkonfiguration. Die Größe $\underline{\mathbf{W}}_z^p$ dient zur Beschreibung der Eigenschaften des Verhaltens der Substruktur. Mit ihr ist die Entwicklung des Drehtensors $\underline{\beta}$ bestimmt. Das Verfestigungsgesetz

$$\hat{\underline{\mathbf{A}}}_z = \lambda \bar{\underline{\mathbf{A}}}_z(\underline{\mathbf{T}}, \underline{\mathbf{A}}) \quad (16)$$

stellt die Gleichungen für die Veränderung der Strukturtenoren bereit. Bevor die Beziehung

$$\underline{\mathbf{d}} = \underline{\mathbf{d}}^e + \underline{\mathbf{d}}^p \quad (17)$$

für den Aufbau des elastisch-plastischen Deformationsgesetzes genutzt werden kann, ist eine Transformation der auf die Zwischenkonfiguration bezogenen Größen in die Momentankonfiguration nötig. Die durch materielle Zeitableitung der Fließbedingung entstehende Konsistenzbedingung erlaubt die Bestimmung des skalaren Belastungsfaktors λ in Abhängigkeit von der Deformationsgeschwindigkeit. Damit stehen alle Gleichungen bereit, so daß das gesuchte Deformationsgesetz als tensorlineare Beziehung in der Form

$$\underline{\mathbf{J}} = \underline{\mathbf{C}} : \underline{\mathbf{d}} \quad (18)$$

angegeben werden kann.

4 Kinematik der Schale

Es wird die Normalenhypothese vorausgesetzt. Damit erfolgt die Darstellung des Ortsvektors des Schalenraumes $\vec{\mathbf{r}}$ durch den der Schalenmittelfläche $\vec{\mathbf{r}}$ und den auf der Schalenmittelfläche stehenden Normaleneinheitsvektor $\vec{\mathbf{n}}$ in der Form

$$\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}} + \theta^3 h \vec{\mathbf{n}} = \vec{\mathbf{r}}(\theta^\lambda, t) \quad (19)$$

Diese additive Zerlegung in Größen, die in der Schalenmittelfläche liegen und Größen, die senkrecht dazu stehen, ist für die weitere Schalentheorie grundlegend. Entsprechend dem Vorgehen beim dreidimensionalen Kontinuum werden ausgehend von dem Ortsvektor (19) die Basisvektoren des Schalenraumes

$$\vec{\mathbf{g}}_\alpha = \vec{\mathbf{a}}_\alpha + \theta^3 (h \vec{\mathbf{n}})_{,\alpha} \quad \vec{\mathbf{g}}_3 = h \vec{\mathbf{n}} \quad (20)$$

und der Geschwindigkeitsvektor

$$\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}} + \theta^3 h (\dot{\vec{\omega}} + \frac{\dot{h}}{h} \vec{\mathbf{n}}) \quad (21)$$

bestimmt. Dabei sind $\vec{\mathbf{a}}_\alpha$ die Basisvektoren der Schalenmittelfläche, $\vec{\mathbf{v}}$ die Geschwindigkeit der Schalenmittelfläche und $\vec{\omega}$ die materielle Zeitableitung des Normaleneinheitsvektors. Mit Hilfe der linearen

Beziehung (5b) folgen ausgehend von der Gleichung (21) und mit Vernachlässigung von Gliedern, die die Größenordnung des Produktes aus Dickenänderung und Krümmung besitzen, die Deformationsgeschwindigkeiten der Schale

$$\begin{aligned} d_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \left\{ (S_{\alpha}^{\gamma} \delta_{\beta}^{\delta} + S_{\beta}^{\gamma} \delta_{\alpha}^{\delta}) \left[d_{\gamma\delta} + \theta^3 d_{\gamma\delta} \right] + \theta^{3^2} (h_{,\alpha} h_{,\beta})^{\bullet} \right\} \\ d_{\alpha 3} &= \frac{1}{4} \theta^3 [(h^2)_{,\alpha}]^{\bullet} \\ d_{33} &= \dot{h} h \end{aligned} \quad (22)$$

