

Möglichkeiten zur Analyse von Piezokeramiken mit der Finiten-Prismen-Methode (FPM) und mit ANSYS

G. Kolarov, B. Peev

Die Anwendung von Piezokeramiken in verschiedenen Gebieten der Technik nimmt ständig zu. Solche Piezoelemente werden hauptsächlich als Sensoren und als Aktuatoren eingesetzt. Dadurch erhöht sich das Interesse an der Analyse von solchen Elementen. Diese Arbeit präsentiert erste Erfahrungen der Autoren auf diesem Gebiet. Es werden zwei Möglichkeiten zur Untersuchung von piezoelastischen Elementen dargestellt.

1 Einführung

Die erste Möglichkeit zur Untersuchung von piezoelastischen Elementen stellt die Finite-Prismen-Methode (FPM) (Zienkiewicz und Taylor, 1989; Cheung, 1976; Kolarov und Michajlov, 1990) dar. Die FPM ist eine semianalytische Methode zur Lösung von 3D Problemen. Der analytische Teil der Lösung besteht aus trigonometrischen Reihen, der numerische Teil aus finiten Elementen. Sie wird für Körper mit prismatischer Geometrie verwendet, d.h. die Geometrie und die Materialeigenschaften entlang der einen Achse sind konstant (Bild 1). Solche semianalytischen Methoden werden bis jetzt hauptsächlich zur Lösung von linear elastischen Aufgaben eingesetzt. Die Transformation der Grundgleichungen beruht auf der Trennung der Variablen, wobei der systematische Weg auf die Methode der finiten Integraltransformation (FIT) führt (Kolarov und Michajlov, 1990). Eine solche Transformation für isotrope piezoelastische 3D-Probleme wird nachfolgend durchgeführt. Dabei wird sich herausstellen, daß eine solche Transformation nur für spezielle Kombinationen von analytischen Funktionen und zwar nur bei vorpolarisierten Piezokeramiken möglich ist.

Die andere Möglichkeit ist durch die Anwendung des Programmsystems ANSYS (1992) zur Berechnung mit der Finite-Elemente-Methode (FEM) gegeben. Das ist ein universelles Programmsystem, das auch ebene (PLANE13) und räumliche (SOLID5 und SOLID98) finite Elemente für piezoelastische Probleme enthält. Das Hauptinteresse liegt in den letzten Jahren auf dem Gebiet der dünnwandigen Mehrschichtverbunde, bei denen einige Schichten aus piezoelastischem Material gefertigt sind. Die Modellierung von solchen Strukturen führt auf geschichtete Schalenelemente mit Piezoschichten, allerdings sind solche Elemente in ANSYS noch nicht enthalten. Es sind lediglich die rein mechanischen, geschichteten Schalen- und Volumenelemente (SOLID46, SHELL91 und SHELL99) vorhanden, die nur elastisches geschichtetes Materialverhalten beschreiben.

Das Hauptziel dieser Arbeit ist es, die beiden Möglichkeiten zur Analyse von Piezokeramiken zu untersuchen, deren Vor- und Nachteile festzustellen, und Hinweise für die künftige Arbeit anzugeben. Ein Nebenziel ist dabei, die FPM für Piezokeramiken zu erweitern und zu untersuchen, für welche Situationen eine finite Integraltransformation durchführbar ist. Die andere Möglichkeit besteht in der Anwendung der Finite-Elemente-Methode (FEM), z.B. durch Anwendung des Programmsystems ANSYS (1992).

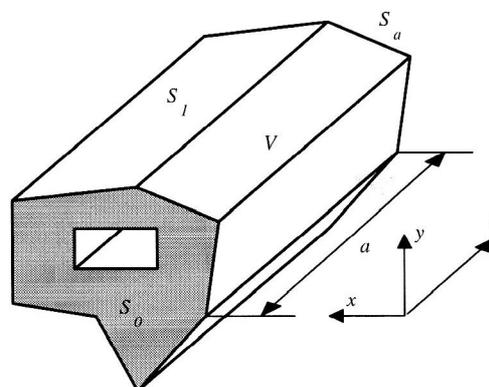


Bild 1. Prismatischer Körper

2 Problemstellung

In diesem Abschnitt werden die Grundgrößen und die grundsätzlichen Zusammenhänge aufgeführt, die das piezoeleastische Verhalten beschreiben. Die Ausführungen gelten vorerst unabhängig von der Geometrie der untersuchten Struktur. Alle Größen werden in Vektor-Matrix-Form angegeben, wie dies bei der Anwendung der FEM üblich ist.

Die gesuchten Größen innerhalb des Körpers sind

a) <i>Mechanische Größen:</i>		Dimension
Verschiebungen:	$\mathbf{u} = \{u, v, w\}^T$	[m]
Spannungen:	$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\}^T$	[N/m ²]
Verformungen:	$\mathbf{s} = \{s_x, s_y, s_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}\}^T$	[-]
b) <i>Elektrische Größen:</i>		
elektrisches Potential:	$\Psi = \{\Psi(x,y,z)\}$	[V]
Intensität des el.Feldes:	$\mathbf{E} = \{E_x, E_y, E_z\}^T$	[V/m]
elektrische Erregung:	$\mathbf{D} = \{D_x, D_y, D_z\}^T$	[C/m ²]

Bekannt sind die Lasten im Körper:

Volumenkräfte:	$\mathbf{R} = \{R_x, R_y, R_z\}^T$	[N/m ³]
Volumendichte der freien Ladungen:	$\rho_{fr} = \{\rho_{fr}(x,y,z)\}$	[C/m ³]

