

# Erstarren eines antriebslosen dissipativen Modellkreisel

L. Sperling, A. Saitov

Zur Darstellung prinzipieller Erscheinungen des Verhaltens dissipativer Kreisel eignen sich Modellkreisel, die einerseits wegen der Nichtlinearität der Bewegungsgleichungen möglichst einfach konzipiert sind, andererseits jedoch alle für gewisse Verhaltensweisen maßgebenden Eigenschaften haben. Anhand eines antriebslosen Modellkreisel dieser Art wird gezeigt, daß innere Dämpfung ihn im Laufe der Zeit zum Erstarren, nicht jedoch zum Stillstand bringt.

## 1 Modellbeschreibung

Ausgangspunkt der Modellierung ist ein aus der Literatur (Magnus, 1971) bekannter Kreiselversuch mit einer biegeweichen Scheibe (Bild 1a). Um das Verhalten eines derartigen Kreisel mathematisch besser handhabbar untersuchen zu können, wird die Scheibe hier durch vier Massenpunkt-Feder-Dämpfer-Elemente ersetzt (Bild 1b). Das gesamte Gestell wird als starr und masselos vorausgesetzt. Das äußere Gestellteil rotiert mit  $\omega_v(t)$  reibungsfrei in einem Lager, das innere ist, ebenfalls reibungsfrei, im äußeren gelagert, und seine Relativ-Winkelgeschwindigkeit ist  $\omega_z(t)$ . Auf jedem der vier an den Enden des Gestells symmetrisch angeordneten starren Arme gleitet reibungsfrei ein Massenpunkt  $p_i, i = \overline{1;4}$ , der Masse  $m$ , der durch eine Feder mit der Steifigkeit  $k$  und einen viskosen Dämpfer mit der Dämpfungskonstante  $b$  gefesselt ist. Im Ruhezustand des Systems befinden sich alle Massenpunkte mit dem Massenmittelpunkt C in einer Ebene, die die  $\omega_v$ -Achse  $v$  enthält. Für die später untersuchte spezielle Bewegung bleibt der Massenmittelpunkt C in Ruhe, d.h., er ist ein Fixpunkt. Zur Beschreibung der Bewegung verwenden wir im folgenden das  $Cuvz$ -Bezugssystem, das mit  $\omega_v$  rotiert. Der eigentliche aus den vier Massenpunkten bestehende Modellkreisel rotiert mit den Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_v$  und  $\omega_z$ . Die relative Drehbewegung mit  $\omega_z$  wird mittels der Winkelkoordinate  $\sigma$  beschrieben, die von der  $u$ -Achse in positiver  $\omega_z$ -Richtung bis zu dem den Massenpunkt  $p_1$  tragenden Arm gemessen wird. Die Bewegungskoodinaten  $z_i, i = \overline{1;4}$ , beschreiben die Bewegungen der Massenpunkte  $p_i$  gegenüber der  $uv$ -Ebene in  $z$ -Richtung. Infolge der durch Rotation erregten Schwingungen der Massenpunkte erfolgt eine Energiedissipation, die auf die Winkelgeschwindigkeiten zurückwirkt. Für gegebene Anfangswerte  $\omega_v(t=t_0) = \omega_{v0}$  und  $\omega_z(t=t_0) = \omega_{z0}$  sollen im folgenden die Funktionen  $\omega_v(t)$  und  $\omega_z(t)$  einschließlich ihrer Werte für  $t \rightarrow \infty$  bestimmt werden.

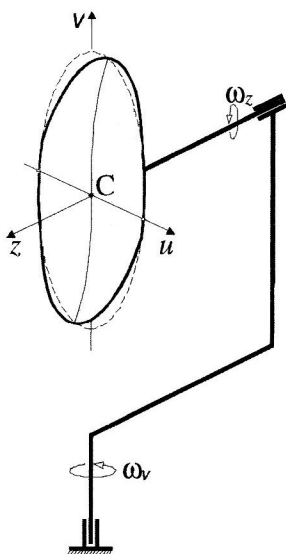


Bild 1a. Verformung einer rotierenden biegeweichen Scheibe

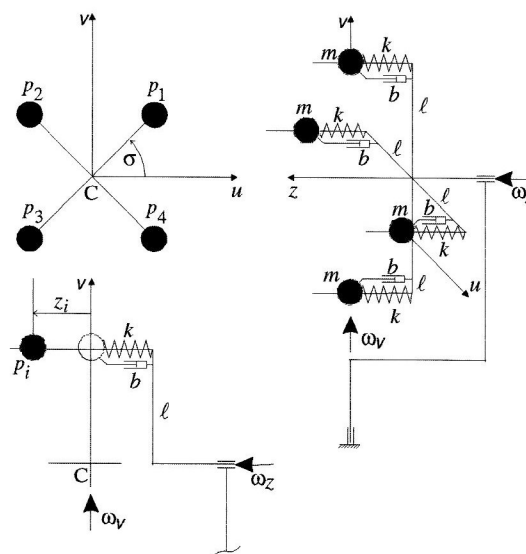


Bild 1b. Modellkreisel

## 2 Bewegungsgleichungen

Zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen sollen der Impulssatz für die Relativbewegungen der Massenpunkte und der Drallsatz für die Drehbewegungen des Kreisels verwendet werden. Für die Orts- und Geschwindigkeitsvektoren der Massenpunkte gilt

$$\mathbf{r}_i = [\mathbf{e}_u \mathbf{e}_v \mathbf{e}_z] \begin{bmatrix} \ell \cos \sigma_i \\ \ell \sin \sigma_i \\ z_i \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{r}}_i = \dot{\mathbf{r}}_i + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_i = [\mathbf{e}_u \mathbf{e}_v \mathbf{e}_z] \begin{bmatrix} z_i \dot{\omega}_v - \ell \dot{\sigma} \sin \sigma_i \\ \ell \dot{\sigma} \cos \sigma_i \\ \dot{z}_i - \ell \dot{\omega}_v \cos \sigma_i \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\dot{\sigma} = \omega_z \quad \sigma_i = \sigma + (i-1) \frac{\pi}{2} \quad (i = \overline{1;4})$$

mit der relativen zeitlichen Ableitung  $\dot{\mathbf{r}}_i$  im umlaufenden  $Cuvz$ -Bezugssystem und der Winkelgeschwindigkeit

$$\boldsymbol{\Omega} = [\mathbf{e}_u \mathbf{e}_v \mathbf{e}_z] \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_v \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

des Bezugssystems. Die Beschleunigungsvektoren ergeben sich aus der Beziehung  $\mathbf{a}_i = \ddot{\mathbf{r}}_i = \dot{\mathbf{v}}_i + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_i$  zu

$$\mathbf{a}_i = [\mathbf{e}_u \mathbf{e}_v \mathbf{e}_z] \begin{bmatrix} -\ell \ddot{\sigma} \sin \sigma_i - \ell \dot{\sigma}^2 \cos \sigma_i + 2\dot{z}_i \dot{\omega}_v + z_i \dot{\omega}_v - \ell \omega_v^2 \cos \sigma_i \\ \ell \ddot{\sigma} \cos \sigma_i - \ell \dot{\sigma}^2 \sin \sigma_i \\ \ddot{z}_i + 2\ell \dot{\omega}_v \dot{\sigma} \sin \sigma_i - \ell \dot{\omega}_v \cos \sigma_i - z_i \omega_v^2 \end{bmatrix} \quad (i = \overline{1;4}) \quad (3)$$