Da vereinbarungsgemäß der Vektor \vec{n} senkrecht auf der Schalenmittelfläche steht, ist durch die materielle Zeitableitung der Beziehung $\vec{a}_{\alpha} \cdot \vec{n} = 0$ die Geschwindigkeitsformulierung der Zwangsbedingung

$$0 = \vec{v}_{,\alpha} \cdot \vec{n} + \vec{a}_{\alpha} \cdot \vec{w} \quad (23)$$

gegeben.

5 Kinetik der Schale

Die resultierenden Schnittgrößen der Schale werden durch die Integration der entsprechenden Spannungskordinaten über die Koordinate in Dickenrichtung der Schale in der Form

$$n^{\alpha\beta} = \int_{-\theta^{3-}}^{+\theta^{3+}} \sqrt{\frac{g}{a}} \sigma^{\alpha\gamma} S_{\gamma}^{\beta} d\theta^3 \quad m^{\alpha\beta} = \int_{-\theta^{3-}}^{+\theta^{3+}} \sqrt{\frac{g}{a}} \sigma^{\alpha\gamma} S_{\gamma}^{\beta} \theta^3 d\theta^3 \quad (24)$$

definiert. Analog zu den Koordinaten der Truesdellschen Spannungsgeschwindigkeit existieren zugeordnete objektive Schnittgrößengeschwindigkeiten:

$$\dot{n}^{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{a}} (\sqrt{a} n^{\alpha\beta})^{\bullet} + n^{\alpha\gamma} a^{\delta\beta} d_{\delta\gamma} \quad \dot{m}^{\alpha\beta} = \frac{1}{h\sqrt{a}} (h\sqrt{a} m^{\alpha\beta})^{\bullet} + m^{\alpha\gamma} a^{\delta\beta} d_{\delta\gamma} \quad (25)$$

Durch die Elimination der für eine zweidimensionale Kontinuumstheorie unzulässigen Größen kann ausgehend von dem Variationsprinzip für die Geschwindigkeiten des dreidimensionalen Kontinuums (9) das Variationsprinzip für die Schale

$$\begin{aligned} \delta\Pi_i + \delta\Pi_a + \delta\Pi_n &= 0 \\ \delta\Pi_i &= \int_{\mathcal{M}} \left\{ \dot{n}^{\alpha\beta} \delta d_{\beta\alpha} + \dot{m}^{\alpha\beta} \delta d_{\beta\alpha} \right\} dA \\ &\quad + \int_{\mathcal{M}} \left\{ q^{\alpha} \left(\omega^{\beta} \delta d_{\beta\alpha} + d_{\beta\alpha} \delta \omega^{\beta} \right) + n^{\alpha\gamma} \tilde{v} \|_{\gamma} \delta \tilde{v} \|_{\alpha} + m^{\gamma\delta} b_{\delta\gamma} h \omega^{\alpha} \delta \omega_{\alpha} + m^{\alpha\gamma} b_{\alpha}^{\beta} h \tilde{v} \|_{\gamma} \delta \omega_{\beta} \right\} dA \\ \delta\Pi_a &= \int_{\mathcal{C}} \left\{ (\sqrt{c} N^k)^{\bullet} (c_k^{\alpha} \delta \tilde{v}_{\alpha} + n_k \delta \tilde{v}) \right\} \frac{dS}{\sqrt{c}} + \int_{\mathcal{C}} \left\{ (\sqrt{ch} M^{\alpha})^{\bullet} \delta \omega_{\alpha} + (\sqrt{ch} M^{\alpha}) a^{\gamma\beta} d_{\gamma\alpha} \delta \omega_{\beta} \right\} \frac{dS}{\sqrt{c}} \\ \delta\Pi_n &= \int_{\mathcal{M}} \dot{\lambda}^{\alpha} (b_{\alpha}^{\beta} \delta \tilde{v}_{\beta} + \delta \tilde{v}_{,\alpha} + \delta \omega_{\alpha}) dA \end{aligned} \quad (26)$$

