

Lebensdauerabschätzung dünnwandiger Flächentragwerke auf der Grundlage phänomenologischer Materialmodelle für Kriechen und Schädigung

J. Altenbach, H. Altenbach, K. Naumenko

Unserem Kollegen Prof. Dr.-Ing. Peter Haupt zum 60. Geburtstag gewidmet

Grundlage einer numerischen Lebensdaueranalyse dünner Schalen und Platten sind zwei phänomenologische schädigungsmechanische Konstitutivmodelle zur Beschreibung des Werkstoffkriechens mit einer unterschiedlichen Anzahl von inneren Zustandsvariablen. Für zwei Sonderfälle der Schalentheorie (flache Schalen und Platten mit rechteckigem Grundriß sowie rotationssymmetrische Schalen) werden die Grundgleichungen und das Anfangs-Randwertproblem formuliert. Für ausgewählte numerische Beispiele werden die für die beiden Werkstoffmodelle gefundenen Ergebnisse zur Lebensdauerabschätzung verglichen und bewertet.

1 Einleitung

Dünnwandige Schalen und Platten sind als Bauteile vielfach in Konstruktionen eingesetzt, die bei erhöhten Temperaturen arbeiten, z.B. im chemischen Anlagebau oder in Energieanlagen. Ihre Lebensdauer ist durch zeitabhängige Kriechprozesse und Werkstoffschädigung begrenzt, da diese Faktoren schon bei einer mäßigen Beanspruchung zu einer Makrorißinitiierung und zum vorzeitigen Versagen führen können.

Numerische Analysen zum Kriechen dünnwandiger Bauteile wurden in zahlreichen Arbeiten, z.B. Cocks und Leckie (1988), Betten u.a. (1989), Bondar und Chrzanowski (1991), Altenbach u.a. (1996), vorgenommen. Die Grundlage dieser Untersuchungen waren Konstitutivmodelle der Kriechschädigung mit einer phänomenologischen inneren Variablen, wobei die Identifikation der Werkstoffkennwerte aus einachsigen Kurzzeitversuchen für bestimmte Spannungsbereiche möglich war. Für eine Extrapolation auf größere Spannungsbereiche, die in dünnwandigen Bauteilen realisiert werden, muß das Kriechmodell die Abhängigkeit der Verzerrungsgeschwindigkeit von der Spannung adäquat wiedergeben. Weiterhin ist die Berücksichtigung der Art des Spannungszustandes bei mehrachsiger Beanspruchung, insbesondere im tertiären Kriechbereich, erforderlich. Daher muß das Werkstoffmodell u.a. bekannte Mechanismen der Kriechdeformation und der Hohlraumbildung beim Kriechen in Abhängigkeit vom Spannungsniveau und vom Spannungszustand berücksichtigen.

Im Rahmen dieser Arbeit werden zwei schädigungsmechanische Werkstoffmodelle mit unterschiedlicher Anzahl von inneren Variablen, die vorhandene experimentelle Kriechkurven einer Aluminiumlegierung qualitativ gleichwertig approximieren, für die numerische Analyse dünnwandiger Flächentragwerke eingesetzt. An ausgewählten Beispielen werden die Konsequenzen beider Modelle auf die Ergebnisse einer Lebensdauerabschätzung aufgezeigt.

Eine realitätsnahe Langzeitfestigkeitsanalyse erfordert die Verwendung nichtlinearer Flächentragwerksmodelle, da für dünnwandige Bauteile das zeitabhängige Werkstoffkriechen finite Verschiebungen verursachen kann. Die sich hieraus ergebende Einbeziehung der geometrischen Nichtlinearität führt auf eine wesentliche Erhöhung des numerischen Aufwandes insbesondere bei Analyse komplexer dünnwandiger Systeme mit Hilfe der Methode der Finite Elemente. Der Einfluß der geometrischen Nichtlinearität wird für ausgewählte Beispiele unter der Zielstellung untersucht, die Anwendungsgrenzen der klassischen, geometrisch-linearen Theorie aufzuzeigen.