Aus der Gleichgewichtsbedingung in  $z$ -Richtung

$$m a_{iz} + b \dot{z}_i + k z_i = 0 \quad (4)$$

erhält man die folgenden Differentialgleichungen für die Relativbewegungen der Schwinger

$$\ddot{z}_i + 2\delta \dot{z}_i + \omega_n^2 z_i = \ell \dot{\omega}_v \cos \sigma_i - 2\ell \dot{\omega}_v \dot{\sigma} \sin \sigma_i \quad (i = \overline{1;4}) \quad (5)$$

mit

$$\delta = \frac{b}{2m} \quad \omega_{st} = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \omega_n(t) = \sqrt{\omega_{st}^2 - \omega_v^2} \quad (6)$$

Wir setzen voraus, daß zu jedem Zeitpunkt die Federkraft gegenüber der Zentrifugalkraft überwiegt:  $\omega_{st}^2 > \omega_v^2$ . Aus den Gleichungen (5) folgt

$$z_1 = -z_3 \quad z_2 = -z_4 \quad (7)$$

sofern entsprechende Beziehungen auch für die Anfangsbedingungen gelten. Dann genügt es also, nur zwei der Gleichungen (5) zu betrachten, z. B. die Gleichungen für  $z_1$  und  $z_2$ . Diese Gleichungen sind über die Variablen  $\omega_v$  und  $\sigma$  mit den Gleichungen des Drallsatzes gekoppelt.

Zur Aufstellung des Drallvektors werden in Anlehnung an Rimrott (1989) für die Massenpunkte  $p_i$  die Ortsvektoren  $\rho_i$  für den unverformten Zustand des Systems und die Vektoren  $\delta_i$  (nicht mit der Abklingkonstante  $\delta$ , Gleichung (6), zu verwechseln) der Relativbewegung eingeführt:

$$\rho_i = [\mathbf{e}_u \mathbf{e}_v \mathbf{e}_z] \begin{bmatrix} \ell \cos \sigma_i \\ \ell \sin \sigma_i \\ 0 \end{bmatrix} \quad \delta_i = [\mathbf{e}_u \mathbf{e}_v \mathbf{e}_z] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z_i \end{bmatrix} \quad (i = \overline{1;4}) \quad (8)$$

Die Orts- und Geschwindigkeitsvektoren der Massenpunkte  $p_i$  können damit wie folgt ausgedrückt werden:

$$\mathbf{r}_i = \boldsymbol{\rho}_i + \boldsymbol{\delta}_i \quad \dot{\mathbf{r}}_i = \dot{\boldsymbol{\rho}}_i + \dot{\boldsymbol{\delta}}_i \quad (9)$$

Für die zeitliche Ableitung der Ortsvektoren  $\boldsymbol{\rho}_i$  für den unverformten Kreis gilt  $\dot{\boldsymbol{\rho}}_i = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_i$  mit der Gesamtwinkelgeschwindigkeit des Kreises

$$\boldsymbol{\omega} = [\mathbf{e}_u \mathbf{e}_v \mathbf{e}_z] \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_v \\ \dot{\sigma} \end{bmatrix} \quad (10)$$

Für die zeitliche Ableitung der Vektoren  $\boldsymbol{\delta}_i$  gilt im allgemeinen  $\dot{\boldsymbol{\delta}}_i = \dot{\boldsymbol{\delta}}_i + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\delta}_i$  mit den relativen zeitlichen Ableitungen in der umlaufenden Basis

$$\dot{\boldsymbol{\delta}}_i = [\mathbf{e}_u \mathbf{e}_v \mathbf{e}_z] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{z}_i \end{bmatrix} \quad (11)$$

Da für den vorliegenden Modellkreis speziell  $\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\delta}_i = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\delta}_i$  gilt, ergeben sich die Geschwindigkeiten der Massenpunkte zu

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\rho}_i + \boldsymbol{\delta}_i) + \dot{\boldsymbol{\delta}}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i + \dot{\boldsymbol{\delta}}_i \quad (i = \overline{1;4}) \quad (12)$$

Mit Hilfe der Gleichungen (9) und (12) erhält man für den Drallvektor

$$\mathbf{H} = m \sum_{i=1}^4 \mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i + \dot{\boldsymbol{\delta}}_i) = m \sum_{i=1}^4 \mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) + m \sum_{i=1}^4 \boldsymbol{\rho}_i \times \dot{\boldsymbol{\delta}}_i + m \sum_{i=1}^4 \boldsymbol{\delta}_i \times \dot{\boldsymbol{\delta}}_i \quad (13)$$

Für den ersten Drallanteil gilt

$$m \sum_{i=1}^4 \mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) = [\mathbf{e}_u \mathbf{e}_v \mathbf{e}_z] \begin{bmatrix} A & 0 & I_{uz} \\ 0 & A & I_{vz} \\ I_{uz} & I_{vz} & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_v \\ \dot{\sigma} \end{bmatrix} \quad (14)$$

mit den momentanen Trägheits- und Deviationsmomenten

$$\begin{aligned} A &= 2m\ell^2 + 2m(z_1^2 + z_2^2) & C &= 4m\ell^2 \\ I_{uz} &= -2m\ell(z_1 \cos \sigma - z_2 \sin \sigma) & I_{vz} &= -2m\ell(z_1 \sin \sigma + z_2 \cos \sigma) \end{aligned} \quad (15)$$

Für die anderen Anteile erhält man

$$m \sum_{i=1}^4 \boldsymbol{\rho}_i \times \dot{\boldsymbol{\delta}}_i = [\mathbf{e}_u \mathbf{e}_v \mathbf{e}_z] \begin{bmatrix} 2m\ell(\dot{z}_1 \sin \sigma + \dot{z}_2 \cos \sigma) \\ -2m\ell(\dot{z}_1 \cos \sigma - \dot{z}_2 \sin \sigma) \\ 0 \end{bmatrix} \quad m \sum_{i=1}^4 \boldsymbol{\delta}_i \times \dot{\boldsymbol{\delta}}_i = 0 \quad (16)$$

Damit ergibt sich für den Drallvektor

$$\mathbf{H} = [\mathbf{e}_u \mathbf{e}_v \mathbf{e}_z] \begin{bmatrix} I_{uz} \dot{\sigma} + 2m\ell(\dot{z}_1 \sin \sigma + \dot{z}_2 \cos \sigma) \\ A\omega_v + I_{vz} \dot{\sigma} - 2m\ell(\dot{z}_1 \cos \sigma - \dot{z}_2 \sin \sigma) \\ I_{vz} \omega_v + C\dot{\sigma} \end{bmatrix} \quad (17)$$

