

Rechnerische Ermittlung des bezogenen Spannungsgefälles für homogene prismatische Stäbe mit Vollquerschnitt bei Torsion

E. Bazant

Dauerfestigkeitsuntersuchungen sind bekanntlich sehr aufwendig und teuer. Zur Untersuchung von Kerbproblemen sind deshalb neben Dauerfestigkeitsversuchen unbedingt analytische, numerische o. ä. Methoden anzuwenden, damit eine möglichst umfassende Lösung mit geringem Aufwand erreicht wird. Die vorliegende Arbeit zeigt eine Methode zur Ermittlung des bezogenen Spannungsgefälles für homogene prismatische Stäbe mit Vollquerschnitt. Durch deren Anwendung kann man die Kerbwirkungszahl für viele technisch wichtige Wellenprofile berechnen.

1 Berechnungsgrundlagen

Nach Siebel und Stieler (1955) kann man die Kerbwirkungszahl aus der Formzahl und dem bezogenen Spannungsgefälle mit den Grundlagen der Elastizitätstheorie berechnen (TGL 19340, 1984; Göldner, 1978; Sähn, 1989). In der bisherigen Literatur sind jedoch fast keine Angaben für die Formzahl und das bezogene Spannungsgefälle für technisch häufig verwendete Profile bei Torsion zu finden. In den Beiträgen von Bazant (1989, 1991a, 1991b) werden Lösungswege und Berechnungsbeispiele zur Bestimmung des Torsionsträgheitsmoments, der Spannungskonzentration am Profilrand und der Formzahl bei Torsion dargelegt.

Die Berechnung des bezogenen Spannungsgefälles für Torsion erfolgt in diesem Aufsatz durch die Anwendung der konformen Abbildung und der Elastizitätstheorie. Das Problem kann als gelöst betrachtet werden, wenn es gelingt, das vorgegebene Profil (einfach zusammenhängendes Gebiet) auf den Kreis abzubilden. Das bezogene Spannungsgefälle für Torsion wird mit der Funktion

$$\bar{G} = \frac{\left(\frac{d\tau}{dr}\right)_{\max}}{\tau_{\max}} \quad (1)$$

berechnet. Für die Vollwelle (nach Bild 1) wird beispielsweise

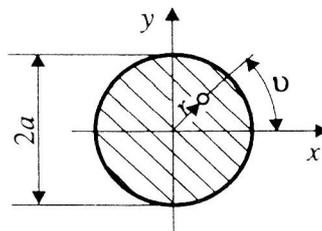


Bild 1. Vollwelle

$$\tau = G \vartheta r$$

$$\frac{d\tau}{dr} = G \vartheta$$

$$\tau_{\max} = G \vartheta a \quad \text{und damit}$$

$$\bar{G} = \frac{1}{a}$$

Hierbei sind

G = Schubmodul in N/mm^2

ϑ = Verdrehwinkel je Längeneinheit.

Für die konforme Abbildungsfunktion eines Wellenprofils mit Vollwandquerschnitt (z. B. einer Keilwelle) kann man folgenden Ansatz machen:

$$\left. \begin{aligned} z &= x + iy = \omega(\zeta) \\ z &= R \left[\zeta + \frac{\lambda_1}{p+1} \zeta^{p+1} + \frac{\lambda_2}{2p+1} \zeta^{2p+1} + \dots + \frac{\lambda_n}{np+1} \zeta^{np+1} \right] \\ \text{mit} \\ 0 &\leq |\lambda_i| \leq 1 \\ \text{und} \\ \zeta &= e^{u+iv} \\ p &\text{-Symmetriefaktor (mit } p = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