Es gelten folgende Zusammenhänge, die in Matrixform dargestellt sind:

a) *Mechanische Gleichungen:*

$$\text{Gleichgewichtsbedingungen:} \quad \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} = -\mathbf{R} \quad (1)$$

$$\text{Materialgesetz:} \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \mathbf{s} - \mathbf{e} \mathbf{E} \quad (2)$$

$$\text{Kinematische Bedingungen:} \quad \mathbf{s} = \mathbf{B} \mathbf{u} \quad (3)$$

b) *Elektrische Gleichungen* (Gleichungen der erzwungenen Elektrostatik):

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho_{fr} \quad (4)$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{e}^T \mathbf{s} + \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{E} \quad (5)$$

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \Psi \quad (6)$$

wobei die Differentialoperatoren und die Materialeigenschaften bekannt sind:

Differentialmatrix: $\mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$

Divergenzoperator: $\text{div} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}$ Gradient: $\text{grad} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}^T$

Matrix der Materialeigenschaften unter der Annahme eines mechanisch homogenen und isotropen Werkstoffs:

$$\mathbf{C} = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1-\mu & \mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & 1-\mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & \mu & 1-\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2} \end{bmatrix}$$

Matrix mit Dielektrizitätskonstanten, die das rein elektrische Verhalten des Körpers beschreiben, zuerst allgemein und dann für isotropen Werkstoff mit $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ F/m - Dielektrizitätskonstante des Vakuums, ϵ_r - relative Dielektrizitätskonstante des Werkstoffs:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{bmatrix} = \epsilon_0 \epsilon_r \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Piezoelektrische Matrix mit insgesamt 18 Piezokonstanten, die den allgemeinen Fall einer Piezokeramik darstellen:

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \\ e_{41} & e_{42} & e_{43} \\ e_{51} & e_{52} & e_{53} \\ e_{61} & e_{62} & e_{63} \end{bmatrix}$$

Später wird sich herausstellen, daß mit allen $e_{ij} \neq 0$ keine FIT möglich ist und daß nur spezielle Keramiken mit der FPM untersucht werden können.

Die elektro-mechanische Kopplung von Piezoproblemen entsteht durch die piezoelektrische Matrix \mathbf{e} , die einerseits aus der Intensität des elektrischen Feldes \mathbf{E} mechanische Spannungen $\boldsymbol{\sigma}$ hervorruft (Gleichung (2)), und andererseits aus mechanischen Verformungen \mathbf{s} elektrische Erregungen \mathbf{D} verursacht (Gleichung (5)).

3 Formulierung des Problems in Differentialgleichungsform

Die kinematischen Bedingungen (3) werden in das Materialgesetz (2) und analog wird Gleichung (6) in Gleichung (5) eingesetzt:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{c} \mathbf{B} \mathbf{u} - \mathbf{e} \mathbf{E} \quad (7)$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{e}^T \mathbf{s} - \boldsymbol{\varepsilon} \text{grad } \Psi \quad (8)$$

Die erhaltenen Gleichungen (7) und (8) werden entsprechend in die Gleichgewichtsbedingungen (1) und in Gleichung (4) eingesetzt:

$$\mathbf{B}^T \mathbf{c} \mathbf{B} \mathbf{u} - \mathbf{B}^T \mathbf{e} \mathbf{E} = -\mathbf{R} \quad (9)$$

$$\text{div } \mathbf{e}^T \mathbf{s} - \text{div } \boldsymbol{\varepsilon} \text{grad } \Psi = \rho_{\text{fr}} \quad (10)$$

Im folgenden wird angenommen, daß keine freie Ladungen auf der Oberfläche vorhanden sind, was meistens der praktisch relevante Fall ist

$$\rho_{\text{fr}} = 0$$

Unter dieser Annahme und angesichts der Gleichungen (3) und (6) werden die Gleichungen (9) und (10) zu

$$\mathbf{B}^T \mathbf{c} \mathbf{B} \mathbf{u} + \mathbf{B}^T \mathbf{e} \text{grad } \Psi = -\mathbf{R} \quad (11)$$

$$\text{div } \mathbf{e}^T \mathbf{B} \mathbf{u} - \text{div } \boldsymbol{\varepsilon} \text{grad } \Psi = 0 \quad (12)$$

Diese zwei Gleichungen beschreiben den allgemeinen Zustand in einem beliebigen Punkt der Piezokeramik. Mit der Einführung von einem verallgemeinerten Vektor der Verschiebungen

$$\mathbf{u}^* = \{u, v, w, \Psi\}^T$$

und einem verallgemeinerten Vektor der Volumenkräfte

$$\mathbf{R}^* = \{R_x, R_y, R_z, 0\}^T$$

lassen sich diese Gleichungen zu einer einzigen Matrixgleichung zusammenfassen:

$$\mathbf{L} \mathbf{u}^* = -\mathbf{R}^* \quad (13)$$

Dabei ist \mathbf{L} eine 4x4 Matrix, die aus folgenden Submatrizen besteht:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_m & \mathbf{L}_r \\ \mathbf{L}_g & \mathbf{L}_e \end{bmatrix}$$

