

# Bestimmung der Fundamentbelastung durch Maschinen mittels Schwingungsmessung

G. Meltzer, K. Häsler

*Es wurde ein Verfahren entwickelt, um durch Schwingungsmessungen am Aufstellort schwingungsaktiver Maschinen die dynamische Belastung der Stützkonstruktion zu ermitteln. Weiterhin wurden Schwingungsemissionskenngrößen der Maschinen definiert, mit denen auch die dynamische Belastung zukünftiger Stützkonstruktionen im Projektzustand bestimmt werden kann. Simulationsrechnungen und Experimente ergaben, daß bei in-situ-Messungen eine ausreichende Genauigkeit nicht erreichbar ist und deshalb die Nutzung eines optimierten Prüffundamentes empfohlen wird. Es werden umfangreiche Hinweise zur Versuchsdurchführung gegeben und ein PC-Auswerteprogramm zur Verfügung gestellt.*

## 1 Zielsetzung

Bei der Aufstellung schwingungserregender Maschinen auf schwingungsfähigen Stützkonstruktionen sind baudynamische Nachweise erforderlich,

- um die Festigkeit der Stützkonstruktion unter der statischen und dynamischen Belastung durch die Maschinen sicherzustellen und
- um zu vermeiden, daß die von der Maschine erregten Schwingungen der Stützkonstruktion bei benachbarten Geräten Funktionsstörungen verursachen oder schädliche gesundheitliche Auswirkungen auf das Bedienpersonal der Maschinen haben.

Die noch meist gebrauchte Formel des Bauingenieurwesens, aus der nominellen Erregerkraft  $F_{\text{dyn}}$  eine statische Ersatzkraft

$$F_{\text{staters}} = \mu \gamma F_{\text{dyn}} \quad (1)$$

zu berechnen (wobei  $\mu$  die Ermüdung des Materials berücksichtigt und  $\gamma$  ein nur von den Eigenschaften der Stützkonstruktion abhängiger „dynamischer Vervielfacher“ ist) und in den statischen Festigkeitsnachweis neben der statischen Last einzubeziehen, genügt bei den heutigen Prinzipien des Leichtbaus schon lange nicht mehr den Erfordernissen. Vielmehr muß die dynamische Wechselwirkung zwischen Maschine und Stützkonstruktion, durch welche die über die Maschinenfüße auf die Stützkonstruktion übertragenen Maschinenkräfte wesentlich bestimmt werden, unbedingt berücksichtigt werden. Wie die weiter unten abgeleiteten Formeln zeigen, ist diese nicht nur von den dynamischen Eigenschaften der speziellen Stützkonstruktion allein, sondern auch von den Maschinenkenngrößen abhängig. Ziel der durchgeführten Forschungsarbeit war es deshalb, ein praktikierbares Verfahren zu finden, um die Maschine als Schwingerreger so zu beschreiben, daß damit eine baudynamische Berechnung für beliebige Stützkonstruktionen möglich wird. Die vorliegende Publikation stellt eine Kurzfassung des Forschungsberichtes von Meltzer u.a. (1996) dar, bei der besonderer Wert auf Allgemeinverständlichkeit gelegt wurde.

## 2 Theorie und Formelsatz für das System Maschinen-Stützkonstruktion

### 2.1 Komplexe Schreibweise im Frequenzbereich

Die in der technischen Akustik gebräuchliche Beschreibung linearer Schwingungssysteme in der komplexen Frequenzebene schafft den Zugang zu einer übersichtlichen und leicht handhabbaren Problembeschreibung. Voraussetzung dafür ist, die zeitabhängigen Größen (Erregerkraft, Schwingung, Systemverhalten) durch die FOURIER-Analyse in den Frequenzbereich zu überführen:

$$X_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-j2\pi f_k t} dt \quad (2a)$$

Die Größe  $X_k$  stellt die (im allgemeinen komplexe) Amplitude einer harmonischen Schwingung mit der Frequenz  $f_k$  dar. Die Zeitfunktion  $x(t)$  wird durch die phasengerechte Addition aller harmonischen Komponenten gebildet (FOURIER-Reihe):

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi f_k t} \quad (2b)$$

Es genügt, für diskrete Frequenzen  $f_k$ , nur mit den komplexen Amplituden der zeitabhängigen Größen zu rechnen. Von dieser Möglichkeit wird weiterhin Gebrauch gemacht. Alle Gleichungen sind deshalb so zu interpretieren, daß sie jeweils nur für eine diskrete Frequenzkomponente gelten.

Es werden folgende Größen verwendet:

- als Bewegungsgröße die Schwingungsbeschleunigung  $a$ ;
- als Erregergröße die Kraft  $F$ ;
- als Maß für das dynamische Verhalten der beteiligten Strukturen der frequenzabhängige, komplexe Frequenzgang der Beschleunigungsadmittanz  $H=a/F$ . Dieser wird weiterhin kurz als Frequenzgang bezeichnet.

## 2.2 Formelsatz für das System mit einem Koppelpunkt

Bild 1 zeigt die Systembeziehungen für das System Maschine-Stützkonstruktion für den Fall, daß beide nur an einem Punkt miteinander verknüpft sind. Die Stützkonstruktion wird (im Sinne der Akustik) als passiver Zweipol durch

$$s_a = {}^S H {}^S F \quad (3a)$$

beschrieben. Der Hochindex S bedeutet, daß es sich im Sinne der Aufgabenstellung um die „ursprüngliche“ Stützkonstruktion (Primärfundament) handelt, auf der die Maschine z.B. beim Hersteller zu Prüfzwecken aufgestellt und betrieben wird. Für die Maschine gilt eine Beschreibung als aktiver Zweipol

$${}^M a = {}^M H ({}^M F - {}^{M0} F) \quad (3b)$$

Die Größen  ${}^M H$  und  ${}^{M0} F$  bedürfen einer physikalischen Interpretation:

${}^M H$  ist der am Maschinenfuß „von unten“ meßbare Frequenzgang der Maschine, d.h. das komplexe, frequenzabhängige Verhältnis  ${}^M H = {}^M a / {}^M F$  für den Fall einer nicht aktiven Maschine.

${}^{M0} F$  ist die Kraft, die bei vollkommen starrer Aufstellung der Maschine ( ${}^M a \equiv 0$ ) am Maschinenfuß meßbar wäre (im Sinne der Akustik eine „Kurzschlußkraft“). Anhand Bild 2 läßt sich zeigen, daß diese Kraft ein Äquivalent der wirklichen Erregerkräfte  ${}^E F_i$  darstellt.

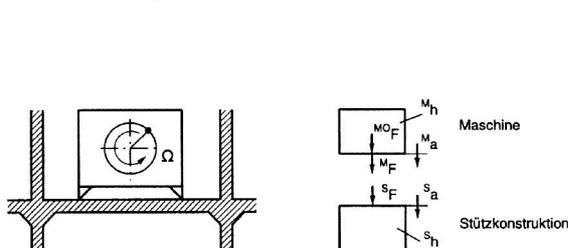


Bild 1. Abbildung des Systems Maschine/Stützkonstruktion auf eine Koppelstelle

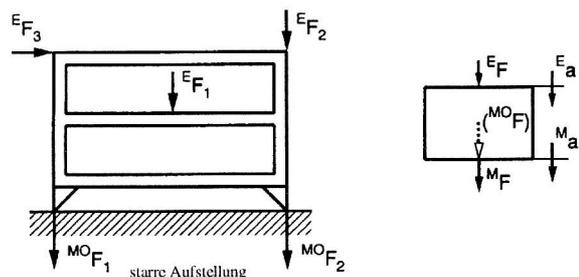


Bild 2. Zusammenhang Erregerkraft/Pseudokraft

Im linken Teil des Bildes 2 sind mehrere elementare Erregerkräfte eingezeichnet, welche sich nach den Regeln der Maschinendynamik aus dem Bewegungsgesetz und der Massenverteilung der elementaren Mechanismen berechnen lassen (z.B. als umlaufende Fliehkraft unwuchtiger Rotoren oder als translatorische Massenkraft eines hin- und hergehenden Kolbens). Da aber die Maschine „in sich“ nicht starr, sondern schwingungsfähig ist, würde die theoretische Bestimmung der „Kurzschlußkräfte“  ${}^{M0} F_1$  und  ${}^{M0} F_2$  (hier also zwei Koppelstellen) eine genaue Kenntnis der Funktion und Lage der elementaren Erreger und eine Modellierung der Maschine als Schwingungssystem erfordern.

Im rechten Teil des Bildes 2 wird die Maschine wieder auf ein System mit einem Fußpunkt reduziert. Es wird der Einfachheit halber auch nur eine Erregerkraft  ${}^E F$  angenommen. Für die Beschleunigungen  ${}^E a$  und  ${}^M a$  am Erregerpunkt bzw. Fußpunkt gelten dann die Gleichungen

$${}^E a = {}^M H[1,1] {}^E F + {}^M H[1,2] {}^M F \quad (4a)$$

$${}^M a = {}^M H[2,1] {}^E F + {}^M H[2,2] {}^M F$$

Hierbei zeigen die in eckigen Klammern stehenden Zahlen die Position der Admittanz-Frequenzgänge in der mit (4a) identischen Matrixgleichung

$$\mathbf{a} = {}^M \mathbf{H} \mathbf{F} \quad (4b)$$

an.

