

Lineare Viskoelastizität in differentieller Darstellung

S. Koczyk

Zur Beschreibung des linear viskoelastischen Verhaltens benutzt man im allgemeinen die Integralformulierung des Zusammenhanges zwischen Dehnung und Spannung. In vielen Fällen ist jedoch die differentielle Darstellung zweckmäßiger. Ausgehend von der Kriech- bzw. Relaxationsfunktion kann man beide Darstellungen angeben. Gleichzeitig besteht die Möglichkeit, sowohl von der Integralformulierung zur differentiellen Darstellung und umgekehrt vom differentiellen Zusammenhang zur Integralformulierung zu gelangen. Dabei zeigt sich, daß man mit der differentiellen Formulierung in der Lage ist, das Materialverhalten in einer allgemeineren Weise zu formulieren, da das Boltzmannsche Superpositionsprinzip nicht als Voraussetzung zur Beschreibung desselben benutzt wird. Es ist somit möglich, auch nichtlineare Effekte sowie primäres, sekundäres und tertiäres Kriechen zu beschreiben.

1 Problemstellung

Zur Beschreibung des zeitabhängigen Verhaltens von linear viskoelastischen Materialien bei konstanter Temperatur geht man im allgemeinen (Göldner, 1978; Göldner, 1979; Giesekus, 1994) von der Gleichung

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 K_E(t) \quad (1)$$

mit der materialspezifischen Kriechfunktion $K_E(t)$ aus. Hier gilt für die Spannung $\sigma(t) = 0$ für $t \leq 0$ und $\sigma(t) = \sigma_0$ für $t > 0$. Setzt man die Gültigkeit des Boltzmannschen Superpositionsprinzips voraus, so folgt bei beliebig zeitlich veränderlicher Spannung die Dehnung zum Zeitpunkt t

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t K_E(t-\tau) \frac{\partial \sigma}{\partial \tau} d\tau \quad (2)$$

Umgekehrt ergibt sich mit der Relaxationsfunktion $R_E(t)$ bei konstanter Dehnung ε_0 die Spannung zu einem beliebigen Zeitpunkt t :

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 R_E(t) \quad (3)$$

und unter Anwendung des Superpositionsprinzips für beliebig vorgegebene Dehnungen $\varepsilon(t)$:

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t R_E(t-\tau) \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} d\tau \quad (4)$$

Zwischen Kriech- und Relaxationsfunktion besteht unter den genannten Voraussetzungen die Beziehung

$$\frac{d}{dt} \int_0^t K_E(t-\tau) R_E(\tau) d\tau = 1 \quad (5)$$

Für zahlreiche Anwendungen ist jedoch die differentielle Darstellung vorteilhafter, die wiederum bei konstanter Temperatur für den einachsigen Spannungszustand in der folgenden Weise formuliert wird:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{1}{3\eta} \sigma \quad (6)$$

In dieser Beziehung sind E der Elastizitätsmodul und η die Zähigkeit des Materials. Diese ist normalerweise eine veränderliche Größe, denn mit der Zunahme der bleibenden Verformung ändert sich der innere Zustand des Festkörpers, und damit ändern sich auch die Parameter in den konstitutiven Gleichungen. Während die Änderung des Elastizitätsmoduls vernachlässigt und E somit als konstant angesehen wird, ist die Änderung von η unbedingt zu berücksichtigen, da das Verhalten des Materials sonst nicht richtig beschrieben werden kann. Hierzu werden analog zur Plastizitätstheorie spezielle Zustandsparameter eingeführt, um diese verformungsbedingten Änderungen der inneren Struktur zu erfassen. Im Spezialfall der linearen Viskoelastizität ist η jedoch nur vom Verhältnis der Dehnung zur Spannung abhängig, wie im folgenden gezeigt wird. Ein spezielles Belastungsprogramm kann auf der Grundlage der differentiellen Beziehung nur in kleinen Lastschritten abgearbeitet werden. Kriech- und Relaxationsfunktion folgen als spezielle Belastungsfälle aus der allgemeinen Gleichung (6). Die differentielle Formulierung bietet weitere Vorteile, wenn neben den viskoelastischen noch plastische oder thermische Dehnungsinkremente zur gesamten Dehnungsänderung hinzuzufügen sind.

