

Modellfehlerschätzung für Balkenprobleme - ein Vergleich mit 3D Finite-Elemente-Lösungen

G. Kolarov, A. Dimitrov, U. Gabbert

In der vorliegenden Arbeit werden einfache energiebasierte Modellfehlerschätzer für Balkenprobleme analysiert. Die Fehlerschätzer, die von den Autoren bereits früher vorgeschlagen wurden (siehe Kolarov, Gabbert, 1995), werden für einfache Probleme der Balkenbiegung, und zwar für die Störfälle "kurzer Balken" und "Balken mit Querkrafteinleitung", kurz dargestellt. Im Unterschied zu alternativen Konzepten sind die Modellfehlerschätzer einfach zu berechnen und erfordern keine oder nur geringe zusätzliche Informationen. Exemplarisch werden ein I-Träger als Kragbalken und als zweiseitig gelagerter Balken, sowie unterschiedliche Lasteinleitungen untersucht und die Ergebnisse mit 3D-Finite-Elemente-Analysen verglichen. Die Vergleichsrechnungen zeigen die gute Anwendbarkeit der einfachen energiebasierten Modellfehlerschätzer.

1 Einleitung

Für die Lösung der vielfältigen, komplexen Berechnungsprobleme im Ingenieurwesen hat heute die Finite-Element-Methode eine überragende Bedeutung erlangt. Der kommerzielle Softwaremarkt bietet eine große Vielfalt von Softwareprodukten, wird aber von einem Dutzend universeller Programmsysteme dominiert. Die meisten dieser Systeme bieten umfangreiche Möglichkeiten bezüglich einer weitgehend automatischen Modellierung der Geometrie und der Randbedingungen und anschließender Analyse, vorausgesetzt man hat die entsprechende Hardware zur Verfügung. Bei ständig sinkenden Computerpreisen scheinen in dieser Hinsicht jedoch kaum Grenzen gesetzt zu sein. Die Wirklichkeit sieht meist etwas anders aus. Besonders bei 3D-Modellen, die wegen ihrer „Wirklichkeitsnähe“ eine Vorliebe bei den Anwendern genießen, stößt man sehr schnell an Grenzen von Soft- und Hardware. Ein Beispiel: Bei Anwendung des FEM-Programmes ANSYS auf einer HP Workstation 9000/715 mit 80MB RAM dauert die Strukturanalyse eines Modells mit ca. 6000 3D-Elementen (jedes Element mit 8 Knoten und 3 Freiheitsgraden pro Knoten) ca. 20 min, die anschließende Auswertung der Ergebnisse ist aufgrund großer Datenbasen ebenfalls erschwert. Eine tiefere Fehleranalyse der Ergebnisse zeigt in vielen Fällen die völlige Unbrauchbarkeit in lokalen, für die Auslegung meist kritischen Bereichen. In der Literatur sind dazu zahlreiche Beispiele dokumentiert (siehe zum Beispiel Szabó, Babuška, 1991, Szabó, 1993). Das Ziel der vorliegenden Ausführungen soll es sein, zu zeigen, wie es lediglich durch zusätzlichen „intellektuellen“ Aufwand möglich ist, die zur Verfügung stehenden Ressourcen effektiv zu nutzen, um eine ausreichende Lösungsqualität zu erhalten. Dabei soll das Ergebnis der Analyse möglichst genau und die Rechenzeit möglichst gering gehalten werden.

Folgende grundsätzliche Überlegung liegt unserem Lösungsansatz zu Grunde. Als ein erster Schritt bei Ingenieurberechnungen werden Modelle des Berechnungsproblems, z.B. die Festigkeitsanalyse einer Konstruktion, aufgestellt. Man unterscheidet dabei das Modellieren der Geometrie, der Materialeigenschaften, der Belastungen u.s.w. Um zum Beispiel die Geometrie einer Konstruktion zu modellieren, können 1D-, 2D- oder 3D-Modelle angewendet werden, wobei in dieser Reihenfolge auch der Komplexitätsgrad des Modells steigt. Während 1D-Modelle (Balken) meist noch problemlos „per Hand“ oder mit einfacher Computerunterstützung berechnet werden können, erfordern 3D-Modelle einen erheblichen rechentechnischen, insbesondere numerischen Aufwand. Es stellt sich die Frage, ob es sich immer lohnt, das komplizierteste Modell zu wählen, nur weil die Berechnungen von einem Computer durchgeführt werden? Und wäre es nicht sinnvoller, die Ressourcen bevorzugt dort anzuwenden, wo die Anforderungen entsprechend hoch sind, dafür aber Rechen- und Arbeitszeit an anderer Stelle einzusparen?

In den verschiedenen Phasen des Konstruktionsprozesses sind bei der Auslegung von Bauteilen verschiedene Genauigkeitsanforderungen zu erfüllen. In der Anfangsphase einer Neuentwicklung stehen noch nicht alle Details zur Verfügung. Die globale Auslegung und Festlegung bestimmter Parameter einer Konstruktion erfolgt daher zweckmäßigerweise meist auf der Grundlage einfacher Modellvorstellungen. Bei späteren