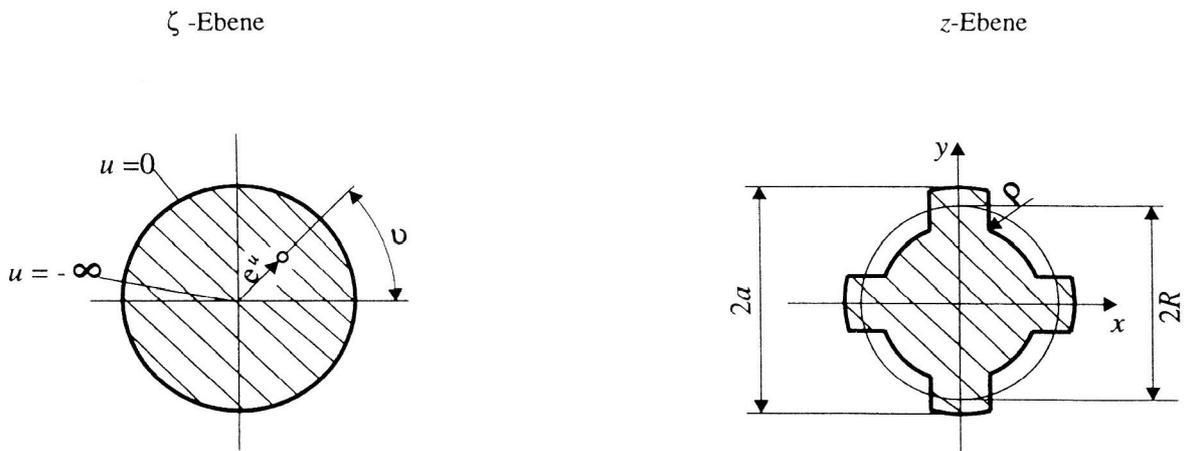


Bild 2. Schematische Darstellung zur konformen Abbildung

Aus Gleichung (2) wird

$$\left. \begin{aligned} x &= R \left[e^u \cos v + \frac{\lambda_1}{p+1} e^{(p+1)u} \cos(p+1)v + \frac{\lambda_2}{2p+1} e^{(2p+1)u} \cos(2p+1)v \right. \\ &\quad \left. + \dots + \frac{\lambda_n}{np+1} e^{(np+1)u} \cos(np+1)v \right] \\ y &= R \left[e^u \sin v + \frac{\lambda_1}{p+1} e^{(p+1)u} \sin(p+1)v + \frac{\lambda_2}{2p+1} e^{(2p+1)u} \sin(2p+1)v \right. \\ &\quad \left. + \dots + \frac{\lambda_n}{np+1} e^{(np+1)u} \sin(np+1)v \right] \\ \text{und } r^2 &= x^2 + y^2 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Setzt man $u = 0$, so entsteht die Profilrandkurve in Parameterdarstellung

$$\left. \begin{aligned} x_R &= R \left[\cos v + \frac{\lambda_1}{p+1} \cos(p+1)v + \frac{\lambda_2}{2p+1} \cos(2p+1)v + \dots + \frac{\lambda_n}{np+1} \cos(np+1)v \right] \\ y_R &= R \left[\sin v + \frac{\lambda_1}{p+1} \sin(p+1)v + \frac{\lambda_2}{2p+1} \sin(2p+1)v + \dots + \frac{\lambda_n}{np+1} \sin(np+1)v \right] \\ \text{und} \\ r_R^2 &= x_R^2 + y_R^2 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Für Stäbe mit einfach zusammenhängendem Querschnitt muß die Spannungsfunktion ϕ die Dgl.

$$\Delta \phi = -2 G \vartheta \quad (5)$$

und ferner die Randbedingung

$$\Phi_{\text{Rand}} = 0 \quad (6)$$

erfüllen (Göldner, 1978; Göldner, 1979; Filonenko, 1967). Bei krummlinigen Koordinaten und zweidimensionalen Problemen ist der Laplace-Operator (Göldner, 1985; Vocke, 1969; Neuber, 1958)

$$\Delta \phi = \frac{1}{h_u h_v} \left\{ \left[\frac{h_v}{h_u} \phi_{,u} \right]_{,u} + \left[\frac{h_u}{h_v} \phi_{,v} \right]_{,v} \right\} \quad (7)$$

mit den Verzerrungsfaktoren

$$\left. \begin{aligned} h_u &= \left[(x_{,u})^2 + (y_{,u})^2 \right]^{1/2} \\ \text{und} \\ h_v &= \left[(x_{,v})^2 + (y_{,v})^2 \right]^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Durch die Anwendung der konformen Abbildung entsteht ein orthogonales Koordinatensystem, und es ergeben sich folgende Vereinfachungen

$$h = h_u = h_v \quad (9)$$

und

$$\Delta \phi = \frac{1}{h^2} [\phi_{,uu} + \phi_{,vv}] = -2 G \vartheta \quad (10)$$

Für dieses Koordinatensystem ist

$$\bar{G} = \frac{\left(\frac{\partial \tau}{\partial r}\right)_{\max}}{\tau_{\max}} \quad (1.1)$$