Setzt man jetzt wieder  ${}^M a \equiv 0$  („Kurzschluß“), ergibt sich definitionsgemäß

$${}^{M0} F = - \frac{{}^M H[2,1]}{{}^M H[2,2]} {}^E F \quad (5)$$

und für den allgemeinen Fall ( ${}^M a \neq 0$ )

$${}^M a = {}^M H[2,2] {}^M F - {}^M H[2,2] \frac{{}^M H[2,1]}{{}^M H[2,1]} {}^{M0} F = {}^M H[2,2] ({}^M F - {}^{M0} F) \quad (6)$$

Diese Gleichungen lassen die Rolle von  ${}^{M0} F$  als Äquivalent für alle  ${}^E F_i$  klar erkennen. Sie zeigen aber auch, daß  ${}^{M0} F$  im allgemeinen Fall keine physikalisch wirkliche (meßbare) Kraft ist. Sie wird deshalb weiterhin als Pseudokraft bezeichnet.

Die Gleichung (3a) ist prinzipiell für jede beliebige Stützkonstruktion gültig. Wendet man sie auf die ursprüngliche Stützkonstruktion S1 (Primärfundament, Prüffundament, gekennzeichnet mit dem zusätzlichen Hochindex 1) an, so ergibt sich mit

$${}^{M1} F = - {}^{S1} H^{-1} {}^{S1} a \quad (7)$$

die Möglichkeit, aus meßbaren Größen (Schwingungsbeschleunigungsspektrum  ${}^{S1} a$ , Admittanz-Frequenzgang der unbelasteten Stützkonstruktion  ${}^{S1} H$ ) das von der Maschine auf die ursprüngliche Stützkonstruktion übertragene Kraftspektrum  ${}^{M1} F$  (Synonym: Maschinenkraft) zu berechnen.

Die Gleichungen (3a) und (3b) lassen sich unter Nutzung der Gleichgewichtsbedingung und der Kompatibilitätsbedingung  ${}^{S1} a = {}^{M1} a$  für die Verknüpfungsstelle zu

$${}^{M0} F = - ({}^{S1} H^{-1} + {}^M H^{-1}) {}^{S1} a = - {}^{G1} H^{-1} {}^{S1} a \quad (8)$$

umformen. Damit wird die Pseudokraft  ${}^{M0} F$  aus den „in-situ“-Meßgrößen  ${}^{S1} a$  und  ${}^{G1} H$  berechenbar.  ${}^{G1} H$  ist der Admittanz-Frequenzgang des Gesamtsystems G1, also des mit der Maschine besetzten Prüffundaments.

Für eine zweite Stützkonstruktion S2 mit dem Frequenzgang  ${}^{S2} H$ , auf der die Maschine aufgestellt werden soll, läßt sich im Projektzustand aus Gleichung (8) die zukünftige Maschinenkraft  ${}^{M2} F$  wie folgt berechnen:

$${}^{M2} F = - {}^{S2} H^{-1} {}^{S2} a = \frac{{}^{G2} H}{{}^{S2} H} {}^{M0} F = \frac{({}^M H^{-1} + {}^{S2} H^{-1})^{-1}}{{}^{S2} H} {}^{M0} F \quad (9)$$

Wenn man noch (ebenfalls aus Gleichung (8)) die Beziehung

$${}^M H^{-1} = {}^{G1} H^{-1} - {}^{S1} H^{-1} \quad (10)$$

verwendet, kann man folgendes konstatieren:

- 1) Die Belastung  ${}^{M2} F$  (Synonym: Maschinenkraft) einer projektierten sekundären Stützkonstruktion ist nach Gleichung (9) von den beiden Maschinenkenngrößen Pseudokraft  ${}^{M0} F$  und Maschinen-Admittanz  ${}^M H$  sowie der Admittanz der sekundären Stützkonstruktion  ${}^{S2} H$  abhängig.
- 2) Die Maschinenkenngrößen können nach den Gleichungen (8) und (10) aus dem meßbaren Schwingbeschleunigungsspektrum  ${}^{S1} a$  des Primärfundamentes beim Lauf der Maschine und den Admittanzen  ${}^{S1} H$  und  ${}^{G1} H$  des unbelasteten bzw. belasteten Primärfundaments bestimmt werden.
- 3) Zur Bestimmung der Admittanz-Frequenzgänge  ${}^{S1} H$ ,  ${}^{S2} H$ ,  ${}^{G1} H$  sind bekannte experimentelle Verfahren einsetzbar.

Damit ist die in Abschnitt 1 formulierte Aufgabe der Maschinenkraftbestimmung auf eine „in-situ“-Schwingungsmessung mit ergänzenden Frequenzgangmessungen zurückgeführt worden.

### 2.3 Erweiterung auf mehrere Verknüpfungspunkte der Maschine und der Stützkonstruktion

Die Annahme einer Einpunktverknüpfung muß aus zwei Gründen fallengelassen werden:

- Maschinenabmessungen sind in vielen Fällen in der Größenordnung der Abmessung von Stützkonstruktionen (Beispiel: Textilmaschinen auf Deckenfeldern in Hochbauten; Triebwerke im Fahrzeug).

- Sowohl Maschinen als auch die Stützkonstruktionen sind in sich schwingungsfähig (Bild 3 für Einpunktlagerung). Bereits im Frequenzbereich zwischen 10 und 100 Hz, der durch Maschinen bevorzugt angeregt wird, liegt in vielen Fällen kein Masseverhalten der Maschine bzw. keine starre Verbindung der Maschinenfüße durch die Stützkonstruktion mehr vor.

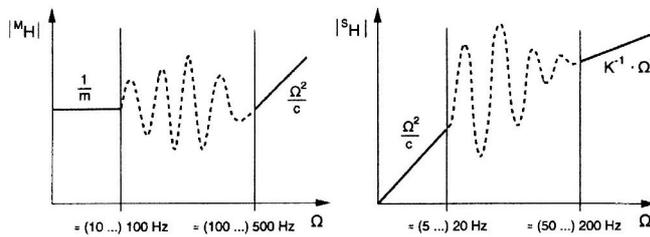


Bild 3. Idealisierte Darstellung des Frequenzganges der Beschleunigungsadmittanz für Maschinen (links) und Stützkonstruktionen (rechts) bei Einpunktverknüpfung - nach Melzig-Thiel (1979)

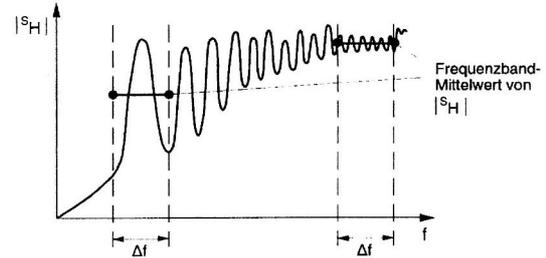


Bild 4. Fehlermöglichkeit bei Frequenzbandmittelung des Admittanz-Frequenzganges

Im Falle einer Mehrpunkt-Verknüpfung (entsprechend der Anzahl der Maschinenfüße) nehmen die Größen Beschleunigung und Kraft aber vektoriellen Charakter an, der Frequenzgang der Admittanz wird zur Matrix. Ein Element  ${}^S H[i,j]$  der Matrix  ${}^S \mathbf{H}$  bedeutet dann: komplexer Zeiger der Schwingungsbeschleunigung  ${}^S a_i$  am Aufstellpunkt  $i$ , bezogen auf den komplexen Zeiger der Erregerkraft  ${}^S F_j$  am Aufstellpunkt  $j$ . Die folgenden Matrixgleichungen gelten dann wieder für diskrete Frequenzwerte:

Belastung des Primärfundaments (Prüfung)

$${}^{M1} \mathbf{F} = - {}^{S1} \mathbf{H} {}^{S1} \mathbf{a} \quad (11)$$

Maschinen-Kenngrößen

$${}^{M0} \mathbf{F} = - {}^{G1} \mathbf{H}^{-1} {}^{S1} \mathbf{a} \quad (12a)$$

$${}^M \mathbf{H}^{-1} = {}^{G1} \mathbf{H}^{-1} - {}^{S1} \mathbf{H}^{-1} \quad (12b)$$

Belastung des Sekundärfundamentes (Projekt)

$${}^{M2} \mathbf{F} = {}^{S2} \mathbf{H}^{-1} ({}^M \mathbf{H}^{-1} + {}^{S2} \mathbf{H}^{-1})^{-1} {}^{M0} \mathbf{F} \quad (13)$$

Zu bemerken ist noch, daß - aufgrund der meist dominierenden Nachgiebigkeit der Stützkonstruktionen in vertikaler Richtung - alle weiteren Überlegungen nur für Kräfte und Beschleunigungen in vertikaler Richtung angestellt werden.

Der komplexe Charakter aller Meß- und Rechengrößen darf allerdings weder bei der Messung noch bei der numerischen Auswertung unterschlagen werden, da er letztlich - selbst bei der Beschränkung auf nur eine räumliche Krafrichtung - die relative Phasenlage der Maschinenkräfte an den einzelnen Fußpunkten beschreibt. Diese ist für Festigkeits- und Schwingungsberechnungen unverzichtbar.

## 2.4 Übergang zu Leitungsgleichungen

Alle bisherigen Formelsätze gelten für deterministische Zeitfunktionen. In Wirklichkeit muß jedoch sowohl bei den erzwungenen Schwingungen als auch bei den Admittanz-Frequenzgängen mit stochastischen Zeitfunktionen oder zumindest stochastisch gestörten Funktionen gerechnet werden. Das hat zur Folge, daß die FOURIER-Analyse der Meßsignale nach (2a) strenggenommen nicht mehr erfolgen kann, weil mit der Möglichkeit von  $x \rightarrow \infty$  die absolute Integrationsbedingung nicht mehr erfüllt ist.

