

## Strukturelle Resonanzen und die Lagedrift drehmomentfreier Kreiselatelliten

A. Saitov, F.P.J. Rimrott

Die klassische Kreisellehre stützt sich auf die Annahme, daß Festkörperkreisel durch Starrkörper ersetzt werden können. Damit beschränkt man sich bei Untersuchungen des Kreiselverhaltens auf die Betrachtung der Drehbewegung starrer Körper. Wirkliche Kreisel, insbesondere Kreiselatelliten, müssen aber oft vielmehr als elastische Körper angesehen werden. In elastischen Kreiseln werden durch Beschleunigungskräfte der Taumelbewegung Verformungen hervorgerufen, die infolge von Hystereseverlusten zu einem permanenten Absinken der mechanischen Energie führen. Bei drehmomentfreien ursprünglich axialsymmetrischen Kreiseln (Satelliten) beobachtet man ein langsames kontinuierliches Driften der Winkelhaltung der Symmetrieachse des Kreisels aus einer beliebigen Anfangshaltung in eine stabile, permanente Endhaltung mit einem Nutationswinkel  $\nu$  von entweder  $0^\circ$  oder  $90^\circ$ , bei der der Kreisel die kleinstmögliche kinetische Energie besitzt bei gegebenem konstanten Drall. Diesen dissipativen Vorgang bezeichnet man als Lagedrift. Während der Lagedrift kann der elastische Kreisel solche Winkelhaltungen einnehmen, bei denen bei bestimmten Bedingungen strukturelle Resonanz auftreten kann. Die strukturelle Resonanz bedeutet, daß eine der Eigenfrequenzen elastischer Bauteile des Kreisels mit einer Frequenz der Beschleunigungskräfte der Taumelbewegung übereinstimmt. Bei der stabilen Rotation verschwinden die periodischen Verformungen, während der Lagedrift können sie, besonders im Resonanzfall, einen erheblichen Einfluß auf das gesamte Bewegungsverhalten des Kreisels und im besonderen auf die Lagedrift haben. Auf der Basis eines Modellkreisels werden Resonanzerscheinungen und deren Einfluß auf die Lagedrift drehmomentfreier (ursprünglich) axialsymmetrischer dissipativer Kreisel untersucht. Die erhaltenen Ergebnisse werden mit einem experimentell erhaltenen Lagedriftvorgang eines realen Satelliten verglichen.

Es wird ein Modellkreisel betrachtet, der aus einem ideal starren Zentralkörper und den vier über masselose Federn und Dämpfer mit dem Zentralkörper verschiebbar verbundenen Punktmassen besteht (Bild 1). Im unverformten Zustand (unbelastete Federn) weist der gesamte Kreisel perfekte axiale Symmetrie auf. Am Kreisel greifen keine äußeren Kräfte und Momente an. Eine eventuelle Wirkung der Schwerkraft wird nicht in Betracht gezogen. Zur Beschreibung der Kreiselbewegung wird ein begleitendes nichtspinnendes Zwischenkoordinatensystem  $Cuvz$  eingeführt, mit dem Ursprung im Massenmittelpunkt  $C$  des Kreisels. Die Achsen dieses Systems stimmen mit den Hauptachsen des unverformten Kreisels überein. Der Winkel zwischen der raumfesten  $Z$ -Achse (Drallachse) und der körperfesten  $z$ -Achse (Figurenachse des unverformten Kreisels) ist der Nutationswinkel  $\nu$ .