Detailberechnungen sind dann jedoch meist genauere und daher komplexere Modelle notwendig, die die wesentlichen Merkmale des Objekts mit einer ausreichenden Genauigkeit widerspiegeln. Die Hard- und Softwareressourcen könnten also bevorzugt in den späteren Konstruktionsphasen genutzt werden, um Einzelteile im Detail zu berechnen. Ein Problem bei dieser Vorgehensweise ergibt sich allerdings daraus, daß die einfachen Modelle an bestimmten kritischen Stellen versagen. In vielen Fällen sind dies Lastangriffsstellen (einschließlich Lagerungen) bzw. Stellen mit Änderungen in der Geometrie. Solche Stellen können von den einfacheren Modellen nicht erfaßt werden, da die geltenden Hypothesen verletzt sind, was zu gravierenden Fehlern in den Lösungen führen kann. Teilweise wird versucht, diese Besonderheiten durch Zusatzfaktoren zu berücksichtigen. Man denke dabei beispielsweise an die Kerbwirkungszahlen, die die Spannungsüberhöhungen an gekerbten Stäben erfassen sollen. Bei vereinfachten Modellen ist es daher erforderlich, bestimmten kritischen Stellen eine besondere Aufmerksamkeit zu widmen. Bezogen auf eine Finite-Elemente-Analyse ergeben sich aus den bisherigen Ausführungen zwei Vorgehensweisen:

- Bei der FEM-Diskretisierung sollten adaptive Vernetzungstechniken (adaptive meshing) angewendet werden, bei denen das FE-Netz an bestimmten, ergebniskritischen Stellen automatisch verdichtet wird.
- Entsprechend den Genauigkeitsanforderungen sollten verschiedene Typen von finiten Elementen in einem kombinierten Modell angewendet werden. Finite Elemente eines „höheren“ Modellniveaus werden dort bevorzugt, wo es beim „niedrigen“ Modell zu Störungen kommt.

Das adaptive Vernetzen ist eine verbreitete Technik, die darauf beruht, daß unter bestimmten Voraussetzungen das Verdichten des FE-Netzes zu einer genaueren Lösung führt. Teilweise wird dieser Prozeß bereits in kommerziellen FE-Systemen - meist a posteriori, d.h. auf der Grundlage von Fehlerschätzern - automatisch durchgeführt. Die fehlergesteuerte adaptive Netzanpassung soll hier nicht weiter behandelt werden (siehe dazu beispielsweise Szabó, Babuška, 1991). Wesentlich ist, daß diese Vorgehensweise im Adaptionsprozeß zu keiner Änderung des Modells führt. Interessanter im Hinblick auf eine effiziente Modellbildung ist die Möglichkeit, in einem Modell unterschiedliche Modellniveaus, die durch unterschiedliche finite Elemente repräsentiert werden, zu verwenden. Um das zu erreichen, gibt es die folgenden beiden prinzipiellen Möglichkeiten:

- Direktes Verbinden von verschiedenen Elementtypen (ein Grundproblem ist hier das Koppeln von Elementen mit verschiedenen Freiheitsgraden)
- Submodelltechnik, bei der ein kritischer Bereich des Objekts neu modelliert und die Verschiebungen an seinen Schnittträgern mit den Verschiebungen des "grobem" Modells interpoliert werden

Um das Anwenden dieser Techniken sinnvoll durchführen zu können, müssen mindestens zwei Fragen beantwortet werden:

Die erste Frage lautet: **Wann** ist eigentlich das Expandieren, d.h. der Übergang zu einem höheren Modell, notwendig? Die Antwort darauf ist eng mit dem Abschätzen des Modellfehlers verbunden. Dieses Problem ist Hauptziel dieser Arbeit. Es werden dazu bereits vorgeschlagene Fehlerschätzermethoden kurz diskutiert, und an Hand von Beispielen wird deren Anwendbarkeit getestet.

Die zweite Frage lautet: **Wie** werden unterschiedliche Elemente verbunden, welche Schwierigkeiten treten dabei auf und wie können diese überwunden werden? Zu dieser Frage liegen erste Erfahrungen der Autoren vor, sie bedürfen noch weiterer Untersuchungen und sollen hier nicht diskutiert werden.

2 Allgemeines zur Modellfehlerschätzung

Für Festigkeitsberechnungen von Konstruktionen mittels Finite-Element-Analyse (FEA) wird in einem ersten Schritt ein Modell der Konstruktion aufgestellt. Es beinhaltet sowohl die Geometrie als auch das Materialverhalten, die Lagerungen und die Belastungen. Dabei entstehen modellbedingte Fehler, die in jedem weiteren Schritt der Lösung mit enthalten sind (sogenannte Modellfehler). Wenn es gelingt, eine Abschätzung dieser Fehler zu finden, könnte die Entscheidung für das Expandieren bzw. für das Reduzieren des Modells an diesen Modellfehler gekoppelt und nicht, wie im allgemeinen der Fall, dem Ingenieur und seiner Erfahrung überlassen werden. Bei den Arbeiten zu diesem Problem werden im allgemeinen zwei Vorgehensweisen unterschieden. Der erste vorgeschlagene Weg beruht auf der Übertragung von Spannungen vom niedrigen zum höheren Modell, dessen FE-Diskretisierung explizit aufgestellt sein muß, und einer anschließenden Fehlerabschätzung der Spannungssprünge. Wenn der Fehler zu groß ist, wird das Modell expandiert. Eine Reduktion des Modells kann ebenfalls stattfinden, falls die Hypothesen des niedrigeren Modells am höheren Modell erfüllt sind. Bei dieser Vorgehensweise ist offensichtlich ein wesentlicher Nachteil darin zu sehen, daß