Durch Bildung des dyadischen Produktes der Vektoren der Kraft - bzw. Beschleunigungsspektren mit den komplex - konjugierten Spektren lassen sich Matrizen der Leistungsspektren

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{aa} &= \mathbf{a}^* \mathbf{a}^T \\ \mathbf{G}_{FF} &= \mathbf{F}^* \mathbf{F}^T \\ \mathbf{G}_{Fa} &= \mathbf{F}^* \mathbf{a}^T \end{aligned} \quad (14)$$

bilden. Erweitert man die Eingangs- Ausgangsbeziehungen (11),(12a) des Systems Maschine/Stützkonstruktion nunmehr links und rechts entsprechend den Gleichungen (14) mit den komplex-konjugierten Vektoren, ergibt sich die bereits von Meltzer und Bitterlich (1991) als numerische Grundlage des Verfahrens veröffentlichte Leistungsgleichung

$$\mathbf{G}_{Fa} = \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G}_{aa} \quad (15)$$

Die Frequenzgangmatrizen  ${}^S\mathbf{H}^{-1}$  bzw.  ${}^G\mathbf{H}^{-1}$  bildet der zur Meßwertverarbeitung eingesetzte Signalanalysator als Mittelwerte über mehrere Realisierungen automatisch, ebenso die Matrix  $\mathbf{G}_{aa}$ . Die Definition (14) läßt erkennen, daß nunmehr aus einer Spalte oder Zeile der Matrix  $\mathbf{G}_{Fa}$  die Vektoren  ${}^{M1}\mathbf{F}$  und  ${}^{M0}\mathbf{F}$  ohne Schwierigkeiten bestimmt werden können. Sie sind nach Natke (1992) asymptotisch erwartungstreue Schätzungen der wahren Werte.

Die Gleichungen (14) und (15) wurden als Algorithmen eines Rechenpaketes MAKRA verwendet, welches auf der Grundlage des Programmsystems MATLAB<sup>®</sup> für PC ausgearbeitet und erprobt wurde (MAKRA, 1996).

### 2.5 Vergleich mit dem Vorgehen im akustischen Frequenzbereich

Bei der Vorausberechnung von Körperschall-Vorgängen bzw. emittiertem Luftschall werden wesentlich geringere Genauigkeitsforderungen als bei Schwingungsberechnungen im Frequenzbereich  $f < 100$  Hz gestellt. Pegeldifferenzen von etwa 10 dB entsprechen bei Luftschall einer Verdopplung der Lautstärkeempfindung. Sie sind aufgrund der unscharfen Pegelgrenzen der Gehörschädigung noch vertretbare Abweichungen bei der Vorausberechnung. Der äquivalente Faktor 3,14 kann aber bei Bauteil-Wechselbeanspruchung im Bereich extremer Materialauslastung bereits ein erhebliches Sicherheitsrisiko darstellen.

Im akustischen Frequenzbereich (zumindest oberhalb ca. 250 Hz) herrscht außerdem zwischen Erregerquelle und Empfänger meist „Fehlanspassung“. Das bedeutet, daß  $|{}^H M|$  meist um Größenordnungen über  $|{}^S H|$  liegt (siehe Bild 3). Es handelt sich dann um reine Kraftanregung, bei der - im Gegensatz zum niedrigen Frequenzbereich - die durch  ${}^M H$  gekennzeichnete Rückwirkung der Maschine auf die Stützkonstruktion vernachlässigt werden kann.

Für den Frequenzgang der Stützkonstruktion wird in der Akustik oftmals eine Mittelung in endlich breiten Frequenzbändern (z.B. Terzen) vorgenommen. Bild 4 zeigt, daß bei höheren Frequenzen aufgrund der größeren Modendichte und der höheren Dämpfung das Risiko eines Fehlers wesentlich geringer ist (die statistische Energieanalyse SEA (Lewit, 1995) stellt eine in der technischen Akustik heute bereits übliche konsequente Nutzung dieses Faktums dar).

### 3 Überprüfung des Formelsatzes und des Rechenprogramms

Obwohl das in Aussicht genommene Verfahren, die Maschinenkraftkenngrößen  ${}^{M0}\mathbf{F}$  und  ${}^M\mathbf{H}$  durch Schwingungsmessungen zu bestimmen, einfacher aussieht als die komplette dynamische Modellierung der Maschine einschließlich der elementaren Erregungen (siehe Bild 2), läßt es sich erst nach Erprobung der zu verwenden numerischen und experimentellen Komponenten endgültig beurteilen.

Der erste Schritt war eine Überprüfung des Formelsatzes und des Rechenprogramms anhand computer-simulierter Pseudomeßwerte.

#### 3.1 Simulationsmodell und Simulationsergebnisse

Bild 5 zeigt das Modell eines Systems Maschine/Stützkonstruktion mit zwei Koppelpunkten in Position 1 (siehe linker Hochindex an den Parametern der Stützkonstruktion).

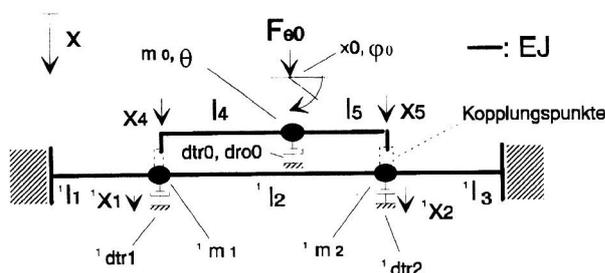


Bild5. Simulationsmodell Maschine/Stützkonstruktion mit zwei Verknüpfungspunkten

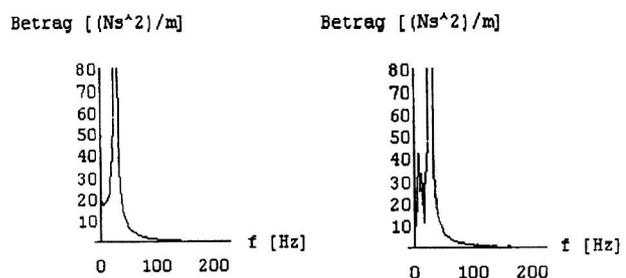


Bild 6. Betrag des Hauptdiagonalelementes [1,1] der invertierten Frequenzgangmatrix  ${}^M\mathbf{H}^{-1}$  bei der Berechnung mit voller Stellenzahl (links) und abgekürzter Stellenzahl (rechts)

Für eine harmonische Erregerkraft  $F_{e0}=100 \text{ N} \cdot e^{i2\pi t}$  im Frequenzbereich von 0... 400 Hz wurden die Beschleunigungen der erzwungenen Schwingungen  ${}^S\mathbf{a}$  an den Verknüpfungspunkten und die Admittanzfrequenzgänge  ${}^G\mathbf{H}$ ,  ${}^S\mathbf{H}$  für die gleichen Punkte für das Gesamtsystem sowie für die Stützkonstruktion (beidseitig eingespannter Biegebalken mit zwei Einzelmassen) numerisch bestimmt.

Die Rechenergebnisse wurden als „Pseudomeßwerte“ dem erarbeiteten Rechenprogramm MAKRA (1996) zugeführt und der Pseudokraftvektor  ${}^{M0}\mathbf{F}$  und die Maschinenadmittanz  ${}^M\mathbf{H}^{-1}$  berechnet. Außerdem erfolgte die Berechnung von  ${}^{M2}\mathbf{F}$  auf einem „Sekundärfundament“ in der Weise, daß das Maschinenmodell auf dem Modell der Stützkonstruktion um eine endliche Strecke verschoben wurde und damit eine Position S2 bzw. G2 geschaffen wurde.

Die Ergebnisse wurden mit direkt berechneten Werten der gleichen physikalischen Größen verglichen. Es ergaben sich keine erkennbaren Unterschiede im Betrags- und Phasenspektrum bzw. -frequenzgang der betrachteten Größen.

In einem weiteren Schritt wurden alle computersimulierten Pseudomeßwerte auf zwei gültige Ziffern gerundet, um damit eine begrenzte Meßgenauigkeit (maximal 5 % Meßfehler) zu simulieren. Die Bilder 6, 7 und 8 zeigen jeweils nebeneinander die Beträge der mit voller bzw. abgekürzter Stellenzahl berechneten Frequenzgänge der Admittanz  ${}^M\mathbf{H}^{-1}[1,1]$  bzw. der Spektren  ${}^{M0}\mathbf{F}[1]$  und  ${}^{M2}\mathbf{F}[1]$ .

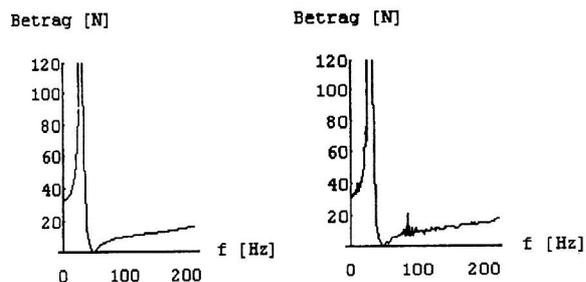


Bild 7. Betrag des Vektorelements [1] des Pseudokraftvektors  ${}^{M0}\mathbf{F}$  bei Berechnung mit voller Stellenzahl (links) und abgekürzter Stellenzahl (rechts))

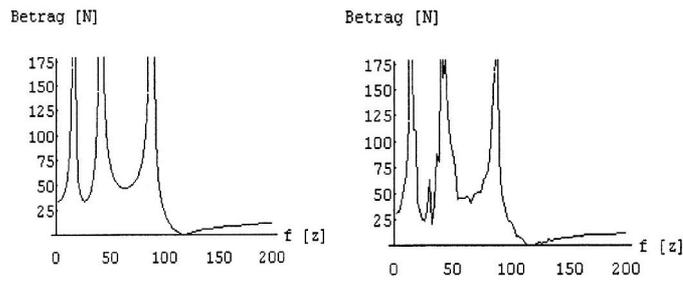


Bild 8. Betrag des Vektorelements [1] des Maschinenkraftvektors  ${}^{M2}\mathbf{F}$  auf dem Sekundärfundament bei Berechnung mit voller Stellenzahl (links) und abgekürzter Stellenzahl (rechts)

### 3.2 Analyse der Abweichungen bei Meßgenauigkeit

Bereits die geringe simulierte „Meßunsicherheit“ führt (für das Beispiel nach Bild 5) zu Betragsfehlern bis zum Faktor 3. Eine Analyse der Fehler ergab, daß sie besonders auf

- den niedrigsten Frequenzbereich, also  $f \rightarrow 0$  Hz;
- den Bereich von Resonanzen;
- den Bereich von Antiresonanzen

konzentriert sind.

