

# Nichtlineares Verhalten von Spiralseilen unter Zug und Torsion

F. Plagge, D. Ottl

Herrn Prof. Dr. rer. nat. E. Brommundt zum 65. Geburtstag gewidmet.

*In der vorliegenden Arbeit werden der geometrische Aufbau, die Kinematik und die Kontaktbedingungen zwischen den Drähten dreilagiger Spiralseile analysiert und die Hysterese infolge Reibung mit inneren Variablen erfaßt. Unbekannte Systemparameter identifizieren wir aus Ergebnissen von Verformungsmessungen. Meß- und Simulationsergebnisse stimmen gut überein.*

## 1 Aufbau und Elastostatik von Spiralseilen

Wir untersuchen das Verhalten von dreilagigen Spiralseilen DIN 3054 unter Zug und Torsion (Plagge, 1997). Die Spiralseile besitzen einen Kerndraht aus Stahl. Um den Kerndraht sind in der ersten Lage sechs, in der zweiten Lage zwölf und in der dritten Lage achtzehn Drähte helixförmig gewickelt. Die Außenlage der von uns untersuchten Seile ist immer rechtsgängig; die inneren Lagen sind linksgängig gewickelt. Die beiden inneren Lagen haben gleiche Schlagwinkel. Bild 1a zeigt den Aufbau eines verwendeten dreilagigen Spiralseiles. Die von uns angegebenen Theorien können leicht an andere Spiralseiltypen z.B. mit Hanfseele angepaßt werden. Hierzu sind Elastizitätsmodul und Kontaktsteifigkeiten des Werkstoffs der Seele in die Rechenprogramme einzusetzen.

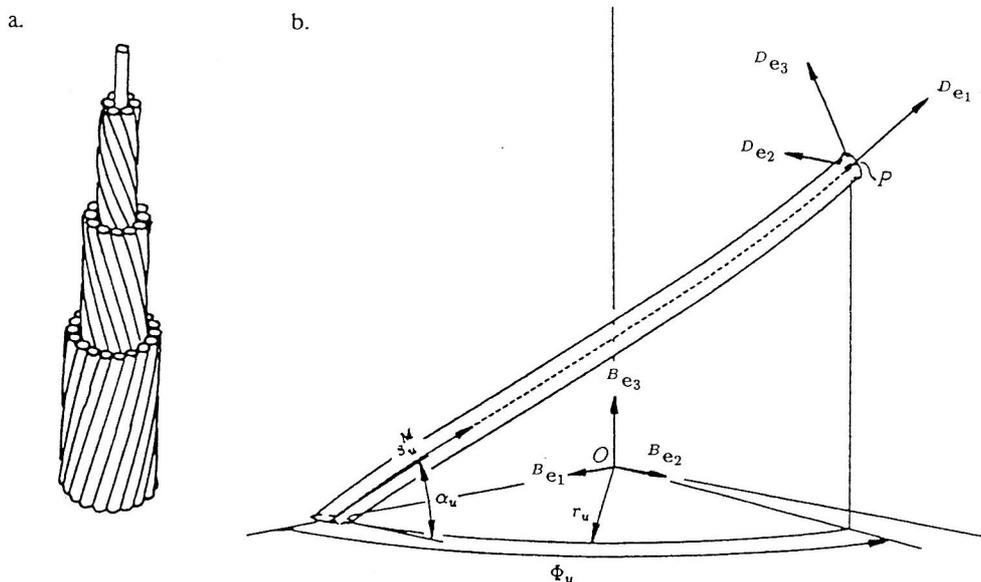


Bild 1a. Dreilagiges Spiralseil nach DIN 3054

Bild 1b. Bezugssystem und begleitendes Dreibein des Schraubendrahtes

Wir bezeichnen den Zustand des Seiles unmittelbar nach dem Wickeln als unverformt. Die durch das Wickeln entstehenden Eigenspannungen der Drähte vernachlässigen wir. Wir kennzeichnen im folgenden die das unverformte Spiralseil beschreibenden Größen mit dem Index  $u$ . Der verformte Zustand wird nicht indiziert. Bild 1b zeigt einen Schraubendraht des Seiles im unverformten Zustand. Das raumfeste Bezugssystem  $B e_1$  wird von den orthogonalen Einheitsvektoren  $B e_1$ ,  $B e_2$ ,  $B e_3$  in  $O$  aufgespannt;  $B e_3$  zeigt in Richtung der Seillängsachse. Wir betrachten Schnitte durch den Spiraldraht mit minimaler

Querschnittsfläche. Wir nehmen dabei an, daß diese Fläche immer kreisförmig sei. Die Mittelfaser  $M$  verbindet die Schwerpunkte  $P$  der Flächen. Die Mittelfaser des fehlerfrei gewickelten Schraubendrahtes beschreibt eine Helix. Die Lage der Punkte  $P$  auf der Helix wird durch deren Ortsvektoren  $\mathbf{r}_P(\Phi)$  im Bezugssystem (Bild 1b) beschrieben

$$\mathbf{r}_P(\Phi) = \mathbf{r}_P^{BB} \mathbf{e} \quad \mathbf{r}_P^B = ( r_u \cos \Phi_u, \quad r_u \sin \Phi_u, \quad r_u \Phi_u \tan \alpha_u ) \quad (1)$$

mit  $\Phi_u = \frac{\cos \alpha_u}{r_u} s_u^M$

- Darin sind  $\alpha_u$  der Schlagwinkel (Helixwinkel) des Schraubendrahtes,  
 $r_u$  der Helixradius (Radius des Kreises, der durch die Projektion der Helix auf die  ${}^B\mathbf{e}_1, {}^B\mathbf{e}_2$ -Ebene entsteht),  
 $s_u^M$  die Bogenlänge entlang der unverformten Mittelfaser  
 und  $\Phi_u$  der Umschlingungswinkel des Schraubendrahtes um den Kerndraht.