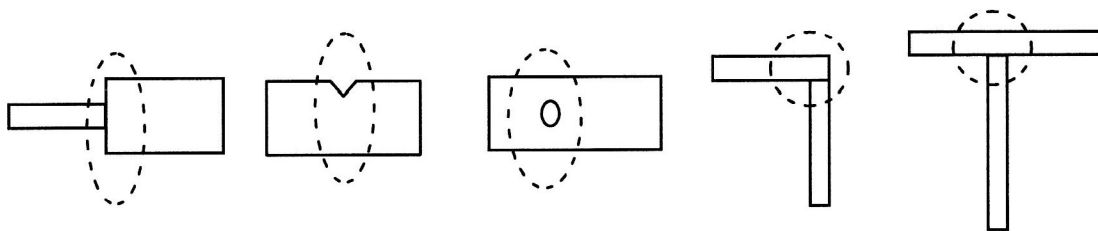
die Diskretisierung des höheren Modells explizit aufgestellt werden muß, was einen wesentlichen Teil des Lösungsaufwandes darstellt, auch wenn das höhere Modell nicht in jedem Fall vollständig gelöst werden muß (Stein, Ohnimus 1993).

Bei anderen Arbeiten wird a priori davon ausgegangen, daß gewisse Modelleigenschaften, wie z.B. Übergänge in der Geometrie, Lagerungen, Kräfteinleitungsstellen etc., die die geltenden Hypothesen des niedrigeren Modells verletzen, zwingend zu Störungen führen, die eventuell einen Übergang zum höheren Modell erforderlich machen könnten (Kolarov, Gabbert 1995). Für solche Fälle werden Fehlerschätzer aufgebaut, die lediglich die Lösungsergebnisse des niedrigeren Modells und wenige Zusatzinformationen erfordern und mit geringem numerischen Aufwand berechnet werden können, was sicherlich ein wesentlicher Vorteil dieser Methode ist. Falls der so berechnete Fehler nicht in bestimmten Grenzen liegt, wird das Modell expandiert, sonst sind die Ergebnisse des niedrigeren Modells zu benutzen. Diese Vorgehensweise wird am Beispiel des Balkens verdeutlicht. Beim Balkenmodell von Bernoulli gelten folgende Annahmen:

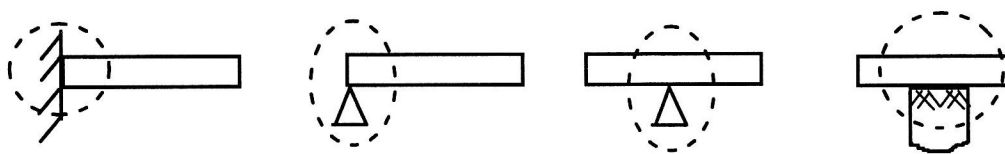
- a.) Kontinuität, Homogenität und Isotropie des Werkstoffs,
- b.) linear-elastisches Materialverhalten,
- c.) kleine Verformungen,
- d.) eine Abmessung ist wesentlich größer als die übrigen zwei Abmessungen,
- e.) Prinzip der lokalen Lastwirkung (Saint Venant),
- f.) Hypothese über das Ebenbleiben der Querschnitte (Bernoulli).

Bei diesen Annahmen für das Balkenmodell treten nur die Spannungen σ_x , τ_{xy} und τ_{xz} auf. Beim Auftreten von Störungen werden die Annahmen d bis f verletzt, und es treten zusätzliche Spannungen auf. Mögliche Störungen können Übergänge in der Geometrie, an den Lagerungen oder an den Kräfteinleitungsstellen sein (Bild 1). In solchen Fällen spiegelt das Balkenmodell nicht genau das Verhalten der Konstruktion wider.

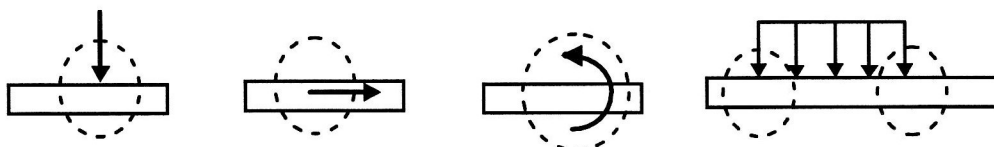
Beim Störfall "kurzer Balken" (Hypothese d ist verletzt) entsteht ein Fehler infolge der Vernachlässigung (im Rahmen der Balkentheorie) der Querkraftwirkung auf das Verformungsverhalten. Offensichtlich wäre es sinnvoll, die Wirkung der Querkraft mit der des Biegemomentes in einem Fehlerschätzer zu "vergleichen".



a) Geometrische Übergänge, Kerben, Ecken, Kreuze



b) Lagerung (Stützen)



c) Kräfteinleitungsstellen

Bild 1. Mögliche Störungen bei ebenen Balkenmodellen

Beim Störfall "Krafteinleitung" (Hypothese e ist verletzt) ist zu beachten, daß konzentrierte Kräfte lediglich eine Abstraktion sind, denn in Wirklichkeit kann eine Kraft niemals in einem Punkt angreifen. Punktlasten führen zu Singularitäten in der FEM-Lösung, d.h., mit Verdichten des FEM-Netzes wachsen die Spannungen um den Kraftangriffspunkt beliebig. Eine Darstellung als verteilte Flächen- bzw. Streckenlast (Verteilungslänge c als Parameter) führt zu zusätzlichen Spannungen σ_y , die in einem Fehlerschätzer sinnvoll mit den Biegespannungen verglichen werden können (Bild 2). Auf diesem Wege können unter Nutzung von Fachwissen auch Fehlerschätzer für andere Elemente und andere Störfälle konstruiert werden. Bisherige Arbeiten haben ergeben, daß besonders die Energiefehlerschätzer zu guten Ergebnissen führen und eine eindeutige physikalische Interpretation ermöglichen. Im folgenden werden einige Fehlerschätzer für das Balkenmodell dargestellt.