Für die Fehlerentstehung läßt sich folgende Fallunterscheidung treffen:

- Im Frequenzbereich  $f \rightarrow 0$  Hz ist  ${}^S\mathbf{H}^{-1}$  entsprechend dem Federverhalten der Stützkonstruktion (siehe Bild 3) sehr groß.  ${}^M\mathbf{H}^{-1}$  hat einen endlichen Wert.  ${}^G\mathbf{H}$  wird also im wesentlichen von der Stützkonstruktion und nur ganz gering von der Maschine geprägt. Da  ${}^M\mathbf{H}$  nach Gleichung (12b) indirekt bestimmt werden muß, ergeben sich kleine Differenzen großer Zahlen und damit möglicherweise größere Fehler bei der Berechnung.
- In der Nähe der Resonanzfrequenzen  $f_k$  eines linearen Schwingungssystems bereitet die Invertierung der Matrizen  ${}^S\mathbf{H}$  bzw.  ${}^G\mathbf{H}$  zur Berechnung von  ${}^{M1}\mathbf{F}$ ,  ${}^{M0}\mathbf{F}$  und  ${}^M\mathbf{H}$  Schwierigkeiten. Betrachtet man die Gleichung zur Berechnung erzwungener Schwingungen eines linearen Systems bei harmonischer Anregung  $\mathbf{F}(t)=\mathbf{F} e^{j\Omega t}$  ( $\mathbf{F}$ = Kraftvektor ;  $\Omega = 2\pi f$  = Erregerkreisfrequenz) in modaler Darstellung

$$\mathbf{a} e^{j\Omega t} = -\Omega^2 \sum_k \frac{{}^k \mathbf{u} {}^k \mathbf{u}^T \mathbf{F}}{m_k (\omega_k^2 - \Omega^2 + j 2\vartheta_k \omega_k \Omega)} e^{j\Omega t} \quad (16a)$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{H}(\Omega) \mathbf{F} \quad (16b)$$

(hier sind  $\omega_k=2\pi f_k$  die  $k$ . Eigenkreisfrequenz und  ${}^k \mathbf{u}$ ,  $m_k$ ,  $\vartheta_k$  die zugehörigen Größen Schwingform, modale Masse und modaler Dämpfungsgrad), so kann man feststellen, daß bei  $\Omega \approx \omega_k$  im Falle schwacher Dämpfung ( $\vartheta_k \rightarrow 0$ ) die  $k$ . Eigenschwingform dominiert. Bildet man für diese das dyadische Vektorprodukt

$${}^k \mathbf{u} {}^k \mathbf{u}^T = \begin{vmatrix} {}^k u_1^2 & {}^k u_1 {}^k u_2 & \dots & {}^k u_1 {}^k u_n \\ {}^k u_2 {}^k u_1 & {}^k u_2^2 & \dots & {}^k u_2 {}^k u_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ {}^k u_n {}^k u_1 & {}^k u_n {}^k u_2 & \dots & {}^k u_n^2 \end{vmatrix} \quad (17)$$

so zeigt sich eine „Fast-Singularität“ der Admittanz-Matrix  $\mathbf{H}$ . Diese führt bereits im Falle kleiner Meßfehler zu starken Fehlern bei der Invertierung von (16b).

- c) Eine Fehlerbetrachtung in Meltzer u.a. (1996), Abschnitt 2.7, unter Nutzung der linearen Fehlerrechnung bestätigt, daß sich Meßungenauigkeiten von  ${}^{S1}H$  und  ${}^{G1}H$  bei kleinem Absolutwert der entsprechenden Meßgröße (also in Antiresonanz) besonders stark auf die Berechnungsergebnisse für  ${}^MH$  auswirken.
- d) Letztlich zeigt die Analyse numerischer Zwischenergebnisse, daß schon bei der numerischen Abarbeitung der Gleichungen (11) und (12a) im Produkt des Vektors  ${}^{S1}\mathbf{a}$  mit einer Zeile der invertierten Admittanzmatrix kleine Differenzen großer Zahlen auftreten können, wenn beide von der gleichen Mode geprägt sind. Diese sind auf Meßungenauigkeiten ebenfalls besonders anfällig.

### 3.3 Numerische Verfahren zur Fehlerreduzierung

Es wurden folgende numerische Verfahren programmiert und als dialogorientierte Optionen in das Rechenprogramm MAKRA (1996) aufgenommen:

- iterative Funktionsglättung nach der Formel

$${}^ny(f_i) = \frac{{}^{(n-1)}y(f_{i-1}) + {}^{(n-1)}y(f_i) + {}^{(n-1)}y(f_{i+1})}{3} \quad (18)$$

wobei  ${}^ny(f_i)$  der Funktionswert  $y$  der  $n$ . Glättung (Iteration) bei der Frequenz  $f_i$  ist.

- Polynombildung für  ${}^{S1}H$  bei niedrigen Frequenzen entsprechend dem Verlauf  $\Omega^2/c$  (siehe Bild 3) nach dem Prinzip der kleinsten Fehlerquadrate. Der Vergleich mit  ${}^{G1}H$  läßt dann (ebenfalls als LMS-Schätzung) die Bestimmung von  ${}^MH=1/m$  zu.
- interaktive „Horizontalenbildung“ für  ${}^MH$  bei niedrigen Frequenzen für den Fall, daß das Berechnungsergebnis nach Gleichung (12b) im Mittel einen asymptotisch nach  $1/m$  gehenden Verlauf hat.
- Konditionszahlenüberprüfung:  
Die Singularität einer (zu invertierenden) Matrix  ${}^{S1}\mathbf{H}$ ,  ${}^{S2}\mathbf{H}$ ,  ${}^{G1}\mathbf{H}$  läßt sich mit deren Konditionsmaßen (Lewit, 1995) beurteilen. Weichen diese bei einer Frequenz vom Idealmaß 1 stark ab, ist die numerische Invertierung unzuverlässig. Die Ergebnisse sind deshalb dringend einer Funktionsglättung (siehe oben) zu unterziehen.

Weitere Verfahren der Singularitätsbehandlung, die bei den allgemein schlecht konditionierten inversen Aufgaben der linearen Dynamik bekannt sind (z.B. Singulärwertzerlegung (Lewit, 1995)) wurden noch nicht erprobt.

### 3.4 Änderungen des Versuchsablaufs

Die Fehlerquellenanalyse des Abschnitts 3.2 läßt die folgenden alternativen Versuchsabläufe zur Reduktion von Fehlern als vorteilhaft erscheinen (siehe Bild 9). Die Kombination der Alternativen A, B und C läßt eine Ermittlung von Maschinenkraft, Pseudokraft und Maschinen-Frequenzgang zu, ist aber im Teil C nicht mehr als „in-situ“-Verfahren zu werten. Da aber bei dieser Alternative die Maschine selbst nicht läuft, kann sie ggf. ohne Probleme realisiert werden. Die „leichte, weiche und elastisch gelagerte Prüfplatte“ bei Alternative C dient nur einer steifen Verbindung der Füße in ihrer Ebene untereinander, um gleiche Bedingungen wie bei der Maschinenlagerung auf dem späteren Sekundärfundament zu schaffen.

Die Alternative D soll durch die weiche Lagerung einen Einfluß der Maschine auf  ${}^{G1}\mathbf{H}$  bereits im Bereich niedriger Frequenzen sicherstellen. Die geringe Biegesteifigkeit und hohe Dämpfung dienen der Überlagerung des Einflusses mehrerer Moden bei jeder Frequenz, wirken also gegen Invertierungsfehler. Mit dieser (weiterhin experimentell erprobten) Alternative wurde allerdings die ursprüngliche Zielstellung eines in-situ-Verfahrens aufgegeben.

Auch für die Alternativen A, B, C, D wurden Simulationsrechnungen (d. h. Lösungsversuche mit voller und reduzierter Stellenzahl aus Pseudomeßwerten) durchgeführt. Dabei ergaben sich für die Alternativen A und B „in-situ“ wieder unbrauchbare Ergebnisse. Damit wird auch die nur in Verbindung mit A und B sinnvolle Alternative C hinfällig.

Rechnerische Simulationen für die Alternative D ergeben auch bei auf eine Stelle abgekürzten Pseudomeßwerten (also maximal 50 % relativer Fehler) gute Ergebnisse für  ${}^M\mathbf{H}$  und  ${}^{M0}\mathbf{F}$ , wenn die Parameter des Prüffundamentes entsprechend den Forderungen (siehe Bild 9) gewählt werden. So war bei einer Maschinenmasse von 5 kg ein Prüffundament der Masse 1 kg nicht ausreichend, mit einem Prüffundament der Masse 0,4 kg ergaben sich aber im gesamten Frequenzbereich von ca. 5 Hz bis 100 Hz gute Ergebnisse.