Für das begleitende Dreibein  ${}^D\mathbf{e}$  in  $P$  mit den orthogonalen Einheitsvektoren  ${}^D\mathbf{e}_1, {}^D\mathbf{e}_2, {}^D\mathbf{e}_3$  gilt

$${}^D\mathbf{e} = {}^D\mathbf{D}^{BB} \mathbf{e} \quad \text{mit} \quad {}^D\mathbf{D}^B = \begin{pmatrix} -\cos \alpha_u \sin \Phi_u & \cos \alpha_u \cos \Phi_u & \sin \alpha_u \\ -\cos \Phi_u & -\sin \Phi_u & 0 \\ \sin \alpha_u \sin \Phi_u & -\sin \alpha_u \cos \Phi_u & \cos \alpha_u \end{pmatrix} \quad (2)$$

Für die Krümmungen  $\kappa_u$  und  $\hat{\kappa}_u$  sowie die Windung  $\tau_u$  gelten (Bronstein und Semendjajew, 1987)

$$\hat{\kappa}_u = 0 \quad \kappa_u = \frac{1}{r_u} \cos^2 \alpha_u \quad \tau_u = \frac{1}{2r_u} \sin 2\alpha_u \quad (3)$$

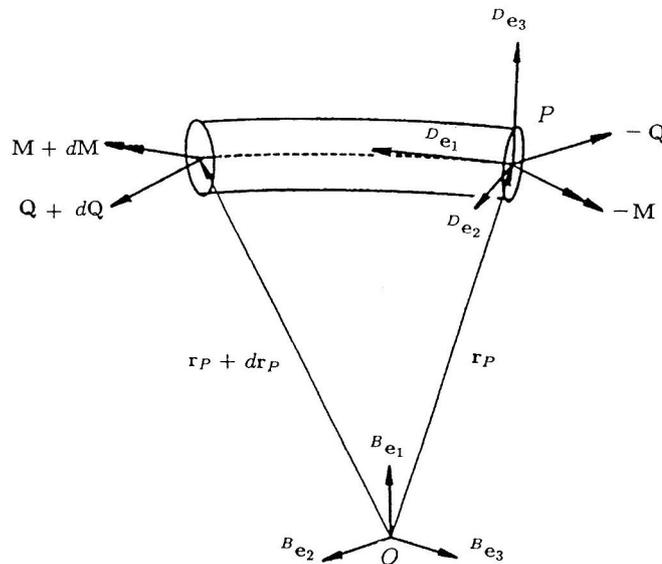


Bild 2. Schnittgrößen am gekrümmten Drahtelement

Bild 2 zeigt die Schnittgrößen am Drahtelement. Die Gleichgewichtsbedingungen an diesem Element lauten unter Berücksichtigung zusätzlicher äußerer verteilter Kräfte und Momente

$$\frac{d\mathbf{Q}}{ds_u^M} + \mathbf{p} = \mathbf{0} \quad (4)$$

$$\frac{d\mathbf{M}}{ds_u^M} - \frac{d\mathbf{r}_P}{ds_u^M} \times \mathbf{Q} + \mathbf{m} = \mathbf{0} \quad (5)$$

Dabei sind

$$\text{die Schnittkräfte } \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^{DD} \mathbf{e} \quad \text{mit } \mathbf{Q}^D = ( Q_1, Q_2, Q_3 ) \quad (6)$$

$$\text{die Schnittmomente } \mathbf{M} = \mathbf{M}^{DD} \mathbf{e} \quad \text{mit } \mathbf{M}^D = ( M_1, M_2, M_3 ) \quad (7)$$

$$\text{die verteilten äußeren Kräfte } \mathbf{p} = \mathbf{p}^{DD} \mathbf{e} \quad \text{mit } \mathbf{p}^D = ( p_1, p_2, p_3 ) \quad (8)$$

$$\text{und die verteilten äußeren Momente } \mathbf{m} = \mathbf{m}^{DD} \mathbf{e} \quad \text{mit } \mathbf{m}^D = ( m_1, m_2, m_3 ) \quad (9)$$

## 2 Verformungen

Die Formänderungen des Seiles setzen sich aus reversiblen elastischen Verformungen des Materials infolge der Lasten und aus bleibenden Formänderungen in den Kontaktstellen zwischen den Drähten infolge von plastischen Deformationen bei vorangegangenen Belastungen oder Verschleiß zusammen. Die bleibenden Verformungen in den Drahtkontakten kennt man ohnehin nicht genau, was zu Näherungen bei der Ermittlung der elastischen Verformungen an den Kontaktstellen (Abplattungen) und der Berechnung der Lage der Kontaktflächen berechtigt.

Im folgenden bestimmen wir die Zugkraft  $F$  und das Moment  $M$  im Seil infolge einer Längsdehnung  $\varepsilon$  und einer Verdrehung  $\beta_1^E$  der Seilenden gegeneinander. Durch das Tordieren wird der Umschlingungswinkel  $\Phi_i = \Phi_{u,i} + \beta_1^E$  der Schraubendrähte verändert. Durch das Verformen des Seiles verändern sich Helixradius  $r_{u,i}$  und Schlagwinkel  $\alpha_{u,i}$  der Schraubendrähte jeder Lage  $i$ , die um  $\varepsilon_i$  gedehnt werden. Wir nehmen dabei an, daß sich alle Drähte einer Lage gleich verhalten.

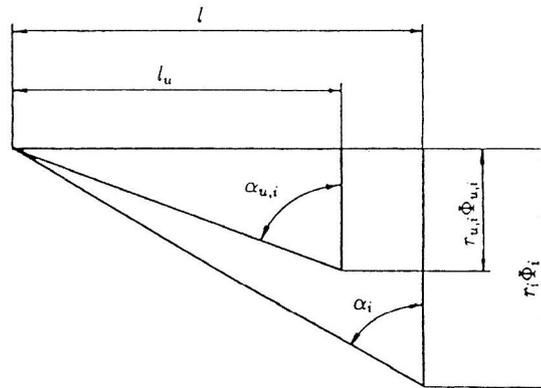


Bild 3. Abwicklung eines Schraubendrahtes der Länge  $l$  im unverformten und verformten Zustand

Bild 3 zeigt die Abwicklung eines Schraubendrahtes der Lage  $i$  im unverformten und verformten Zustand des Seiles. Einfache Dreiecksbeziehungen ergeben für die Dehnung  $\varepsilon_i$  der Drähte (Heinrich, 1942)

$$\varepsilon_i = \frac{(1 + \varepsilon) \sin \alpha_{u,i}}{\sin \alpha_i} - 1 \quad (10)$$