2 Konstitutiv- und Evolutionsgleichungen

Phänomenologische Kriechmodelle können allgemein als System von Konstitutivgleichungen für die Kriechverzerrungsgeschwindigkeiten in Abhängigkeit von den Spannungen, der Temperatur und einer Reihe von inneren Zustandsvariablen mit den dazugehörigen Evolutionsgleichungen formuliert werden,

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon}^{cr} &= \frac{\partial F(\sigma^{eq}, T, H_1, \dots, H_n, \omega_1, \dots, \omega_m)}{\partial \sigma} \\ \dot{H}_i &= \dot{H}_i(\sigma_H^{eq}, T, H_1, \dots, H_n, \omega_1, \dots, \omega_m) \quad i = 1, \dots, n, \\ \dot{\omega}_k &= \dot{\omega}_k(\sigma_\omega^{eq}, T, H_1, \dots, H_n, \omega_1, \dots, \omega_m) \quad k = 1, \dots, m,\end{aligned}\tag{1}$$

wobei $\dot{\epsilon}^{cr}$ die Geschwindigkeit des Kriechverzerrungstensors ist, σ ist der Spannungstensor, F ist ein Kriechpotential, H_i, ω_k stellt einen Satz innerer Zustandsvariablen dar und $\sigma^{eq}, \sigma_H^{eq}$ sowie σ_ω^{eq} sind die Vergleichsspannungen, die das Primär-, Sekundär- und Tertiärkriechverhalten beeinflussen. Die Wahl von inneren Zustandsvariablen und der Form des Kriechpotentials hängt von den jeweiligen physikalischen Mechanismen eines Kriechprozesses ab und ergibt sich aus den experimentellen Meßmöglichkeiten sowie den Anwendungsbelangen, vgl. Chosh und McLean (1992).

Einachsige Kriechversuche werden in der Regel bei einer konstanten Spannung und Temperatur durchgeführt. Die Werkstoffkennwerte in den phänomenologischen Kriechmodellen werden aus für einen bestimmten Spannungsbereich gemessenen Kriechkurven identifiziert. Für die minimale Kriechverzerrungsgeschwindigkeit im Sekundärbereich, vgl. Bild 1, werden empirische Funktionen der Spannung eingesetzt, wobei das Nortonsche Gesetz, hyperbolische Funktionen sowie andere Abhängigkeiten von der Spannung, vgl. Skrzypek (1993), verwendet werden. Das isotrope Kriechverhalten metallischer Werk-

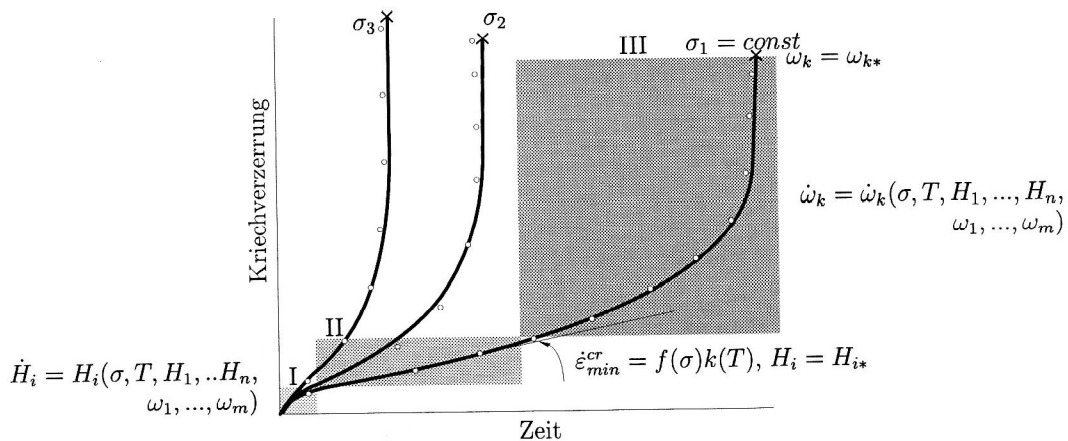


Bild 1. Phänomenologische Beschreibung einachsiger Kriechkurven: I - Primär-, II - Sekundär-, III - Tertiärkriechen

stoffe im Sekundärbereich wird in der Regel als inkompressibel und als unabhängig von der Belastungsart vorausgesetzt. Dies führt zu einer Verallgemeinerung auf mehrachsige Spannungszustände, wobei nur die zweite Invariante des Spannungsdeviators berücksichtigt wird. Damit ergibt sich aus dem Potenzgesetz

$$F(\sigma^{eq}) = A \frac{(\sigma^{vM})^{n+1}}{n+1} \quad \dot{\epsilon}^{cr} = \frac{3}{2} A (\sigma^{vM})^{n-1} s \tag{2}$$

mit

$$\sigma^{vM} = \sqrt{3 J_{2s}(s)} = \sqrt{\frac{3}{2} s \cdot s} \quad s = \sigma - (\text{tr} \sigma) / 3 \tag{3}$$

σ^{vM} ist die Vergleichsspannung nach von Mises und s der Deviator des Spannungstensors. Analog liefert

der hyperbolische Funktionsansatz, vgl. Perrin und Hayhurst (1996)

$$F(\sigma^{eq}) = \frac{A}{B} \cosh(B\sigma^{vM}) \quad \dot{\epsilon}^{cr} = \frac{3}{2}A \sinh(B\sigma^{vM}) \frac{\mathbf{s}}{\sigma^{vM}} \quad (4)$$