Das bezogene Spannungsgefälle wird für die maximale Spannung ermittelt. Sie liegt am Profilrand. Am Profilrand ist die Radialspannung Null.

$$(\tau_u)_{\text{Rand}} = \left(\frac{\phi_{,v}}{h}\right)_{\text{Rand}} = 0 \quad (11)$$

Aus Gleichung (10) wird

$$(\Delta \phi)_{\text{Rand}} = -2 G \vartheta = \frac{\phi_{,uu}}{h^2} \quad (12)$$

Mit

$$\tau_v = -\frac{\phi_{,u}}{h} = \tau \quad (13)$$

und

$$\frac{\partial \tau}{\partial r} = \frac{\partial \tau}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial r} \quad (14)$$

wird

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau}{\partial u} &= (\tau_v)_{,u} = -\left(\frac{\phi_{,u}}{h}\right)_{,u} \\ \frac{\partial \tau}{\partial u} &= -\frac{1}{h^2} [h \phi_{,uu} - \phi_{,u} h_{,u}] \\ \frac{\partial \tau}{\partial u} &= \frac{1}{h} [-\phi_{,uu} + \tau_v h_{,u}] \end{aligned} \quad (15)$$

Den Krümmungsradius ρ am Profilrand ($u = \text{konst.} = 0$) kann man mit

$$\rho = \frac{h^2}{h_{,u}} \quad (16)$$

ermitteln (Vocke, 1969; Neuber, 1958). Ferner ist nach Wunsch (1973)

$$\left|\frac{\partial r}{\partial u}\right| = h \quad (17)$$

und nach Bazant (1991a)

$$(\tau_v)_{\max} = G \vartheta R \bar{\alpha}_v \quad (18)$$

Somit wird aus Gleichung (14)

$$\frac{\partial \tau}{\partial r} = -\frac{\phi_{,uu}}{h^2} + \frac{\tau_v \cdot h_{,u}}{h^2} = 2 G \vartheta + \frac{\tau_v}{\rho} \quad (19)$$

und

$$\bar{G} = \frac{2}{R \bar{\alpha}_v} + \frac{1}{\rho} \quad [1/\text{mm}] \quad (20)$$

Unter Berücksichtigung der Mikrostützwirkung und mit

$$R = \frac{a}{K_2} \quad (21)$$

wird schließlich das bezogene Spannungsgefälle bei Torsion

$$\bar{G} = \frac{2 K_2}{a \bar{\alpha}_v} + \frac{1}{\rho_1} \quad [1/\text{mm}] \quad (22)$$

Es bedeuten:

$$\rho_1 = \rho + s \rho^* \quad (23)$$

ρ_1 fiktiver Krümmungsradius

ρ Krümmungsradius

s Faktor zur Berücksichtigung der Beanspruchungsarten und Festigkeitshypothesen (Neuber, 1968)

ρ^* Ersatzstrukturlänge

2 Berechnungsbeispiele

Beispiel 1

Berechnung der Kerbwirkungszahl β_K aus der Formzahl α_K und dem bezogenen Spannungsgefälle \bar{G} für eine Keilwelle mit 8 Keilen bei Torsion und folgenden speziellen Werten:

$$2a = 60 \text{ mm} = \text{Außendurchmesser}$$

$$\rho_1 = 0,27 \text{ mm}$$

$$\tau_p = 420 \text{ N/mm}^2$$

$$\bar{\alpha}_v = 2,6 = \text{bezogene max. Randspannung}$$

$$K_2 = \frac{a}{R} = 1,1$$

$$K_R = 0,954$$

} nach Bazant (1991a) und Bazant(1991b)

Mit Gleichung (22) wird

$$\bar{G} = \frac{2K_2}{a\bar{\alpha}_v} + \frac{1}{\rho_1} = \frac{2 \cdot 1,1}{30 \cdot 2,6} + \frac{1}{0,27} = 3,73 \quad 1/\text{mm}$$

Nach TGL 19340 (1984) ergeben $\bar{G} = 3,73 \text{ 1/mm}$ und $\tau_F = 420 \text{ N/mm}^2$ die Stützziffer $\eta \approx 1,24$.
Nach Bazant (1991a) und Bazant (1991b) wird die - auf den Außendurchmesser bezogene - Formzahl

$$\alpha_K = \bar{\alpha}_v \frac{I_{tn} R}{I_a} = \left(\frac{a}{R}\right)^3 \frac{\bar{\alpha}_v}{K_R} = 1,1^3 \frac{2,6}{0,954} = 3,63$$

und hiermit die Kerbwirkungszahl nach Siebel und Stieler (1955)

$$\beta_K = \frac{\alpha_K}{\eta} = \frac{3,63}{1,24} = 2,92$$

Hierbei sind:

$$I_t = \left(\frac{\pi R^4}{2}\right) K_R \quad \text{und} \quad I_{tn} = \frac{\pi a^4}{2}$$