3 Fehlerschätzer für das Balkenmodell

Von Kolarov und Gabbert (1995) wurden folgende Fehlerschätzer für den Balken vorgeschlagen.

3.1 Störfall "kurzer Balken"

Der Fehler bei kurzen Stäben entsteht infolge der Vernachlässigung der Querkraftwirkung auf das Verformungsverhalten. Da es nicht darauf ankommt, die Querkraftschubspannungen genau zu berechnen, sondern ihren Einfluß abzuschätzen, kann angenommen werden, daß die Schubspannungen und die Gleitungen näherungsweise konstant über den Querschnitt verteilt sind:

$$\tau_Q = \frac{Q}{A} \quad \gamma_Q = \frac{Q}{GA}$$

Fehlerschätzer für einen Punkt (Knoten)

1) Verhältnis der Querkraftschub- zur maximalen Biegenormalspannung:

$$e_{P1} = \frac{|\tau_Q|}{|\sigma_b|} \quad \sigma_b = \frac{M_b}{W} \quad (1)$$

2) Verhältnis der über den Querschnitt integrierten Energiedichte der Querkraft, bezogen auf die Summe der integrierten Energiedichten des Biegemoments und der Querkraft:

$$e_{P2} = \frac{U_Q^*}{U_b^* + U_Q^*} \quad U_Q^* = \int_{(A)} \frac{\tau_Q^2}{2G} dA = \frac{Q^2}{2GA} \quad U_b^* = \int_{(A)} \frac{\sigma_b^2}{2E} dA = \frac{M^2}{2EI} \quad (2)$$

Fehlerschätzer für ein Balkenelement

1) Verhältnis der Energie der Querkraft, bezogen auf die Summe der Energien des Biegemoments und der Querkraft:

$$e_{E2} = \frac{U_Q}{U_Q + U_b} \quad U_Q = \int_{(l)} \frac{Q^2}{2GA} dx \quad U_b = \int_{(l)} \frac{M_b^2}{2EI} dx \quad (3)$$

3.2 Störfall "Krafteinleitung"

Die meisten Probleme bereitet eine Querkrafteinleitung (Bild 2a). Praktisch kann eine Kraft nicht in einem Punkt angreifen. Einzelkräfte sind nur eine Vereinfachung bei der Lastmodellierung für Balkenmodelle. Bei FEM-Lösungen führt eine Punktlast zu einer Spannungssingularität, d.h., die Spannungen wachsen bei Annäherung an den Kraftangriffspunkt gegen unendlich. Zur Überwindung des Problems kann man annehmen, daß sich die Kraft konstant auf eine kleine Fläche verteilt (Bild 2b). Diese Fläche setzt sich zusammen aus der Breite b des Querschnitts (die bekannt ist) und einer angenommenen Länge c für die

verteilte Kraft. Diese Annahme erfordert als *zusätzliche Information* die Bereitstellung des Parameters c . Wenn c bekannt ist, kann näherungsweise angenommen werden, daß eine zusätzliche Spannung σ_y in dem Volumen unter der Last entsteht, die konstant über die Länge c und linear über die Höhe h verteilt ist (Bild 2c): $\sigma_y(y=0) = -p = -F/bc$, $\sigma_y(y=h)=0$. Für einen Rechteckquerschnitt ist diese Spannung nach der bekannten analytischen Lösung kubisch über die Höhe verteilt, aber die lineare Verteilung stellt eine gute Näherung dar.

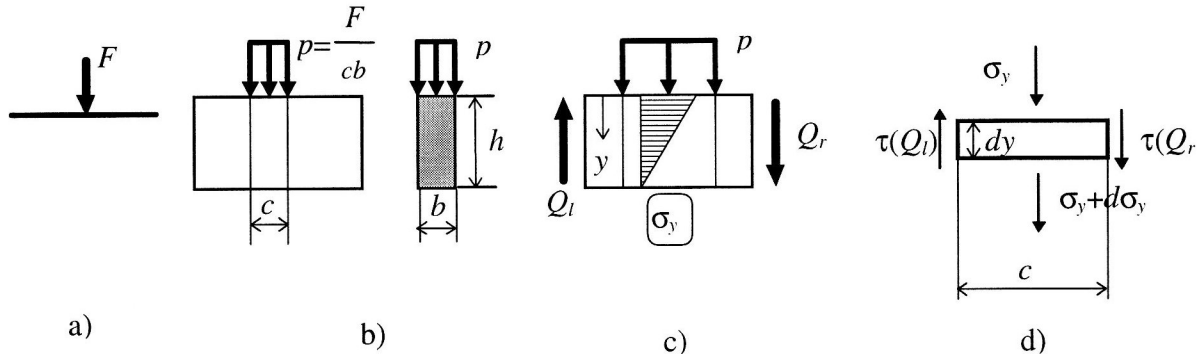


Bild 2. Querkrafteinleitung

Fehlerschätzer für die Lastangriffsstelle:

- 1) Verhältnis der Energie U_y infolge σ_y für das Volumen $V = cbh$ unter der Last p , bezogen auf die Summe der Energien U_b des Biegemomentes ($M_b = \text{const.}$) und U_y :

$$e_{L2} = \frac{U_y}{U_y + U_b} \quad U_y = \iiint_{(V)} \frac{\sigma_y^2}{2E} dV = U_b = \frac{M_b^2 c}{2EI} \quad (4)$$

- 2) Verhältnis der Lasteinleitungs- zur maximalen Biegenormalspannung:

$$e_{L3} = \frac{|\sigma_y|}{|\sigma_b|} = \frac{p}{|\sigma_b|} \quad (5)$$

4 Beispiele

Die Anwendbarkeit der im Abschnitt 2.2. aufgeführten Fehlerschätzer wurde bereits in früheren Arbeiten getestet (Kolarov, Gabbert 1995). Dazu wurde der Fehler zwischen der Balkenlösung und der analytischen 2D-Lösung berechnet und mit den Fehlerschätzern verglichen. Nachfolgend wird die Anwendbarkeit der Fehlerschätzer durch Vergleich mit numerischen Lösungen untersucht. Dazu werden diese mit dem Fehler zwischen Balkenlösung und einer quasi-genauen 3D-FEM-Lösung verglichen.