In den Gleichungen (2), (4) sind A , B und n Werkstoffkennwerte, die aus einachsigen Kriechversuchen bei einer konstanten Temperatur ermittelt werden. Eine Erweiterung der Kriechmodelle (2) bzw. (4) auf eine Erfassung der Unsymmetrie des Werkstoffverhaltens bezüglich der Belastungsart ist durch die Einbeziehung von drei Invarianten des Spannungstensors möglich. Dabei kann die Vergleichsspannung σ^{eq} wie folgt ausgedrückt werden, vgl. Altenbach u.a (1995)

$$\sigma^{eq} = \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 + \gamma\varphi_3 \quad (5)$$

mit

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \mu_1 I_1 & \varphi_2 &= \mu_2 I_1^2 + \mu_3 I_2 & \varphi_3 &= \mu_4 I_1^3 + \mu_5 I_1 I_2 + \mu_6 I_3 \\ I_1 &= \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma} & I_2 &= \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma} & I_3 &= (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \boldsymbol{\sigma} \end{aligned}$$

Hierbei sind I_i ($i = 1, 2, 3$) Grundinvarianten, die sich durch Hauptinvarianten des Spannungstensors ausdrücken lassen, μ_1, \dots, μ_6 sind Werkstoffkennwerte. In Gleichung (5) sind α , β , γ numerische Koeffizienten, die das Gewicht der jeweiligen Invariante kennzeichnen. Werkstoffmodelle zum Sekundärkriechen mit der Vergleichsspannung (5) und ihre Anwendung für die Analyse der Verformung von Schalen werden bei Altenbach u.a. (1996) diskutiert.

Für die Berücksichtigung des Primärkriechens sind die Gleichungen (2), (4) durch zusätzliche innere Variablen zu erweitern. Für den Fall einer stationären Beanspruchung kann eine Zeit- oder Deformationsverfestigungsfunktion verwendet werden, vgl. z.B. Skrzypek (1993). Bei variablen und zyklischen Belastungen ist die Verwendung von Verfestigungsvariablen H_i relevant, vgl. Chosh und McLean (1992), Inoue (1994).

Das Tertiärkriechen, das dominant durch Entstehung und Wachstum von Mikroporen und Mikrorissen gekennzeichnet ist, kann durch einen oder mehrere Schädigungsparameter ω_k , die auch tensoriell sein können, erfaßt werden. Mit kritischen Werten der Schädigungsvariablen ω_k^* kann dabei das Versagen einachsiger Proben beschrieben werden.

Das Kriechmodell nach Kachanov (1958) und Rabotnov (1969) basiert auf einem phänomenologischen Kontinuitäts- bzw. Schädigungsparameter, der zunächst als Verhältnis einer geschädigten Schnittfläche zu einer Ausgangsschnittfläche definiert wird. Unter Verwendung des Konzeptes der effektiven Spannung sowie des Prinzips der Verzerrungsäquivalenz, vgl. Lemaitre und Chaboche (1990), kann ein Kriechgesetz für die Beschreibung des Primär- und Sekundärkriechens auf den Tertiärbereich verallgemeinert werden. Für den Fall des Nortonschen Kriechgesetzes für das Sekundärkriechen und einer Zeitverfestigungsfunktion für das Primärkriechen kann das Kriechmodell wie folgt formuliert werden:

$$\dot{\epsilon}^{cr} = \frac{3}{2}A \left(\frac{\sigma^{vM}}{1 - \omega} \right)^n t^m \frac{\mathbf{s}}{\sigma^{vM}} \quad (6)$$

Hierbei ist t die Zeitvariable und A , n , m sind temperaturabhängige Werkstoffkennwerte. Die Konstitutivgleichung (6) wird durch eine Evolutionsgleichung für die Schädigungsvariable ergänzt, wobei die Schädigungsgeschwindigkeit als eine Funktion der Spannung und des momentanen Schädigungszustandes wie folgt postuliert wird, vgl. Hayhurst und Leckie (1977),

$$\begin{aligned} \dot{\omega} &= \frac{B \langle \sigma_\omega^{eq} \rangle^l}{(1 - \omega)^k} t^m & \sigma_\omega^{eq} &= \alpha\sigma_1 + 3\beta\sigma_H + (1 - \alpha - \beta)\sigma^{vM} \\ \langle \sigma_\omega^{eq} \rangle &= \sigma_\omega^{eq} \quad \text{für} \quad \sigma_\omega^{eq} > 0 & \langle \sigma_\omega^{eq} \rangle &= 0 \quad \text{für} \quad \sigma_\omega^{eq} \leq 0 & \sigma_H &= \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \\ 0 &\leq \omega \leq \omega_* \end{aligned} \quad (7)$$