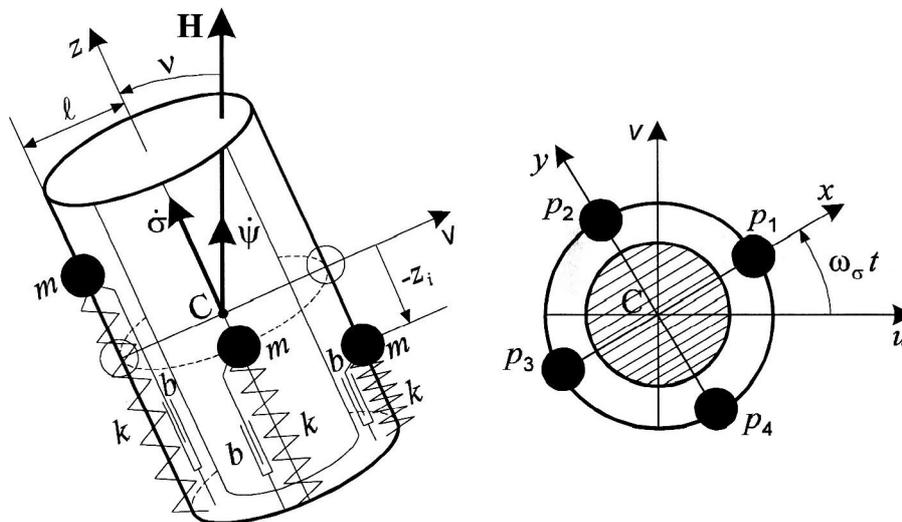


Bild 1. Modellkreisel

Es läßt sich zeigen (Rimrott, 1989), daß für einen ideal starren axialsymmetrischen drehmomentfreien Kreisel die Winkelgeschwindigkeit des Kreisels  $\boldsymbol{\omega}$  und die Winkelgeschwindigkeit des  $Cuvz$ -Koordinatensystems  $\boldsymbol{\Omega}$  wie folgt geschrieben werden können:

$$\boldsymbol{\omega} = [\mathbf{e}_u \quad \mathbf{e}_v \quad \mathbf{e}_z] \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{H}{A} \sin \nu \\ \frac{H}{C} \cos \nu \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\Omega} = [\mathbf{e}_u \quad \mathbf{e}_v \quad \mathbf{e}_z] \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{H}{A} \sin \nu \\ \frac{H}{A} \cos \nu \end{bmatrix} \quad (1)$$

Normalerweise sind bei der Taumelbewegung des elastischen Kreisels entstehende Deformationen (Verschiebungen der Punktmassen in unserem Falle) im Vergleich zur Gesamtgröße des Kreisels klein. Die durch die Deformationen verursachte Lagedrift (Nutationsdrehung  $\dot{\nu}$ ) kann infolgedessen hinsichtlich anderer Bewegungen (Spin- oder Eigendrehung  $\dot{\sigma}$ , Präzessionsdrehung  $\dot{\psi}$ , normalisierte Geschwindigkeit periodischer Verformungen  $\dot{z}_i / \ell$ ) als eine langsame Bewegung angesehen werden. Damit darf eine quasi-stationäre Betrachtung für (kleine) periodische Verformungen durchgeführt werden, bei der der Nutationswinkel  $\nu$  als konstant und die Gleichungen (1) als gültig angenommen werden. In diesem Fall erhält man für die Ortsvektoren der Punktmassen

$$\mathbf{r}_i = [\mathbf{e}_u \quad \mathbf{e}_v \quad \mathbf{e}_z] \begin{bmatrix} l \cos(\omega_\sigma t + (i-1)\pi/2) \\ l \sin(\omega_\sigma t + (i-1)\pi/2) \\ z_i \end{bmatrix} \quad \omega_\sigma = \dot{\sigma} = \frac{A-C}{A} \omega_z \quad i = \overline{1,4} \quad (2)$$

Unter Verwendung entweder der Lagrangeschen Bewegungsgleichungen zweiter Art oder des zweiten Newtonschen Gesetzes erhält man für die relativen Bewegungen der Punktmassen in  $z$ -Richtung

$$\ddot{z}_i + 2\delta\dot{z}_i + \omega_n^2 z_i = -(2 - C/A)l\omega_v\omega_z \sin(\omega_\sigma t + (i-1)\pi/2) \quad i = \overline{1,4} \quad (3)$$

mit der Abklingkonstante  $\delta$ , der Eigenkreisfrequenz der vier Schwinger  $\omega_{st}$  und der nominellen Frequenz  $\omega_n$ , die die lageabhängige Eigenfrequenz der freien Schwingungen der Punktmassen ist.