hergeleitet werden (Ulbricht, 1986). Die Zwangsbedingung wurde dabei mittels eines Lagrangeschen Multiplikators, der zur Berechnung der Querkraft genutzt werden kann, in das Variationsprinzip eingeführt. Bezüglich der äußeren Anteile $\delta\Pi_a$ sei erwähnt, daß diese sich sehr übersichtlich in der symbolischen Schreibweise angeben lassen. Die hier gewählte Koordinatendarstellung stellt eine Beschränkung auf raumfeste Randkräfte und körperfeste Randmomente dar.

6 Konstitutive Beziehungen der Schale

Die konstitutiven Beziehungen des dreidimensionalen Kontinuums (18) werden ausgehend von den Annahmen

$$\dot{\sigma}^{33} = 0 \quad d_{\alpha 3} = 0 \quad d_{33} = \dot{h} h \quad (27)$$

für den Fall des ebenen Spannungszustandes modifiziert. Alle konstitutiven Ansätze folgen dem Konzept isotroper Tensorfunktionen. Ein Ansatz für die Beschreibung von elastisch isotropem Materialverhalten kann mit der in \mathbf{T} quadratischen Beziehung

$$U_z^*(\mathbf{T}) = d_0 \mathbf{I} : \mathbf{T}^2 + d_1 (\mathbf{I} : \mathbf{T})^2 \quad (28)$$

angegeben werden. Die Ausführung der partiellen Differentiation (13) und die Einarbeitung der Annahmen bezüglich der 3-Richtung ermöglicht die Bestimmung der Koordinaten des elastischen Anteils des Verzerrungstensors in der betrachteten Ebene

$$E_{\alpha\beta}^{e\text{ESSZ}} = \rho_z [d_0 (\gamma_{\delta\alpha}\gamma_{\beta\gamma} + \gamma_{\delta\beta}\gamma_{\alpha\gamma}) + 2d_1\gamma_{\beta\alpha}\gamma_{\gamma\delta}] T_z^{\delta\gamma} \quad \text{und mit} \quad E_{33}^e = \rho_z 2d_1 \gamma_{33} \gamma_{\gamma\delta} T_z^{\delta\gamma} \quad (29)$$

senkrecht dazu. Die Größen $\gamma_{\alpha\beta}$ sind die Metrikkoeffizienten der Zwischenkonfiguration. Die Beschreibung von kinematisch und isotrop verfestigendem Material gelingt mit dem Spannungsdeviator \mathbf{S} sowie den Strukturtenoren α und ε_v^p über den Ansatz

$$\begin{aligned} f_z(\mathbf{S}, \alpha, \varepsilon_v^p) &= \frac{3}{2} (\mathbf{S} - \alpha) : (\mathbf{S} - \alpha) - \sigma_F^2(\varepsilon_v^p) \\ &= \frac{3}{2} \left[\gamma_{\alpha\gamma}\gamma_{\beta\delta} (\mathbf{S}^{\alpha\beta} - \alpha^{\alpha\beta}) (\mathbf{S}^{\delta\gamma} - \alpha^{\delta\gamma}) + \gamma_{33}\gamma_{33} (\mathbf{S}^{33} - \alpha^{33})^2 \right] - \sigma_F^2(\varepsilon_v^p) \end{aligned} \quad (30)$$

Ausgehend von der assoziierten Fließregel läßt sich die plastische Deformationsgeschwindigkeit durch partielle Differentiation der Fließbedingung in der Form

$$\mathbf{D}_z^p = \lambda \frac{\partial f_z(\mathbf{S}, \alpha, \varepsilon_v^p)}{\partial \mathbf{T}} \quad (31)$$

$$D_{\alpha\beta}^p = \lambda 3 \gamma_{\alpha\gamma}\gamma_{\beta\delta} (\mathbf{S}^{\delta\gamma} - \alpha^{\delta\gamma}) \quad D_{33}^p = \lambda 3 \gamma_{33} \gamma_{33} (\mathbf{S}^{33} - \alpha^{33})$$

bestimmen. Für die plastische Winkelgeschwindigkeit \mathbf{W}^p wird unter Beachtung der Regel der Äquivalenz der einfachste lineare Ansatz