Der Drallsatz lautet

$$\dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{H}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{H} = \mathbf{M} = [\mathbf{e}_u \mathbf{e}_v \mathbf{e}_z] \begin{bmatrix} M_u \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

wobei  $\mathbf{M}$  der resultierende Vektor aller äußeren, am Kreisel angreifenden Momente ist. Die Ableitung des Dralls nach der Zeit ist

$$\dot{\mathbf{H}} = [\mathbf{e}_u \mathbf{e}_v \mathbf{e}_z] \begin{bmatrix} (I_{uz}\dot{\sigma})' + 2m\ell(\dot{z}_1 \sin \sigma + \dot{z}_2 \cos \sigma)' + I_{vz}\omega_v^2 + C\omega_v\dot{\sigma} \\ (A\omega_v + I_{vz}\dot{\sigma})' - 2m\ell(\dot{z}_1 \cos \sigma - \dot{z}_2 \sin \sigma)' \\ (I_{vz}\omega_v + C\dot{\sigma})' - I_{uz}\omega_v\dot{\sigma} - 2m\ell(\dot{z}_1 \sin \sigma + \dot{z}_2 \cos \sigma)\omega_v \end{bmatrix} \quad (19)$$

Die Momentkomponente

$$M_u = (\dot{\mathbf{H}})_u = (I_{uz}\dot{\sigma})' + 2m\ell(\dot{z}_1 \sin \sigma + \dot{z}_2 \cos \sigma)' + I_{vz}\omega_v^2 + C\omega_v\dot{\sigma}$$

ist die kinetostatische Rückwirkung des starren Gestells auf den 4-Massenpunkte-Modellkreisel. Die Bewegung des Kreisels unter dem Einfluß der Dämpfung wird durch die beiden anderen Komponenten des Drallsatzes beschrieben:

$$\begin{aligned} (\dot{\mathbf{H}})_v &= (A\omega_v + I_{vz}\dot{\sigma})' - 2m\ell(\dot{z}_1 \cos \sigma - \dot{z}_2 \sin \sigma)' = 0 \\ (\dot{\mathbf{H}})_z &= (I_{vz}\omega_v + C\dot{\sigma})' - I_{uz}\omega_v\dot{\sigma} - 2m\ell(\dot{z}_1 \sin \sigma + \dot{z}_2 \cos \sigma)\omega_v = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

Zusammen mit den Gleichungen (5) erhält man somit ein System von vier gekoppelten nichtlinearen Differentialgleichungen für die Bewegung des Gesamtsystems

$$\begin{aligned} \ddot{z}_1 + 2\delta\dot{z}_1 + \omega_n^2 z_1 &= \ell\dot{\omega}_v \cos \sigma - 2\ell\omega_v\dot{\sigma} \sin \sigma \\ \ddot{z}_2 + 2\delta\dot{z}_2 + \omega_n^2 z_2 &= -\ell\dot{\omega}_v \sin \sigma - 2\ell\omega_v\dot{\sigma} \cos \sigma \\ (\ell^2 + z_1^2 + z_2^2)\dot{\omega}_v + 2(z_1\dot{z}_1 + z_2\dot{z}_2)\omega_v &= \\ = \ell(z_1 \sin \sigma + z_2 \cos \sigma)\ddot{\sigma} + \ell(z_1 \cos \sigma - z_2 \sin \sigma)\dot{\sigma}^2 + \ell(\dot{z}_1 \cos \sigma - \dot{z}_2 \sin \sigma) \\ 2\ell\ddot{\sigma} &= (z_1 \sin \sigma + z_2 \cos \sigma)\dot{\omega}_v + 2(\dot{z}_1 \sin \sigma + \dot{z}_2 \cos \sigma)\omega_v \end{aligned} \quad (21)$$

### 3 Anfangszustand der Bewegung

Um den Anfangszustand zu definieren, wird angenommen, der Kreisel rotiere zunächst mit den über Antriebe konstant gehaltenen Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_{v0}$  und  $\omega_{z0}$ . Dann erhält man aus den Gleichungen (5) für die Massenpunkte  $p_i$  die stationären Schwingungen

$$z_i = -z_{*0} \sin \left[ \omega_{z0} t - \varphi_0 + (i-1) \frac{\pi}{2} \right] \quad (i = \overline{1;4}) \quad (22)$$

mit der Amplitude  $z_{*0}$  und dem Phasenwinkel  $\varphi_0$  entsprechend den Beziehungen

$$z_{*0} = 2\ell \frac{\omega_{v0}\omega_{z0}}{\sqrt{(\omega_{st}^2 - \omega_{v0}^2 - \omega_{z0}^2)^2 + 4\delta^2\omega_{z0}^2}} \quad \tan \varphi_0 = \frac{2\delta\omega_{z0}}{\omega_{st}^2 - \omega_{v0}^2 - \omega_{z0}^2} \quad (23)$$

Zu einem bestimmten Zeitpunkt  $t_0$  werden die Antriebe abgeschaltet, so daß der Kreisel antriebslos weiter rotiert. Der Einfachheit halber wird der Zeitpunkt  $t_0$  so gewählt, daß er der Gleichung  $\omega_{z0}t_0 = \varphi_0$  genügt. Dann erhält man für den Anfangszustand der Bewegung

$$\begin{aligned} z_i(t_0) &= -z_{*0} \sin \left[ (i-1) \frac{\pi}{2} \right] & \dot{z}_i(t_0) &= -z_{*0}\omega_{z0} \cos \left[ (i-1) \frac{\pi}{2} \right] \\ \omega_v(t_0) &= \omega_{v0} & \sigma(t_0) &= \omega_{z0}t_0 = \varphi_0 & \dot{\sigma}(t_0) &= \omega_z(t_0) = \omega_{z0} \end{aligned} \quad (24)$$

Nach den Gleichungen (5) und (6) sowie (23) ist

$$\omega_{z0res} = \sqrt{\omega_{st}^2 - \omega_{v0}^2} \quad (25)$$

die Resonanzfrequenz der ungedämpften Schwinger im Anfangszustand der Bewegung. Deshalb kann von einem unterkritischen ( $\omega_{z0} < \omega_{z0\text{res}}$ ) und von einem überkritischen ( $\omega_{z0} > \omega_{z0\text{res}}$ ) Anfangszustand der Bewegung gesprochen werden.