$$\delta = b/2m \quad \omega_n = \sqrt{\omega_{st}^2 - \omega_v^2} \quad \omega_{st} = \sqrt{k/m} \quad (4)$$

Stationäre Lösungen der Gleichungen (3) sind

$$z_i = -z_* \sin(\omega_\sigma t + (i-1)\pi/2 - \varphi) \quad i = \overline{1,4} \quad (5)$$

mit der Amplitude  $z_*$  und dem Phasenwinkel  $\varphi$ .

$$z_* = \frac{2A-C}{A-C} \frac{\omega_v}{\omega_n} \ell \frac{r}{\sqrt{(1-r^2) + (2\xi r)^2}} \quad \tan \varphi = \frac{2\xi r}{1-r^2} \quad (6)$$

$A$  und  $C$  sind die Hauptträgheitsmomente des unverformten Kreisels,  $r$  ist das Abstimmungsverhältnis, und  $\xi$  ist das Dämpfungsverhältnis.

$$r = \frac{\omega_\sigma}{\omega_n} = \frac{\omega_\sigma}{\sqrt{\omega_{st}^2 - \omega_v^2}} \quad \xi = \frac{\delta}{\omega_n} = \frac{b}{2m\sqrt{\omega_{st}^2 - \omega_v^2}} \quad (7)$$

Es sei betont, daß die Größen  $\omega_v$ ,  $\omega_z$ ,  $\omega_n$ ,  $\omega_\sigma$ ,  $r$ ,  $\xi$ ,  $z_*$  und  $\varphi$  lageabhängig sind, d. h. sie gelten für einen bestimmten Nutationswinkel  $\nu$ . Aus den Gleichungen (6) folgt, daß bei  $r = 1$ , d. h. wenn die Erregerfrequenz  $\omega_\sigma$  mit der nominellen Frequenz  $\omega_n$  übereinstimmt, in der Bewegung der Punktmassen Resonanz auftritt.

Die kinetische Energie des Kreisels ist

$$T = \frac{1}{2} \left[ A\omega_v^2 + C\omega_z^2 + 4m\ell z_* \cos \varphi \omega_v (\omega_z + \omega_\sigma) + 2mz_*^2 \omega_v^2 \right] + \frac{1}{2} (2m)z_*^2 \omega_\sigma^2 \quad (8)$$

Unter Vernachlässigung der kleinen (im Vergleich zu  $A$  und  $C$ ) Glieder mit  $z_*$  wird die kinetische Energie zu

$$T = \frac{1}{2} \left[ A\omega_v^2 + C\omega_z^2 \right] = \frac{1}{2} H^2 \left( \frac{1}{A} \sin^2 \nu + \frac{1}{C} \cos^2 \nu \right) \quad (9)$$

was der kinetischen Energie eines drehmomentfreien axialsymmetrischen Starrkörperkreisels entspricht. Die Differenzierung dieser Gleichung nach der Zeit liefert den Zusammenhang

$$\dot{\nu} = - \frac{AC}{(A-C)H^2 \sin \nu \cos \nu} \dot{T} \quad (10)$$

Weiter kann gezeigt werden (Rimrott, 1989), daß für den drehmomentfreien Kreisel mit vernachlässigbaren Deformationen die elastische (potentielle) Energierate  $\dot{V}$  verschwindet und damit gilt  $\dot{T} = -\dot{D}$ , wobei  $\dot{D}$  die (positive) Energiedissipationsrate ist, die für unseren Modellkreisel folgendermaßen aussieht:

$$\dot{D} = \sum_{i=1}^4 bz_i^2 = 4m\xi z_*^2 \omega_n \omega_\sigma^2 \quad (11)$$