Die Größe σ_1 ist die maximale Hauptspannung, b , l , k , ω_* , α , β sind Werkstoffkennwerte. Das Modell

nach Kachanov–Rabotnov ermöglicht, das Kriechverhalten metallischer Werkstoffe auf einfache Weise zu beschreiben. Es wird in zahlreichen Arbeiten verwendet. Für eine verbesserte Modellierung der Kriechschädigung, insbesondere bei mehrachsiger Beanspruchung werden in der Fachliteratur zwei Möglichkeiten der Verallgemeinerung diskutiert. Die erste Möglichkeit basiert auf einer tensoriellen Definition der Schädigungsvariablen mit entsprechender Verallgemeinerung des Effektivspannungskonzeptes zum Zweck der Einbeziehung der Anisotropie der Werkstoffschädigung, vgl. Lemaitre und Chaboche (1990), Murakami (1987). Die zweite Möglichkeit, vgl. Chosh und McLean (1992), Hayhurst (1994), Kowalewski u.a. (1994), Perrin und Hayhurst (1996), vernachlässigt die Richtungsabhängigkeit der Schädigung, verwendet aber mehrere Entfestigungsvariablen, die bekannte physikalische Mechanismen der Schädigungsevolution reflektieren sollen.

Das Kriechmodell nach Hayhurst u.a., vgl. Kowalewski u.a. (1994), Perrin und Hayhurst (1996), basiert auf angenommenen Mechanismen der intergranularen Hohlräumbildung beim Kriechen. Ausgangspunkt ist die Voraussetzung, daß für ferritische Stähle und Aluminiumlegierungen die Gesamtkriechverzerrungsrate approximativ durch eine lokale Deformationsrate an den Korngrenzen ausgedrückt werden kann. Die Erzeugung von Hohlräumen an Partikeln wird dabei als proportional zur lokalen Deformation und zum Spannungszustand wie folgt angenommen:

$$\frac{A_k}{A_0} = D \varepsilon^{eq} \left(\frac{\sigma_1}{\sigma^{eq}} \right)^\mu \quad (8)$$

wobei A_k die Kavitationsfläche darstellt und D sowie μ mikrostrukturabhängige Kennwerte sind. Das Wachstum von Hohlräumen wird im wesentlichen durch akkumulierte Kriechverzerrungen beeinflusst. Die Hohlräumbildung und das Wachstum von Hohlräumen werden dabei im Konstitutivmodell mit einem Gesamtmaß ω erfaßt. Der kritische Zustand, bei dem die Hohlräume zusammenwachsen und der Bruch in einachsigen Proben beobachtet wird, ist erreicht, wenn die Kavitationsfläche ungefähr ein Drittel der Gesamtfläche einnimmt. Weiterhin wird zur Charakterisierung der Alterung der aus Partikeln bestehenden Mikrostruktur bei erhöhter Temperatur, die die Entstehung neuer Hohlräume wesentlich beeinflusst, eine innere Variable Φ mit entsprechender Evolutionsgleichung eingeführt, vgl. Perrin und Hayhurst (1996),

$$\dot{\Phi} = \left(\frac{K_c}{3} \right) (1 - \Phi)^4 \quad (9)$$

mit K_c als materialabhängigen Kennwert. Das Primärkriechen, das durch Formation der Dislokationsstruktur charakterisiert wird, läßt sich mit folgender Evolutionsgleichung beschreiben:

$$\dot{H} = \frac{h_c \dot{\varepsilon}^{eq}}{\sigma^{eq}} \left(1 - \frac{H}{H_*} \right) \quad (10)$$

wobei h_c ein Werkstoffkennwert und H_* eine werkstoffspezifische Sättigungsgröße sind.

Die Geschwindigkeit der Gleitung an den Korngrenzen wird hauptsächlich durch das Klettern und die Versetzungsbewegung beeinflusst. Der Ablauf beider Vorgänge wird für einige durch Partikel verstärkte Legierungen nicht als sequentiell, sondern als parallel angenommen, vgl. Perrin und Hayhurst (1996). Daher wird die Abhängigkeit der Geschwindigkeit der Kriechverzerrung von der Spannung im Sekundärbereich mit Hilfe des hyperbolischen Funktionsansatzes (4) postuliert.