Hierbei ist  $\varepsilon$  die Dehnung des Seiles (Länge  $l$ ), die identisch mit der Dehnung  $\varepsilon_0$  des Kerndrahtes ist

$$\varepsilon = \varepsilon_0 = \frac{l - l_u}{l_u} \quad (11)$$

Für den Helixradius im verformten Zustand erhalten wir mit Bild 3

$$r_i = \frac{r_{u,i} (1 + \varepsilon)}{\cot \alpha_{u,i} + \frac{r_{u,i}}{l_u} \beta_1^E} \cot \alpha_i \quad (12)$$

Wir führen die bezogene, kleine Größe  $\bar{r}_i$  und die kleine Veränderung  $\Delta\alpha_i$  des Schlagwinkels  $\alpha_{u,i}$  ein:

$$\bar{r}_i = (r_{u,i} - r_i)/r_{u,i} \quad \Delta\alpha_i = \alpha_i - \alpha_{u,i} \quad (13)$$

Aus den Gleichungen (10) und (12) erhalten wir durch Linearisieren (Plagge, 1997)

$$\varepsilon_i = \varepsilon - \Delta\alpha_i \cot \alpha_{u,i} \quad (14)$$

$$\bar{r}_i = \frac{r_{u,i}}{l_u} \beta_1^E \tan \alpha_{u,i} - \varepsilon + \Delta\alpha_i (\tan \alpha_{u,i} + \cot \alpha_{u,i}) \quad (15)$$

Die Verformungen des Seiles führen zu Relativverschiebungen und Abplattungen der Drähte.

- Wenn sich der Radius  $R_i$  eines um  $\varepsilon_i$  gedehnten Schraubendrahtes mit der Querkontraktion  $\nu$  zu  $R_i = R_{u,i} (1 - \nu\varepsilon_i)$  berechnet, erhalten wir für die Durchdringung  $w_{i-1,i}^L$  von Lage  $i$  und  $i-1$

$$w_{i-1,i}^L = r_{i-1} + R_{u,i-1} (1 - \nu\varepsilon_{i-1}) + R_{u,i} (1 - \nu\varepsilon_i) - r_i \quad (16)$$

Diese Gleichung gilt auch für die Abplattung  $\hat{w}_{i-1,i}^L$ , wenn sich benachbarte Lagen berühren. Andernfalls ist

$$\hat{w}_{i-1,i}^L = 0 \quad (17)$$

Damit erhalten wir für die Abplattung  $\hat{w}_{i-1,i}^L$

$$\hat{w}_{i-1,i}^L = \begin{cases} w_{i-1,i}^L & \text{für } w_{i-1,i}^L > 0 \\ 0 & \text{für } w_{i-1,i}^L \leq 0 \end{cases} \quad (18)$$

- Bild 4 zeigt den Schnitt durch ein Spiralseil senkrecht zum Kerndraht. Mit hinreichender Genauigkeit kann man annehmen, daß die Schnittfläche des Schraubendrahtes eine Ellipse  $\mathcal{E}$  ist.

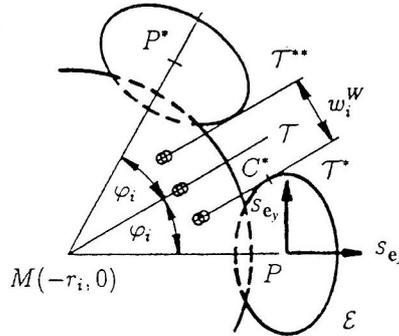


Bild 4. Sperrung der Schraubendrähte (Schnitt durch das Seil senkrecht zur Seilachse)

Die Sperrung  $w_i^W$  erhalten wir aus der Differenz aus dem Abstand der Winkelhalbierenden  $\mathcal{T}$  zwischen zwei Schraubendrähten sowie dem Ellipsenmittelpunkt  $P$  und dem Abstand des Ellipsenmittelpunktes  $P$  zur Tangente  $\mathcal{T}^*$  parallel zu  $\mathcal{T}$  an die Ellipse  $\mathcal{E}$

$$w_i^W = 2 \left( r_i \sin \varphi_i - R_i \frac{\cos \varphi_i}{\sin \alpha_i} \sqrt{1 + \tan^2 \varphi_i \sin^2 \alpha_i} \right) \quad (19)$$

mit  $\varphi_i = \pi/n_i$ ,  $n_i$ -Zahl der Drähte in der Lage  $i$ .

Im Gegensatz zu Jenner (1992) nehmen wir an, daß sich die Drähte einer Lage berühren können und sie so je nach Verformungszustand bei einer negativen Sperrung ein Gewölbe ausbilden.

Dieser Vorgang geht mit einer Abplattung der Schraubendrähte einher. Für die Abplattung  $\hat{w}_i^W$  senkrecht zur Mittelachse der Drähte gilt also:

$$\hat{w}_i^W = \begin{cases} 0 & \text{für } w_i^W \geq 0 \\ -w_i^W \sin \alpha_{u,i} & \text{für } w_i^W < 0 \end{cases} \quad (20)$$

### 3 Gleichgewichte an den Drähten des Seiles

Wir stellen die Gleichgewichts- und Verformungsbedingungen für die Lage  $i$  auf und setzen voraus:

1. Das Seil sei unendlich lang; Randeinflüsse spielen keine Rolle.
2. Alle Schraubendrähte einer Lage verhalten sich gleich.
3. Die Schraubendrähte haben sowohl im unverformten als auch im verformten Zustand die Form einer Helix.
4. Die Eigenspannungen aus der Seilherstellung seien vernachlässigbar.
5. Die Zugkraft  $Q_{1,i}$  in jedem Draht der Lage  $i$  folgt aus dem Hookeschen Gesetz:

$$Q_{1,i} = EA_i \varepsilon_i \quad (21)$$

6. Die inneren Momente  $M_{1,i}$ ,  $M_{2,i}$  und  $M_{3,i}$  lassen sich mittels der Gleichungen nach Clebsch und Basset (Love, 1952) aus der Differenz der Krümmungen sowie der Windungen im verformten und unverformten Zustand des Drahtes bestimmen

$$M_{1,i} = GI_{1,i} (\tau_i - \tau_{u,i}) \quad M_{2,i} = EI_{2,i} (\hat{\kappa}_i - \hat{\kappa}_{u,i}) \stackrel{!}{=} 0 \quad M_{3,i} = EI_{3,i} (\kappa_i - \kappa_{u,i}) \quad (22)$$