2 Zähigkeit, Kriechen und Relaxation

2.1 Zähigkeit und Kriechen

Im folgenden wird die Zähigkeit η als Funktion von $\frac{\varepsilon}{\sigma}$ eingeführt, d. h.

$$\eta = \eta\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) \quad (7)$$

wobei $\eta \neq 0$ vorausgesetzt wird. Diese Darstellung berücksichtigt summarisch die durch Belastung und Verformung bedingten Veränderungen des inneren Zustands und ist in gewisser Weise mit dem endlichen Deformationsgesetz der Plastizitätstheorie vergleichbar. Eine Anfangsbelastung durch σ_0 führt, wenn diese in einem hinreichend kurzen Zeitraum erfolgt, zu der Dehnung

$$\varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E} \quad (8)$$

Die Spannung bleibt beim Kriechversuch konstant, also gilt $\dot{\sigma} = 0$, und Gleichung (6) geht über in

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\sigma_0}{3\eta\left(\frac{\varepsilon}{\sigma_0}\right)} \quad (9)$$

Mit $x = \frac{\varepsilon}{\sigma_0}$ und $x_0 = \frac{\varepsilon_0}{\sigma_0} \left(= \frac{1}{E} \right)$ für $t=0$, sowie $dx = \frac{d\varepsilon}{\sigma_0}$ folgt

$$\sigma_0 \frac{dx}{dt} = \frac{\sigma_0}{3\eta(x)} \quad (10)$$

und somit

$$t = 3 \int_{x_0}^x \eta(x) dx \quad (= g(x) - g(x_0)) \quad (11)$$

Mit der Umkehrfunktion g^{-1} von g erhält man

$$x = g^{-1}\left(t + g\left(\frac{1}{E}\right)\right) \quad \left(= \frac{\varepsilon}{\sigma_0} \right) \quad (12)$$

und damit die Kriechfunktion

$$K_E(t) = g^{-1}\left(t + g\left(\frac{1}{E}\right)\right) \quad (13)$$

Umgekehrt ergibt sich die Zähigkeit η als Funktion von $\frac{\varepsilon}{\sigma}$, wenn die Kriechfunktion für ein bestimmtes Material vorliegt. Zunächst folgt aus Gleichung (11)

$$\frac{dt}{dx} = 3\eta \quad (14)$$

und weiter durch Umkehrung von Gleichung (13)

$$\frac{d(K_E^{-1}(x))}{dx} = 3\eta \quad (15)$$

mit $x = \frac{\varepsilon}{\sigma}$.

2.2 Zähigkeit und Relaxation

Wird ein Probestab innerhalb eines hinreichend kurzen Zeitraums gedehnt und beträgt die Dehnung ε_0 , so entsteht die Spannung $\sigma_0 = E\varepsilon_0$. Bleibt die Dehnung anschließend konstant, so vermindert sich die Spannung. Für diesen Vorgang erhält man aus Gleichung (6)

$$\frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{3\eta\left(\frac{\varepsilon_0}{\sigma}\right)} = 0 \quad (16)$$

Setzt man wieder $y = \frac{\varepsilon_0}{\sigma}$ mit dem Anfangswert $y_0 = \frac{\varepsilon_0}{\sigma_0} = \left(\frac{1}{E}\right)$ zur Zeit $t = 0$ und $d\sigma = -\varepsilon_0 \frac{dy}{y^2}$, so erhält man

$$Edt = 3\eta(y) \frac{dy}{y} \quad (17)$$

Die Integration ergibt

$$Et = 3 \int_{y_0}^y \eta(y) \frac{dy}{y} \quad (= h(y) - h(y_0)) \quad (18)$$

Mit der Umkehrfunktion h^{-1} von h und der oben eingeführten Definition von y resultiert daraus

$$\sigma = \frac{\varepsilon_0}{h^{-1}\left(Et + h\left(\frac{1}{E}\right)\right)} \quad (19)$$

und damit die Relaxationsfunktion

$$R_E(t) = \frac{1}{h^{-1}\left(Et + h\left(\frac{1}{E}\right)\right)} \quad (20)$$

Auch hier kann man wieder η bestimmen, wenn die Relaxationsfunktion experimentell ermittelt wurde.