Für den Fall einer Aluminiumlegierung werden die folgenden Konstitutivgleichungen verwendet, wobei

drei innere Zustandsvariablen eingesetzt werden, Kowalewski u.a. (1994):

$$\begin{aligned}
 \dot{\varepsilon}^{cr} &= \frac{3}{2} \frac{A}{(1-\omega)^n} \frac{s}{\sigma^{vM}} \sinh \left[\frac{B\sigma^{vM}(1-H)}{1-\Phi} \right] \\
 \dot{H} &= \frac{h_c}{\sigma^{vM}} \frac{A}{(1-\omega)^n} \sinh \left[\frac{B\sigma^{vM}(1-H)}{1-\Phi} \right] \left(1 - \frac{H}{H_*} \right) \\
 \dot{\Phi} &= \frac{K_c}{3} (1-\Phi)^4 \\
 \dot{\omega} &= \frac{DA}{(1-\omega)^n} \left(\frac{\sigma_1}{\sigma^{vM}} \right)^\mu N \sinh \left[\frac{B\sigma^{vM}(1-H)}{1-\Phi} \right] \\
 n &= \frac{B\sigma^{vM}(1-H)}{1-\Phi} \coth \left[\frac{B\sigma^{vM}(1-H)}{1-\Phi} \right] \\
 N &= 1 \quad \text{für } \sigma_1 > 0 \quad \quad N = 0 \quad \text{für } \sigma_1 \leq 0 \\
 0 &\leq \omega < 0.3 \quad \quad 0 \leq \Phi < 1 \quad \quad 0 \leq H \leq H_*
 \end{aligned} \tag{11}$$

Die physikalische Motivation des Werkstoffmodells (11) sowie die Methode der Parameteridentifikation werden bei Kowalewski u.a. (1994) sowie bei Perrin und Hayhurst (1996) ausführlich diskutiert.

Im weiteren verwenden wir beide Werkstoffmodelle für die Langzeitfestigkeitsanalyse dünnwandiger Bauteile. Die Kennwertermittlung in beiden Modellen wurde von Kowalewski u.a. (1994) basierend auf vorhandenen einachsigen experimentellen Kriechkurven einer Aluminiumlegierung für den Spannungsbereich von 227 bis 262 MPa und für ein Zeitintervall von 0 bis 1000 h vorgenommen. Mit den Werkstoffkennwerten $A = 3.511 \cdot 10^{-31} \text{ MPa}^{-n}/\text{h}^{m+1}$, $B = 1.960 \cdot 10^{-23} \text{ MPa}^{-x}/\text{h}^{m+1}$, $l = 8.220$, $n = 11.034$, $k = 12.107$, $m = -0.3099$ für die Gleichungen (6), (7) und $A = 2.960 \cdot 10^{-11} \text{ h}^{-1}$, $B = 7.167 \cdot 10^{-2} \text{ MPa}^{-1}$, $h_c = 1.370 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, $H^* = 0.2032$, $K_c = 19.310 \cdot 10^{-5} \text{ h}^{-1}$, $D = 6.630$ für die Gleichungen (11) liefern beide Modelle eine qualitativ gleiche Beschreibung einachsiger Kriechkurven, vgl. Kowalewski u.a. (1994).

3 Flächentragwerksmodelle

Die Grundgleichungen der Schalentheorie werden im Rahmen der Kirchhoff-Love-Hypothesen unter Voraussetzung kleiner Verzerrungen eingeführt. Die geometrisch-nichtlinearen Terme in den kinematischen und statischen Gleichungen lassen sich entsprechend der Annahme finiter Durchbiegungen berücksichtigen. Anfangs-Randwertprobleme werden für zwei Sonderfälle der Schalentheorie formuliert.

Für flache Schalen und Platten mit rechteckigem Grundriß, Bild 2, werden kartesische Koordinaten verwendet. Die kinematischen Gleichungen lauten dann

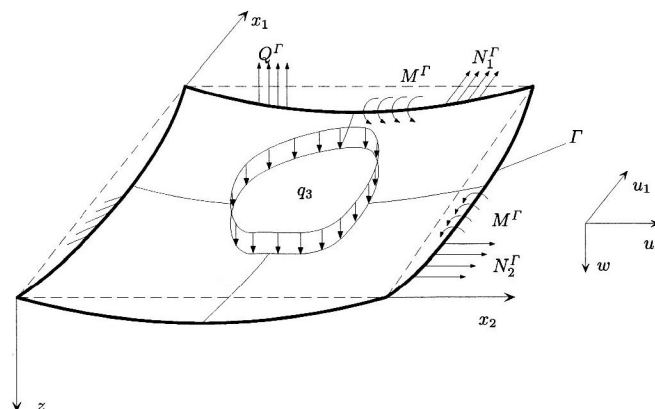


Bild 2. Flache Schale im kartesischen Koordinatensystem

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + w_{,i}w_{,j}) + k_{ij}w + z\mu_{ij}(\mathbf{u}) \quad \mu_{ij}(\mathbf{u}) = -w_{,ij} \quad (12)$$