In Meltzer u.a. (1996) wurden noch zwei weitere Lösungsalternativen analysiert und erprobt, wegen Unzulänglichkeit der Ergebnisse aber wieder verworfen:

- Beschreibung von  $^{S1}H$ ,  $^{S2}H$  und  $^{G1}H$  durch experimentelle Modalanalyse;
- Beschreibung der Maschinen-Kenngrößen  $^{M0}F$  und  $^MH$  unabhängig von der Zahl und dem Abstand der Fußpunkte nur in 3 Freiheitsgraden (vertikale Translation und Drehung um beide Horizontalen).

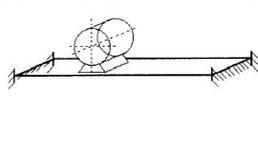
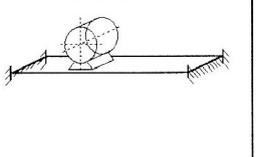
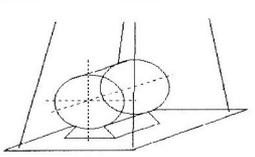
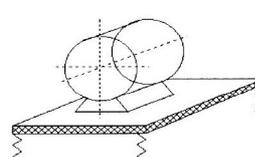
Alternative A	Alternative B	Alternative C	Alternative D
 Beliebiges Primärfundament	 Beliebiges Primärfundament	 Kein Prüffundament ( leichte, weiche, elast. gelagerte Prüfplatte dient zur direkten Messung von $^MH$ )	 Primärfundament: elastisch gelagerte, bedämpfte weiche Prüfplatte
Messung wie bisher: -"in-situ"-Messung von $^{G1}H$ und $^{S1}a$	Messung wie bisher: -"in-situ"-Messung von $^{S1}a$ und $^{S1}H$	-Direkte Messung von $^MH$ => keine "in-situ"-Messung	Messung wie bisher: => keine "in-situ"-Messung
$^{M0}F = -^{G1}H^{-1} \cdot ^{S1}a$ -> Bestimmen von $^{M0}F$ ( keine Bestimmung von $^MH$ möglich )	$^{M1}F = -^{S1}H^{-1} \cdot ^{S1}a$ -> Bestimmen von $^{M1}F$ ( keine Bestimmung von $^MH$ möglich )	$^{MH^{-1}} = Inv(^MH)$ -> Bestimmen von $^{MH^{-1}}$ ( keine Bestimmung von $^{M0}F$ bzw. $^{M1}F$ möglich )	$^{M0}F = -^{G1}H^{-1} \cdot ^{S1}a$ $^{M1}F = -^{S1}H^{-1} \cdot ^{S1}a$ $^{MH^{-1}} = ^{G1}H^{-1} - ^{S1}H^{-1}$ -> Bestimmen von $^{M0}F$ , $^{M1}F$ , $^{MH^{-1}}$

Bild 9. Auswahl alternativer Meßverfahren zur Bestimmung von Schwingungs-Emissionskenngrößen von Maschinen

## 4 Experimentelle Überprüfung

### 4.1 Laborversuche

In einer Laboreinrichtung konnten eindimensionale (Balken) und zweidimensionale (Platten) Stützkonstruktionen mit Abmessungen bis 1 x 1 m<sup>2</sup> starr oder elastisch gelagert werden. Als Maschinenmodelle standen zur Verfügung:

- ein Elektromotor (mit zusätzlicher Unwucht) mit 2 Fußpunkten
- ein Elektromotor (mit zusätzlicher Unwucht und zusätzlicher Grundplatte) mit 3 Fußpunkten
- eine Pendelstichsäge (mit vorwiegend nur vertikal gerichteter Erregerkraft) mit 2 Fußpunkten.

Für die Admittanzmessungen konnten sowohl ein Stoßhammer als auch ein elektrodynamischer Shaker (dieser sowohl mit stochastischer als auch mit harmonischer Erregerkraft) wahlweise eingesetzt werden.

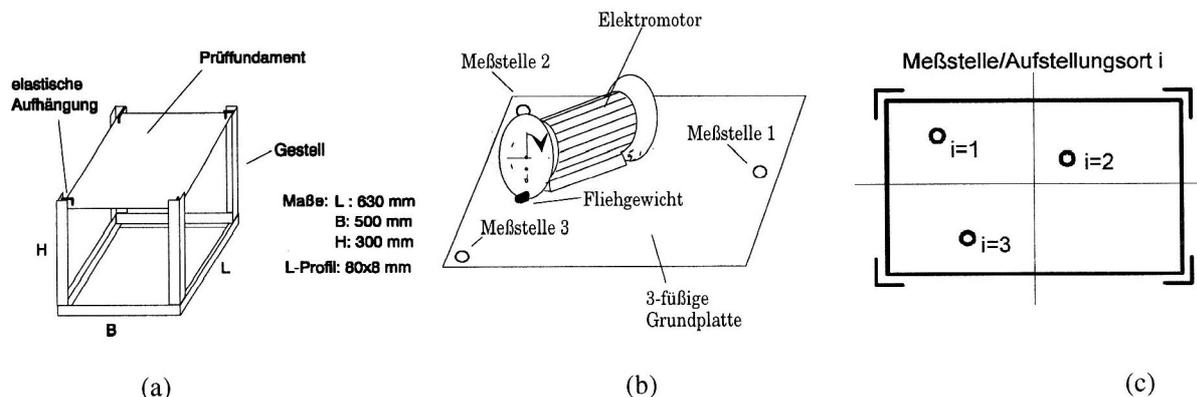


Bild 10. Laborversuchsstand zur Maschinenkraftbestimmung nach Alternative D  
(a) Prüffundament (b) Maschinenmodell (c) Lage der Meß- und Verknüpfungspunkte

Die Versuche mit starr gelagerter Stützkonstruktion (also „in-situ“ entsprechend) ergaben trotz Einsatz der numerischen Korrekturen (siehe Abschnitt 3.3) weder für  ${}^M\mathbf{H}^{-1}$  noch für  ${}^{M0}\mathbf{F}$  befriedigende Ergebnisse. Zu beachten ist dabei, daß die hier als Stützkonstruktion verwendeten Stahlbauteile extrem schwach gedämpft sind ( $2\delta \approx 0,01$ ) und damit alle numerischen Fehler besonders stark auftreten. Die sehr guten Ergebnisse der direkten Ermittlung der  ${}^M\mathbf{H}$ -Matrix nach Alternative C (siehe Bild 9) kann nicht darüber hinwegtäuschen, daß es sich hierbei um ein praktisch kaum anwendbares Verfahren handelt. Für die Versuchsvariante D ergaben sich jedoch bereits recht interessante Ergebnisse. Bild 10 zeigt in drei Teilen den Versuchsaufbau: (a) den angepaßten Laborversuchsstand mit einer in Gummifedern aufgehängten 6 mm - Kunststoffplatte als „Primärfundament“, (b) das Maschinenmodell und (c) den Lageplan der Verknüpfungspunkte. Die Verbindung erfolgte durch Verschraubung unter Beifügung von Abstandshaltern (Füßen).

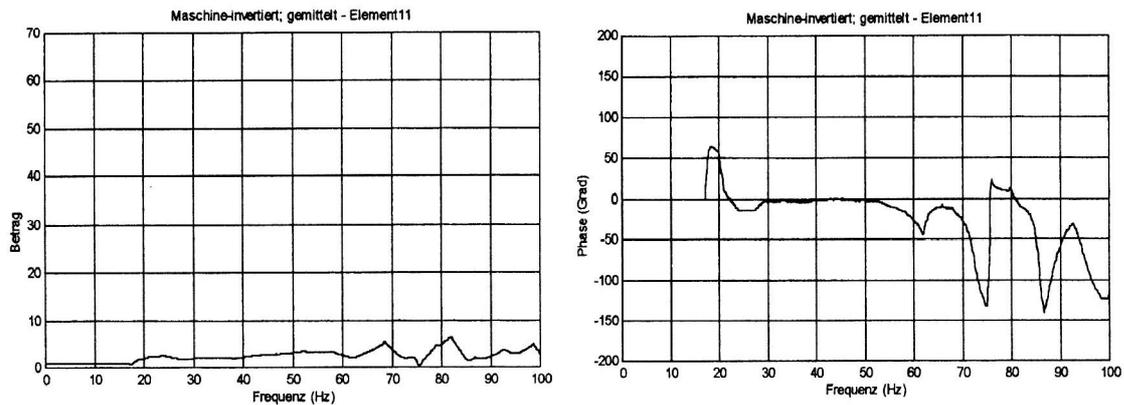


Bild 11. Betrag und Phase des Elements [1,1] der invertierten Admittanz-Frequenzgangmatrix  ${}^M\mathbf{H}^{-1}$  für den Versuchsaufbau nach Bild 10

Bild 11 zeigt die Komponente [1,1] der invertierten Admittanzfrequenzmatrix  ${}^M\mathbf{H}^{-1}$  des Maschinenmodells nach Betrag und Phase. Bei der Berechnung wurden die konditionszahlabhängige Glättung und die Horizontalapproximation bei niedrigen Frequenzen (siehe Abschnitt 3.3) angewandt.