2.3. Räumlicher Spannungs- und Verformungszustand

Es seien σ_{ij} und ϵ_{ij} die Komponenten des Spannungs- bzw. des Deformationstensors, wobei wieder kleine Verformungen vorausgesetzt werden. Die mittlere oder hydrostatische Spannung sei σ_m , die Volumendehnung ϵ_{Vol} , und die deviatorischen Komponenten von Spannungs- und Deformationstensor werden mit s_{ij} und e_{ij} bezeichnet. Kompressions- und Gleitmodul werden mit K und G eingeführt. Es wird ferner vorausgesetzt, daß Volumenänderungen nur elastisch erfolgen und Kriechdehnungen somit nur im deviatorischen Anteil des Deformationstensors wirksam werden, d. h.

$$\epsilon_{Vol} = \frac{\sigma_m}{K} \quad (21)$$

und

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2G} \dot{s}_{ij} + \frac{1}{2\eta} s_{ij} \quad (22)$$

Die Zähigkeit η wird jetzt in Analogie zum einachsigen Spannungszustand wieder als Funktion des Verhältnisses von Vergleichsdehnung ϵ_v zu Vergleichsspannung σ_v aufgefaßt, also

$$\eta = \eta\left(\frac{\epsilon_v}{\sigma_v}\right) \quad (23)$$

mit

$$\epsilon_v = \sqrt{\frac{2}{3}} e_{ij} e_{ij} \quad (24)$$

und

$$\sigma_v = \sqrt{\frac{3}{2}} s_{ij} s_{ij} \quad (25)$$

Die Formulierung der Zähigkeit entsprechend Gleichung (23) führt gegenüber Gleichung (7) beim Übergang zum einachsigen Fall zu einer gewissen Diskrepanz, da in Gleichung (7) die Volumen- und Gestaltänderung zunächst nicht gesondert betrachtet wurden. Eine von Null verschiedene Volumendehnung ergibt eine Querdehnzahl $\nu < 0,5$, und man erhält somit

$$\epsilon_v = \frac{2}{3} \epsilon_{11} (1 + \nu) \quad (26)$$

Legt man die im einachsigen Kriechversuch ermittelte Zähigkeit zugrunde, so ist das Verhältnis ϵ_v / σ_v entsprechend zu korrigieren, d. h.

$$\eta = \eta\left(\frac{3}{2(1+\nu)} \frac{\epsilon_v}{\sigma_v}\right) \quad (23a)$$

3. Beispiele

3.1. Konstante Zähigkeit

Für den Fall konstanter Zähigkeit $\eta = \eta_0$ folgt aus den Gleichungen (11), (12) und (13) die bekannte Kriechfunktion

$$K_E(t) = \frac{t}{3\eta_0} + \frac{1}{E} \quad (27)$$

die aber bekanntermaßen das wirkliche zeitabhängige Dehnungsverhalten nur sehr ungenau annähert. Die zugehörige Relaxationsfunktion bestimmt man analog aus den Gleichungen (18), (19) und (20) zu

$$R_E(t) = E e^{-\frac{Et}{3\eta_0}} \quad (28)$$

Man kann leicht zeigen, daß Kriech- und Relaxationsfunktion die Bedingung (5) erfüllen.