Mit der bezogenen Veränderung  $\bar{r}_i$  und der Schlagwinkeländerung  $\Delta\alpha_i$  (13) erhalten wir durch Linearisieren

$$M_{1,i} = \frac{EI_{1,i}}{4r_{u,i}(1+\nu)} (\bar{r}_i \sin 2\alpha_{u,i} + 2\Delta\alpha_i \cos 2\alpha_{u,i}) \quad (23)$$

$$M_{3,i} = \frac{EI_{3,i}}{r_{u,i}} (\bar{r}_i \cos^2 \alpha_{u,i} - \Delta\alpha_i \sin 2\alpha_{u,i}) \quad (24)$$

Für einen Draht mit kreisrundem Querschnitt gelten für die Flächenmomente zweiten Grades  $I_i$  und die Fläche  $A_i$

$$I_{2,i} = I_{3,i} = \frac{1}{2} I_{1,i} = \frac{\pi R_{u,i}^4}{4} \quad A_i = \pi R_{u,i}^2 \quad (25)$$

Die Gleichungssysteme (4) und (5) vereinfachen sich. Wegen der oben getroffenen Annahmen verschwinden die Ableitungen der Schnittkräfte und -momente nach  $ds_{u,i}^M$  und das Biegemoment  $M_{2,i}$  (Gleichung (22)), da im unverformten und auch im verformten Zustand  $\hat{\kappa}_i = 0$  ist (Gleichung (3)). Wir erhalten

$$\begin{aligned} -Q_{2,i} \kappa_{u,i} + p_{1,i} &= 0 \\ -Q_{3,i} \tau_{u,i} + Q_{1,i} \kappa_{u,i} + p_{2,i} &= 0 \\ Q_{2,i} \tau_{u,i} + p_{3,i} &= 0 \\ m_{1,i} &= 0 \\ -M_{3,i} \tau_{u,i} + M_{1,i} \kappa_{u,i} - Q_{3,i} + m_{2,i} &= 0 \\ Q_{2,i} + m_{3,i} &= 0 \end{aligned} \quad (26)$$

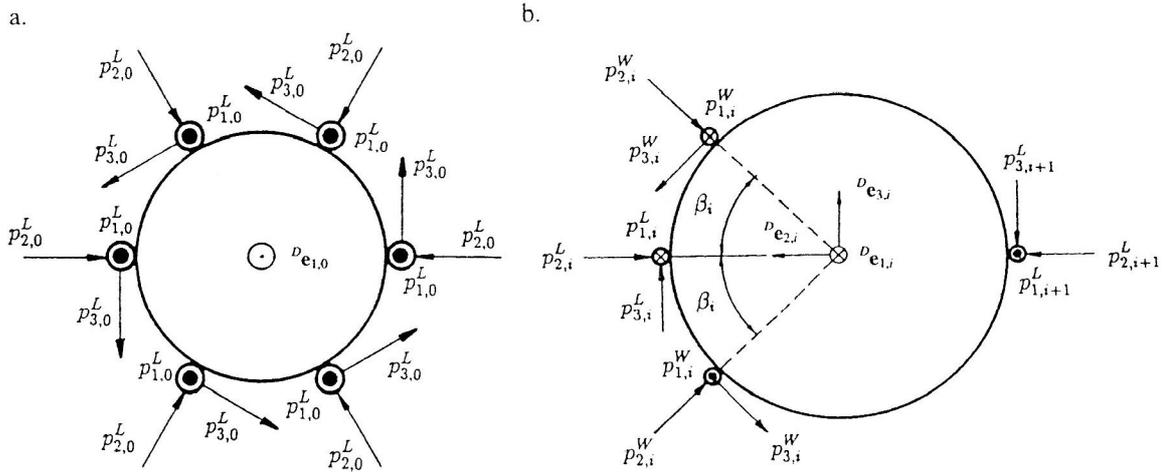


Bild 5a. Kräfte am Kerndraht  
Bild 5b. Kräfte an den Schraubendrähten

Bild 5 zeigt die Kräfte auf Kerndraht und Schraubendraht. Diese Kräfte entstehen durch den Kontakt mit den benachbarten Drähten.

- Nach DIN 3052 bis DIN 3054 besteht die erste Lage des Spiralseiles aus sechs Schraubendrähten. Es treten Kontaktkräfte  $\mathbf{p}_0^L$

$$\mathbf{p}_0^L = \mathbf{p}_{L,0}^D \mathbf{e} \quad \mathbf{p}_{L,0}^D = (p_{1,0}^L, p_{2,0}^L, p_{3,0}^L) \quad (27)$$

auf. Für diese wie auch für jede andere gleichmäßig auf den Umfang verteilte Zahl von Schraubendrähten erhält man aus dem Kräftegleichgewicht am Querschnitt (Bild 5a) und aus dem Gleichungssystem (26), daß keine Schnittkräfte und -momente auftreten, die auf den Kerndraht in normaler und binormaler Richtung wirken:

$$Q_{2,0} = Q_{3,0} = 0 \quad M_{2,0} = M_{3,0} = 0 \quad p_{1,0}^L = p_{3,0}^L$$

Zwischen Kerndraht und Schraubendrähten wirken ausschließlich verteilte Lasten  $p_{2,0}^L$  radial auf die Seillängsachse.