$\mathbf{L}_r = \mathbf{B}^T \mathbf{e} \text{grad}$ ist eine 3x1 Matrix, $\mathbf{L}_g = \text{div } \mathbf{e}^T \mathbf{B}$ ist eine 1x3 Matrix, $\mathbf{L}_m = \mathbf{B}^T \mathbf{c} \mathbf{B}$ - eine 3x3 Matrix und \mathbf{L}_e - eine 1x1 Matrix. Die ersten beiden Matrizen enthalten folgende Terme:

$$\mathbf{L}_r = \begin{bmatrix} e_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + e_{42} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + e_{63} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + (e_{41} + e_{12}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + (e_{61} + e_{13}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} + (e_{62} + e_{43}) \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \\ e_{41} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + e_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + e_{53} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + (e_{21} + e_{42}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + (e_{51} + e_{43}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} + (e_{52} + e_{23}) \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \\ e_{61} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + e_{52} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + e_{33} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + (e_{51} + e_{62}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + (e_{31} + e_{63}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} + (e_{32} + e_{53}) \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}_g = \begin{bmatrix} e_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + e_{42} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + e_{63} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + (e_{41} + e_{12}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + (e_{61} + e_{13}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} + (e_{62} + e_{43}) \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \\ e_{41} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + e_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + e_{53} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + (e_{21} + e_{42}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + (e_{51} + e_{43}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} + (e_{52} + e_{23}) \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \\ e_{61} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + e_{52} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + e_{33} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + (e_{51} + e_{62}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + (e_{31} + e_{63}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} + (e_{32} + e_{53}) \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \end{bmatrix}^T$$

Es ist also $\mathbf{L}_g = \mathbf{L}_r^T$. Der Differentialoperator \mathbf{L}_m , dargestellt als Matrix, ist

$$\mathbf{L}_m = \begin{bmatrix} A \frac{\partial^2}{\partial x^2} + G \frac{\partial^2}{\partial y^2} + G \frac{\partial^2}{\partial z^2} & B \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & B \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \\ B \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & G \frac{\partial^2}{\partial x^2} + A \frac{\partial^2}{\partial y^2} + G \frac{\partial^2}{\partial z^2} & B \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \\ B \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} & B \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} & G \frac{\partial^2}{\partial x^2} + G \frac{\partial^2}{\partial y^2} + A \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{bmatrix}$$

dabei sind A , B und G Materialparameter

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad A = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad B_1 = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad B = B_1 + G$$

und schließlich ist

$$\mathbf{L}_e = -\varepsilon_0 \varepsilon_r \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right]$$

Auf eine explizite Behandlung der Randbedingungen wird hier verzichtet, da sie ähnlich zu den Differentialgleichungen bearbeitet werden, mit dem Unterschied, daß die partiellen Ableitungen durch die entsprechenden Richtungskosinusse zu ersetzen sind.

4 Bedingungen zur Durchführung der Finiten Integraltransformation

Die Matrizengleichung (13) soll unter den genannten Randbedingungen gelöst werden. Die Lösung wird durch Trennung der Variablen gesucht. Hierfür wird folgender Ansatz gemacht:

$$\begin{aligned}
u(x, y, z) &= \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{u}_i(x, y) \varphi_{xi}(z) & v(x, y, z) &= \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{v}_i(x, y) \varphi_{yi}(z) \\
w(x, y, z) &= \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{w}_i(x, y) \varphi_{zi}(z) & \psi(x, y, z) &= \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\psi}_i(x, y) \varphi_{ri}(z)
\end{aligned} \tag{14}$$

Die Volumenkräfte werden analog zu den Verschiebungen als Reihenentwicklung dargestellt:

$$\begin{aligned}
R_x(x, y, z) &= \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{R}_{xi}(x, y) \varphi_{xi}(z) & R_y(x, y, z) &= \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{R}_{yi}(x, y) \varphi_{yi}(z) \\
R_z(x, y, z) &= \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{R}_{zi}(x, y) \varphi_{zi}(z)
\end{aligned} \tag{15}$$

Angegeben wird nur der i -te Fall, wobei der Index i der Bequemlichkeit halber weggelassen wird. Durch Einsetzen des i -ten Terms in die Matrixgleichung (13) und Division durch φ_x , φ_y , φ_z und durch φ_r entstehen jeweils folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}
A \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + G \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} + G \tilde{u} \frac{\varphi_x''}{\varphi_x} + B \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x \partial y} \frac{\varphi_y}{\varphi_x} + B \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} \frac{\varphi_z'}{\varphi_x} + e_{11} \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial x^2} \frac{\varphi_r}{\varphi_x} + (e_{41} + e_{12}) \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial x \partial y} \frac{\varphi_r}{\varphi_x} \\
+ (e_{61} + e_{13}) \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x} \frac{\varphi_r'}{\varphi_x} + (e_{62} + e_{43}) \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial y} \frac{\varphi_r'}{\varphi_x} + e_{63} \tilde{\psi} \frac{\varphi_r''}{\varphi_x} + e_{42} \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial y^2} \frac{\varphi_r}{\varphi_x} = -\tilde{R}_x
\end{aligned} \tag{16a}$$

$$\begin{aligned}
B \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x \partial y} \frac{\varphi_x}{\varphi_y} + G \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2} + A \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial y^2} + G \tilde{v} \frac{\varphi_y''}{\varphi_y} + B \frac{\partial \tilde{w}}{\partial y} \frac{\varphi_z'}{\varphi_y} + e_{41} \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial x^2} \frac{\varphi_r}{\varphi_y} + e_{22} \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial y^2} \frac{\varphi_r}{\varphi_y} \\
+ e_{53} \tilde{\psi} \frac{\varphi_r''}{\varphi_y} + (e_{21} + e_{42}) \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial x \partial y} \frac{\varphi_r}{\varphi_y} + (e_{51} + e_{43}) \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x} \frac{\varphi_r'}{\varphi_y} + (e_{52} + e_{23}) \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial y} \frac{\varphi_r'}{\varphi_y} = -\tilde{R}_y
\end{aligned} \tag{16b}$$