4.1 Untersuchung eines kurzen Kragbalkens

Betrachtet wird ein einseitig eingespannter I-Träger (DIN 1025, Höhe 80mm) unter konstanter Streckenlast q (Bild 3). Bei konstanter Geometrie des Querschnitts werden die Länge ($l = x \cdot h$, $x = 1, 2, 4, 6, 8$) und die Streckenlast q variiert, so daß die jeweiligen maximalen Biegespannungen der Balkenlösung $\sigma_{b,max} = 150 \text{ N/mm}^2$ konstant gehalten werden. In zwei Lastvarianten wird die Last $p = q/(\text{Breite } b_i)$ einmal auf der ganzen Lastfläche ($p = p1$) und einmal auf einen Teil der Lastfläche ($p = p2$) aufgebracht. Die Verschiebungen werden am Punkt A(0, 0, L), die Spannungen werden an den Punkten B(0, h/2, 0) und C(0, -h/2, 0) ermittelt. Die Fehlerschätzer werden für den Punkt D(0, 0, 0) bzw. für das Element Z = (0; L/5) berechnet. Bei der Berechnung der Fehlerschätzer wurde mit der äquivalenten Stegfläche $A_Q = s \cdot h$ gearbeitet. Die Ergebnisse der Balkenlösung und der FEM-Lösung sowie die Fehlerschätzer sind in Tabelle 1 und Bild 4 angegeben.

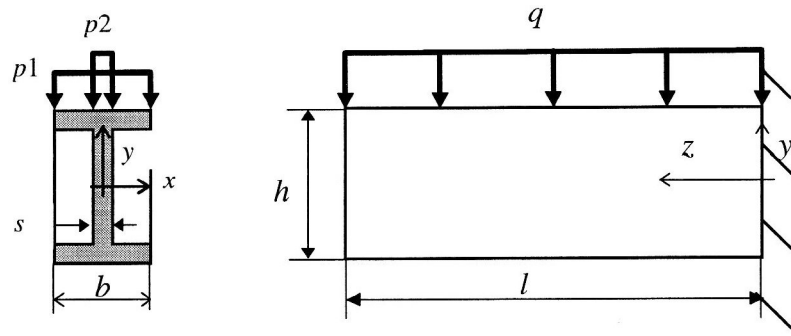


Bild 3. Aufgabenstellung, Beispiel 1

X	Lastfall	Balkenlösung		FEM-Lösung			Fehler			Fehler-schätzer		
		u_v mm	$\sigma_{b,max}$ N/mm ²	u_v mm	$\sigma_{z,B}$ N/mm ²	$\sigma_{z,C}$ N/mm ²	Err_u %	Err_S(B) %	Err_S(C) %	e_P1 %	e_P2 %	e_E2 %
1	1	0,03	150	0,16	369,9	250,2	81	59	40	156	45	80
1	2	0,03	150	0,16	299,3	251,3	81	50	40	156	45	80
2	1	0,12	150	0,25	246,2	216,5	52	39	31	78	20	50
2	2	0,12	150	0,25	228,6	216,8	52	34	31	78	20	50
4	1	0,48	150	0,61	196,0	188,6	21	23	20	39	6	20
4	2	0,48	150	0,61	191,6	188,7	21	22	21	39	6	20
6	1	1,08	150	1,22	180,9	177,6	11	17	16	26	3	10
6	2	1,08	150	1,22	178,9	177,6	11	16	16	26	3	10
8	1	1,92	150	2,07	173,7	171,8	7	14	13	19	1,5	6
8	2	1,92	150	2,07	172,6	171,8	7	13	13	19	1,5	6

Tabelle 1. Ergebnisse Beispiel 1

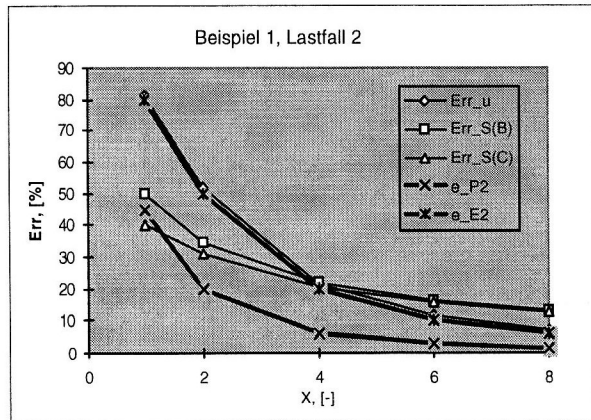
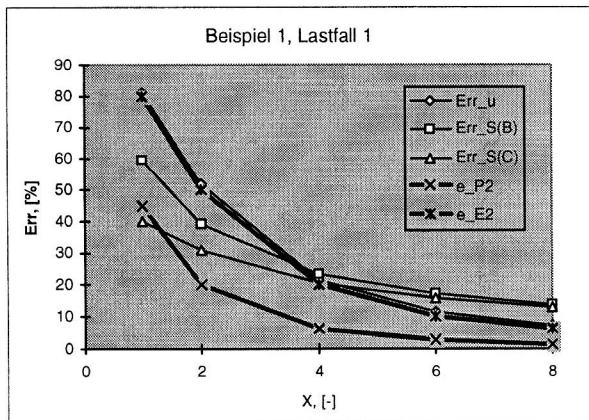