- Auf den Schraubendraht wirken je Längeneinheit die Kräfte  $\mathbf{p}_i^W$  von den benachbarten Schraubendrähten der Lage  $i$  sowie die Kräfte  $\mathbf{p}_i^L, \mathbf{p}_{i+1}^L$  aus dem Kontakt mit den benachbarten Lagen:

$$\mathbf{p}_i^W = \mathbf{p}_{W,i}^D \mathbf{e} \quad \mathbf{p}_{W,i}^D = (p_{1,i}^W, p_{2,i}^W, p_{3,i}^W) \quad (28)$$

$$\mathbf{p}_i^L = \mathbf{p}_{L,i}^D \mathbf{e} \quad \mathbf{p}_{L,i}^D = (p_{1,i}^L, p_{2,i}^L, p_{3,i}^L) \quad (29)$$

Die Drähte der Lage  $i$  berühren sich unter dem Winkel  $\beta_i$  (Huang, 1978):

$$\rho_i = \frac{r_{u,i}}{\cos \varphi_i} \frac{1}{\tan^2 \varphi_i \sin^2 \alpha_{u,i} + 1} \quad (30)$$

$$\cos \beta_i = \frac{r_{u,i}}{R_{u,i} \cos^2 \alpha_{u,i}} \left( 1 - \sqrt{\sin^2 \alpha_{u,i} \left[ 1 - \left( \frac{R_{u,i}}{r_{u,i}} \right)^2 \cos^2 \alpha_{u,i} \right] + \left( \frac{\rho_i}{r_{u,i}} \right)^2 \cos^2 \alpha_{u,i}} \right) \quad (31)$$

Das Aufstellen der Kräfte- und Momentengleichgewichte am Schraubendraht (Bild 5b) und Einsetzen dieser Beziehungen in das Gleichungssystem (26) ergibt

$$Q_{3,i} \tau_{u,i} - Q_{1,i} \kappa_{u,i} + p_{2,i}^L - p_{2,i+1}^L + 2 p_{2,i}^W \cos \beta_i = 0 \quad (32)$$

$$-M_{3,i} \tau_{u,i} + M_{1,i} \kappa_{u,i} - Q_{3,i} + 2 p_{1,i}^W R_{u,i} \sin \beta_i = 0 \quad (33)$$

$$Q_{2,i} = 0 \quad p_{1,i}^L = p_{3,i}^L = p_{3,i}^W = 0 \quad \forall i \quad (34)$$

### 3.1 Radiale Kontaktkräfte

Die Berührung der Drähte führt zu Normalkräften, die die Kontaktstelle lokal verformen. Wir könnten die Kontaktstelle mit den Methoden der finiten Elemente diskretisieren und so die Normalkräfte berechnen. Dieser Aufwand erscheint uns aber ungerechtfertigt hoch. Wir verwenden daher die Beziehungen von Roark (1954) zur Ermittlung der Kontaktsteifigkeit. Wir unterscheiden zwei Typen von Kontakt (Plagge, 1997):

- **Linienkontakt.**

Dieser Typ liegt bei dem Kontakt von Drähten einer Lage und von Drähten zweier parallel gewickelter Lagen vor. Wir verwenden die Beziehungen von Roark für die Abplattung  $w$  zweier koaxialer Zylinder (Radien  $R_1, R_2$ ) gleichen Werkstoffs (Elastizitätsmodul  $E$ , Querkontraktionszahl  $\nu$ ) unter einer radialen Kontaktkraft  $p_K$ , deren Kreisquerschnitt ansonsten erhalten bleibt, zur Beschreibung der Kontakte innerhalb einer Lage und der Kontakte zwischen parallel gewickelten Lagen:

$$w = \frac{2(1-\nu^2)}{E\pi} p_K \left( \frac{2}{3} + \ln \frac{R_1}{b} + \ln \frac{R_2}{b} \right) \quad (35)$$

$$\text{mit } b = 0.538 \sqrt{\frac{p_K}{E} \frac{2R_1 R_2}{R_1 + R_2}} \quad (36)$$

- Beim Kontakt innerhalb einer Lage  $i$  sind die Radien  $R_{u,i}$  der Schraubendrähte gleich groß. Als Annäherung der Drähte verwenden wir die Abplattung  $\hat{w}_i^W$  (Gleichungen (19) und (20)) senkrecht zur Tangentialrichtung und erhalten die verteilte radiale Kontaktkraft  $p_{2,i}^W$ .
- Beim Kontakt zwischen den Drähten der Lagen  $i$  und  $i-1$  mit gleichem Schlagwinkel  $\alpha_{u,i}$  sowie den Drahradien  $R_{u,i}$  und  $R_{u,i-1}$  ergeben sich die radialen Kontaktkräfte  $p_{2,i}^L$  aus der Annäherung der Kreismittelpunkte  $\hat{w}_{i-1,i}^L$  (Gleichungen (16) und (18)).

- **Punktkontakt.**

Dieser Typ tritt zwischen Drähten von Lagen mit unterschiedlichen Schlagwinkeln auf. Die Kontaktstelle bei der Berührung zweier Körper mit den Hauptkrümmungsradien  $R_1, R'_1, R_2$  und  $R'_2$  in der Nähe der Kontaktstelle ist ellipsenförmig. Zur Berechnung eines solchen Kontaktes greifen wir wiederum auf die in der Literatur angegebenen Beziehungen zurück. Roark gibt für die Abplattung  $w$  bei einer Kontaktkraft  $K$  an:

$$w = \lambda \sqrt[3]{\frac{K^2}{\gamma^2 \delta}} \quad (37)$$

$$\text{mit } \delta = \frac{4}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R'_1} + \frac{1}{R'_2}} \quad \gamma = \frac{8}{3} \frac{E_1 E_2}{E_1 (1-\nu_1^2) + E_2 (1-\nu_2^2)} \quad (38)$$

Hierbei sind  $\nu_1$  und  $\nu_2$  die Querkontraktionszahlen und  $E_1$  sowie  $E_2$  die Elastizitätsmoduln des ersten bzw. zweiten Körpers. Der Vorfaktor  $\lambda$  ergibt sich nach Roark aus der Form der Ellipse, die bei der Pressung entsteht.

- Beim Kontakt zwischen den Drähten der Lagen  $i$  und  $i-1$  mit unterschiedlichem Schlagwinkel  $\alpha_{u,i}$  haben wir die Drahradien  $R_{u,i}$  und  $R_{u,i-1}$  sowie die Inversen  $1/\kappa_{u,i-1}^K$  und  $1/\kappa_{u,i}^K$  der Kontaktlinie zwischen den Drähten als Hauptkrümmungsradien. Aus der Annäherung der Kreismittelpunkte  $\hat{w}_{i-1,i}^L$  (16),(18) erhalten wir die Kontaktkraft  $K$ . Durch „Verschmieren“ von  $K$  zwischen zwei Kontaktstellen erhalten wir  $p_{2,i}^L$  (Plagge, 1997).