$$\begin{aligned}
B \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \frac{\varphi_x'}{\varphi_z} + B \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \frac{\varphi_y'}{\varphi_z} + G \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x^2} + G \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial y^2} + A \tilde{w} \frac{\varphi_z''}{\varphi_z} + e_{61} \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial x^2} \frac{\varphi_r}{\varphi_z} + e_{52} \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial y^2} \frac{\varphi_r}{\varphi_z} \\
+ e_{33} \tilde{\psi} \frac{\varphi_r''}{\varphi_z} + (e_{51} + e_{62}) \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial x \partial y} \frac{\varphi_r}{\varphi_z} + (e_{31} + e_{63}) \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x} \frac{\varphi_r'}{\varphi_z} + (e_{53} + e_{32}) \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial y} \frac{\varphi_r'}{\varphi_z} = -\tilde{R}_z
\end{aligned} \tag{16c}$$

$$\begin{aligned}
e_{11} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} \frac{\varphi_x}{\varphi_r} + (e_{41} + e_{12}) \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x \partial y} \frac{\varphi_x}{\varphi_r} + (e_{61} + e_{13}) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \frac{\varphi_x'}{\varphi_r} + (e_{62} + e_{43}) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \frac{\varphi_x'}{\varphi_r} + e_{42} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} \frac{\varphi_x}{\varphi_r} \\
+ e_{63} \tilde{u} \frac{\varphi_x''}{\varphi_r} + e_{41} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2} \frac{\varphi_y}{\varphi_r} + e_{22} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial y^2} \frac{\varphi_y}{\varphi_r} + e_{53} \tilde{v} \frac{\varphi_y''}{\varphi_r} + (e_{21} + e_{42}) \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x \partial y} \frac{\varphi_y}{\varphi_r} + (e_{51} + e_{43}) \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \frac{\varphi_y'}{\varphi_r} \\
+ (e_{52} + e_{23}) \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \frac{\varphi_y'}{\varphi_r} + e_{61} \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x^2} \frac{\varphi_z}{\varphi_r} + e_{52} \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial y^2} \frac{\varphi_z}{\varphi_r} + e_{33} \tilde{w} \frac{\varphi_z''}{\varphi_r} + (e_{51} + e_{62}) \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x \partial y} \frac{\varphi_z}{\varphi_r} \\
+ (e_{31} + e_{63}) \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} \frac{\varphi_z'}{\varphi_r} + (e_{53} + e_{32}) \frac{\partial \tilde{w}}{\partial y} \frac{\varphi_z'}{\varphi_r} - \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial x^2} - \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial y^2} - \varepsilon_0 \varepsilon_r \tilde{\psi} \frac{\varphi_r''}{\varphi_r} = 0
\end{aligned} \tag{16d}$$

Es sollen analytische Lösungen für die φ -Funktionen gewonnen werden. Mit bekannten φ -Funktionen kann eine finite Integraltransformation der Differentialgleichungen (13) durchgeführt werden. Das Endziel der finiten Integraltransformation ist es, die Gleichungen (13) und die Randbedingungen auf eine Oberfläche S_1 über z zu integrieren, so daß die gewonnenen Gleichungen und Randbedingungen nur Funktionen von x und y sind. Dies ist nur möglich, wenn $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ und φ_r bestimmte Bedingungen erfüllen. Die Bedingungen für die φ -Funktionen gehen aus den letzten gewonnen Gleichungen (16 a,b,c,d) hervor. Es sollen nämlich die Quotienten zwischen allen φ -Funktionen Konstanten sein:

$$\frac{\varphi_x''}{\varphi_x} = \lambda_x \quad \frac{\varphi_y}{\varphi_x} = \kappa_{xy} \quad \frac{\varphi_z'}{\varphi_x} = \rho_{xz} \quad \left\langle \frac{\varphi_r}{\varphi_x} = \kappa_{xr} \right\rangle \quad \frac{\varphi_r'}{\varphi_x} = \rho_{xr} \quad \left\langle \frac{\varphi_r''}{\varphi_x} = \delta_{xr} \right\rangle \quad (17a)$$

erfüllbar

$$\frac{\varphi_x}{\varphi_y} = \kappa_{yx} \quad \frac{\varphi_y''}{\varphi_y} = \lambda_y \quad \frac{\varphi_z'}{\varphi_y} = \rho_{yz} \quad \left\langle \frac{\varphi_r}{\varphi_y} = \kappa_{yr} \right\rangle \quad \frac{\varphi_r'}{\varphi_y} = \rho_{yr} \quad \left\langle \frac{\varphi_r''}{\varphi_y} = \delta_{yr} \right\rangle \quad (17b)$$

erfüllbar

$$\frac{\varphi_x'}{\varphi_z} = \rho_{zx} \quad \frac{\varphi_y'}{\varphi_z} = \rho_{zy} \quad \frac{\varphi_z''}{\varphi_z} = \lambda_z \quad \frac{\varphi_r}{\varphi_z} = \kappa_{zr} \quad \left\langle \frac{\varphi_r'}{\varphi_z} = \rho_{zr} \right\rangle \quad \frac{\varphi_r''}{\varphi_z} = \delta_{zr} \quad (17c)$$