Beispiel 2

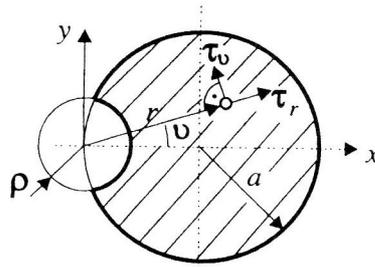


Bild 3. Welle mit Kreiskerbe

Berechnung des bezogenen Spannungsgefälles für eine Welle mit Kreiskerbe nach Bild 3. Die Spannungsfunktion ϕ für das dargestellte Profil kann man in Polarkoordinaten angeben (Göldner, 1978).

$$\begin{aligned} \phi &= \phi(r, v) \\ &= G \vartheta \left[\frac{r^2}{2} - a r \cos v \right] \left[\frac{\rho^2}{r^2} - 1 \right] \\ \phi &= G \vartheta \left[\frac{\rho^2}{2} - \frac{r^2}{2} - \frac{1}{r} a \rho^2 \cos v + a r \cos v \right] \end{aligned} \quad (24)$$

Die Spannungskomponenten sind

$$\tau_v = -\frac{\partial \phi}{\partial r} = -\phi_{,r} = G \vartheta \left[r - a \cos v - \frac{1}{r^2} a \rho^2 \cos v \right] \quad (25)$$

und

$$\tau_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial v} = \frac{\phi_{,v}}{r} \quad (26)$$

Am Profilrand ist die Radialspannung Null, $\tau_r = 0$, und es gilt

$$\frac{\partial \tau}{\partial r} = -\phi_{,rr} = -G \vartheta \left(1 + \frac{2a\rho^2}{r^3} \cos \nu \right) \quad (27)$$

Das bezogene Spannungsgefälle \bar{G} wird für die Stelle der maximalen Spannung berechnet. Diese liegt bei $\nu = 0$ und $r = \rho$. Mit Gleichung (1.1) wird

$$\bar{G} = \frac{\left(\frac{\partial \tau}{\partial r} \right)_{\max}}{\tau_{\max}} = \frac{1 + \frac{2}{a} \frac{\rho}{\rho}}{2 - \frac{\rho}{a}} \quad (28)$$

Unter Berücksichtigung der Mikrostützwirkung wird

$$\bar{G} = \frac{\frac{1}{a} + \frac{2}{\rho_1}}{2 - \frac{\rho_1}{a}} \quad (29)$$

und für $\frac{\rho_1}{a} \ll 1$ ist

$$\bar{G} = \frac{1}{2a} + \frac{1}{\rho_1} \quad (29.1)$$

Zahlenbeispiel

Gegeben: $a = 20 \text{ mm}$, $\rho_1 = 1 \text{ mm}$

Gesucht: \bar{G} nach den Gleichungen (29), (29.1) und (22).

$$\bar{G} = \frac{\frac{1}{a} + \frac{2}{\rho_1}}{2 - \frac{\rho_1}{a}} = \frac{\frac{1}{20} + \frac{2}{1}}{2 - \frac{1}{20}} = 1,051 \quad 1/\text{mm} \quad (29)$$

$$\bar{G} = \frac{1}{2a} + \frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{2 \cdot 20} + \frac{1}{1} = 1,025 \quad 1/\text{mm} \quad (29.1)$$

Die Berechnung nach Gleichung (22) erfolgt mit $K_2 = 1,005$ und $\bar{\alpha}_\nu = 2 - \frac{\rho_1}{a}$. Es wird

$$\bar{G} = \frac{2 \cdot K_2}{a \cdot \bar{\alpha}_\nu} + \frac{1}{\rho_1} = \frac{2 \cdot 1,005}{20 \left(2 - \frac{1}{20} \right)} + \frac{1}{1} = 1,051 \quad (22)$$

3 Berechnungsergebnisse

Das bezogene Spannungsgefälle \bar{G} nach Gleichung (22) gilt für homogene prismatische Stäbe mit Vollquerschnitt und linear elastischem Material bei Torsion. Damit gilt diese Gleichung auch für folgende häufig verwendete Antriebslemente:

- Wellen mit Paßfedernuten und Keilnuten.
- Keilwellen,
- Kerbzahnwellen,
- Zahnwellenprofile,
- Polygonwellen usw.