3.2. Drei-Parameter-Festkörper

In der linearen Theorie der Viskoelastizität spielt das Modell eines Kelvin-Voigt-Körpers mit in Reihe geschalteter Feder - in Giesekus (1994) als Drei-Parameter-Festkörper bezeichnet - eine bedeutende Rolle. Dieses Modell entspricht einer veränderlichen Zähigkeit der Art

$$\frac{1}{3\eta} = \frac{1}{E T_0} \left(\beta - E \frac{\epsilon}{\sigma} \right) \quad (29)$$

In Gleichung (6) eingesetzt führt dies auf die bekannte Beziehung

$$\dot{\epsilon} + \frac{\epsilon}{T_0} = \frac{1}{E} \left(\dot{\sigma} + \beta \frac{\sigma}{T_0} \right) \quad (30)$$

mit $\beta > 1$. Beim Kriechen des Materials kann man immer $E \frac{\epsilon}{\sigma} \leq 1$ voraussetzen, so daß der Klammerausdruck in Gleichung (29) nicht negativ werden kann. Man erhält dann für die Kriechfunktion

$$K_E(t) = \frac{1}{E} \left[\beta + (1 - \beta) e^{-\frac{t}{T_0}} \right] \quad (31)$$

und für die Relaxationsfunktion

$$R_E(t) = E \left[\frac{1}{\beta} + \left(1 - \frac{1}{\beta} \right) e^{-\beta \frac{t}{T_0}} \right] \quad (32)$$

Auch in diesem Beispiel ist die Bedingung (5) durch die Gleichungen (31) und (32) erfüllt. Die Zähigkeit η wächst bei konstanter Spannung (Kriechen) mit zunehmender Zeit unbegrenzt an. Aus den Gleichungen (29) und (31) folgt für diesen Fall

$$\eta = \frac{1}{3} \frac{E T_0}{\beta - 1} e^{\frac{t}{T_0}} \quad (33)$$

In gleicher Weise kann man dies für den Fall einer konstanten Spannung (Relaxation) zeigen. Dehnung bzw. Spannung nähern sich entsprechenden Grenzwerten. Die aus Kriechversuchen gewonnenen Erfahrungen zeigen jedoch, daß sich bei den meisten Materialien nach einer ersten Phase des Kriechens (Primärkriechen) eine Phase konstanter Dehngeschwindigkeit (Sekundärkriechen) anschließt, die in der dritten Phase (Tertiärkriechen) bei zunehmender Dehngeschwindigkeit schließlich zum Bruch des Materials führt. Bezogen auf die hier verwendete Modellvorstellung bedeutet dies, daß die Zähigkeit, ausgehend von einem relativ geringen Anfangswert, zunächst zunimmt, um schließlich, wenn die Tragfähigkeit des Materials erschöpft ist, wieder auf Null abzufallen.

3.3. Findley-Ansatz

Zur Beschreibung des viskoelastischen Materialverhaltens benutzt man häufig den Ansatz von Findley für die Kriechfunktion

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E} \left[1 + \left(\frac{t}{T} \right)^\alpha \right] \quad (34)$$

mit dem Elastizitätsmodul E und den Parametern α und T .

Gemäß dem unter Abschnitt 2.1 beschriebenen Verfahren findet man für die Zähigkeit η

$$\eta \left(\frac{\varepsilon}{\sigma} \right) = \frac{E T}{3\alpha} \left(E \frac{\varepsilon}{\sigma} - 1 \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \quad (35)$$

Diese Darstellung besitzt den Nachteil, daß sich $\eta = 0$ zu Beginn der Belastung mit $\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E}$ ergibt. Man kann diesen Nachteil jedoch vermeiden, indem man durch eine hinreichend kleine positive Korrekturgröße β sichert, daß der Ausdruck in der Klammer in Gleichung (35) immer positiv ist. Der so modifizierte Findley-Ansatz lautet dann

$$\eta \left(\frac{\varepsilon}{\sigma} \right) = \frac{E T}{3\alpha} \left(E \frac{\varepsilon}{\sigma} - 1 + \beta \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \quad (35a)$$

und man erhält anstelle von Gleichung (34) die entsprechend modifizierte Kriechfunktion

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E} \left[1 - \beta + \left(\frac{t}{T} \right)^\alpha \right] \quad (34a)$$

Mit zunehmender Zeit t wird der Einfluß von β auf die Kriechdehnung vernachlässigbar klein.