erfüllbar

erfüllbar

$$\left\langle \frac{\varphi_x}{\varphi_r} = \kappa_{rx} \right\rangle \quad \frac{\varphi_x'}{\varphi_r} = \rho_{rx} \quad \left\langle \frac{\varphi_x''}{\varphi_r} = \delta_{rx} \right\rangle \quad \left\langle \frac{\varphi_y}{\varphi_r} = \kappa_{ry} \right\rangle \quad \frac{\varphi_y'}{\varphi_r} = \rho_{ry} \quad \left\langle \frac{\varphi_y''}{\varphi_r} = \delta_{ry} \right\rangle \quad (17d)$$

erfüllbar

erfüllbar

$$\frac{\varphi_z}{\varphi_r} = \kappa_{rz} \quad \left\langle \frac{\varphi_z'}{\varphi_r} = \rho_{rz} \right\rangle \quad \frac{\varphi_z''}{\varphi_r} = \delta_{rz} \quad \frac{\varphi_r''}{\varphi_r} = \lambda_r$$

erfüllbar

erfüllbar

Mit κ sind die Verhältnisse zwischen den φ -Funktionen, mit ρ sind die Verhältnisse zwischen einer ersten Ableitung und einer φ -Funktion, mit δ sind die Verhältnisse zwischen einer zweiten Ableitung und einer anderen φ -Funktion, mit λ sind die Verhältnisse zwischen der zweiten Ableitung und derselben φ -Funktion bezeichnet.

Die Verhältnisse der φ -Funktionen können wie folgt unterteilt werden:

- die doppelt unterstrichenen bilden die sog. Spektralaufgabe - daraus folgt, daß sie nur eine Kombination von trigonometrischen Funktionen sein können
- die einfach unterstrichenen sind die sog. Zusatzbedingungen, bekannt aus dem rein elastischen Problem
- die mit erfüllbar bezeichneten Bedingungen sind neu, können aber erfüllt werden
- die in $\langle \rangle$ eingeklammerten Bedingungen können im allgemeinen Fall nicht erfüllt werden

Es gibt keine Funktionen, die alle diese Bedingungen erfüllen. D.h., im allgemeinen Fall eines piezokeramischen Körpers ist keine finite Integraltransformation möglich. Es kommt aber der Fall einer vorpolarisierten Piezokeramik in Betracht. Alle Gleichungen vereinfachen sich erheblich in diesem Fall, angesichts der symmetrischen Eigenschaften solcher Materialien. Die Symmetrieachse solcher Körper fällt mit der Richtung des elektrischen Feldes der Vorpolarisation zusammen. Die z -Achse ist die Symmetrieachse und die Koordinatensysteme stimmen wie folgt überein $(x,y,z) \equiv (1,2,3)$. In diesem Fall sind alle e -Koeffizienten gleich Null, außer $e_{13}, e_{23}, e_{33}, e_{42}$ und e_{51} (Grintschenko u.a., 1989). Es gilt zusätzlich:

$$e_{13} = e_{23} \quad \text{und} \quad e_{42} = e_{51}$$

Auch in diesem Fall ist keine finite Integraltransformation möglich. Es kommen für die φ -Funktionen verschiedene Kombinationen von cos- und sin-Funktionen in Frage. Der Koeffizient e_{42} hat zur Folge, daß keine einzige dieser Kombinationen angewendet werden kann. Wenn man annimmt, daß gilt:

$$e_{42} = e_{51} = 0$$

was in vielen Fällen der Fall ist - meistens werden Piezokeramiken verwendet, bei denen nur e_{13} , e_{23} , e_{33} ungleich Null sind - dann ist unter der Annahme

$$\varphi_r = \cos(k_1 z) \quad \varphi_x = \sin(k_2 z)$$

$$\varphi_y = \sin(k_3 z) \quad \varphi_z = \cos(k_4 z)$$

eine Trennung der Variablen und eine finite Integraltransformation möglich.

5 Beispiele von ANSYS-Analysen

5.1 Statische Analyse eines Piezokeramik-Stabes

Modell: prismatischer Körper aus vorpolarisierter Piezokeramik mit den Abmaßen:
Länge - 0.05 m, Breite - 0.016 m, Höhe - 0.001 m

Piezomatrix e :

$$e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6.1 \\ 0 & 0 & -6.1 \\ 0 & 0 & 15.7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ C/m}^2$$

Dielektrizitätsmatrix ϵ :

$$\epsilon = \begin{bmatrix} 8.7969 & 0 & 0 \\ 0 & 8.7969 & 0 \\ 0 & 0 & 8.7969 \end{bmatrix} \times 10^{-9} \text{ F/m}$$

Elastizitätsmatrix (orthotroper Körper):

$$c = \begin{bmatrix} 12.8 & 6.8 & 6.6 & 0 & 0 & 0 \\ 6.8 & 12.8 & 6.6 & 0 & 0 & 0 \\ 6.6 & 6.6 & 11.0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.1 \end{bmatrix} \times 10^{10} \text{ N/m}^2$$

Dichte der Piezokeramik: $\rho = 7730 \text{ kg/m}^3$

Belastung:

Elektrisches Feld in z-Richtung (Richtung der Vorpolarisierung)
angelegte Spannung $U = 0.5 \text{ Volt}$

Ergebnis:

Dehnung oder Kürzung (Bild 2) der Piezokeramik in x-Richtung, je nach der Polarität der angelegten Spannung

x / L	0	2/10	4/10	6/10	8/10	1
Verschiebung $\times 10^{-6} \text{ m}$	0	0.06	0.126	0.193	0.259	0.326