#### 4 Stationärer Endzustand der Bewegung

Die durch die Trägheitskräfte der rechten Seite der Gleichungen (5), die Zentrifugalkraft  $mz_i\omega_v^2$ , die Corioliskraft  $-2m\ell\omega_v\dot{\sigma}_i\sin\sigma_i$  und die Führungskraft  $m\ell\dot{\omega}_v\cos\sigma_i$ , erregten Schwingungen der Massenpunkte bewirken eine Energiedissipation. Diese ist abgeschlossen, wenn die Erregung nicht mehr vorhanden ist, d.h., wenn nach Gleichung (5)

$$\ddot{\tilde{\omega}}_v = 0 \quad \tilde{\omega}_v\tilde{\omega}_z = 0 \quad (26)$$

gilt. Hier und im folgenden sei durch die Tilde ( $\sim$ ) der Endzustand der Bewegung gekennzeichnet. Für den Endzustand folgt aus den Gleichungen (5) und (26)  $\tilde{z}_i \equiv 0$  und damit auch  $\dot{\tilde{z}}_i \equiv 0$ . Die Gleichungen (26) lassen noch einen von Null verschiedenen konstanten Wert von  $\tilde{\omega}_v$  zu. Dieser kann aus der  $v$ -Komponente des Drallsatzes berechnet werden. Da die  $v$ -Komponente des Vektors  $\mathbf{\Omega} \times \mathbf{H}$  gleich Null ist, folgt aus dem Drallsatz, siehe auch die Gleichungen (17) und (20),  $(\dot{\mathbf{H}})_v = \dot{H}_v = 0$ , d.h.,  $H_v = \text{konstant}$ . Für den Anfangszustand der Bewegung (Gleichungen 24) ergibt sich die Drallkomponente  $H_v$  nach Gleichung (17) zu

$$H_v(t_0) \hat{=} H_{v0} = 2m(\ell^2 + z_{*0}^2)\omega_{v0} + 4m\ell z_{*0}\omega_{z0} \cos\varphi_0$$

was unter Berücksichtigung der Gleichung (23) auch wie folgt geschrieben werden kann:

$$H_{v0} = 2m\ell^2 \left[ 1 + 4 \frac{\omega_{z0}^2(\omega_{st}^2 - \omega_{z0}^2)}{(\omega_{st}^2 - \omega_{v0}^2 - \omega_{z0}^2)^2 + 4\delta^2\omega_{z0}^2} \right] \omega_{v0} \quad (27)$$

Für den Endzustand der Bewegung folgt wegen  $\tilde{z}_i = \dot{\tilde{z}}_i = 0$  die entsprechende Drallkomponente zu  $\tilde{H}_v = 2m\ell^2\tilde{\omega}_v$ , siehe Gleichung (17). Das Gleichsetzen von  $H_{v0}$  und  $\tilde{H}_v$  liefert für die Winkelgeschwindigkeiten des Endzustandes

$$\tilde{H}_v = H_{v0} \Rightarrow \tilde{\omega}_v = \left[ 1 + 4 \frac{\omega_{z0}^2(\omega_{st}^2 - \omega_{z0}^2)}{(\omega_{st}^2 - \omega_{v0}^2 - \omega_{z0}^2)^2 + 4\delta^2\omega_{z0}^2} \right] \omega_{v0} \quad (28)$$

Unter der Voraussetzung  $\omega_{v0} \neq 0$  folgt aus der Gleichung (26) außerdem

$$\tilde{\omega}_z = 0 \quad (29)$$

Für den Endzustand der Bewegung gilt also

$$\tilde{\omega} = \tilde{\mathbf{\Omega}} = [\mathbf{e}_u\mathbf{e}_v\mathbf{e}_z] \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{\omega}_v \\ 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{H}} = [\mathbf{e}_u\mathbf{e}_v\mathbf{e}_z] \begin{bmatrix} 0 \\ A_0\tilde{\omega}_v \\ 0 \end{bmatrix} \quad (30)$$

mit  $A_0 = 2m\ell^2$  als dem Hauptträgheitsmoment des unverformten Kreisels bezüglich der  $v$ -Achse. In diesem stationären Endzustand rotiert der Kiesel undeformiert wie ein starrer Körper nur mit der Winkelgeschwindigkeit  $\tilde{\omega}_v$  um die  $v$ -Achse als die Achse des nach Betrag und Richtung konstanten Drallvektors  $\tilde{\mathbf{H}}$ . Die Vektoren  $\tilde{\mathbf{H}}$  und  $\tilde{\omega} = \tilde{\mathbf{\Omega}}$  sind kollinear, und es ist keine Energiedissipation mehr vorhanden. Für den Modellkiesel trifft also das Rimrottsche Kollinearitätsprinzip (Rimrott, 1998) zu, obwohl der Kiesel erst im Endzustand drehmomentfrei ist.

Für konstante Werte der Parameter  $\omega_{st}$ ,  $\delta$  und  $\omega_{v0}$  wird nun die Endwinkelgeschwindigkeit  $\tilde{\omega}_v$  als Funktion der Anfangs-Eigenwinkelgeschwindigkeit  $\omega_{z0}$  diskutiert. Für bestimmte Parameterwerte ist diese Funktion in Bild 2 dargestellt. Die Bestimmung der Nullstellen dieser Funktion liefert nach Gleichung (28) die biquadratische Gleichung

$$3\omega_{z0}^4 - 2(\omega_{st}^2 + \omega_{v0}^2 + 2\delta^2)\omega_{z0}^2 - (\omega_{st}^2 - \omega_{v0}^2)^2 = 0 \quad (31)$$

für  $\omega_{z0}$  mit der positiven Lösung

$$\hat{\omega}_{z0}^2 = \frac{(\omega_{st}^2 + \omega_{v0}^2 + 2\delta^2) + \sqrt{(\omega_{st}^2 + \omega_{v0}^2 + 2\delta^2)^2 + 3(\omega_{st}^2 - \omega_{v0}^2)^2}}{3} \quad (32)$$

Da  $\tilde{\omega}_v$  als stetige Funktion von  $\omega_{z0}$  demnach nur *eine* positive Nullstelle hat und für sehr kleine Werte von  $\omega_{z0}$  nach Gleichung (28) positiv ist, gilt unter der Bedingung  $\omega_{z0} < \hat{\omega}_{z0}$  die Ungleichung  $\tilde{\omega}_v > 0$  und unter der Bedingung  $\omega_{z0} > \hat{\omega}_{z0}$  die Ungleichung  $\tilde{\omega}_v < 0$ . Im letzteren Falle folgt also aus der Konstanz der Drallkomponente  $H_v$ , daß die Rotation des Kreisels um die  $v$ -Achse im Laufe der Zeit ihre Drehrichtung ändert. Aus der Gleichung (28) folgt auch  $\tilde{\omega}_v > \omega_{v0}$  für  $0 < \omega_{z0} < \omega_{st}$ , d.h., aus der Konstanz der Drallkomponente  $H_v$  folgt in diesem Falle mit unbegrenzt wachsender Zeit ein Ansteigen der Winkelgeschwindigkeit  $\omega_v$  vom Anfangswert  $\omega_{v0}$  auf den Endwert  $\tilde{\omega}_v$ . Es kann auch gezeigt werden, daß immer  $\hat{\omega}_{z0} > \omega_{z0res}$  gilt.