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_z^p &= \lambda c_1 (\alpha \cdot \mathbf{T} - \mathbf{T} \cdot \alpha) \\ W_{\alpha\beta}^p &= \lambda c_1 (\gamma_{\alpha\delta} \alpha^{\delta\gamma} N_{\gamma\beta}^n - N_{\alpha\gamma}^n \alpha^{\gamma\delta} \gamma_{\delta\beta}) \quad W_{33}^p = 0 \end{aligned} \quad (32)$$

gewählt. Die Verfestigungsgesetze liefern die Entwicklungsgleichungen der Strukturtenoren α und ε_v^p . Der lineare Ansatz

$$\dot{\alpha} = \lambda (\bar{b}_1 \mathbf{I} + \bar{b}_2 \alpha + \bar{b}_3 \mathbf{T}) \quad (33)$$

kann durch eine entsprechende Wahl der Koeffizientenfunktionen \bar{b}_i an das Verfestigungsgesetz nach Prager

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}^{\alpha\beta} &= \lambda (b_3 \gamma^{\alpha\delta} N_{\delta\gamma}^n \gamma^{\gamma\beta}) - L^{p\alpha}{}_{\delta} \alpha^{\delta\beta} - L^{p\beta}{}_{\delta} \alpha^{\delta\alpha} \\ \dot{\alpha}^{33} &= \lambda (b_3 \gamma^{33} N_{33}^n \gamma^{33}) - L^{p3}{}_{3} \alpha^{33} - L^{p3}{}_{3} \alpha^{33} \end{aligned} \quad (34)$$

angepaßt werden. Die Beziehung

$$\dot{\varepsilon}_v^p = \lambda 2 \sigma_v(\mathbf{S}, \alpha) \quad (35)$$

basiert auf der plastischen Deformationsleistung.

Den Zugang zu der Beschreibung plastisch orthotropen Materialverhaltens liefern die Strukturtenoren zweiter Stufe \mathbf{A}_1 und \mathbf{A}_2 . Die in der symbolischen Schreibweise angegebenen Ansätze (John, 1996) für die Fließbedingung und die plastische Winkelgeschwindigkeit lassen sich nach Einarbeitung der Annahmen (27) in der Form

$$\begin{aligned} f_z &= a_4 \{ A_{1\alpha\beta} T_z^{\beta\alpha} A_{2\gamma\delta} T_z^{\delta\gamma} - 1/2 (A_{1\alpha\beta} T_z^{\beta\alpha} A_{1\gamma\delta} T_z^{\delta\gamma} + A_{2\alpha\beta} T_z^{\beta\alpha} A_{2\gamma\delta} T_z^{\delta\gamma}) \} \\ &\quad - a_5 \{ 1/2 (A_{1\alpha\beta} T_z^{\beta\alpha} A_{1\gamma\delta} T_z^{\delta\gamma}) \} - a_6 \{ 1/2 (A_{2\alpha\beta} T_z^{\beta\alpha} A_{2\gamma\delta} T_z^{\delta\gamma}) \} \\ &\quad + a_7 \{ A_{1\gamma\beta} T_z^{\beta\alpha} \gamma_{\alpha\delta} T_z^{\delta\gamma} - A_{1\alpha\beta} T_z^{\beta\alpha} A_{1\gamma\delta} T_z^{\delta\gamma} \} + a_8 \{ A_{2\gamma\beta} T_z^{\beta\alpha} \gamma_{\alpha\delta} T_z^{\delta\gamma} - A_{2\alpha\beta} T_z^{\beta\alpha} A_{2\gamma\delta} T_z^{\delta\gamma} \} \\ &\quad - \sigma_F^2(\varepsilon_v^p) \end{aligned} \quad (36)$$