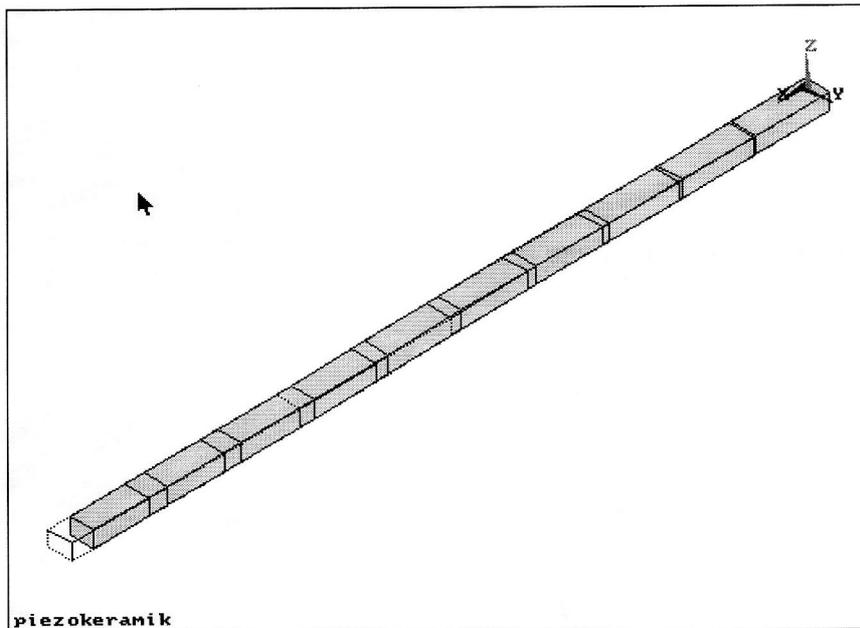


Bild 2. Beispiel 1 - Längsdehnung eines piezokeramischen Stabes

5.2 Statische Analyse eines Piezobimorphs

Modell:

Bimorph aus 2 prismatischen piezokeramischen Körpern. Zwischen den beiden Schichten ist eine Elektrode definiert. Zwei zusätzliche Elektroden sind auf der oberen und der unteren Seite des Bimorphs definiert. Dies gewährleistet, daß das elektrische Feld in beiden Schichten die umgekehrte Richtung haben wird. Länge - 0.1m, Breite - 0.05m, Dicke - 0.0005 m

Piezomatrix e :

$$e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.046 \\ 0 & 0 & 0.046 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ C/m}^2$$

Dielektrizitätsmatrix ϵ :

$$\epsilon = \begin{bmatrix} 0.1062 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1062 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1062 \end{bmatrix} \times 10^{-9} \text{ F/m}$$

E-Modul ist $E = 0.2 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$; Querkontraktionszahl $\nu = 0.29$

Dichte der Piezokeramik: $\rho = 7730 \text{ kg/m}^3$

Belastung:

Elektrisches Feld in z-Richtung (Richtung der Vorpolarisierung)
angelegte Spannung $U = 1.0 \text{ Volt}$

Ergebnis:

Die eine Schicht dehnt sich in x-Richtung aus und die andere verkürzt sich, so daß sich der Bimorph insgesamt in z-Richtung biegt (Bild 3). Die Verschiebung von einigen Knotenpunkten ist auch theoretisch und mit einem aus Schalenelementen bestehenden FEM-Modell berechnet worden (Tzou, 1993). Die Unterschiede in den Ergebnissen sind auf die nicht sehr guten Eigenschaften der 8-Knoten Volumenelemente bei Biegung zurückzuführen.

Verschiebung Schalenmodell $\times 10^{-7} \text{ m}$	0.124	0.508	1.16	2.10	3.30
Verschiebung theoretisch $\times 10^{-7} \text{ m}$	0.138	0.552	1.24	2.21	3.45
Verschiebung ANSYS-Modell $\times 10^{-7} \text{ m}$	0.217	0.848	1.87	3.28	5.0

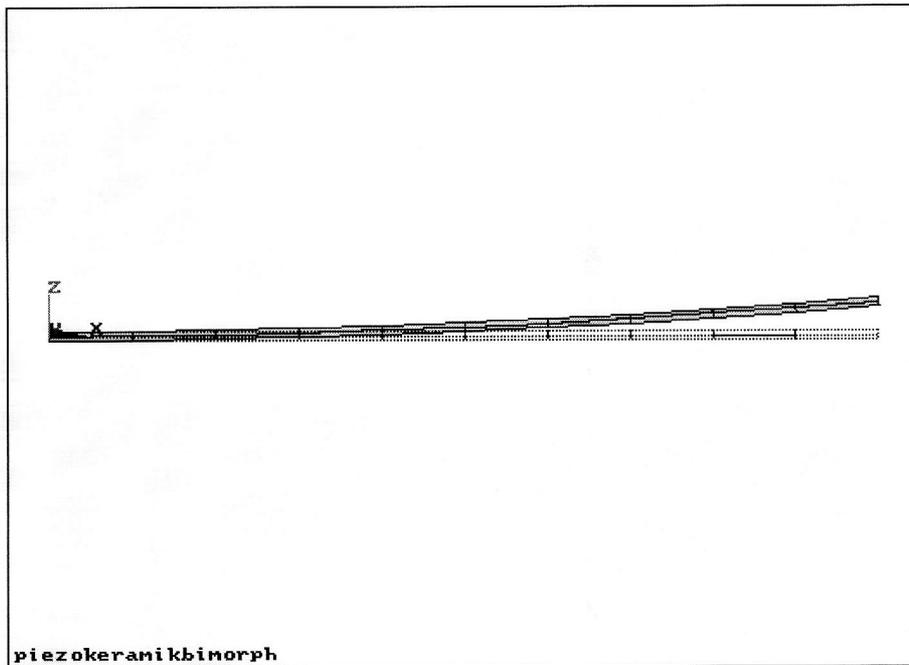


Bild 3. Beispiel 2 - Biegung eines Piezobimorphs

5.3 Zwei harmonische Analysen eines Trimorphs

Erregung mit elektrischer Spannung

Modell: Trimorph - Balken aus Aluminium, beschichtet mit 2 Schichten Piezokeramik (Bild 4)