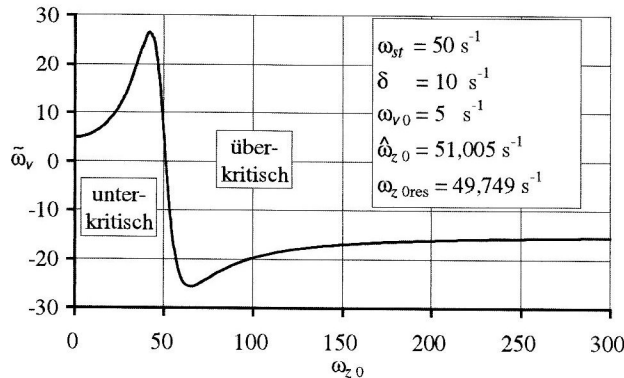


Bild 2. Abhängigkeit der Endwinkelgeschwindigkeit  $\tilde{\omega}_v$  von der Anfangswinkelgeschwindigkeit  $\omega_{z0}$

## 5 Quasistationäre Näherungslösung für den unterkritischen Fall

Wenn die Energiedissipation für den betrachteten Modellkreisler hinreichend klein ist, können die Winkelgeschwindigkeiten als langsam veränderliche Zeitfunktionen betrachtet werden, wodurch die Rechnung näherungsweise vereinfacht werden kann (Sperling, Saitov 1996). Wir treffen zwei Näherungsannahmen:

1) Es sei  $\omega_v$  nur schwach veränderlich, so daß gilt

$$|\dot{\omega}_v| \ll |\omega_v \omega_z| \quad (33)$$

Damit darf der aus der Winkelbeschleunigung um die  $v$ -Achse folgende Beschleunigungsanteil  $-\dot{\omega}_v \ell \cos \sigma_i$  gegenüber der Coriolisbeschleunigung  $2\omega_v \omega_z \ell \sin \sigma_i$  vernachlässigt werden (Gleichung 5).

2) Es sei auch  $\omega_z$  nur schwach veränderlich, so daß gilt

$$|\dot{\omega}_z| \ll \frac{k}{m} = \omega_{st}^2 \quad (34)$$

Mit diesen Annahmen können  $\omega_v$  und  $\omega_z$  bei der Berechnung der Schwingungen näherungsweise als konstant behandelt werden, d.h., wir dürfen einen quasistationären Zustand mit langsam veränderlicher Frequenz voraussetzen. Wählt man ohne Beschränkung der Allgemeinheit eine solche Phasenlage, daß  $\sigma = \omega_z t$  gilt, so erhält man für die Schwingungen der Massenpunkte die Bewegungsgleichungen

$$\ddot{z}_i + 2\delta\dot{z}_i + \omega_n^2 z_i = -2\ell\omega_v\omega_z \sin\sigma_i \quad (i = \overline{1;4}) \quad (35)$$

mit  $\sigma_i$  gemäß Gleichung (1), d.h. mit harmonischer Zwangsregung. Diese Gleichungen haben die stationären Lösungen

$$z_i = -z_* \sin\left[\omega_z t - \varphi + (i-1)\frac{\pi}{2}\right] \quad (i = \overline{1;4}) \quad (36)$$

mit den langsam veränderlichen Parametern Amplitude  $z_*$  und Phasenwinkel  $\varphi$  entsprechend den Beziehungen

$$z_* = 2\ell \frac{\omega_v\omega_z}{\sqrt{(\omega_{st}^2 - \omega_v^2 - \omega_z^2)^2 + 4\delta^2\omega_z^2}} \quad \tan\varphi = \frac{2\delta\omega_z}{\omega_{st}^2 - \omega_v^2 - \omega_z^2} \quad (37)$$

Zur Herleitung von Gleichungen zur Bestimmung der Funktionen  $\omega_v(t)$  und  $\omega_z(t)$  dient wieder der Drallsatz für den gesamten Modellkreisel. Der Drallvektor (17) ergibt sich unter den angegebenen Näherungsannahmen nach Rimrott (1989) zu

$$\mathbf{H} = [\mathbf{e}_u \mathbf{e}_v \mathbf{e}_z] \begin{bmatrix} 2I_{uz}\omega_z \\ A\omega_v + 2I_{vz}\omega_z \\ I_{vz}\omega_v + C\omega_z \end{bmatrix} \quad (38)$$

mit

$$\begin{aligned} A &= 2m(\ell^2 + z_*^2) & C &= 4m\ell^2 \\ I_{uz} &= -2m\ell z_* \sin\varphi & I_{vz} &= -2m\ell z_* \cos\varphi \end{aligned} \quad (39)$$

Für die zeitliche Ableitung des Dralls folgt

$$\dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{H}} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{H} = [\mathbf{e}_u \mathbf{e}_v \mathbf{e}_z] \begin{bmatrix} (2I_{uz}\omega_z)' + \omega_v(I_{vz}\omega_v + C\omega_z) \\ (A\omega_v + 2I_{vz}\omega_z)' \\ (I_{vz}\omega_v + C\omega_z)' - 2I_{uz}\omega_v\omega_z \end{bmatrix} \quad (40)$$

Während die  $u$ -Komponente dieses Vektors näherungsweise wieder das vom starren Gestell auf den Kreisel zurückwirkende Moment darstellt, müssen die  $v$ - und die  $z$ -Komponente wie die entsprechenden Komponenten des äußeren Momentes wieder verschwinden:

$$(\dot{\mathbf{H}})_v = \dot{H}_v = (A\omega_v + 2I_{vz}\omega_z)' = 0 \quad (41)$$

$$(\dot{\mathbf{H}})_z = (I_{vz}\omega_v + C\omega_z)' - 2I_{uz}\omega_v\omega_z = 0 \quad (42)$$

Die Gleichung (41) läßt sich sofort integrieren, und mit (37) und (39) erhält man für die  $v$ -Komponente des Drallvektors

$$H_v = 2m\ell^2 \left[ 1 + 4 \frac{\omega_z^2(\omega_{st}^2 - \omega_z^2)}{(\omega_{st}^2 - \omega_v^2 - \omega_z^2)^2 + 4\delta^2\omega_z^2} \right] \omega_v = H_{v0} \quad (43)$$

mit  $H_{v0}$  entsprechend Gleichung (27). Dieses Ergebnis zeigt, daß die Näherungsrechnung für die Endwinkelgeschwindigkeit  $\tilde{\omega}_v$  den exakt gültigen Ausdruck (28) liefert. Setzt man  $H_v = \tilde{H}_v = A_0\tilde{\omega}_v$ , so erhält man den folgenden Zusammenhang zwischen  $\omega_v$  und  $\omega_z$

$$(\omega_v - \tilde{\omega}_v)[(\omega_{st}^2 - \omega_v^2 - \omega_z^2)^2 + 4\delta^2\omega_z^2] + 4\omega_v\omega_z^2(\omega_{st}^2 - \omega_z^2) = 0 \quad (44)$$

Diese Gleichung kann entweder als Gleichung 5. Grades für  $\omega_v$  oder als biquadratische Gleichung für  $\omega_z$  betrachtet werden. Im letzten Fall erhält man

$$[\tilde{\omega}_v + 3\omega_v]\omega_z^4 - 2[(\tilde{\omega}_v + \omega_v)\omega_{st}^2 - (\tilde{\omega}_v - \omega_v)(\omega_v^2 + 2\delta^2)]\omega_z^2 + (\tilde{\omega}_v - \omega_v)(\omega_{st}^2 - \omega_v^2)^2 = 0 \quad (45)$$