Bild 4. Ergebnisse Beispiel 1

Dabei kennzeichnen

- u_y - die Verschiebung des freien Endes ($z=L$) aus der Balkenlösung bzw. der FEM-Lösung,
- Err_u - den relativen Fehler $\frac{u_{y,FEM} - u_{y,Balk}}{u_{y,FEM}}$,
- $\sigma_{b,max}$ - die maximale Biegespannung an der Einspannung ($z=0$) aus der Balkenlösung,
- $\sigma_{z,B,C}$ - die maximalen z -Spannungen aus der FEM-Lösung an den Punkten B und C,
- Err_S - den relativen Fehler $\frac{|\sigma_{z,B,C} - \sigma_b|}{\sigma_{z,B,C}}$.

Aus den Bildern ergibt sich, daß

- die Belastungsverteilung auf unterschiedliche Lastflächen (Lastfall 1 und 2) lediglich auf die Spannungen in Lastnähe (Punkt B) eine merkliche Auswirkung hat, was sicherlich auf zusätzliche Störungen zurückzuführen ist. Insgesamt ist die Auswirkung der unterschiedlichen Lastverteilungen unbedeutend,
- der Punktfehlerschätzer e_{p1} mit abnehmender Länge schnell wächst,
- die Fehlerschätzer e_{p2} und e_{E2} eine gute Näherung der Ergebnisse darstellen, e_{E2} sogar deutlich mit dem Verschiebungsfehler Err_u übereinstimmt.

Es kann verallgemeinernd gesagt werden, daß die energetischen Fehlerschätzer (EFS) gute Näherungen der Ergebnisse liefern und als Kriterium für das Expandieren eines Balkenmodells genutzt werden können.

4.2 Untersuchung eines kurzen, zweiseitig gelagerten Balkens

Es wird ein zweiseitig gelagerter I-Träger (DIN 1025, Höhe 80mm) unter konstanten Streckenlast q betrachtet (Bild 5). Bei konstanter Geometrie des Querschnitts werden die Länge ($l = x \cdot h$, $x = 1, 2, 4, 6, 8$) und die Streckenlast q variiert, so daß die jeweiligen Biegespannungen der Balkenlösung $\sigma_b(z=5) = 40 \text{ N/mm}^2$ konstant gehalten werden.

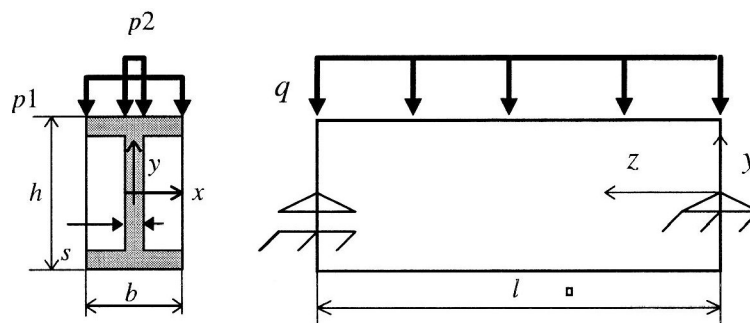


Bild 5. Aufgabenstellung Beispiel 2

In zwei Lastvarianten wird die Last $p = q/b$ einmal auf die ganze Lastfläche ($p = p1$) und einmal auf einen Teil der Lastfläche ($p = p2$) aufgebracht. Die Verschiebungen werden an den Punkten A(0, 0, L/2) und B(0, -h/2, L/2), die Spannungen am Punkt C(0, -h/2, L/5) berechnet. Die Fehlerschätzer werden für den Punkt D(0, 0, L/5) bzw. für das Element $z = (0; L/5)$ berechnet. Bei der Berechnung der Fehlerschätzer wurde mit der äquivalenten Stegfläche $A_Q = s \cdot h$ gearbeitet. Die Ergebnisse der Balkenlösung, der FEM-Lösung und die Fehlerschätzer sind in Tabelle 2 und Bild 6 dargestellt.

Dabei kennzeichnen

- u_y - die Verschiebung aus der Balkenlösung bzw. der FEM-Lösung,
- Err_u - den relativen Fehler $\frac{u_{y,FEM} - u_{y,Balk}}{u_{y,FEM}}$,

- $\sigma_{b,max}$ - die maximale Biegespannung aus der Balkenlösung,
- $\sigma_{z,C}$ - die z-Spannung der FEM-Lösung am Punkt C,
- Err_S - den relativen Fehler $\frac{|\sigma_{z,C} - \sigma_b|}{\sigma_{z,C}}$.