$$\Omega_{\alpha\beta}^p = c_2(A_{2\alpha\gamma} T^{\gamma\delta} A_{1\delta\beta} - A_{1\alpha\gamma} T^{\gamma\delta} A_{2\delta\beta}) \quad \Omega_{33}^p = 0 \quad (37)$$

angeben. Die Koordinaten der Strukturtenoren werden mit den die Substruktur kennzeichnenden Basisvektoren $\vec{e}_k = \beta^\mu_k \vec{\gamma}_\mu$ zu

$$\mathbf{A}_i = A_i^{\mu\nu} \vec{\gamma}_\mu \vec{\gamma}_\nu = \vec{e}_{s(k)} \vec{e}_{s(k)} = \beta^\mu_{(k)} \beta^\nu_{(k)} \vec{\gamma}_\mu \vec{\gamma}_\nu \quad (38)$$

bestimmt.

Für die Einbeziehung der konstitutiven Beziehungen in die Variationsgleichung (26) werden zunächst die objektiven Schnittgrößengeschwindigkeiten (25) durch die Koordinaten der Truesdellschen Spannungsgeschwindigkeit dargestellt. Die Einarbeitung der für den ebenen Spannungszustand modifizierten Beziehung (18) liefert die Zusammenhänge zwischen den Schnittgrößengeschwindigkeiten und den Deformationsgeschwindigkeiten der Schale

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{n}}^{\alpha\beta} &= A_{(0)}^{\alpha\beta\gamma\delta} d_{\delta\gamma} + A_{(1)}^{\alpha\beta\gamma\delta} d_{\delta\gamma} \\ \dot{\mathbf{m}}^{\alpha\beta} &= A_{(1)}^{\alpha\beta\gamma\delta} d_{\delta\gamma} + A_{(2)}^{\alpha\beta\gamma\delta} d_{\delta\gamma} \end{aligned} \quad (39)$$

Die Größen $A_{(i)}^{\alpha\beta\gamma\delta}$ werden als Schalensteifigkeiten bezeichnet.

7 Numerische Verfahren

Das Kernstück des nichtlinearen **Anfangs-Randwertproblems** ist ein lineares Randwertproblem für die Verschiebungsgeschwindigkeitsfelder. Die Diskretisierung dieser Randwertaufgabe, die in Form einer Variationsgleichung vorliegt, kann vorteilhaft mit Hilfe der Methode der Finiten Elemente erfolgen. Sind wie im vorliegenden Fall alle das Feldproblem charakterisierenden Gleichungen in Abhängigkeit von den krummlinigen Parametern θ^α formuliert, so liegt es nahe, das klassische Konzept zu verwenden (Harte u.a., 1986). Hierbei werden die Ansatzfunktionen unmittelbar auf den krummlinigen Koordinaten definiert. Die exakte Erfassung der Schalengeometrie steht als wesentlicher Vorteil einer nur näherungsweisen Beschreibung von Starrkörperbewegungen entgegen. In Abhängigkeit von der zu behandelnden Randwertaufgabe existieren unterschiedliche Stetigkeitsforderungen an die Ansatzfunktionen. Wird die aus der Normalenhypothese folgende Zwangsbedingung mit der Lagrangeschen Multiplikatormethode im Variationsprinzip berücksichtigt, so ist die Forderung von C^0 -Stetigkeit für die Ableitung der Elementbeziehungen hinreichend. Dieser Forderung genügen Lagrangepolynome, die im weiteren benutzt werden. Letztlich ist es möglich, entweder viele kleine Elemente zu verwenden, deren Interpolationspolynome einen niedrigen Grad besitzen oder wenige große Elemente mit einem hohen Polynomgrad. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird die zweite Variante bevorzugt.