Aus den Gleichungen (35) bzw. (35a) gewinnt man die Relaxationsfunktion entsprechend Abschnitt 2.2 mit

$y = \frac{\varepsilon_0}{\sigma}$ aus der Beziehung

$$E t = \frac{E T}{\alpha} \int_{y_0}^y (E y - 1 + \beta)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \frac{dy}{y} \quad (36)$$

Das Integral und die zugehörige Umkehrfunktion lassen sich allerdings nicht mehr durch elementare Funktionen darstellen, so daß es hier wie in anderen Fällen zweckmäßiger erscheint, den Vorgang der Relaxation numerisch zu behandeln.

4. Nichtlineares Materialverhalten

4.1. Quadratische Abhängigkeit von der Spannung

Die differentielle Schreibweise bietet die Möglichkeit, in einfacher Weise nichtlineare Effekte zu berücksichtigen und damit das Materialverhalten besser den Versuchswerten anzupassen. Man kann davon ausgehen, daß der durch die Gleichungen (6) und (7) gegebene Zusammenhang für ein bestimmtes Material nur in bestimmten Bereichen der Spannung gültig ist, da sich ähnliche Kriechkurven ergeben, unabhängig von der Größe der Spannung. Es erscheint daher sinnvoll, den Einfluß der Spannung auf die Kriechdehngeschwindigkeit zu verstärken, wobei andererseits an dieser Stelle nicht alle Möglichkeiten, die dieses Konzept bietet, erörtert

werden können. Interessante Zusammenhänge ergeben sich, wenn man eine quadratische Abhängigkeit der Kriechdehngeschwindigkeit von der Spannung zugrunde legt. Es sei

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma^2}{E^2 T\left(E \frac{\varepsilon}{\sigma}\right)} \quad (37)$$

wobei T eine zeitwertige Funktion des Verhältnisses Dehnung zu Spannung darstellt. Im Fall des Kriechens bei konstanter Spannung erhält man mit

$$x = \frac{E \varepsilon}{\sigma_0} \quad (38)$$

und $x(t=0) = 1$ die Beziehung

$$\int_{\bar{x}=1}^x T(\bar{x}) d\bar{x} = \frac{\sigma_0}{E} t \quad (39)$$

Durch Umkehr erhält man wieder die Kriechfunktion, die jetzt in einer allgemeineren Weise von der Spannung abhängt.

Bringt man zur Zeit $t=0$ eine Dehnung ε_0 auf, die im folgenden konstant bleibt, so ergibt sich mit

$$y = E \frac{\varepsilon_0}{\sigma} \quad (40)$$

und $y=1$ für $t=0$

$$\int_{\bar{y}=1}^y T(\bar{y}) d\bar{y} = \varepsilon_0 t \quad (41)$$

Aus den Gleichungen (39) und (41) folgt ein reziprokes Verhalten zwischen Kriechen und Relaxation. Bezeichnet man die aus den Gleichungen (39) bzw. (40) resultierende Umkehrfunktion mit $H\left(\frac{\sigma_0}{E} t\right)$ bzw. $H(\varepsilon_0 t)$, so erhält man aus Gleichung (39)