mit $\mathbf{u}^T = [u_1, u_2, w]$ als Verschiebungsvektor und k_{ij} als Tensor der Krümmungshauptrichtungen. Die Gleichgewichtsbedingungen können wie folgt aufgeschrieben werden

$$N_{ij,j} = 0 \quad Q_i = M_{ij,j} \quad Q_{i,i} + (w_{,ij} - k_{ij})N_{ij} + q_z = 0 \quad (13)$$

wobei N_{ij} die Membrankräfte, M_{ij} die Biege- und Torsionsmomente und Q_i die Querkräfte sind.

Für den Fall rotationsymmetrischer Schalen wird das orthogonale Koordinatensystem α_1, α_2, z , Bild 3, verwendet, wobei α_1 die Meridian- und α_2 die Umfangskoordinate sind. Die Schalenmittelfläche wird durch die Krümmungen k_1 und k_2 sowie durch die Laméschen Parameter A_1 und A_2 definiert. Die

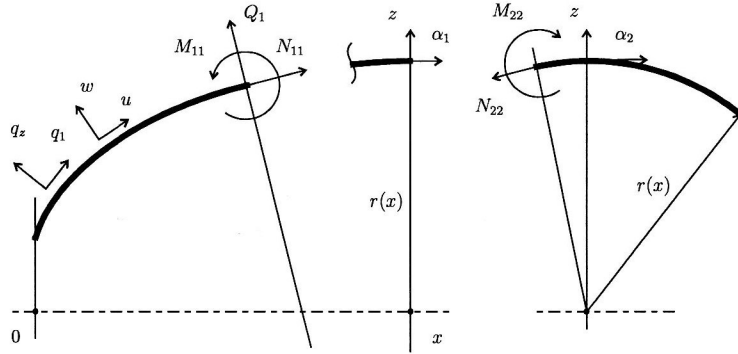


Bild 3. Schnittgrößen einer rotationssymmetrischen Schale in krümmenden Koordinaten

kinematischen Beziehungen lassen sich in folgender Form einführen

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= e_{ij} + z\mu_{ij} \\ e_{11} &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + k_1 w + \frac{1}{2} \theta_1^2 & e_{22} &= \frac{1}{A_1} \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} u_1 + k_2 w \\ \mu_{11} &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial \theta_1}{\partial \alpha_1} & \mu_{22} &= \frac{1}{A_1} \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \theta_1 \\ \theta_1 &= -\frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} + k_1 u_1 \end{aligned} \quad (14)$$

wobei θ_1 der Rotationswinkel des Normalenvektors zur Schalenmittelfläche ist. Die statischen Gleichungen ergeben sich für die im Bild 3 definierten Schnittgrößen N_{11} , N_{22} , M_{11} , M_{22} und Q_1 zu

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_1} \frac{\partial N_{11}}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1} \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} (N_{11} - N_{22}) + k_1 Q_1 + q_1 &= 0 \\ \frac{1}{A_1} \frac{\partial M_{11}}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1} \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} (M_{11} - M_{22}) - Q_1 - N_{11} \theta_1 &= 0 \\ \frac{1}{A_1} \frac{\partial Q_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1} \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} Q_1 - k_1 N_{11} - k_2 N_{22} + q_z &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

Die Konstitutivgleichungen werden für die beiden Schalenmodelle in der Form des verallgemeinerten Hookeschen Gesetzes formuliert

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{ct}) \quad (16)$$

Unter der Voraussetzung, daß das Material homogen und isotrop ist, wird der Tensor der elastischen Werkstoffkennwerte wie folgt dargestellt:

$$C_{ijkl} = \frac{E}{2(1-\nu^2)} [(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})(1-\nu) + 2\nu\delta_{ij}\delta_{kl}] \quad (17)$$

mit E als Elastizitätsmodul, ν als Querkontraktionszahl und δ_{ij} als Kronecker-Symbol. Nach Integration der Gleichungen (16) über die Schalendicke h erhält man die Konstitutivgleichungen für die Schnittgrößen mit den Kriechkomponenten N_{ij}^{cr} , M_{ij}^{cr}

$$N_{ij} = g_{ijkl}^I e_{kl} - N_{ij}^{cr} \quad M_{ij} = g_{ijkl}^{II} \mu_{kl} - M_{ij}^{cr} \quad (18)$$

$$N_{ij}^{cr} = \int_h C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^{cr} dz \quad M_{ij}^{cr} = \int_h C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^{cr} z dz \quad (19)$$

mit

$$e_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) + k_{ij}w + w_{,i}w_{,j}$$

$$g_{ijkl}^I = C_{ijkl}h \quad g_{ijkl}^{II} = C_{ijkl}h^3/12 \quad i, j, k, l = 1, 2$$