Damit ergibt sich die Driftgeschwindigkeit  $\dot{\nu}$  aus der Gleichung (10) zu

$$\dot{\nu} = K \frac{1}{\left( 1 - \frac{\omega_v^2}{\omega_{st}^2} - \frac{\omega_\sigma^2}{\omega_{st}^2} \right)^2 + 4 \frac{\delta^2 \omega_\sigma^2}{\omega_{st}^4}} \sin \nu \cos^3 \nu \quad (12)$$

mit

$$K = \frac{4m\ell^2 \delta}{\omega_{st}^4} \frac{(2A-C)^2 (A-C)}{A^5 C^3} H^4 \quad (13)$$

Wenn die Steifigkeit der 4 Schwinger sehr hoch ist, d. h.  $\omega_{st} = \sqrt{k/m} \gg \omega_v, \omega_z$ , tritt keine strukturelle Resonanz auf, und die Driftgeschwindigkeit ergibt sich zu

$$\dot{\nu} = K \sin \nu \cos^3 \nu \quad (14)$$

Unter Beachtung von  $\dot{\nu} = d\nu/dt$  läßt sich diese Gleichung integrieren zu

$$t - t_0 = \frac{1}{2K} \left( \tan^2 \nu - \tan^2 \nu_0 + \ln \frac{\tan^2 \nu}{\tan^2 \nu_0} \right) \quad (15)$$

Wenn das System so beschaffen ist, daß es während der Lagedrift Resonanz erfährt, dann kann der Nutationswinkel nur numerisch aus der Gleichung (12) erhalten werden. Dabei kann aus der Resonanzbedingung  $r = \frac{\omega_\sigma}{\omega_n} = 1$  derjenige Nutationswinkel  $\nu$  bestimmt werden, bei dem Resonanz auftritt.

$$\sin^2 \nu = \frac{(A-C)^2 - \frac{A^2 C^2}{H^2} \omega_{st}^2}{A(A-2C)} \quad (16)$$

Unter Beachtung von  $0 < \sin^2 \nu < 1$  erhält man einen zulässigen Resonanzbereich für  $\omega_{st}$  aus

$$\frac{H}{A} < \omega_{st} < \frac{H(A-C)}{AC} \quad \text{für } A > 2C \quad (17)$$

welches für den zu untersuchenden Fall zutrifft. Außerhalb dieses Bereichs tritt in der Bewegung der Punktmassen keine Resonanz auf.

In den Bildern 2 und 3 sind die Gleichungen (14) und (15) für den Modellkreisels ohne Resonanz den Versuchsergebnissen des Kreisellsatelliten OFFEQ-1 gegenübergestellt. Der Satellitenkörper des OFFEQ-1 ist ein axialsymmetrischer gestreckter Kreisels, mit den Hauptträgheitsmomenten  $A = 86,2 \text{ m}^2\text{kg}$  und  $C = 26,3 \text{ m}^2\text{kg}$ . Er wurde in die vorgesehene Umlaufbahn mit einer Winkelgeschwindigkeit um die Achse des kleinsten Hauptträgheitsmomentes von  $\omega_z = 7 \text{ rad/s}$  und einem Nutationswinkel von  $\nu_0 = 5,5^\circ$  abgesetzt. Der Drall betrug dabei  $H = 185 \text{ m}^2\text{kg/s}$  (Klajn und Gur, 1992).