Die Lösung dieser Gleichung liefert den Zusammenhang zwischen  $\omega_v$  und  $\omega_z$

$$\omega_z^2 = \frac{1}{\tilde{\omega}_v + 3\omega_v} \left[ (\tilde{\omega}_v + \omega_v)\omega_{st}^2 - (\tilde{\omega}_v - \omega_v)(\omega_v^2 + 2\delta^2) - \sqrt{[(\tilde{\omega}_v + \omega_v)\omega_{st}^2 - (\tilde{\omega}_v - \omega_v)(\omega_v^2 + 2\delta^2)]^2 - (\tilde{\omega}_v + 3\omega_v)(\tilde{\omega}_v - \omega_v)(\omega_{st}^2 - \omega_v^2)^2} \right] \quad (46)$$

Es gilt das negative Vorzeichen vor der Wurzel, damit sich für  $\omega_v = \tilde{\omega}_v$ , der nach Gleichung (35) auch für die Näherungsrechnung gültige Endwert  $\omega_z = \tilde{\omega}_z = 0$  ergibt. Das Einsetzen von  $\omega_z$  gemäß der Gleichung (46) in die  $z$ -Komponente des Drallsatzes (42) liefert eine sehr umfangreiche nichtlineare Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\dot{\omega}_v = f(\omega_v) \quad (47)$$

für  $\omega_v$ , die numerisch gelöst werden kann, so daß man die Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_v$  und  $\omega_z$  als Funktionen der Zeit und damit auch die endgültigen Lösungen der Schwingungsgleichungen (35) erhält. Für steife Systeme

$$\omega_{st} \gg \omega_v, \omega_z, \delta \quad (48)$$

bleibt  $\omega_v$  nach den Gleichungen (28) und (43) nahezu konstant, und die Berechnung von  $\omega_z$  läßt sich näherungsweise noch weiter stark vereinfachen. Unter der Voraussetzung

$$|(I_{vz}\omega_v)| \ll |C\dot{\omega}_z| \quad (49)$$

folgt aus Gleichung (42)

$$C\dot{\omega}_z = 2I_{uz}\omega_v\omega_z \quad (50)$$

Die Voraussetzung (48) liefert dann näherungsweise

$$z_* = 2\ell \frac{\omega_v\omega_z}{\omega_{st}^2} \quad \sin \varphi = \frac{2\delta\omega_z}{\omega_{st}^2} \quad \Rightarrow \quad I_{uz} = -8m\ell^2\delta \frac{\omega_v\omega_z^2}{\omega_{st}^4} \quad (51)$$

und aus Gleichung (50) folgt damit

$$\frac{d\omega_z}{\omega_z^3} = -4\delta \frac{\omega_v^2}{\omega_{st}^4} dt \quad (52)$$

Setzt man  $\omega_v \approx \tilde{\omega}_v$ , so erhält man schließlich

$$\omega_z = \frac{\omega_{z0}}{\sqrt{1 + 8\delta \frac{\tilde{\omega}_v^2}{\omega_{st}^4} \omega_{z0}^2 t}} \quad (53)$$

Diese Gleichung bestätigt den Endwert  $\tilde{\omega}_z = 0$ .

## 6 Energiebetrachtung

Die kinetische Energie des Kreisels ergibt sich mit Hilfe der Gleichungen (1) und wegen der Gleichungen (7) zu

$$T = \frac{1}{2} m \sum_{i=1}^4 v_i^2 = m(\ell^2 + z_1^2 + z_2^2)\omega_v^2 + 2m\ell^2\dot{\sigma}^2 - 2m\ell(z_1 \sin \sigma + z_2 \cos \sigma)\omega_v\dot{\sigma} - 2m\ell(\dot{z}_1 \cos \sigma - \dot{z}_2 \sin \sigma)\omega_v + m(\dot{z}_1^2 + \dot{z}_2^2) \quad (54)$$



Die potentielle Energie der vier linearen Federn ist

$$U = \frac{1}{2} k \sum_{i=1}^4 z_i^2 = m\omega_{st}^2 (z_1^2 + z_2^2) \quad (55)$$

Mit den Anfangsbedingungen (23) und (24) erhält man aus den Gleichungen (54) und (55) die Anfangsenergie des Systems

$$E_0 = T_0 + U_0 = m\ell^2 [\omega_{v0}^2 + 2\omega_{z0}^2 + \varepsilon(3\omega_{st}^2 - \omega_{v0}^2 - \omega_{z0}^2)] \quad (56)$$

mit

$$\varepsilon = 4 \frac{\omega_{v0}^2 \omega_{z0}^2}{(\omega_{st}^2 - \omega_{v0}^2 - \omega_{z0}^2)^2 + 4\delta^2 \omega_{z0}^2} \quad (57)$$

Für die Endenergie des Systems erhält man wegen der Gleichungen (28) und (29)

$$\tilde{E} = \tilde{T} = m\ell^2 \tilde{\omega}_v^2 = m\ell^2 \left[ \omega_{v0}^2 + 2\varepsilon(\omega_{st}^2 - \omega_{z0}^2) + \varepsilon^2 \frac{(\omega_{st}^2 - \omega_{z0}^2)^2}{\omega_{v0}^2} \right] \quad (58)$$

Der Gesamtenergieverlust durch Dissipation ergibt sich allgemein resp. näherungsweise unter Bedingung (48) zu

$$E_{\text{Verlust}} = E_0 - \tilde{E} = m\ell^2 \left[ 2\omega_{z0}^2 + \varepsilon(\omega_{st}^2 - \omega_{v0}^2 + \omega_{z0}^2) - \varepsilon^2 \frac{(\omega_{st}^2 - \omega_{z0}^2)^2}{\omega_{v0}^2} \right] \approx 2m\ell^2 \omega_{z0}^2 \left( 1 + 2 \frac{\omega_{v0}^2}{\omega_{st}^2} \right) \quad (59)$$

## 7 Numerische Simulation und Bewertung der Resultate der Näherungsrechnung

Das für den untersuchten Modellkreisel exakte, vollständige System der Bewegungsgleichungen (21) gestattet eine numerische Simulation der Bewegung und damit eine Überprüfung und Bewertung der Resultate der quasistationären Näherungsrechnung (Gleichungen (36), (46), (47)) sowie der groben Näherung (53).

Für alle numerischen Auswertungen wurden einheitlich die folgenden Parameterwerte verwendet:  $m = 0,5 \text{ kg}$ ,  $\ell = 1,2 \text{ m}$ ,  $\omega_{st} = 50 \text{ s}^{-1}$ ,  $\delta = 10 \text{ s}^{-1}$ ,  $\omega_{v0} = 5 \text{ s}^{-1}$ . Daraus folgt nach den Gleichungen (25) und (32)  $\omega_{z0\text{res}} = 49,749 \text{ s}^{-1}$ ,  $\hat{\omega}_{z0} = 51,005 \text{ s}^{-1}$ .  $\omega_{z0}$  wurde variiert.