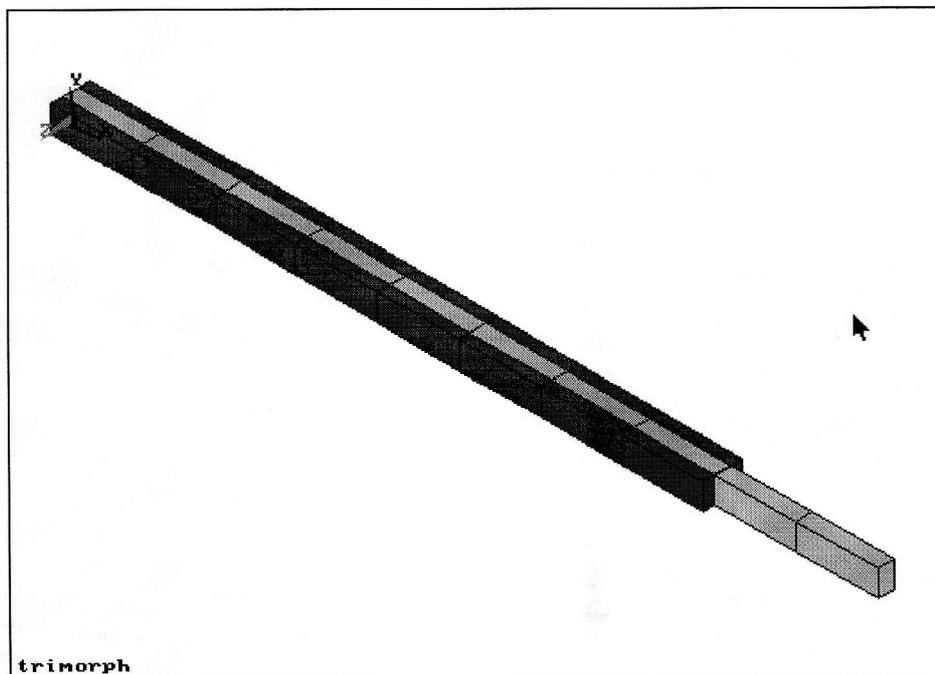


Bild 4. Beispiel 3 - Ausgangskonfiguration

Eigenschaften der vorpolarisierten Piezokeramik:

e , c und ϵ - Matrizen sowie Dichte ρ wie unter Beispiel 1

Eigenschaften des Aluminiums:

Elastizitäts-Modul $E = 7.03 \times 10^4$ MPa

Dichte $\rho = 2690$ kg/m³

Querkontraktionszahl $\nu = 0.345$

Länge der Piezokeramiken - 0.04 m, Länge der Al-Schicht - 0.05 m, Breite - 0.0016 m

Dicke der Piezokeramiken - 0.0007 m, Dicke der Al-Schicht - 0.001 m

Belastung:

Erregung mit einem elektrischen Feld in z -Richtung, so daß Biegung verursacht wird

Amplitude der Spannung 1.5 Volt, Spannung ändert sich sinusförmig $U = 1.5 \sin \omega t$

Frequenzbereich ω aus [0, 5000 Hz]

Ergebnis:

Das Ergebnis ist ein Amplitudenfrequenzgang: die Amplitude der Verschiebung vom freien Ende des Trimorphs als Funktion der Frequenz (Bild 5).

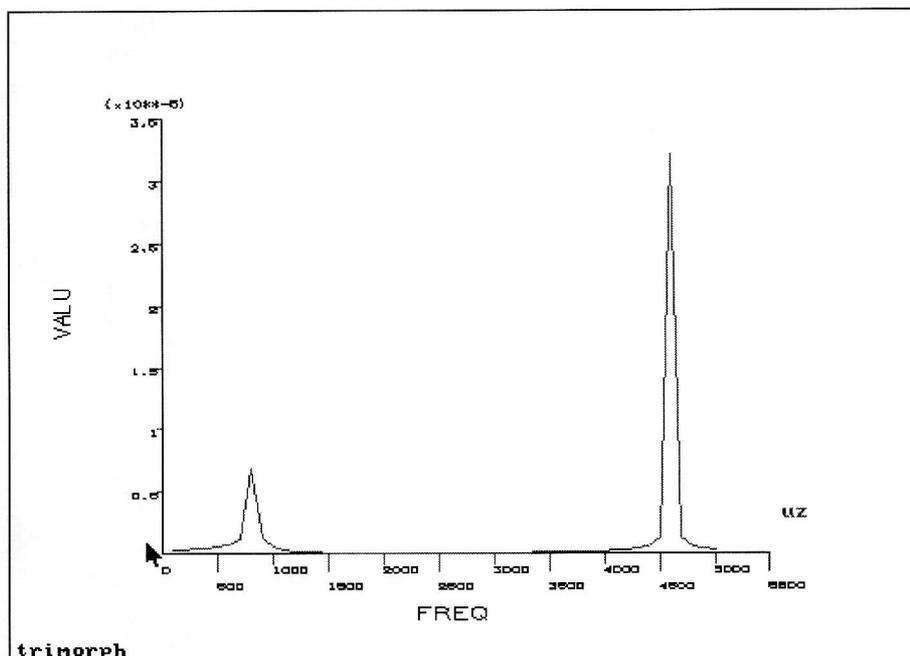


Bild 5. Beispiel 3 - Frequenzganganalyse bei Erregung mit einem elektrischen Feld

Erregung mit zwei mechanischen Kräften

Modell: s.o.