Maschinenkraft ${}^{M1}\mathbf{F}$ -- Dreidimensionale Anordnung - Meßsystem 1												
Berechnete Kraft nach Meßsystem 1:							Gemessene Kraft nach Meßsystem 1:					
Frequenz [Hz]	Element 11		Element 22		Element 33		Element 11		Element 22		Element 33	
	Betrag [N]	Phase [Grad]	Betrag [N]	Phase [Grad]	Betrag [N]	Phase [Grad]	Betrag [N]	Phase [Grad]	Betrag [N]	Phase [Grad]	Betrag [N]	Phase [Grad]
8.	1.38	0.	1.79	112.3	2.4 ↓	-113.	0.98	0.	4.55	-97.2	3.39	88.4
9.	0.21	0.	0.54	165.3	0.43	-29.2	0.44	0.	1.07 ↑	173.5	0.56 ↑	-11.2
10.	0.36 ↑	0.	0.53 ↑	-172.7	0.61 ↑	-13.5	0.47	0.	0.89	177.	0.35 ↑	-19.8
11.	0.23 ↑	0.	0.39	-41.2	0.5	96.8	0.26	0.	0.81	-174.8	0.28	-43.8
12.	0.15	0.	0.35	5.4	0.39	107.8	0.09	0.	0.86	175.2	0.24	-65.7
13.	0.49 ↑	0.	0.63 ↑	89.3	0.61	119.6	0.23	0.	1.3	45.3	0.69	174.2
14.	0.89	0.	1.98	176.4	0.84	173.2	2.25	0.	2.81	3.6	3.61	179.5
15.	1.07	0.	1.17	-87.5	0.72	-170.8	1.73	0.	1.03	-103.2	1.74	103.
17.	0.65 ↓	0.	2.63	154.	0.74	154.6	0.89	0.	1.47	-72.9	1.2e-3	-136.5
18.	7.42	0.	10.4	-164.5	6.1	-178.7	0.27	0.	0.72	-72.	1.48 ↓	-130.
19.	0.92	0.	2.27	-51.9	1.1	-132.2	0.39	0.	1.71	-63.8	1.92	-119.
40.	6.03	0.	3.92	7.3	10.8	11.	3.05	0.	3.52	34.	3.9	165.
45.	3.77	0.	3.48	177.9	5.02	156.1	3.35	0.	3.3	80.	2.7	105.
( ) : Funktionswert liegt beim (Frequenzwert + 0.125 Hz)							( ) : Funktionswert liegt beim (Frequenzwert - 0.125 Hz)					

Bild 12. Beträge und Phasenwinkel der Maschinenkräfte  ${}^{M1}\mathbf{F}$  für die 3 Füße im Laborversuch nach Alternative D (Gegenüberstellung indirekte Bestimmung/direkte Messung)

Die Bestimmung der Maschinenkraft  $^{M1}F$  bzw. der Pseudokraft  $^{M0}F$  aus Schwingungsmessungen kann allerdings (im Gegensatz zu den Simulationsrechnungen in Abschnitt 3.1) nur für die Drehfrequenzen (und ggf. deren höhere Harmonische) erfolgen, bei der die Maschine läuft. Um eine möglichst umfassende Aussage über die Genauigkeit der Maschinenkraftbestimmung zu bekommen, erfolgten die Schwingbeschleunigungsmessungen  $^{S1}a$  bei insgesamt 13 Erregerfrequenzen zwischen 8 und 45 Hz. Für die Pseudokraft war lediglich der Vergleich zweier Meßreihen (mit unterschiedlichen Meßsystemen) möglich. Es gibt (außer bei einer Frequenz, bei welcher bis 800 % Abweichung beider Meßreihen auftreten) recht gute Übereinstimmung. Für die Maschinenkraft  $^{M1}F$  bestand die Möglichkeit, außer der Berechnung der Maschinenkraft aus Meßwerten nach Gleichung (11) auch die Maschinenkraft mit piezoelektrischen Kraftmeßdosen (unter den Füßen des Maschinenmodells nach Bild 10) direkt zu messen. Bild 12 zeigt die Gegenüberstellung der Ergebnisse für alle 3 Fußpunkte. Hierbei ist mit „Meßsystem 1“ die Verwendung eines Zweikanal-Analysators gemeint, bei dem die Meßwerte der Beschleunigung an den 3 Meßpunkten nicht gleichzeitig erfolgen konnte. Dementsprechend tritt auch einige Male eine Verlagerung des Frequenzmaximums um 0,125 Hz auf - offensichtlich als Ergebnis einer Drehzahlschwankung. Auch hier konzentrieren sich extreme Betragsabweichungen mit maximal 333 % auf eine Erregerfrequenz (14 Hz). Es muß erwähnt werden, daß auch die direkt gemessenen Maschinenkräfte bei zwei- bzw. vierkanaliger Meßeinrichtung (also gleichzeitiger Kraftmessung oder aufeinanderfolgender Messung für die einzelnen Füße) relativ stark schwanken. Das ist ein Zeichen dafür, daß bei schwach gedämpften Systemen in der Nähe von Resonanzfrequenzen bereits geringe Erregerfrequenzschwankungen die erzwungenen Schwingungen außerordentlich stark beeinflussen.

#### 4.2 Praxisversuch

Für den Praxisversuch wurde eine „reale Maschine“ durch Montage eines kleinen Radialventilators auf ein Stahlgestell mit 4 Füßen (Abstand  $0,8 \times 0,8 \text{ m}^2$ ) hergestellt (Bild 13).

Der Versuch lief in folgenden Schritten ab:

- Bestimmung von  $^{M0}F$  und  $^{MH^{-1}}$  aus Messungen auf einem „Primärfundament“ entsprechend Gleichung (12)
- Messung des Admittanz-Frequenzganges  $^{S2}H$  einer Stahlbeton-Gebäudedecke als „Sekundärfundament“ und Berechnung der zu erwartenden Maschinenkraft  $^{M2}F$  nach Gleichung (13)
- Aufstellung der Maschine auf dieser Decke und direkte Messung des Kraftvektors  $^{M2}F$  mittels Kraftmeßdosen.

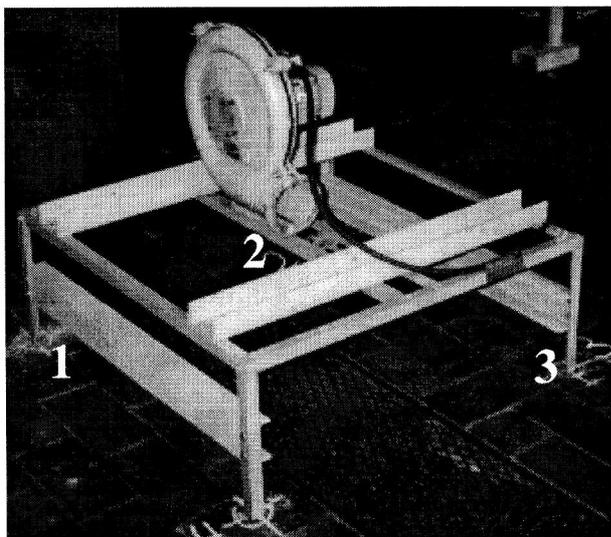
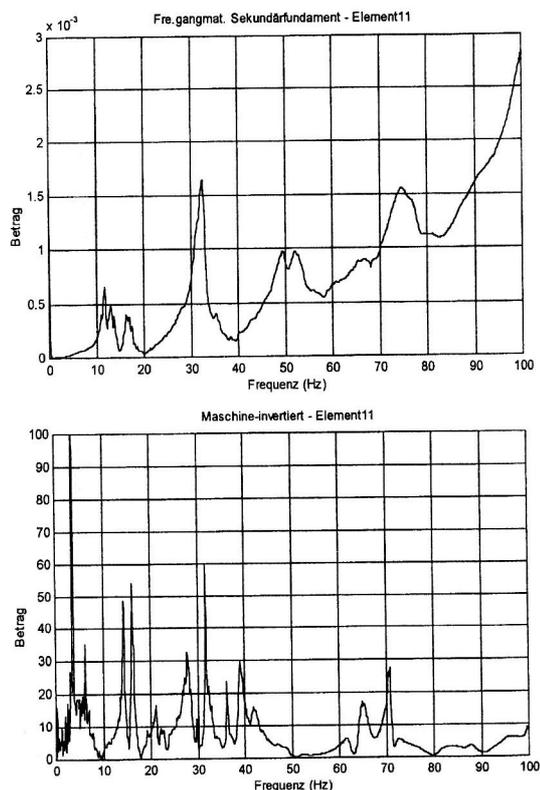


Bild 13. Maschine mit 4 Fußpunkten, die im Praxisversuch verwendet wurde

Bild 14. Beträge der Elemente [1,1] der invertierten Frequenzgangmatrix  $^{MH^{-1}}$  der Maschine (oben) und der Frequenzgangmatrix  $^{S2}H$  des Sekundärfundaments (unten) beim Praxisversuch



Zur Realisierung des Schrittes b) wurde ein spezieller Stoßhammer konstruiert und hergestellt, der in Abschnitt 5.1 noch näher beschrieben wird. Bei den Schritten a) und c) wurde die Maschine, die eine rein harmonische Schwingung erregt, nacheinander mit den Drehfrequenz-Stufen  $f = 6,375; 12,375; 16,125$  und  $23,125$  Hz betrieben.

Da für  $M^0F$  keine Kontrollmöglichkeit besteht (diese Pseudokraft tritt in-situ nicht wirklich auf, ist also nicht meßbar - siehe Abschnitt 2.2 und Bild 2), wurde eine Fehlerabschätzung in der Weise vorgenommen, daß zu allen Beträgen der Meßwerte von  $G^1H$  und  $S^1a$  stochastisch gleichverteilte Fehler im Bereich  $\pm 3 \%$  addiert und die Ergebnisse der so entstehenden  $n$  Realisierungen gemittelt wurden. Das Verhältnis der Streuung der  $n$  Ergebnisse für  $M^0F$  zur Streuung der Eingangsgröße dient als Maß für die frequenzabhängige Anfälligkeit der Berechnung gegenüber zufälligen Meßfehlern. Diese Art der Fehlerabschätzung, die im Rechenprogramm MAKRA (1996) implementiert ist, ergab eine sehr unterschiedliche Fehleranfälligkeit bei den verschiedenen Erregerfrequenzen (z. B. minimal 1,6 % bei 12,375 Hz, maximal 13,5 % bei 6,375 Hz).