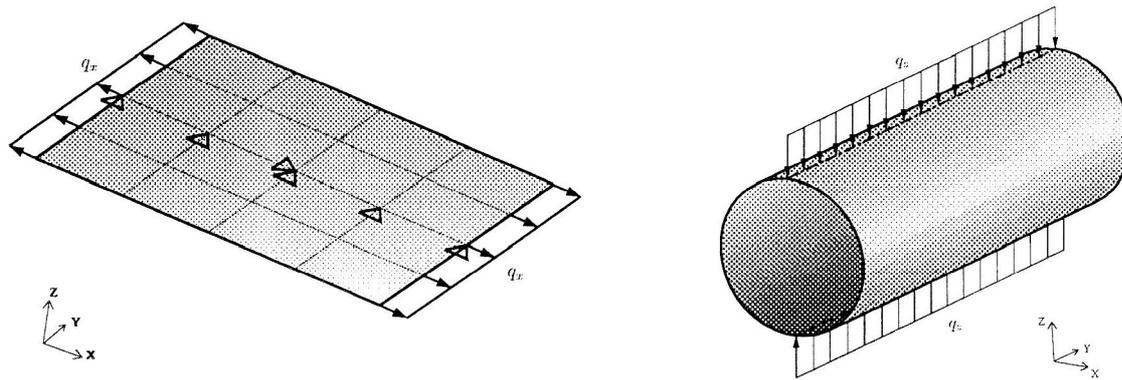


Bild 1. Geometrie und Belastung der beiden Beispiele

Die Aufbereitung der Elementsteifigkeitsbeziehung folgt dem Konzept der Verschiebungsgrößenmethode. Mit der die Lagrangepolynome beinhaltenden Funktionsmatrix $\overset{\star}{\mathbf{M}}$ und den zugeordneten Freiwerten $\overset{\star}{\mathbf{v}}$ stellt

$$\mathbf{v} = \overset{\star}{\mathbf{M}} \overset{\star}{\mathbf{v}} \quad (40)$$

die diskrete Formulierung für die in der Spaltenmatrix \mathbf{v} eingeordneten Koordinaten des Geschwindigkeitsvektors der Schalenmittelfläche \vec{v} und des Vektors $\vec{\omega}$ dar. Damit kann die Beziehung (26) in die algebraisierte Variationsgleichung

$$0 = \delta \mathbf{v}^T \left\{ \int_{\mathcal{M}} [\mathbf{A}_m \mathbf{v}^*] dA + \int_c [\mathbf{A}_c \mathbf{v}^* + \mathbf{a}_c] dS \right\} \quad (41)$$

überführt werden, aus der nach Ausführen der Integration ein lineares Gleichungssystem für die kinematischen Freiwerte \mathbf{v}^* abgeleitet wird. Für die numerische Behandlung des nichtlinearen Anfangswertproblems wird das Runge-Kutta-Verfahren zweiter Ordnung verwendet. Ausgehend von einem bekannten Zustand \mathbf{z}_0 zur Zeit t_0 wird der neue Zustand \mathbf{z} zur Zeit t mit Hilfe von Zuwächsen bestimmt. Die Berechnung dieser Zuwächse erfolgt auf der Grundlage der Geschwindigkeitslösung des linearen Randwertproblems.