Belastung:

Erregung mit 2 Kräften in z -Richtung, angreifend am freien Ende der Al-Platte, so daß Biegung verursacht wird.

Amplituden der Kräfte $F_{10}=F_{20}=0.5$ N, Kräfte ändern sich sinusförmig $F_i = 0.5 \sin \omega t$

Frequenzbereich ω aus [0, 5000 Hz]

Ergebnis:

Das Ergebnis ist ein Amplitudenfrequenzgang: die Amplitude der Verschiebung vom freien Ende des Trimorphs als Funktion der Frequenz (Bild 6).

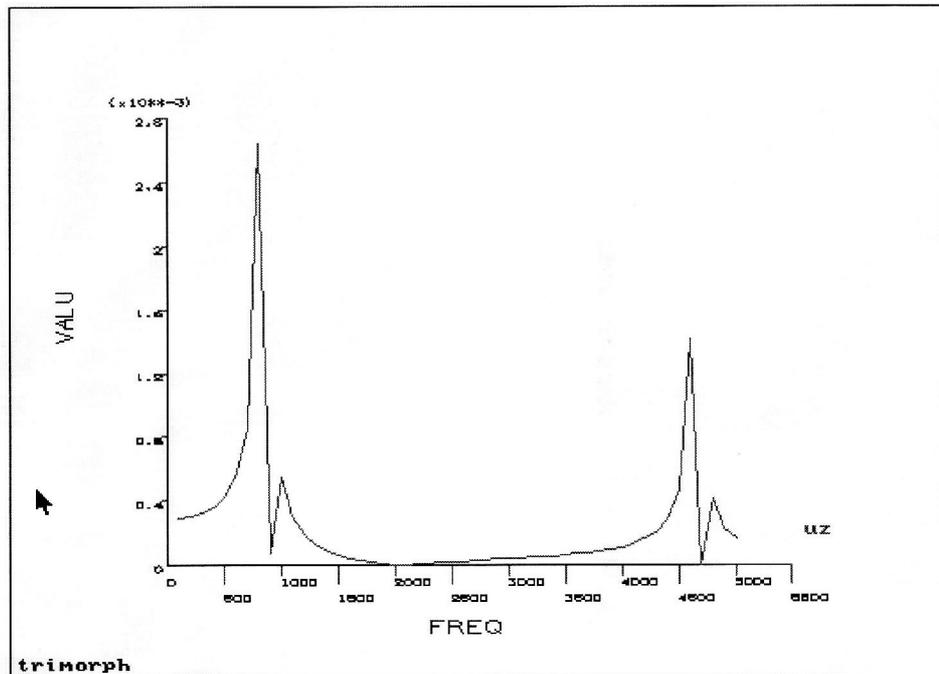


Bild 6. Beispiel 3 - Frequenzganganalyse bei Erregung mit zwei Kräften

6 Zusammenfassung

Bei vorpolarisierten Piezokeramiken, unter der Bedingung $e_{42}=e_{51}=0$ oder anders ausgedrückt: nur bei $e_{13} \neq 0$, $e_{23} \neq 0$, $e_{33} \neq 0$ ist eine Trennung der Variablen und damit die Anwendung einer erweiterten FPM möglich. Dieses kann zweckmäßig für die Untersuchung von 3D Wirkungen bei geschichteten Verbunden mit Piezoschichten sein.

Das Programmsystem ANSYS kann zur Untersuchung von Piezokeramiken verwendet werden. Bei dünnen Schichten wird jedoch eine sehr große Anzahl von Volumenelementen notwendig sein. Dadurch werden die Berechnungen sehr uneffektiv. Ein Ausweg ergibt sich durch die Entwicklung von geschichteten Schalenelementen mit Piezoschichten.

Literatur

1. ANSYS User's Manual, Rev. 5.0, Vol.I Procedures, Swanson Analysis Systems, Inc., 1992.[5]Sneddon, I.N.: Fourier Transforms. New York et al.: McGraw-Hill, (1951).
2. Cheung, Y.K.: Finite Strip Method in Structural Analysis, Pergamon Press, (1976).
3. Grintschenko, V.T.; Uluitko, A.F.; Schulga, N.A.: Elektroelastizität, Bd.5 der Reihe Mechanik der gekoppelten Felder in Konstruktionselementen, Kiev: Naukova Dumka, (1989) (in Russisch).
4. Kolarov, G.; Michajlov, M.: Anwendung semianalytischer Lösungen in der Elastizitätstheorie, Technische Mechanik, 11 (1990) H.4.
5. Piezofibel, piezosystem Jena, (1995).
6. Tzou, H.S.: Piezoelectric shells, Kluwer Academic Publishers, (1993).
7. Zienkiewicz, O.C. ; Taylor, R.L.: The Finite Element Method, Vol.1 Basic Formulations and Linear Problems, 4th edn, McGraw-Hill, (1989).

Anschrift: Dr.-Ing. G. Kolarov, Dipl.-Ing. B. Peev, Lehrstuhl für Festigkeitslehre, Technische Universität Sofia, BG-1756 Sofia