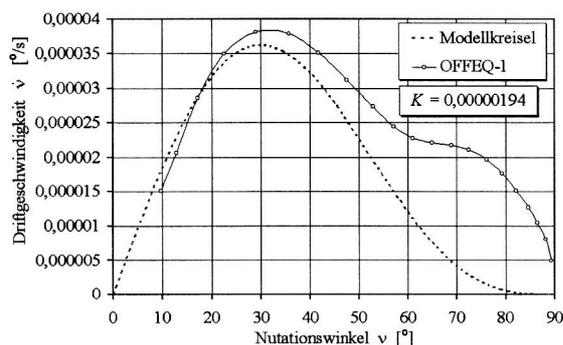


Bild 2. Driftgeschwindigkeit des Modellkreisels ohne Resonanz

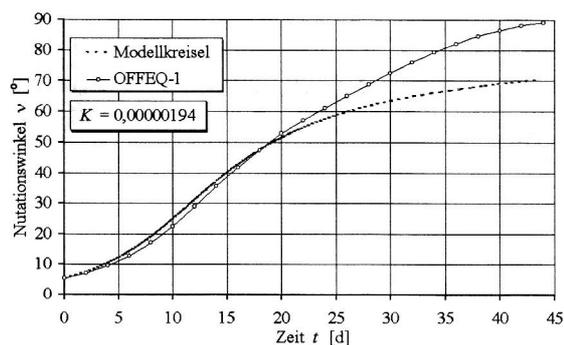


Bild 3. Driftvorgang des Modellkreisels ohne Resonanz

Für den ersten Teil des Driftvorganges erkennt man (Bild 3) eine befriedigende Übereinstimmung zwischen experimenteller (OFFEQ-1) und theoretischer Kurve (Gleichung (15)). Nach etwa 20 Tagen weichen Versuchsergebnisse und theoretische Kurve (15) jedoch erheblich voneinander ab. Dasselbe trifft für die Kurven der Driftgeschwindigkeit  $\dot{\nu}$  zu. Aus dem Aussehen dieser Kurven erkennt man, daß es nicht möglich ist, den realen Driftvorgang im ganzen nur mit Hilfe der Gleichung (15) theoretisch zu beschreiben. Um eine bessere Näherung zu den Versuchsergebnissen zu erhalten, machen wir einen Ansatz und betrachten einen Modellkreisels, der nicht vier sondern acht Schwinger besitzt. Diese acht Schwinger bilden zwei Punktmassensysteme. Jedes System besteht aus vier Punktmassen jeweils mit gleicher Masse  $m_i$  und jeweils mit gleichem Abstand  $\ell_i$  von der Symmetrieachse. Die Punktmassen sind mit dem Zentralkörper über Federn jeweils mit gleicher Steifigkeit  $k_i$  und über Dämpfer jeweils mit gleicher Dämpfungskonstante  $b_i$  verbunden. Das erste Punktmassensystem hat keine Resonanz während der Lagedrift. Es hat also eine hohe Steifigkeit,  $\omega_{st1} \gg \omega_\nu, \omega_z$ . In der Bewegung des zweiten Systems tritt demgegenüber eine Resonanz auf. Mit  $A = 86,2 \text{ m}^2\text{kg}$ ,  $C = 26,3 \text{ m}^2\text{kg}$  und  $H = 185 \text{ m}^2\text{kg/s}$  (Werte von OFFEQ-1) muß die Resonanzfrequenz im Bereich (Ungleichung (17))

$$2,146 < \omega_{st2} = \sqrt{k_2 / m_2} < 4,88 \text{ rad/s} \quad (18)$$

liegen. Mit Hilfe der Gleichungen (12) und (14) erhält man für die Driftgeschwindigkeit des gesamten Modellkreisels in diesem Falle

$$\dot{\nu} = \left[ K_1 + K_2 \frac{1}{\left( 1 - \frac{\omega_\nu^2}{\omega_{st2}^2} - \frac{\omega_\sigma^2}{\omega_{st2}^2} \right) + 4 \frac{\delta_2^2}{\omega_{st2}^4}} \right] \sin \nu \cos^3 \nu \quad (19)$$

mit

$$K_i = \frac{4m_i \rho_i^2 \delta_i (2A - C)^2 (A - C)}{\omega_{sti}^4 A^5 C^3} H^4 \quad \delta_i = \frac{b_i}{2m_i} \quad \omega_{sti} = \sqrt{\frac{k_i}{m_i}} \quad i = 1,2 \quad (20)$$

Nach der numerischen Integration der Gleichung (19) mit entsprechend angepaßten Parametern erkennt man eine bedeutend bessere Übereinstimmung zwischen den theoretischen Kurven und den Versuchskurven (Bilder 4, 5). Die Resonanz ist als bei  $\nu = 70^\circ$  gelegen angesetzt worden.