*Kritischer Anfangszustand:*  $\omega_{z0} = 49,749 \text{ s}^{-1}$

Aus Gleichung (28) folgt  $\tilde{\omega}_v = 6,25 \text{ s}^{-1}$ . Aus den Gleichungen (56) bis (59) folgt  $E_0 = 4482 \text{ J}$ ,  $\tilde{E} = 28,125 \text{ J}$ ,  $E_{\text{Verlust}} = 4453,875 \text{ J}$ . Die in den Bildern 3 und 4 dargestellten Ergebnisse der numerischen Simulation zeigen, daß die Resonanzschwingungen zu Anfang der Bewegung eine große Energiedissipation bewirken, die durch Rückwirkung auf die Kreiselbewegung zu großen schnellen Änderungen der Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_v$  und  $\omega_z$  führt. Damit werden die Näherungsannahmen (33) und (34) ungültig, und die quasistationäre Näherungslösung wird unbrauchbar.

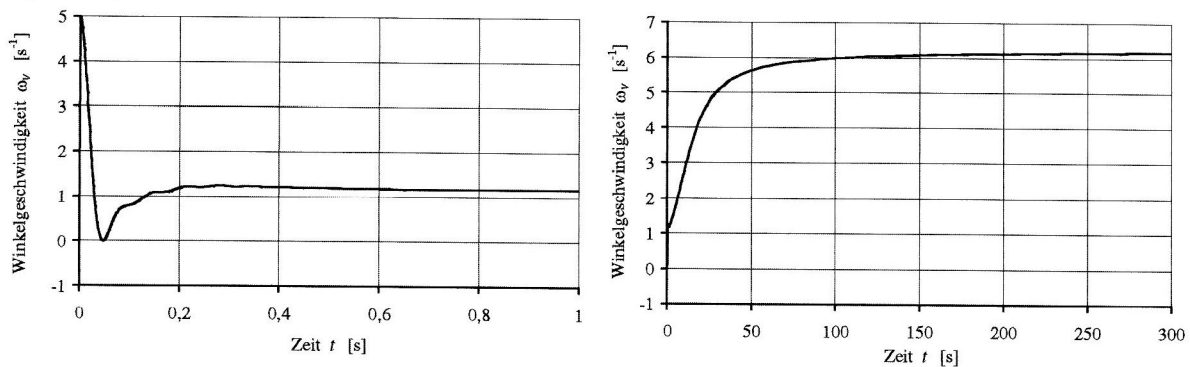


Bild 3. Verlauf der Winkelgeschwindigkeit  $\omega_v$  bei kritischem Anfangszustand

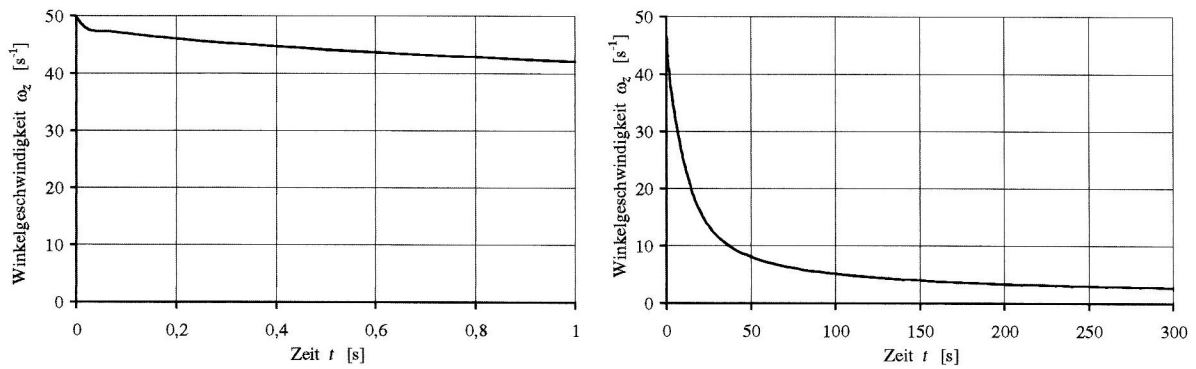


Bild 4. Verlauf der Winkelgeschwindigkeit  $\omega_z$  bei kritischem Anfangszustand

*Überkritischer Anfangszustand:*  $\omega_{z0} = 80 \text{ s}^{-1}$

Aus Gleichung (28) folgt  $\tilde{\omega}_v = -22,786 \text{ s}^{-1}$ . Aus den Gleichungen (56) bis (59) folgt  $E_0 = 9261,57 \text{ J}$ ,  $\tilde{E} = 373,84 \text{ J}$ ,  $E_{\text{Verlust}} = 8887,73 \text{ J}$ . Die in den Bildern 5 und 6 dargestellten Ergebnisse der numerischen Simulation zeigen, daß nach sehr kurzer Zeit der Resonanzdurchgang erfolgt, was zu ähnlichen Effekten wie im vorigen Falle führt. Auch hier ist die quasistationäre Näherungslösung unbrauchbar.

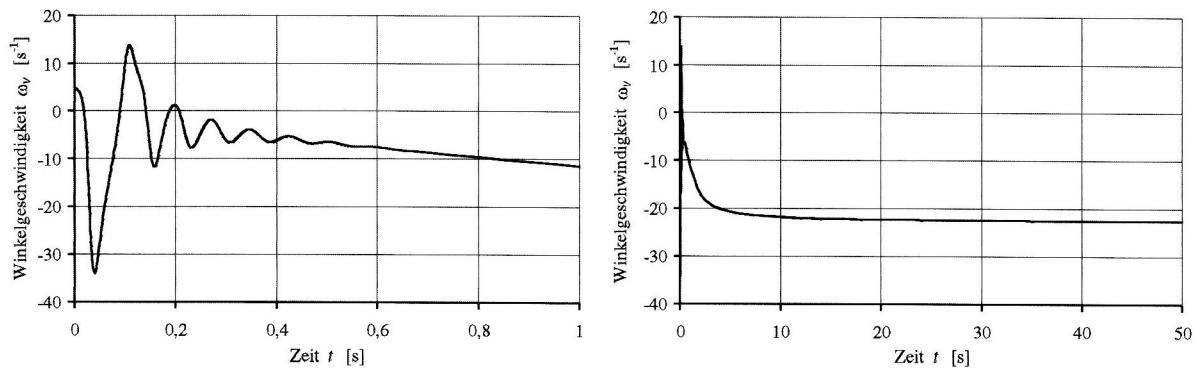


Bild 5. Verlauf der Winkelgeschwindigkeit  $\omega_v$  bei überkritischem Anfangszustand