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E} H\left(\frac{\sigma_0}{E} t\right) \quad (42)$$

bzw. aus Gleichung (41)

$$\sigma = \frac{E \varepsilon_0}{H(\varepsilon_0 t)} \quad (43)$$

Setzt man nun noch die jeweiligen Anfangswerte gleich, d. h. $\sigma_0 = E \varepsilon_0$, so folgt für die korrespondierenden Größen

$$\varepsilon \sigma = \varepsilon_0 \sigma_0 \quad (44)$$

4.2. Simulation des tertiären Kriechens

Zur Beschreibung der Effekte, die letztlich zum Versagen des Materials führen, ist es unerlässlich, die Zunahme der Schädigung des Materials durch ein geeignetes Schädigungsmodell zu berücksichtigen (siehe z. B. Naimenko (1996), Lemaître (1992) und Altenbach (1995)). Von besonderem Interesse ist die Zeit, bei der ein Versagen des Materials eintritt. Überlegungen hierzu wurden bereits von Rimrott (1959) veröffentlicht und von vielen Autoren sowohl durch theoretische als auch experimentelle Untersuchungen weitergeführt. Die lineare Viskoelastizitätstheorie vermag in ihrer ursprünglichen Fassung derartige Effekte nicht zu berücksichtigen, da sie, wenn man das Boltzmannsche Superpositionsprinzip als gültig voraussetzt, Veränderungen des Zustands des Materials und damit auch Schädigungen nicht berücksichtigt. Für die differentielle Formulierung ist die Einbeziehung entsprechender Zustandsänderungen im allgemeinen weniger problematisch. Als Versagenskriterium gilt $\eta=0$ und daraus folgend ein entsprechendes Anwachsen der Deformationsgeschwindigkeit und der Deformationen selbst. Die durch Gleichung (7) gegebene Abhängigkeit kann dieses Versagenskriterium zwar formal erfüllen, doch ohne Berücksichtigung weiterer nichtlinearer Effekte ist dies sicher nur in einem eng begrenzten Bereich von Spannungen und Dehnungen gültig.

Die prinzipielle Vorgehensweise sei an einem einfachen Beispiel erläutert. Ausgehend von Gleichung (7) werde der folgende Ansatz für η zugrunde gelegt

$$\eta = \frac{1}{3} E T_0 (b + ax - x^2) \quad (45)$$

mit $x = E \frac{\varepsilon}{\sigma}$.

Die Wurzeln dieses Polynoms seien x_1 und x_2 . Dabei soll gelten $x_1 < 0$ und $x_2 > 0$. Zu Beginn, d.h. zur Zeit $t = 0$, ist $x=1$ und demnach $\eta = \eta_0 (b + a - 1)$.

Es sei nun die Belastung eines Probestabes $\sigma = \sigma_0 = konst.$ Damit folgt für x

$$x = E \frac{\varepsilon}{\sigma_0} \quad (46)$$

und aus den Gleichungen (9) und (45) erhält man, wenn man auch $\dot{\varepsilon}$ durch \dot{x} ersetzt

$$\dot{x} = \frac{1}{T_0 (b + ax - x^2)} \quad (47)$$

Die Integration liefert die Zeit als Funktion der Kriechdehnung:

$$t = T_0 \left[b(x-1) + \frac{1}{2} a(x^2-1) - \frac{1}{3} (x^3-1) \right] \quad (48)$$

Für $x = x_2$, das entspricht der Dehnung $\varepsilon_2 = \varepsilon_{\max} = \frac{\sigma_0}{E} x_2$ erhält man schließlich

$$t_2 = t_{\max} = T_0 \left[b(x_2-1) + \frac{1}{2} a(x_2^2-1) - \frac{1}{3} (x_2^3-1) \right] \quad (49)$$

Die Versagenszeit ergibt sich somit unabhängig von der Größe der Spannung σ_0 . Dies widerspricht der Erfahrung und ist daraus zu erklären, daß mit der linearen Theorie gerechnet wurde. Man kann das Ergebnis modifizieren, indem man die Koeffizienten a und b in Gleichung (45) als Funktionen der Spannung einführt. Dabei ist darauf zu achten, daß die Nullstelle x_1 kleiner 0 bleibt und logischerweise x_2 mit abnehmender Spannung zunimmt. Die vorgestellte Theorie gibt aber die Möglichkeit, den Ansatz (45) so zu modifizieren bzw. durch einen verbesserten zu ersetzen, daß die berechneten Kriechkurven mit experimentell ermittelten übereinstimmen.