X	Lastfall	Balkenlösung		FEM-Lösung			Fehler			Fehler-schätzer		
		u_y	$\sigma_{b,max}$	$u_{y,A}$	$u_{y,B}$	$\sigma_{z,C}$	Err_u(A)	Err_u(B)	Err_S	e_P1	e_P2	e_E2
		mm	N/mm ²	mm	mm	N/mm ²	%	%	%	%	%	%
1	1	0,005	40	0,06	0,04	29,6	92	86	35	293	93	98
1	2	0,005	40	0,06	0,04	29,2	92	86	37	293	93	98
2	1	0,02	40	0,07	0,07	48,2	73	71	17	146	78	94
2	2	0,02	40	0,07	0,07	47,9	73	71	16	146	78	94
4	1	0,083	40	0,14	0,13	44,6	39	38	10	73	46	80
4	2	0,083	40	0,14	0,13	44,5	39	38	10	73	46	80
6	1	0,188	40	0,24	0,24	42,5	22	21	6	49	28	65
6	2	0,188	40	0,24	0,24	42,4	22	21	6	49	28	65
8	1	0,334	40	0,39	0,39	41,6	14	14	4	37	18	51
8	2	0,334	40	0,39	0,39	41,6	12	11	4	37	18	51

Tabelle 2. Ergebnisse Beispiel 2

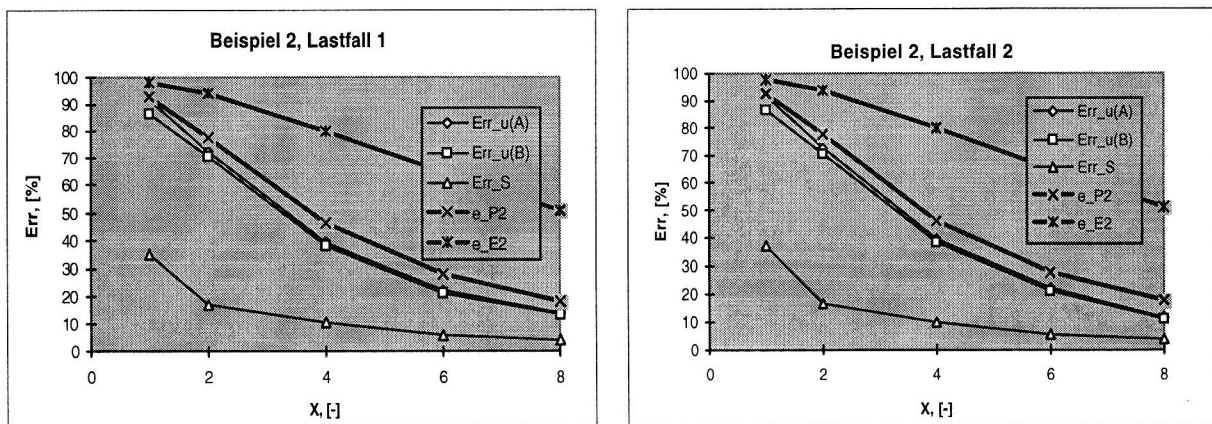


Bild 6. Ergebnisse Beispiel 2

Aus den Ergebnissen ist ersichtlich, daß der Fehlerschätzer e_{p1} mit abnehmender Länge zu schnell wächst. e_{p2} ist eine gute Näherung der Verschiebungen, e_{E2} liefert ebenfalls brauchbare Resultate. In diesem Beispiel liegt der Spannungsfehler wesentlich unter dem Verschiebungsfehler. Die unterschiedlichen Lastvarianten haben einen unwesentlichen Einfluß, der lediglich bei den Spannungen und bei kurzen Längen zu spüren ist.

4.3 Untersuchung einer Querkrafteinleitung am Balken

Es wird ein einseitig eingespannter I-Träger (DIN 1025, Höhe 80mm) mit einer Zwischenstütze und einer Last am freien Ende betrachtet (Bild 7). Für die Ziele der Untersuchung wurden ein grobes Modell und ein Submodell generiert. Das grobe Modell (600 3D-Elemente, 1342 Knoten) hat folgende Geometrie: Länge $l = 1200$ mm, Abstand der Stütze $a = 800$ mm, Last am freien Ende $F = 10666,66$ N. Die summierten Reaktionskräfte an der Stütze ergeben eine Reaktionskraft $B = 18423$ N.

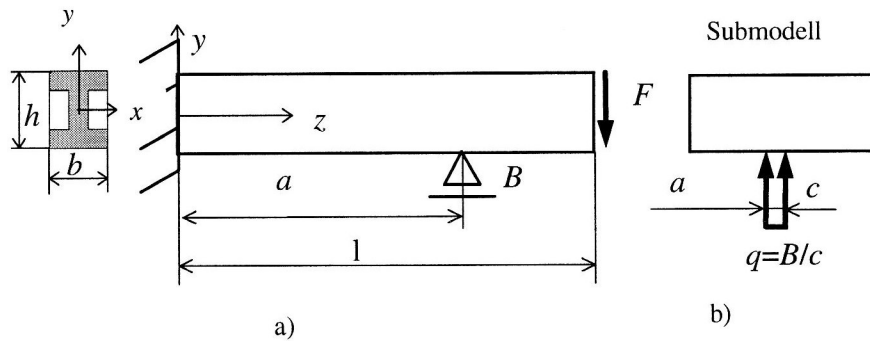


Bild 7. Aufgabenstellung Beispiel 3

Das Submodell (2808 3D-Elemente, 5170 Knoten) wurde zwischen $z=(700\text{mm}, 900\text{mm})$ freigeschnitten und seine Verschiebungen wurden an den Schnittständen vom groben Modell übernommen. Die Reaktionskraft wurde als konstante Streckenlast auf eine kleine Breite c verteilt, c wurde variiert. Die Spannungen der FEM-Lösung wurden am Punkt A(0, $-h/2$, a) ermittelt, die Fehlerschätzer wurden für den Punkt $z = a$ bzw. für das Volumen $V = cbh$ berechnet.