Für die Vollständigkeit der Anfangs-Randwertprobleme sind die eingeführten Gleichungen durch Anfangs- und Randbedingungen sowie durch die bereits eingeführten Konstitutivgleichungen (6), (7) oder (11) für den Kriechprozeß zu ergänzen. Als Anfangsbedingung wird die elastische Lösung des Problems unter einer vorgegebenen Belastung eingesetzt. Der Einfachheit halber wird hier der Einfluß eines stationären Temperaturfeldes auf den Spannungszustand vernachlässigt.

Die numerische Lösung der Kriechprobleme wurde mit Hilfe einer Zeitdiskretisierung durchgeführt, wobei zu jedem Zeitschritt linearisierte Randwertprobleme gelöst wurden. Für flache Schalen und Platten mit rechteckigem Grundriß wurde, basierend auf den Grundgleichungen (12), (13) und (16), ein gemischtes Variationsproblem formuliert. Die Hauptunbekannten des Problems wurden mit Hilfe von Ansatzfunktionen, die über das Gesamtrechteckgebiet definiert sind, approximiert. Die Lösung des Anfangswertproblems wurde mit Hilfe des impliziten Euler-Verfahrens durchgeführt. Die numerischen Lösungsansätze sowie Ergebnisse numerischer Testungen sind bei Altenbach und Naumenko (1997) ausführlich diskutiert.

Für den Fall rotationssymmetrischer Schalen wurden die Gleichungen (14), (15), (16) sowie die entsprechenden Konstitutivgleichungen für den Kriechprozeß in ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung transformiert. Die Unbekannten des Problems sind die Verschiebungen, die Schnittkräfte sowie die inneren Zustandsvariablen, die als Feldvariablen angesehen werden. Die Zeitintegration des Gleichungssystems erfolgte mit Hilfe des Einbettungsverfahrens vierter Ordnung nach Kutta-Merson, vgl. Altenbach u.a. (1996). Die numerische Integration des Randwertproblems wurde mit Hilfe der Methode der Übertragungsmatrizen mit einer Orthogonalisierung durchgeführt. Die numerische Verfahren sind in Altenbach u.a. (1996) und Altenbach u.a. (1997) erläutert.

4 Numerische Beispiele

4.1. Vergleich der zwei Werkstoffmodelle

Als erstes Beispiel betrachten wir eine allseitig eingespannte Quadratplatte unter einer Querbewlastung, die auf einer kleinen Fläche $\delta \times \delta$ im Mittelpunkt der Platte verteilt ist. Für die vorgegebenen geometrischen Größen $h = 2.7 \cdot 10^{-2}$ m, $L = 0.8$ m, $\delta = 0.2L$ mit L als Plattenlänge und die Belastungsgröße $q_z = 10$ MPa ist die maximale Vergleichsspannung im Ausgangszustand σ_0^{eq} gleich der oberen Grenze des Spannungsbereiches, für den die bereits eingeführten Werkstoffkennwerte in beiden Werkstoffmodellen identifiziert wurden. Für die Gleichwertigkeit der beiden Modelle bei mehrachsigen Beanspruchungen wurde $\alpha = \beta = 0$ in den Gleichungen (7) sowie $\mu = 0$ in den Gleichungen (11) in den Vergleichsberechnungen angenommen. Der Einfluß von μ wird in einem nachfolgenden Beispiel untersucht. Auf den Bildern 4 und 5 sind die zeitlichen Verläufe der maximalen Vergleichsspannung sowie einer Kriechverzerrungskomponente dargestellt. Die Linien 1 und 2 entsprechen den auf den beiden Werkstoffmodellen basierenden Ergebnissen. Die Berechnungen wurden bis zum Erreichen der vorgegebenen kritischen Größe der Schädigungsvariablen durchgeführt. Eine gute Übereinstimmung zwischen den Ergebnissen ist nur für die Übergangsperiode vom elastischen zu einem stationären Kriechzustand zu erkennen. Nach dem Zeitpunkt, in dem die Spannung ungefähr 0.5 der Ausgangsgröße erreicht, ist ein wesentlicher Unterschied zwischen den Ergebnissen zu sehen. Die Unterschiede in der Verzerrungszunahme sind mit der