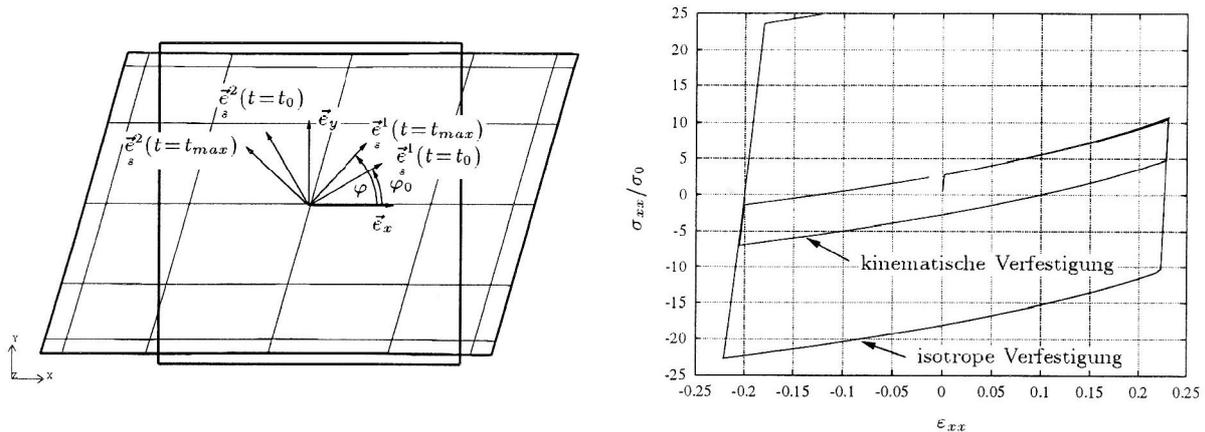


Bild 2. Verformte Struktur bei orthotropem und Spannungs-Dehnungsverlauf bei nichtorthotropem Material (1. Beispiel)

8 Beispiele

Materialkennwerte:	Elastizitätsmodul	$E = 1.6 \cdot 10^3 \sigma_0$
	Querkontraktionszahl	$\nu = 0.3$
	isotrope Verfestigung	$\sigma_{f0} = 2.79 \sigma_0$
		$e_1 = 9.7 \quad e_2 = 10^{-3} \quad e_3 = 1.02$
	kinematische Verfestigung	$c_1 = 0.0$
		$b_1 = 0.0 \quad b_2 = 0.0 \quad b_3 = 6.0$
	kubische Orthotropie	$c_2 = 1.3 \quad \varphi_0 = 30^\circ$
		$a_4 = -1. \quad a_5 = -1. \quad a_6 = -1. \quad a_7 = 2/3 \quad a_8 = 2/3$
Geometrie:	Länge	$l = 100h_0$
	Breite	$b = 100h_0$
	Dicke	$h = 25h_0$
Belastung:	Linienlast	$q_x = \sigma_0 * h_0 * \text{Lastfaktor}$
Randbedingungen:	Festhaltung der Verschiebungsfreiheitsgrade entsprechend Bild 1	
numerisches Modell:	ein Makroelement mit 5x5 Knoten	

Tabelle 1. Parameter des ersten Beispiels

Anhand des ersten Beispiels werden die Möglichkeiten der vorgestellten Theorie in bezug auf die Berücksichtigung von anisotropem Materialverhalten gezeigt. Plastische Orthotropie vorausgesetzt, reagiert die im Bild 1 dargestellte Scheibe bei gleichmäßigem Zug mit einem Schiefstellen der Ränder. Der Spannungs-Dehnungszusammenhang des Bildes 2 demonstriert das Antwortverhalten bei zyklischer Belastung. Deutlich sind die Unterschiede zwischen isotroper und kinematischer Verfestigung zu erkennen. Das zweite

Beispiel zeigt die Anwendung des programmierten Algorithmus auf eine in der Ausgangskonfiguration einfach gekrümmte und im Verlauf der Deformation doppelt gekrümmte Struktur mit großen elastischen Deformationen. Zu Vergleichszwecken wurde das FEM-System MARC verwendet. Eine völlige Übereinstimmung der Ergebnisse des mit GFS (**G**eschwindigkeitsformulierung des **F**eldproblems der allgemeinen **S**chale) gekennzeichneten Programms mit denen von MARC ist nicht möglich, da die implementierten elastischen Deformationsgesetze nicht identisch sind. Die Bewertung der Konvergenzeigenschaften des verwendeten 5x5 Knoten Makroelementes erfolgte mittels einer zweiten, auf einem in Umfangsrichtung verfeinerten Netz basierenden Berechnung. Die Ergebnisse sind im Bild 3 für einen ausgewählten Punkt dargestellt. Erwähnenswert ist die Tatsache, daß die mit 8 Makroelementen erreichten Resultate sich nur unwesentlich von denen mit 4 unterscheiden. Dagegen zeigt das System MARC bei der Benutzung von 2x2 Knoten Elementen und einer Netzverfeinerung von 50 auf 200 Elemente noch deutliche Veränderungen im Lösungsverhalten.