c mm	σ_b N/mm ²	$\sigma_{z,\text{FEM}}$ N/mm ²	Err_S %	e_L2 %	e_L3 %
4	218	297,3	27,00	5,00	50,00
8	218	274,1	20,50	1,30	25,00
12	218	257,9	15,50	0,60	17,00

Tabelle 3. Ergebnisse Beispiel 3

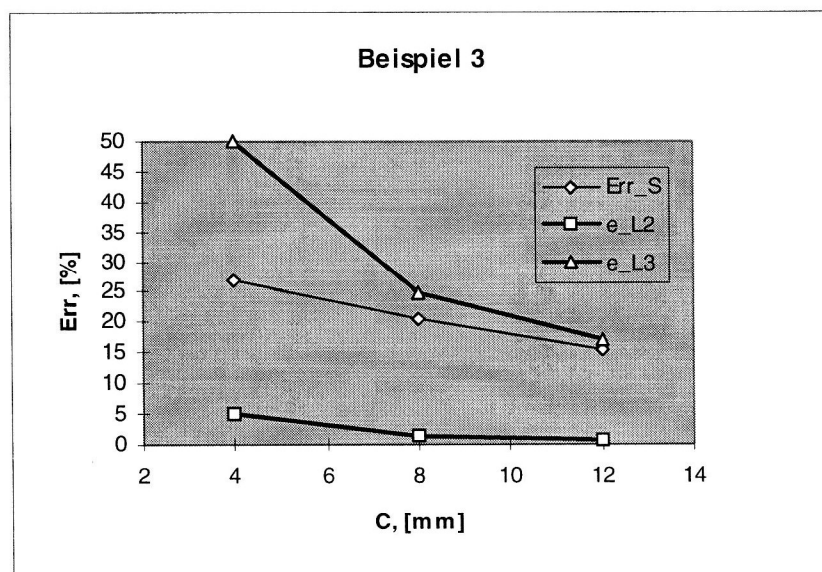


Bild 8. Ergebnisse Beispiel 3

Die Ergebnisse der Balkenlösung mittels FEM (Submodell) und die Energiefehlerschätzer sind in Tabelle 3 und Bild 8 aufgeführt. Dabei kennzeichnen

- σ_b - die Biegespannung aus der Balkenlösung,
- $\sigma_{z,FEM}$ - die z-Spannung der FEM-Lösung,
- Err_S - den relative Fehler $\frac{|\sigma_{z,FEM} - \sigma_b|}{\sigma_{z,FEM}}$.

Da mit der summierten Reaktionskraft gearbeitet und diese konstant auf die Lastfläche cb verteilt wurde, sind die Verschiebungen bei $z = a$ beim Submodell verschieden von Null, was zusätzliche Störungen in das Modell einbringt. Die Steifigkeit über der Lastfläche ist ebenfalls nicht konstant - bei der Stegfläche größer als bei den Seitenflächen - was eine z-Biegung der Seitenflächen und weitere Störungen verursacht.

Mit einer Verteilung der Kraft auf eine größere Fläche sinkt der Fehler, und man kann das einfachere Modell benutzen. Der Fehlerschätzer e_{L3} liefert gute Resultate. Wird die Kraft auf eine kleinere Fläche konzentriert, liegt der tatsächliche Fehler zwischen den beiden Fehlerschätzern, allerdings wächst der eine zu schnell und der andere zu langsam.

5 Zusammenfassung

Die früher vorgeschlagenen energiebezogenen Modellfehlerschätzer für Balkenprobleme wurden für I-Profile getestet. Die berechneten Beispiele zeigen ein gutes Verhalten der Energiefehlerschätzer bei Vergleichsrechnungen mit finiten 3D-Elementen.

Es läßt sich feststellen, daß durch gezielte, d.h. nur an kritischen Stellen durchgeführte, Expansion bzw. Reduktion der Geometriemodelle der Rechenaufwand erheblich reduziert werden kann. Dabei wird die Entscheidung dafür an einfache Fehlerschätzer gekoppelt und nicht der (vielleicht mangelhaften) Erfahrung des Anwenders überlassen.

Literatur

1. ANSYS User's Manual for Revision 5.0, Bd.1 - 5, (1992).
2. Bathe, K.-J.: Finite Elemente Methoden, Springer, (1990).
3. Gross, Hauger, Schnell: Lehrbuch Technische Mechanik Bd. 1-3, Springer, (1988).
4. Kolarov, G.; Gabbert, U.: Einfache Fehlerschätzer für die Dimensionsadaptivität und Anwendungen für Balkentragwerke, Preprint des Instituts für Mechanik, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, (1995).
5. Müller, G.; Rehfeld, I.; Katheder, W.: FEM für Praktiker, Expertverlag, (1992).
6. Stein, E.; Ohnimus, S.: Dimensionsadaptivität bei Finite-Element- Berechnungen von Stäben und Platten, ZAMM, 73 (1993) T673-T677.
7. Szabó, B. A.; Babuška, I.: Finite Element Analysis. John Wiley & Sons, 1991
8. Szabó, B. A.: The problem of reliability in numerical simulations. Technical Note WU/CCM-92/7, Center for Computational Mechanics, Washington University, St. Louis, (1992)

Anschrift: Dr.-Ing. G. Kolarov, Atanas Dimitrov, Lehrstuhl für Festigkeitslehre, Technische Universität Sofia, BG-1756 Sofia; Prof. Dr.-Ing.habil. Ulrich Gabbert, Institut für Mechanik, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, Universitätsplatz 2, D-39106 Magdeburg, e-mail: ulrich.gabbert@mb.uni-magdeburg.de