Zur Illustration der Zwischenergebnisse zeigt Bild 14 die Beträge der Komponenten [1,1] der invertierten Frequenzgangmatrix der Maschine (links) und der Frequenzgangmatrix des Sekundärfundaments (rechts). Beide Matrizen wurden hinsichtlich ihrer Gültigkeit bei niedriger Frequenz (Ergebnis: ab 5 Hz zuverlässig) und Kondition überprüft (siehe Abschnitt 3.3)

Bild 15 zeigt schließlich eine Gegenüberstellung der mittels des vorgeschlagenen Verfahrens bestimmten und der direkt gemessenen Maschinenkräfte  $S^2F$  für das Sekundärfundament (Gebäudedecke) an den Maschinenfüßen 1,3 und 4 (am Maschinenfuß 2 wurde die Maschinenkraft nicht gemessen). Auch hier ist wieder eine Verteilung der Maxima auf mehrere der nominellen Erregerfrequenz benachbarte Frequenzlinien - verursacht durch Drehzahlschwankungen, die sich bei zweikanaliger Schwingungsmessung nicht ausgleichen lassen - zu erkennen.

Frequenz:	Fußpunkt 1		Fußpunkt 3		Fußpunkt 4	
	Betrag [N]	Phase [Grad]	Betrag [N]	Phase [Grad]	Betrag [N]	Phase [Grad]
Berechnete Werte			6.25: <b>15.3</b>	6.25: <b>-25.°</b>		
für $M^2F$						
$f = 6.375$ Hz	6.375: <b>18.7</b>	6.375: <b>0.°</b>	6.375: <b>11.6</b>	6.375: <b>-36.°</b>	6.375: <b>27.4</b>	6.375: <b>106.°</b>
	6.5: <b>19.8</b>	6.5: <b>0.°</b>	6.5: <b>15.2</b>	6.5: <b>-29.°</b>	6.5: <b>30.8</b>	6.5: <b>117.°</b>
Gemessene Werte			6.25: <b>6.4</b>	6.25: <b>111.°</b>		
für $M^2F$						
$f = 6.375$ Hz	6.375: <b>17.2</b>	6.375: <b>0.°</b>	6.375: <b>12.</b>	6.375: <b>111.°</b>	6.375: <b>14.4</b>	6.375: <b>104.°</b>
	6.5: <b>9.6</b>	6.5: <b>0.°</b>	6.5: <b>6.6</b>	6.5: <b>111.°</b>	6.5: <b>8.1</b>	6.5: <b>104.°</b>
Berechnete Werte	12.125: <b>15.8</b>	12.125: <b>0.°</b>	12.125: <b>4.7</b>	12.125: <b>-9.°</b>	12.125: <b>14.6</b>	12.125: <b>22.°</b>
für $M^2F$						
$f = 12.375$ Hz	12.25: <b>75.7</b>	12.25: <b>0.°</b>	12.25: <b>14.1</b>	12.25: <b>0.°</b>	12.25: <b>79.1</b>	12.25: <b>32.°</b>
	12.375: <b>87.2</b>	12.375: <b>0.°</b>	12.375: <b>20.9</b>	12.375: <b>7.°</b>	12.375: <b>83.4</b>	12.375: <b>35.°</b>
Gemessene Werte	12.125: <b>54.</b>	12.125: <b>0.°</b>	12.125: <b>50.</b>	12.125: <b>84.°</b>	12.125: <b>38.</b>	12.125: <b>67.°</b>
für $M^2F$						
$f = 12.375$ Hz	12.25: <b>70.</b>	12.25: <b>0.°</b>	12.25: <b>65.</b>	12.25: <b>84.°</b>	12.25: <b>147.</b>	12.25: <b>67.°</b>
	12.375: <b>20.6</b>	12.375: <b>0.°</b>	12.375: <b>19.5</b>	12.375: <b>84.°</b>	12.375: <b>13.5</b>	12.375: <b>67.°</b>

Bild 15. Beträge und Phasenwinkel der Maschinenkräfte  $M^2F$  für 3 Füße einer Maschine im Praxisversuch (Gegenüberstellung indirekte Bestimmung/direkte Messung)

## 5 Versuchstechnische Hinweise

Eine ausführliche Beschreibung und Wertung des Versuchsplanes und der Versuchsdurchführung ist in MAKRA (1996) Abschnitt 2, enthalten. Auf zwei wichtige Fragen soll jedoch im folgenden hingewiesen werden.

### 5.1 Erregerhammer für reale Stützkonstruktionen

Bild 16 zeigt Aufbau und Handhabung des verwendeten Erregerhammers sowie einen gemessenen Erregerkraft-Zeitverlauf. Die Stoßdauer  $\tau$  ist von der Art der elastischen Unterlage abhängig. Für eine 13 mm starke Weichgummi-Unterlage ergab sich z. B.  $\tau = 6,5$  ms. Benutzt man alle Frequenzkomponenten des Stoßkraft-

Spektrums, für welche das Spektrum noch größer als 80 % des Maximalwertes bei  $f = 0$  Hz ist (diese Grenzfrequenz liegt bei  $f_{\max} \approx 1/2\tau$ ), so kann im vorliegenden Fall der Admittanz-Frequenzgang der Sekundärstützkonstruktion bis  $f_{\max} \approx 80$  Hz bestimmt werden.

Die Stoßkraft  $F_{\max}$  ist von der Fallhöhe  $h$  abhängig, für den ausgeführten Hammer und die verwendete Gummi-Unterlage ergaben sich z. B.  $F_{\max} = 8,8$  kN bei  $h = 0,5$  m bzw.  $F_{\max} = 3,9$  kN bei  $h = 0,1$  m.

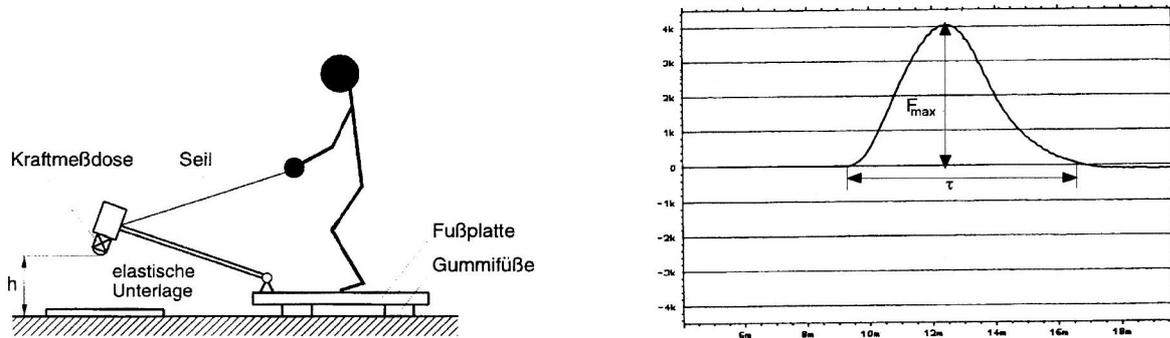


Bild 16. Stoßhammer (links) und gemessener Stoßkraftverlauf (rechts)

## 5.2 Frequenzgangbestimmung bei niedrigen Frequenzen

Ein bekanntes Problem bei Frequenzgangbestimmungen ist die Unzuverlässigkeit der Ergebnisse bei niedrigen Frequenzen. Schon die Kalibrierung der Erreger- und Meßkette durch zentralen Stoß an eine Masse zeigt, daß in einem Frequenzbereich etwa zwischen 0 und 5 Hz erhebliche Abweichungen der Beschleunigungsadmittanz vom erwarteten Wert  $H=1/m$  auftreten (insbesondere im Phasenwinkel).

Dafür gibt es zwei Ursachen:

a) die zu messende Beschleunigung ist naturgemäß bei  $f \rightarrow 0$  sehr gering, so daß die Meßergebnisse durch das Meßrauschen verfälscht werden. Es sollte überprüft werden, ob die Verwendung frequenzgangkorrigierter Schwinggeschwindigkeits-Aufnehmer bessere Resultate ergibt. Dieser Nachweis konnte bisher nicht erfolgen, weil alle verfügbaren Schwinggeschwindigkeitsaufnehmer bei  $f \rightarrow 0$  einen unbefriedigend korrigierten Phasenfrequenzgang aufweisen.

b) Schwingungs- bzw. Kraftaufnehmer mit ihren nachgeschalteten Verstärkern zeigen bei niedrigen Frequenzen oftmals einen unbefriedigenden Phasen-Frequenzgang. Um durch unterschiedliche Phasen-Frequenzgänge im Beschleunigungs- und Kraftmeßkanal verursachte Phasenfehler des Admittanz-Frequenzganges zu vermeiden, wurde streng darauf geachtet, daß in beiden Meßkanälen gleiche Wandler und Verstärker verwendet werden.

Das bedeutet

- für den Handhammer: Piezoelektrische Kraftmeßdose und piezoelektrische Beschleunigungsaufnehmer, jeweils mit Ladungsverstärker;
- für den großen Erregerhammer nach Abschnitt 5.1: Kraftmeßdose und Beschleunigungsaufnehmer sind mit gleichen Halbleiter-Dehnungsmeßstreifen ausgerüstet, welche jeweils in Halbbrückenschaltung mit einer Trägerfrequenz-Meßbrücke betrieben wurden.