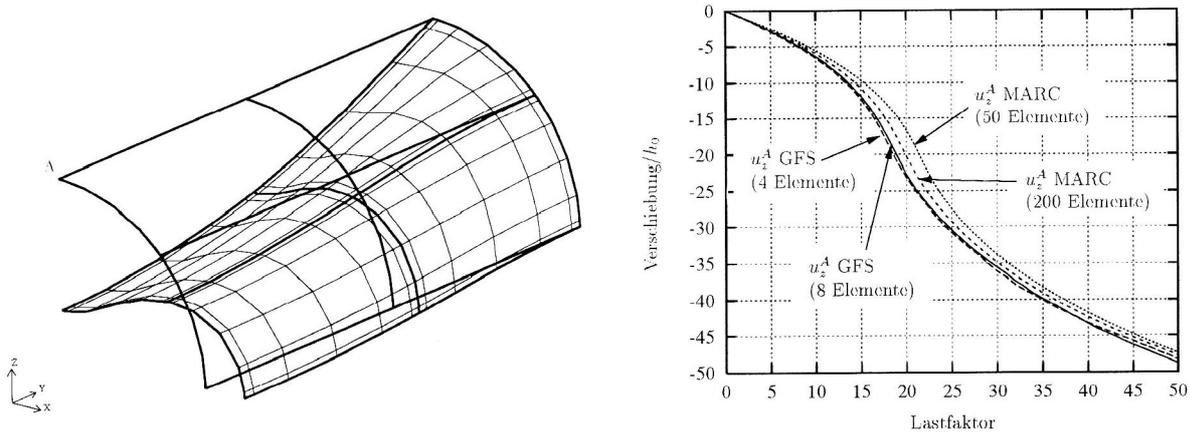


Bild 3. Verformte Struktur und Verformung des Punktes A (Beispiel 2)

Materialkennwerte:	Elastizitätsmodul	$E = 1.0 \cdot 10^3 \sigma_0$
	Querkontraktionszahl	$\nu = 0.3$
Geometrie:	Länge	$l = 400 h_0$
	Radius	$r = 200/\pi * h_0$
	Dicke	$h = 4 h_0$
Belastung:	Linienlast	$q_z = \sigma_0 * h_0 * \text{Lastfaktor}$
Randbedingungen:	Festhaltung der Verschiebungsfreiheitsgrade an den Enden des Zylinders	
numerisches Modell:	1/8 der symmetrischen Struktur - (4 Makroelemente je 5x5 Knoten)	

Tabelle 2: Parameter des zweiten Beispiels

Literatur

1. Dafalias Y.F.: Issues on the constitutive formulation at large elastoplastic deformations, Part 1: Kinematics, Part 2: Kinetics. Acta Mechanica (1987), 119 – 138, (1988), 121 – 146.
2. Harte, R.; Eckstein, U.: Derivation of Geometrically Nonlinear Finite Shell Elements via Tensor Notation. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 23, (1986), 367–384.
3. John, R.: Ein Deformationsgesetz für große elastisch-plastische Verformungen zur Modellierung anisotropen Materilverhaltens. Dissertation, TU-Dresden, (1996).
4. Ulbricht V.: Physikalisch und geometrisch nichtlineare Schalentheorie in konvektiver Metrik. Habilitation, TU-Dresden, (1986).

Anschrift: Prof. Dr.-Ing. Volker Ulbricht, Dipl.-Ing. Thomas Pyttel und Dr.-Ing. Ralf John, Institut für Festkörpermechanik, Technische Universität Dresden, Mommsenstraße 13, D-01062 Dresden