Diese Funktion berücksichtigt den Einfluß der Mikrostützwirkung und damit den kerbspannungsmäßig bedeutsamen Bereich der Spitzkerben.

Die Haupteinflußgröße für \bar{G} ist $\frac{1}{\rho_1}$, also der wirksame kritische Kerbradius. Das Beispiel 1 zeigt die Berechnung der Kerbwirkungszahl für eine Keilwelle und das Beispiel 2 die Bestimmung des bezogenen Spannungsgefälles für die Welle mit Kreiskerbe. Hierbei ergibt das Zahlenbeispiel übereinstimmende Ergebnisse für die Gleichungen (22) und (29).

4 Zusammenfassung

Nach Siebel und Stiebler (1955) genügen zur Berechnung der Kerbwirkungszahl das bezogene Spannungsgefälle, die Formzahl und die Stützziffer.

Die vorliegende Arbeit zeigt die Bestimmung des bezogenen Spannungsgefälles.

Durch die zusätzliche Anwendung der Beiträge Bazant (1991a) und Bazant (1991b) kann man die Formzahl und das Torsionsträgheitsmoment und damit auch die Kerbwirkungszahl für viele gekerbte Wellen mit Vollquerschnitt bei Torsion berechnen. Diese Berechnung erfolgt durch die Anwendung der konformen Abbildung und der Elastizitätstheorie. Das Problem kann als gelöst betrachtet werden, wenn es gelingt, das vorgegebene Profil (einfach zusammenhängendes Gebiet) auf den Kreis abzubilden.

Mit diesen theoretischen Grundlagen kann man - in Verbindung mit Experimenten - für den Konstrukteur wertvolle neue Berechnungsunterlagen und -vorschriften schaffen.

Literatur

1. Bazant, E.: Zur Spannungs-konzentration in der Längsnut der Welle bei Torsion. Maschinenbautechnik, Berlin, 2, (1989).
2. Bazant, E.: Rechnerische Ermittlung der Spannungs-konzentration in Keilwellen bei Torsion. Maschinenbautechnik, Berlin, 6, (1991a).
3. Bazant, E.: Rechnerische Ermittlung des Torsionsträgheitsmomentes für homogene prismatische Stäbe mit Vollquerschnitt. unveröffentlicht, (1991b).
4. Filonenko - Boroditsch, M.M.: Elastizitätstheorie, Leipzig, VEB Fachbuchverlag, (1967).
5. Göldner, H.: Arbeitsbuch Höhere Festigkeitslehre, Leipzig, VEB Fachbuchverlag, (1978).
6. Göldner, H.: Lehrbuch Höhere Festigkeitslehre, Band 1, Leipzig, VEB Fachbuchverlag, (1979).
7. Göldner, H.: Lehrbuch Höhere Festigkeitslehre, Band 2, Leipzig, VEB Fachbuchverlag, (1985).

8. Göldner, H.; Holzweißig, F.: Leitfaden der Technischen Mechanik. Leipzig, VEB Fachbuchverlag, (1978).
9. Neuber, H.: Kerbspannungslehre. Springer Verlag, (1958).
10. Neuber, H.: Über die Berücksichtigung der Spannungskonzentration bei Festigkeitsproblemen. Konstruktion, Berlin, 1, (1968).
11. Sähn, S.; Göldner, H.: Bruch- und Beurteilungskriterien in der Festigkeitslehre. Leipzig, VEB Fachbuchverlag, (1989).
12. Siebel, E.; Stieler, M.: Ungleichförmige Spannungsverteilung bei schwingender Belastung. VDI-Zeitschrift 97 (1955), S. 127.
13. TGL 19340: Dauerfestigkeit der Maschinenbauteile. Ausgabe (1984).
14. Vocke, W.: Räumliche Probleme der linearen Elastizität. Leipzig, VEB Fachbuchverlag, (1969).
15. Wunsch, G.: Feldtheorie, Band 1. Berlin, VEB Verlag Technik, (1973).

Adresse: Dipl.-Ing. E. Bazant, Kornstraße 14, D-39387 Oschersleben/Bode