Um die Zuverlässigkeit einer Frequenzgangmessung zu überprüfen, wird die Kohärenz zwischen Kraft- und Beschleunigungssignal bestimmt (ist mit dem zweikanaligen Signalanalysator möglich) -siehe MAKRA (1996), Abschnitt 2.4.

## 6 Rechentechische Hinweise

Zu dem in MAKRA (1996) ausführlich beschriebenen Rechenprogramm wurden bereits in den Abschnitten 2.4 und 3.3 Hinweise gegeben. Das Rechenprogramm realisiert alle durch die Gleichungen (11), (12) und (13) beschriebenen Aufgaben auf dem in Abschnitt 2.4 begründeten Umweg über Leistungsgleichungen. Es ist unabhängig von der Art der Versuchsdurchführung, kann also für die ursprünglich geplante in-situ-Maschinenkraftbestimmung ebenso genutzt werden wie für die nunmehr favorisierte Alternativmethode D (vgl. Abschnitt 3.4 bzw. Bild 9).

Der Modul HMDIFILE des Programmpaketes MAKRA ist darüberhinaus für die Berechnung von  ${}^M\mathbf{H}^{-1}$  bei direkter Messung der Maschinenadmittanz (Versuchsalternative C) vorgesehen.

Außerdem gibt es ein Programm FADI, mit welchem bei Versuchsvariante C im Falle einer Schwingungsmessung bei laufender Maschine (Leerlauf-Beschleunigung  ${}^{M0}\mathbf{a}$ ) direkt die Pseudokraft  ${}^{M0}\mathbf{F}$  berechnet werden kann.

Auf die bereits in Abschnitt 4.2 erläuterte und genutzte Möglichkeit einer Abschätzung der Fehleranfälligkeit der Routinen bei einzelnen diskreten Frequenzen soll hier nochmals hingewiesen werden. Sie ist im Grundmenü jedes Programm-Moduls aufrufbar und erfordert die Eingabe der Bandbreite der stochastisch gleichverteilten Meßwertstörung und der Anzahl der gestörten Realisierungen, die gemittelt werden sollen. Außer der Streuung der Einzelergebnisse jeder Realisierung um den Mittelwert sind noch andere Fehlermaße berechenbar.

## 7 Vergleich des Verfahrens mit konkurrierenden Lösungsvorschlägen

Eine systematische Literaturstudie ergab nur wenige Hinweise auf praktisch anwendbare Verfahren. Eine ganze Reihe davon war speziell für den akustischen Frequenzbereich ausgearbeitet und dadurch gekennzeichnet, daß mit Leistungskenngrößen ohne Berücksichtigung der Phasenbeziehungen für die einzelnen Verknüpfungspunkte gerechnet wird. Diese Grundannahme ist für unsere Aufgabenstellung nicht akzeptabel (siehe Abschnitt 2.3)

Die 1984 veröffentlichte Dissertation von Langer (1984) ist zwar auch auf den Körperschall-Frequenzbereich orientiert, verwendet aber trotzdem deterministische Meß- und Berechnungs-Algorithmien. Sie geht von einer direkten Messung der Maschinenadmittanz aus (entspricht unserer Lösungsalternative C) und benutzt als zweite Kenngröße der Maschine die Schwingung der Maschinenfüße bei elastischer Aufstellung während der Prüfung. Das entspricht der Möglichkeit einer Auswertung der Leerlaufbeschleunigung, welche bei uns durch das Programm FADI (siehe Abschnitt 6) ebenfalls möglich ist. Eine Genauigkeitsabschätzung anhand von Ergebnissen führt nach Zusammenfassung der berechneten Schwingungen auf dem Sekundärfundament zu Terzbändern mit Fehlern von 10 ... 20 dB im Frequenzbereich  $< 250$  Hz und 5 dB im Frequenzbereich  $> 250$  Hz. Durch den (aus Genauigkeitsgründen erzwungenen) Übergang von den in-situ-Versuchen zur Versuchsalternative D sind wir eng an die Langer-Lösung herangerückt, gehen aber mit einem nutzbaren Rechenprogramm einschließlich Fehleranalyse- und Fehlerkorrekturroutinen einen wesentlichen Schritt weiter.

Die erst kürzlich bekanntgewordene Dissertation von Lewit (1995) wendet für die Bestimmung von  ${}^{M0}F$  und  ${}^{M1}F$  das sogenannte Reziprozitätsverfahren an. Anstelle der Messung der Admittanzfrequenzgänge  ${}^{S1}H$  und  ${}^{G1}H$  werden dabei zusätzliche Schwingungsmessungen bei äußerer Zustandserregung durchgeführt. Dieses Verfahren ist aber ebenso von numerischen Fehlern, insbesondere bei der Invertierung fastsingulärer Matrizen, belastet. Trotzdem kann zur Bestimmung von  ${}^MH$  auf die zusätzliche Messung von  ${}^{S1}H$  und  ${}^{G1}H$  nicht verzichtet werden, so daß sich das Verfahren insgesamt komplizierter erweist. Überraschend sind allerdings die Genauigkeitssteigerungen, die sich durch Anwendung der Singulärwertzerlegung bei der Invertierung der schlecht konditionierten Matrizen ergeben - siehe Abschnitt 3.2.

## 8 Zusammenfassung und Ausblick

Als Ergebnis der Forschung wird ein funktionierendes Verfahren mit genauen Anweisungen zur Versuchsdurchführung zur Verfügung gestellt, welches durch ein erprobtes Rechenprogramm ergänzt wird. Beide sind sowohl bei der ursprünglich angestrebten in-situ-Messung als auch bei jeder anderen der möglichen Versuchsalternativen anwendbar.

Rechnerische Simulationen und Experimente zeigen, daß das in-situ-Verfahren stark durch numerische Fehleranfälligkeit belastet ist, die bei Nutzung eines optimierten Prüffundaments (Versuchsalternative D) stark zurückgeht. Allerdings erhöhen sich dabei die versuchstechnischen Probleme.

Die im Rechenprogramm enthaltene Routine zur Abschätzung der Fehleranfälligkeit ist zwar praktikabel, die Nutzung der Optionen zur Korrektur numerischer Fehler setzt aber zur Zeit noch Dialogbedienung des Programms durch einen in der Schwingungslehre erfahrenen Operator voraus.

Aus der Bearbeitung ergeben sich folgende Ansatzpunkte für eine mögliche Verbesserung des Verfahrens) u. a.

- Verbesserung der numerischen Stabilität durch Anwendung weiterer konditionsverbessernder Lösungsverfahren (z.B. Singulärwertzerlegung);
- Einsatz frequenzgangkorrigierter Schwinggeschwindigkeitsaufnehmer;
- Erhöhung der Analysator-Kanalzahl (möglichst auf Anzahl der Füße +1).
- Erweiterung der numerischen Fehleranalyse im Rechenprogramm auch auf systematische Meßfehler

## Danksagung

Die der Publikation zugrundeliegende Forschungsarbeit erfolgte im Auftrag des Bundesministers für Arbeit und Sozialordnung der Bundesrepublik Deutschland unter der Vorhabensnummer F 1451. Sie wurde von den Mitarbeitern der Gruppe 5.2 (Technische Arbeitsschutzmaßnahmen; Schwingungsschutz) der Bundesanstalt für Arbeitsschutz in regelmäßigen Beratungen sachkundig unterstützt.

## Literatur

1. Langer, W.-D.: Untersuchungen zur Vorausberechenbarkeit der Körperschallübertragung auf Fundamente durch mehrpunktig aufgestellte Maschinen. Dissertation TH Darmstadt/Fachbereich Maschinenbau, (1984)
2. Lewit, M.: Inverse Messung von Kräften und Leistungen in gekoppelten, schwingenden Strukturen. VDI-Forschungsberichte Reihe 11 Nr. 215; Düsseldorf, (1995)
3. MAKRA - Ein Programmpaket zur Berechnung der Maschinenkraft auf der Grundlage gemessener Schwingungen der Stützkonstruktion (Programmbeschreibung)  
Forschungsbericht 411/96 der TU Dresden, Fakultät Maschinenwesen, Professur für Technische Diagnostik (September 1996)  
gleichzeitig:  
Schriftenreihe der Bundesanstalt für Arbeitsschutz, Forschung, Fb F 1451, Dortmund, (1996)  
Bearbeiter: Meltzer, G.; Häslers, K. und Reinbothe, F.
4. Meltzer, G. und N. Bitterlich: Maschinenkraftbestimmung durch in-situ-Messung. Düsseldorf, (1991):  
VDI-Berichte Nr. 882, S. 603 - 611
5. Melzig-Thiel, R.: Beiträge zur theoretischen und experimentellen Begründung eines Verfahrens für die Berechnung der Körperschallanregung von Gebäuden durch Maschinen. Dissertation Techn. Univ. Dresden, (1979)
6. Natke, H. G.: Einführung in Theorie und Praxis der Zeitreihen- und Modalanalyse. Braunschweig und Wiesbaden: Friedrich Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, (1992)
7. Verfahren zur Messung von Maschinenkräften, die in die Aufstellpunkte eingespeist werden. Forschungsbericht 410/96 der TU Dresden, Fakultät Maschinenwesen, Professur für Technische Diagnostik (September 1996)  
gleichzeitig:  
Schriftenreihe der Bundesanstalt für Arbeitsschutz, Forschung, Fb F 1451, Dortmund, (1996)  
Bearbeiter: Meltzer, G.; Häslers, K. und Reinbothe, F.

---

*Anschrift:* Prof. Dr.-Ing. habil. G. Meltzer, Dipl.-Ing. K. G. Häslers, Technische Universität Dresden, Institut für Energiemaschinen und Maschinenlabor, Professur für Technische Diagnostik, D-01062 Dresden