### 3.2 Tangentiale Kontaktkräfte

Die Tangentialkräfte in der Kontaktfläche der Schraubendrähte verursachen Schubverformungen. Diese Verformungen sind sehr schwierig bzw. gar nicht quantifizierbar, da sie u.a. von der Größe der Kontaktfläche abhängen, die wiederum von der Fertigungsgenauigkeit bzw. entscheidender noch von dem Verschleiß der Drähte bestimmt wird.

Die sich in der Kontaktfläche berührenden Drähte können aneinander haften oder aufeinander abgleiten. Diese Möglichkeiten beschreiben wir qualitativ mit einem Jenkin-Element (Bild 6). Es besteht aus einer

Reihenschaltung einer Feder mit einem Element mit Coulombscher Reibung. Die Feder erfährt die Nachgiebigkeit infolge der Schubverformungen. Mit Hilfe der *inneren Variablen*  $\zeta$  erfassen wir die Reibvorgänge zwischen den Drähten.

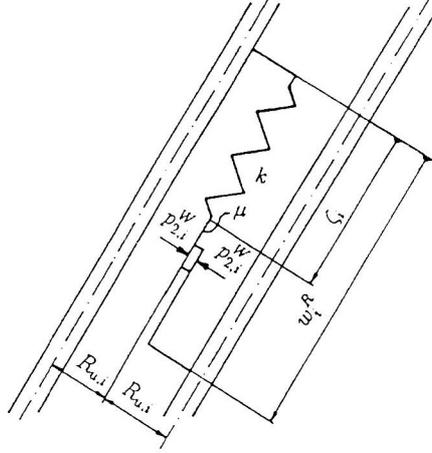


Bild 6. Jenkin-Element für Haft- und Gleiten zwischen den Schraubendrähten

Die Verlängerung  $w_i^R$  des Jenkin-Elementes folgt aus der (kleinen) Veränderung  $\Delta\alpha_i$  des Schlagwinkels  $\alpha_{u,i}$ :

$$w_i^R = 2 R_{u,i} \Delta\alpha_i \quad (39)$$

Die Tangentialkraft  $p_{1,i}^W$  in der Kontaktfläche zwischen den Drähten hängt von der Verlängerung  $\zeta_i$  der Feder ab. Es besteht der Zusammenhang

$$p_{1,i}^W = k \zeta_i \quad k\text{-Steifigkeit der Feder} \quad (40)$$

Beim Haften folgt die innere Variable  $\zeta_i$  der Verlängerung  $w_i^R$  des Jenkin-Elementes, beim Gleiten der Entwicklung der radialen Kontaktkraft  $p_{2,i}^W$  ( $\mu$ -Reibungskoeffizient). Die Kraft in der Feder ist durch die Verlängerung des Jenkin-Elementes daher nicht eindeutig festgelegt, sondern hängt zusätzlich von der Deformationsgeschichte ab. Es liegt ein System mit *Gedächtnis* vor (Kolsch (1993), Ottl (1981)). In der folgenden Evolutionsgleichung für  $\zeta_i$  berücksichtigen wir die Fallunterscheidung zwischen Haften und Gleiten:

$$\dot{\zeta}_i = 2 R_{u,i} \Delta\dot{\alpha}_i f_H + \frac{\mu}{k} p_{2,i}^W \operatorname{sgn}(\Delta\dot{\alpha}_i) (1 - f_H) \quad (41)$$

$$f_H := \frac{1}{2} \left\{ 1 - \operatorname{sgn} \left( p_{1,i}^{W^2} - [\mu p_{2,i}^W]^2 \right) - \operatorname{sgn} \left( \Delta\dot{\alpha}_i p_{1,i}^W \right) \left[ 1 + \operatorname{sgn} \left( p_{1,i}^{W^2} - [\mu p_{2,i}^W]^2 \right) \right] \right\} \quad (42)$$

#### 4 Bestimmung der Ausgangsgrößen

Die Zugkraft  $F$  setzt sich aus der im Kerndraht wirkenden Längskraft und den auf die Schraubendrähte wirkenden, verbliebenen Binormal- und Tangentialkräften der drei Lagen zusammen.

$$F = {}^B \mathbf{e}_3 \left( EA_0 \varepsilon {}^B \mathbf{e}_3 + \sum_{j=1}^3 n_j \mathbf{Q}_j^{DD} \mathbf{e}_j \right) \quad (43)$$

$n_j$ -Anzahl der Schraubendrähte in der Lage  $j$ .

Das Torsionsmoment  $M$  schließlich ergibt sich aus dem auf den Kerndraht wirkenden Torsionsmoment, den Biege- und Torsionsmomenten in den Schraubendrähten sowie den Momenten, die von den Schnittkräften am Helixradius erzeugt werden.

$$M = {}^B \mathbf{e}_3 \left[ \frac{EI_{1,0}}{2(1+\nu)} \frac{\beta_1^E}{l_0} {}^B \mathbf{e}_3 + \sum_{j=1}^3 n_j \left( \mathbf{M}_j^{DD} \mathbf{e}_j - r_j {}^D \mathbf{e}_{2,j} \times \mathbf{Q}_j^{DD} \mathbf{e}_j \right) \right] \quad (44)$$

Hierbei enthält  ${}^D\mathbf{e}_j$  die Einheitsvektoren des begleitenden Dreibeins der Lage  $j$ , und  ${}^B\mathbf{e}_3$  ist der Einheitsvektor, der in Richtung des Kerndrahtes zeigt.

## 5 Messung und Identifikation

Zur Validierung des aufgestellten Modells wurden Messungen durchgeführt. Wir brachten dabei zunächst Dehnungen  $\varepsilon$  auf das Seil auf und tordierten es dann um  $\beta_1^E(t)$ . Neben diesen Verformungsgrößen maßen wir gleichzeitig die aufzubringenden Zugkräfte  $F$  und Torsionsmomente  $M$ . Diese Messungen führten wir für unterschiedliche Dehnungen  $\varepsilon$  durch.