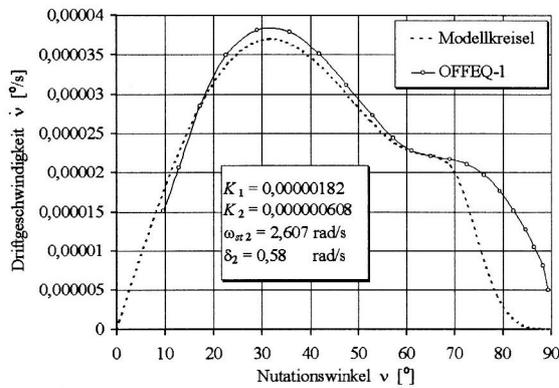


Bild 4. Driftgeschwindigkeit des Modellkreisel mit einer Resonanz

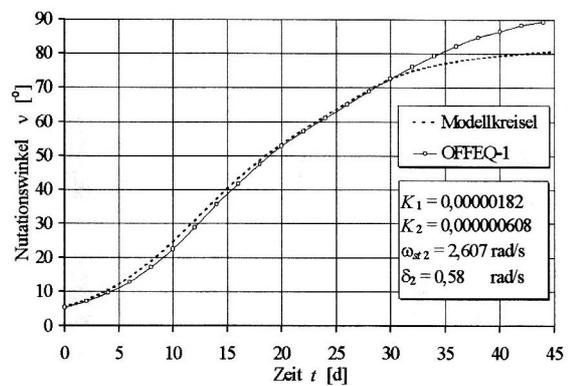


Bild 5. Driftvorgang des Modellkreisel mit einer Resonanz

Um die Versuchsergebnisse des OFFEQ-1 noch besser mit der vorgeschlagenen Vorgehensweise theoretisch interpretieren zu können, geht man weiter und nimmt an, daß jedes der beiden Punktmassensysteme bei einer bestimmten Lage der Driftbewegung Resonanz erfährt. Die Driftgeschwindigkeit des gesamten Modellkreisel ergibt sich dann zu

$$\dot{\nu} = \left[ \sum_{i=1}^n K_i \frac{1}{\left( 1 - \frac{\omega_{\nu}^2}{\omega_{sti}^2} - \frac{\omega_{\sigma}^2}{\omega_{sti}^2} \right) + 4 \frac{\delta_i^2}{\omega_{sti}^4}} \right] \sin \nu \cos^3 \nu \quad n = 2 \quad (21)$$

Für  $K_i$ ,  $\delta_i$  und  $\omega_{sti}$  gelten weiter die Gleichungen (20). Das Ergebnis der numerischen Integration der Gleichung (21) gegenüber der experimentellen Lagedriftkurve des OFFEQ-1 ist im Bild 6 dargestellt. Die gewählten Resonanzen liegen diesmal bei  $\nu = 8^\circ$  und  $\nu = 80^\circ$ . Damit gelingt es jedoch immer noch nicht, den Lagedriftverlauf von OFFEQ-1 zufriedenstellend zu interpretieren. Die Gestalt der Kurve am Ende des Nutationswinkelverlaufs des OFFEQ-1 (nach etwa  $\nu = 80^\circ$ ) hat wahrscheinlich damit zu tun, daß der Satellit in Wirklichkeit nicht ganz axialsymmetrisch und nicht ganz drehmomentfrei ist. Aber sogar für diesen Fall gelingt es, den Nutationswinkelverlauf bei OFFEQ-1 am Ende der Lagedrift mit Hilfe der Gleichung (21) und einer weiteren Resonanz ( $n = 3$ ) sehr gut anzunähern (Bild 7).