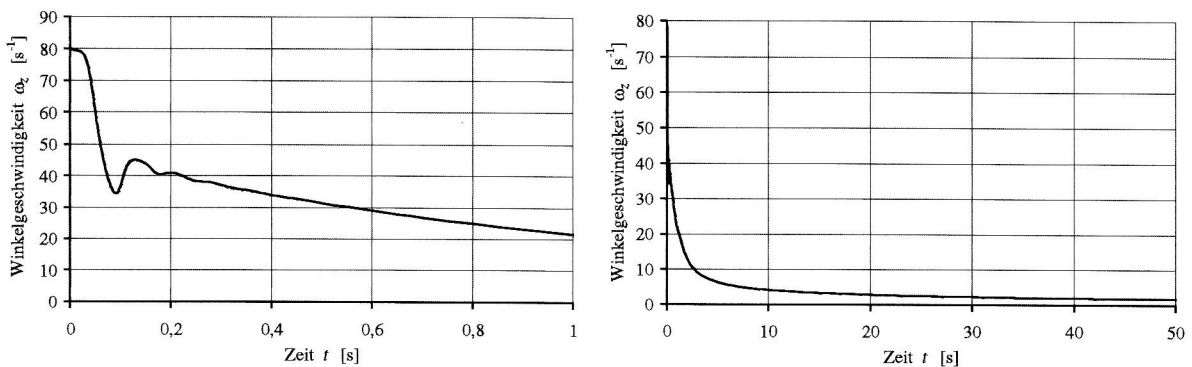


Bild 6. Verlauf der Winkelgeschwindigkeit  $\omega_z$  bei überkritischem Anfangszustand

*Unterkritischer Anfangszustand:*  $\omega_{z0} = 35 \text{ s}^{-1}$

Aus Gleichung (28) folgt  $\tilde{\omega}_v = 20,219 \text{ s}^{-1}$ . Aus den Gleichungen (56) bis (59) folgt  $E_0 = 2050,58 \text{ J}$ ,  $\tilde{E} = 294,35 \text{ J}$ ,  $E_{\text{Verlust}} = 1756,23 \text{ J}$ . Die in den Bildern 7 dargestellten Verläufe der Winkelgeschwindigkeiten zeigen in diesem Falle eine ziemlich gute Übereinstimmung zwischen der quasistationären Lösung und der Lösung der vollständigen Bewegungsgleichungen. Obwohl der Anfangswert der Winkelgeschwindigkeit noch relativ groß ist im Vergleich zur Eigenfrequenz, ist die quasistationäre Lösung anwendbar.

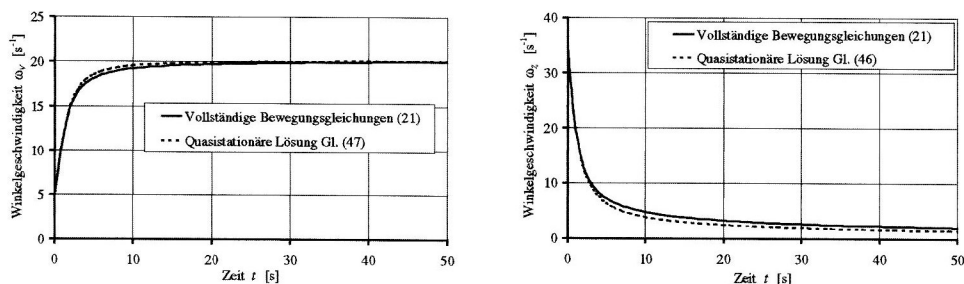


Bild 7. Verläufe der Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_v$  und  $\omega_z$  bei unterkritischem Anfangszustand

Stifes System:  $\omega_{z0} = 20 \text{ s}^{-1}$

Aus Gleichung (28) folgt  $\tilde{\omega}_v = 8,762 \text{ s}^{-1}$ . Aus den Gleichungen (56) bis (59) folgt  $E_0 = 639,63 \text{ J}$ ,  $\tilde{E} = 55,28 \text{ J}$ ,  $E_{\text{Verlust}} = 584,35 \text{ J} \approx 587,52 \text{ J}$ . Für die in den Bildern 8 dargestellten Verläufe der Winkelgeschwindigkeiten weichen die quasistationären Lösungen nicht erkennbar von den Lösungen der vollständigen Bewegungsgleichungen ab. Darüber hinaus zeigen sie, daß sich die Winkelgeschwindigkeit  $\omega_v$  im wesentlichen nur in der Anfangsphase, und auch hier relativ wenig, ändert, so daß die auf der Annahme ihrer Konstanz beruhende, für steife Systeme abgeleitete grobe Näherung (53) für  $\omega_z$  hier gut anwendbar ist.

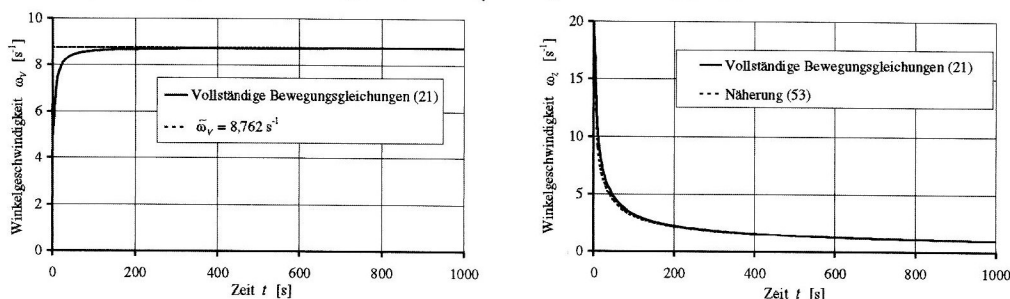


Bild 8. Verläufe der Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_v$  und  $\omega_z$  für steifes System

## 8 Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wurde das Bewegungsverhalten eines um zwei Achsen drehbaren dissipativ-elastischen Modellkreisels untersucht. Es wurde gezeigt, daß innere Dämpfung ihn im Laufe der Zeit zum Erstarren, i.a. jedoch nicht zum Stillstand bringt. Dabei strebt das Kreiselsystem nach Kollinearität zwischen Drall- und Winkelgeschwindigkeitsvektor. Es wurde außerdem gezeigt, daß die Schwingungen der Massenpunkte im Resonanzbereich sehr schnelle, teilweise stark schwingende Änderungen der Winkelgeschwindigkeiten des Kreisels verursachen. Es ist zu erwarten, daß vergleichbare Effekte infolge Energiedissipation bei durch Corioliskräfte und andere Massenbeschleunigungskräfte erregten Schwingungen auch bei anderen Modellen von Kreiseln oder Mehrkörpersystemen auftreten.

### Literatur

1. Magnus, K.: Kreisel, Springer-Verlag, Berlin, (1971)
2. Rimrott, F.P.J.: Introductory Attitude Dynamics. Springer-Verlag, New York, (1989)
3. Rimrott, F.P.J.: Das Kollinearitätsprinzip. Technische Mechanik, 18, 1, (1998), 1-12
4. Sperling, L.; Saitov, A.: Erzwungene reguläre Präzession eines dissipativen Kreisels. ZAMM, Special Issue 5, (1996), 333-334

### Danksagung

Die Autoren danken Herrn Prof. Dr.-Ing. Dr.h.c.mult. F.P.J. Rimrott für viele fördernde Gespräche und Ratschläge bei der Erarbeitung der dargelegten Untersuchung.

Die Arbeit entstand im Rahmen eines vom Kultusministerium des Landes Sachsen-Anhalt unter FKZ: 1105A/2385B geförderten Projektes.

**Anschrift:** Professor Dr.-Ing. habil. Lutz Sperling, Dipl.-Mech. Alexander Saitov, Institut für Mechanik, Otto-von-Guericke-Universität, Postfach 4120, D-39016 Magdeburg