Es verblieb die Aufgabe, die Größe der Parameter für die Simulation zu ermitteln. Die Anzahl der Lagen und die Anzahl der Drähte pro Lage lassen sich leicht feststellen. Durch Messen oder aus Herstellerangaben kann man die Drahtradien und Schlagwinkel ermitteln. Elastizitätsmodul und Querkontraktion der Drähte sind Tabellenbüchern zu entnehmen. Die Kontaktsteifigkeit zwischen den Drähten verschiedener Lagen und den Drähten einer Lage ermitteln wir nach Roark. Eine Variation der Kontaktsteifigkeit innerhalb der nach Roark ermittelten Größenordnung hat aber gezeigt, daß sie nicht von entscheidender Bedeutung für das Verhalten der Spiralseile unter Zug und Torsion ist, da die Kontaktsteifigkeit die Dehn- und Biegesteifigkeit der Schraubendrähte weit übertrifft. Die Parameter Reibwert  $\mu$  und Ersatzfedersteifigkeit  $k$  ermitteln wir durch eine Identifikation, d.h., wir bestimmen mit einem hier nicht beschriebenen Optimierungsalgorithmus die Parameter so, daß Messungen und Simulationsergebnisse möglichst gut übereinstimmen.

Die Parameter für die Identifikation teilen wir in zwei Gruppen:

$$\mathbf{p}^* = (\mu, k)^T \quad \mathbf{p}^{**} = (R_{u,0}, R_{u,1}, R_{u,2}, R_{u,3}, \alpha_{u,1}, \alpha_{u,2}, \alpha_{u,3})^T$$

Die in  $\mathbf{p}^{**}$  enthaltenen Parameter wurden ebenfalls identifiziert, um Fehler beim Ausmessen der Drahtradien  $R_{u,i}$  und Schlagwinkel  $\alpha_{u,i}$  zu eliminieren.

Die Identifikation der Parameter erfolgte aus den Ergebnissen eines Versuchs, bei dem zunächst eine Dehnung von  $\varepsilon = 2.2 \cdot 10^{-3}$  und anschließend Verdrehungen  $\beta_1^E(t)$  aufgebracht wurden (vgl. Bild 7). Die gemessenen Verformungsgrößen sind die Eingangsgrößen für die Simulation. Der Optimierungsalgorithmus verändert die Parameter so, daß die Standardabweichung von gemessenen und berechneten Zugkräften und Torsionsmomenten minimal wird. Mit den so ermittelten Parametern (Tabelle 1) wurden anschließend Kontrollrechnungen für die Messungen mit Dehnungen  $\varepsilon = 1.4 \cdot 10^{-3}$  und  $\varepsilon = 3.0 \cdot 10^{-3}$  durchgeführt, Bild 8. Der vertikale Ast in den Last-Verformungskurven gehört zu der anfänglichen Längsverformung des Seiles. Man erkennt eine gute Übereinstimmung von Messung und Simulation. Die Knicke in den Last-Verformungskurven treten auf, wenn die Drähte der Lagen des Seiles voneinander abheben bzw. aufeinander aufsetzen; sie bilden Gewölbe. Die Knicke werden in den Verläufen von Zugkraft und Torsionsmoment sowohl hinsichtlich der Lage der Knickpunkte und der Neigungsänderung als auch hinsichtlich deren Abhängigkeit von der Längsdehnung  $\varepsilon$  gut wiedergegeben. Die unterschiedlichen Steifigkeiten entstehen dadurch, daß bei  $\beta_1^E > 0$  die rechts gewickelte, äußere Lage und  $\beta_1^E < 0$  die links gewickelte erste Lage ein Gewölbe bilden. Der kleine Radius des Gewölbes der ersten Lage bewirkt die kleine, der große Radius des Gewölbes der Außenlage die große Zug- und Torsionssteifigkeit des Seiles. Die Hysterese spielt, wie bereits bei Feyrer und Schiffner (1986) gezeigt, bei dieser Belastungsart für Spiralseile eine untergeordnete Rolle.

| Seil 4 DIN 3054 - bk 1570 z                |         |   |                         |
|--|---------|---|-------------------------|
| Seillänge $l_u$ :                          | 1175mm  | Schlagwinkel (1. Lage) $\alpha_{u,1}$ : | 110.0                   |
| Kerndrahtradius $R_{u,0}$ :                | 0.305mm | Schlagwinkel (2. Lage) $\alpha_{u,2}$ : | 110.0                   |
| Schraubendrahtradius (1. Lage) $R_{u,1}$ : | 0.278mm | Schlagwinkel (3. Lage) $\alpha_{u,3}$ : | 68.1                    |
| Schraubendrahtradius (2. Lage) $R_{u,2}$ : | 0.275mm | Reibwert $\mu$ :                        | 0.16                    |
| Schraubendrahtradius (3. Lage) $R_{u,3}$ : | 0.271mm | Steifigkeit $k$ :                       | 2466.2N/mm <sup>2</sup> |

Tabelle 1. Identifizierte Parameter für ein dreilagiges Seil unter Zug und Torsion