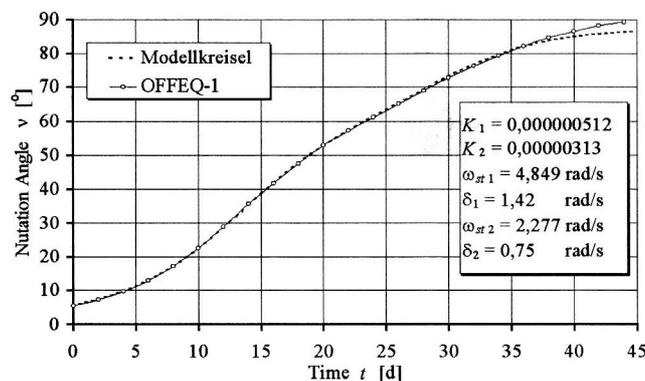


Bild 6. Driftvorgang des Modellkreisel mit zwei Resonanzen

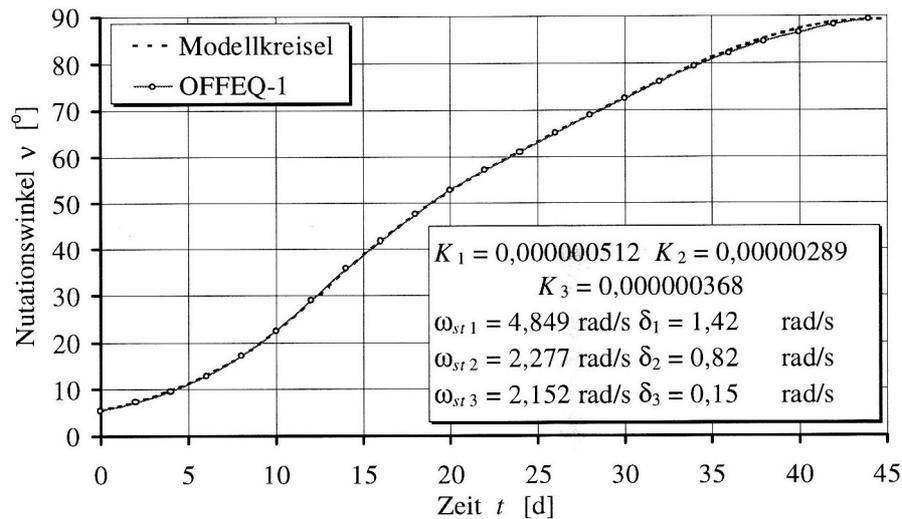


Bild 7. Driftvorgang des Modellkreislers mit drei Resonanzen bei  $\nu = 8^\circ, 80^\circ, 88^\circ$

### Zusammenfassung

Die vorangegangenen Betrachtungen zeigen, daß man mit Hilfe von Resonanzen den Lagedriftvorgang realer (drehmomentfreier axialsymmetrischer) Satelliten anscheinend beliebig genau interpretieren kann. Es sei dabei jedoch betont, daß die vorgeschlagene Vorgehensweise, d. h. die Annahme struktureller Resonanzen, zur Interpretation der Versuchsergebnisse nur *eine* mögliche Erklärung zum Verhalten wirklicher Kreiselsatelliten während der Lagedrift ist. Es können durchaus auch andere Faktoren, solche wie z. B. Gravitationsmomente, Luftreibung usw. eine Rolle spielen. Auch ist es vorstellbar, daß der gewählte Modellkreisler (Bild 1) den tatsächlichen Aufbau von OFFEQ-1 nicht zufriedenstellend modelliert. Eine detaillierte theoretische Beschreibung des Driftvorganges realer Satelliten ist tatsächlich sehr schwierig, wenn nicht gar unmöglich.

### Literatur

1. Klajn, M.; Gur, I.: Nutational Divergence Time Constant of a Spinning Axisymmetric Spacecraft Due to Damped Elastic Structural Elements. Proceedings, 1992 AIAA/AAS Astrodynamics Conference, Hilton Head Island, S. 47-52, (1992)
2. Rimrott, F.P.J.: Introductory Attitude Dynamics. Springer-Verlag, New York, (1989)

---

*Anschrift:* Dipl.-Mech. Alexander Saitov, Professor Dr.-Ing. Dr. h.c. mult. F.P.J. Rimrott,  
 Institut für Mechanik, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, Postfach 4120, D-39016 Magdeburg