5. Zusammenfassung

Die Zielstellung des vorliegenden Beitrags war, wie einleitend erwähnt, die Integraldarstellung der linearen Viskoelastizität durch eine geeignete differentielle Formulierung zu ersetzen. An einer solchen Formulierung besteht Interesse, weil viskoelastische oder allgemein zeitabhängige Verformungsprozesse im allgemeinen in Kombination mit elastischen, elastisch-plastischen, thermischen, piezoelektrischen und anderen physikalisch begründeten Verformungen auftreten. Es kommt hinzu, daß das Boltzmannsche Superpositionsprinzip, welches der Integraldarstellung zugrunde liegt, bei Einbeziehung der Schädigung oder anderer Vorgänge, die zu einer Änderung des Zustandes des Materials führen, nicht ohne weiteres angewandt werden kann. Die Formulierung der konstitutiven Gleichungen und entsprechender Evolutionsgleichungen wird daher im allgemeinen in differentieller Form angegeben, wie dies bereits von Bergander (1978) in einer „Standardformulierung inelastischer Deformationsgesetze“ angegeben wurde. Durch die hier angegebenen Beziehungen (6) und (7) wird die Sonderrolle der linearen Viskoelastizität aufgehoben. Es zeigt sich aber auch, daß weitere nichtlineare Effekte problemlos eingefügt werden können. Dies wurde im Punkt 4 des vorliegenden Beitrags angedeutet, wobei aber keineswegs das Problem des nichtlinearen zeitabhängigen Materialverhaltens vollständig diskutiert werden konnte. Zu Fragen der Schädigung und der Formulierung entsprechender Evolutionsgleichungen sei daher auf Arbeiten anderer Autoren (Lemaitre, 1992; Altenbach, J. und Altenbach, H., 1995; Naumenko, 1996) verwiesen.

Literatur

1. Altenbach, J.; Altenbach H.: Einführung in die Kontinuumsmechanik, B. G. Teubner Stuttgart, (1994).
2. Altenbach, J.; Altenbach, H.; Zolochovsky, A.: Erweiterte Deformationsmodelle und Versagenskriterien der Werkstoffmechanik, Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie Stuttgart, (1995).
3. Bergander, H.: Eine verallgemeinerte Darstellung inelastischer Deformationsgesetze zur Erleichterung der numerischen Lösung von Anfangs-Randwertproblemen, ZAMM 58, (1978), 489 - 499.
4. Bergander, H.: Das Deformationsgesetz in Rechenprogrammen für Bauteile aus inelastischem Material, Technische Mechanik, Bd. 1, Heft 1, (1980), 57 - 61.
5. Betten, J.: Kontinuumsmechanik, Springer-Verlag Berlin / Heidelberg / New York, (1993).
6. Giesekus, H.: Phänomenologische Rheologie, Springer-Verlag Berlin / Heidelberg, (1994).
7. Göldner, H. (Hrsg.): Arbeitsbuch Höhere Festigkeitslehre, Fachbuchverlag Leipzig, (1978).
8. Göldner, H. (Hrsg.): Lehrbuch der höheren Festigkeitslehre Bd. 2, Fachbuchverlag Leipzig, (1979).
9. Krawietz, A.: Materialtheorie, Springer-Verlag Berlin / Heidelberg / New York, (1986).
10. Lemaitre, J.: A Course on Damage Mechanics, Springer-Verlag Berlin / Heidelberg / New York, (1992).
11. Naumenko, K.: Diss., Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, Fak. f. Maschinenbau, (1996).
12. Rabotnow / Iljuschin: Methoden der Viskoelastizitätstheorie, Fachbuchverlag Leipzig, (1970).
13. Rimrott, F.: Versagenszeit beim Kriechen, Ing.-Arch. XXVII, (1959), 169 - 178.

Anschrift: Professor Dr.-Ing. habil. Siegfried Koczyk, Institut für Mechanik, Otto-von-Guericke-Universität, Postfach 4120, D-39016 Magdeburg