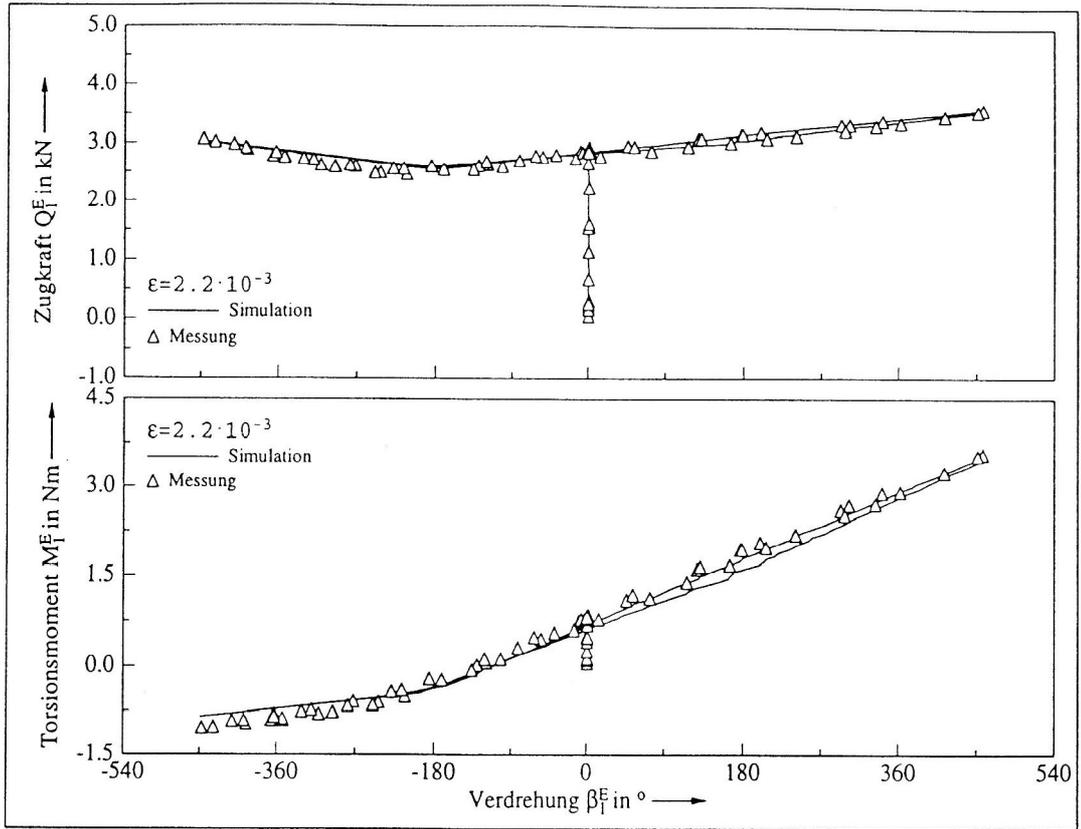


Bild 7. Messungen und Simulationsergebnisse

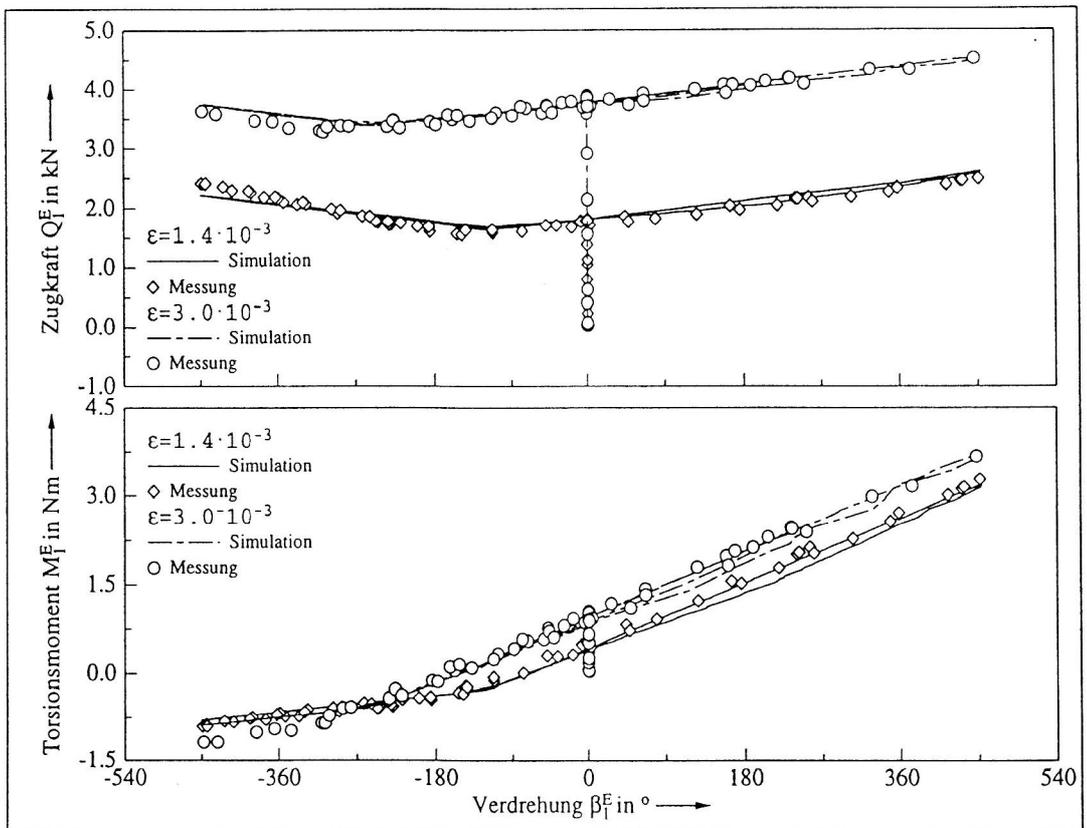


Bild 8. Messungen und Kontrollrechnungen

## Literatur

1. Bronstein, I. N. und K. A. Semendjajew: Taschenbuch der Mathematik (23. Aufl.). Thun und Frankfurt (Main): Verlag Harri Deutsch, (1987)
2. Feyrer, K. und G. Schiffner: Drehmoment und Drehsteifigkeit von Drahtseilen. Teil 1, Draht 37(1), S. 20-22, Teil 2, Draht 37(1), (1986), S. 62-66
3. Heinrich, G.: Über die Verdrehung der zugbelasteten Litzen. Der Stahlbau (Beilage zur Zeitschrift Die Bautechnik) 15(Heft 12/13), (1942), S. 41-45
4. Huang, N. C.: Finite extension of an elastic strand with a central core. J. Appl. Mech. 45, (1978), S. 852-858
5. Kolsch, H.: Schwingungsdämpfung durch statische Hysterese. Fortschrittberichte VDI Reihe 11 Nr. 190. Düsseldorf: VDI-Verlag, (1993)
6. Jenner, T.: Ein Beitrag zur Geometrie der Drahtseile. Dissertation, Universität Stuttgart, (1992)
7. Love, A. E. H.: A treatise on the mathematical theory of elasticity, insbesondere Kap. 18. (18. Aufl.), Cambridge: University Press, (1952)
8. Ottl, D.: Schwingungen mechanischer Systeme mit Strukturdämpfung. VDI-Forschungsheft Nr. 603. Düsseldorf: VDI-Verlag, (1981)
9. Plagge, F.: Nichtlineares, inelastisches Verhalten von Spiralseilen. Braunschweiger Schriften zur Mechanik No.31 - 1997,(1997)
10. Roark, R. J.: Formulas for stress and strain. New York etc.: McGraw-Hill, (1954)

## Danksagung

Die Autoren danken der Deutschen Forschungsgemeinschaft für die gewährte Unterstützung.

---

*Anschrift:* Dr.-Ing. F. Plagge, apl. Prof. Dr.-Ing. D. Ottl, Institut für Technische Mechanik, TU Braunschweig, Postfach 3329, D-38023 Braunschweig