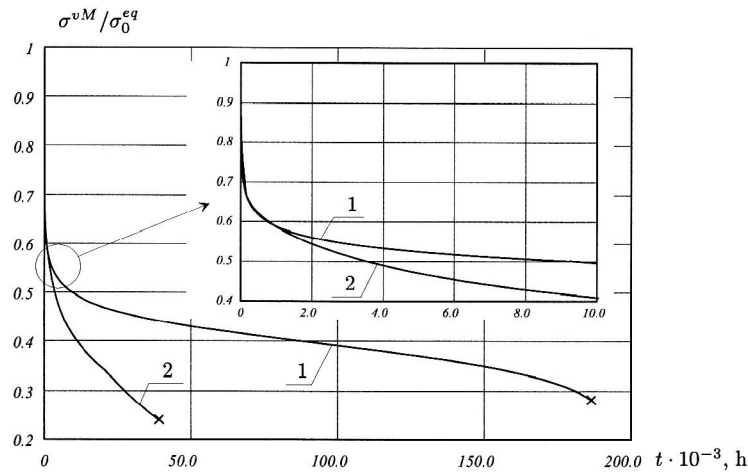


Bild 4. Zeitverläufe der maximalen Vergleichsspannung einer Quadratplatte basierend auf zwei Werkstoffmodellen: 1 - Modell (6), (7), 2 - Modell (11)

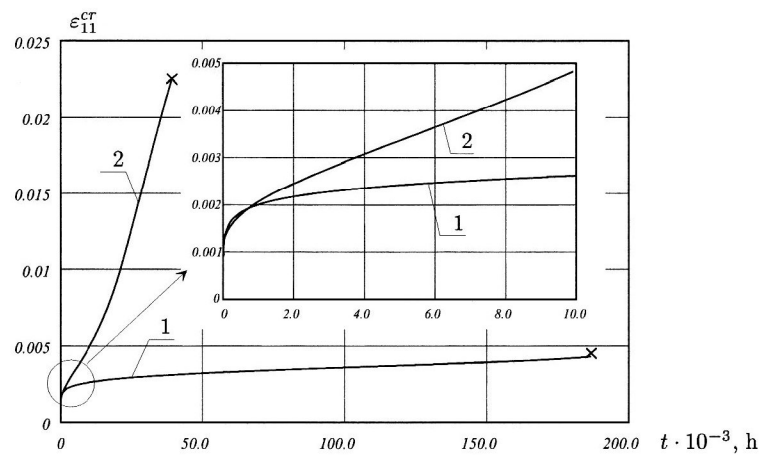


Bild 5. Zeitverläufe einer Kriechverzerrungskomponente im Mittelpunkt der Plattenoberfläche basierend auf zwei Werkstoffmodellen: 1 - Modell (6), (7), 2 - Modell (11)

weiteren Spannungsrelaxation größer, da die Sensitivität der Verzerrungsrate zum Spannungszustand nur für einen bestimmten Spannungsbereich von beiden Werkstoffmodellen gleich wiedergegeben wird. Diese Unterschiede führen dazu, daß die Bruchzeit für den Fall des ersten Modells wesentlich überschätzt wird.

Als zweites Beispiel wird eine dünne Zylinderschale betrachtet. Die Schale ist an den Rändern eingespannt und durch Innendruck belastet. Die Abmessungen $h = 2.7 \cdot 10^{-2}$ m, $L = 2$ m, $R = 1$ m mit L als Schalenlänge und R als äußerem Querschnittsradius und die Belastung $q_z = 4$ MPa sind hier so gewählt, daß die maximale Vergleichsspannung im Ausgangszustand wieder 262 MPa beträgt. Die Zylinderschale ist steifer als die vorher betrachtete Platte, deswegen ist die Spannungumlagerung anders ausgeprägt. Aus den Bildern (6) und (7) ist zu erkennen, daß die Ergebnisse für die beiden Werkstoffmodelle – wie im ersten Beispiel – nur für die Übergangsperiode gut übereinstimmen.

4.2. Einfluß des Spannungszustandsindex auf die Schädigungsevolution

Schädigungsvorgänge sind sensitiv bezüglich der Art des Spannungszustandes. Einerseits ist das äquivalente Tertiärkriechen z.B. bei Zug-, Druck- oder Torsionsbeanspruchung unterschiedlich ausgeprägt, andererseits sind die Mechanismen der Hohlrumbildung vom Spannungsniveau abhängig, was im Kriterium für die Schädigungsakkumulation berücksichtigt werden muß. Solche Abhängigkeiten können die Verformung von Schalen und Platten wesentlich beeinflussen, da der Spannungszustand deutliche Zug- und Druckbereiche beinhaltet sowie eine zeitliche Spannungumlagerung stattfindet.

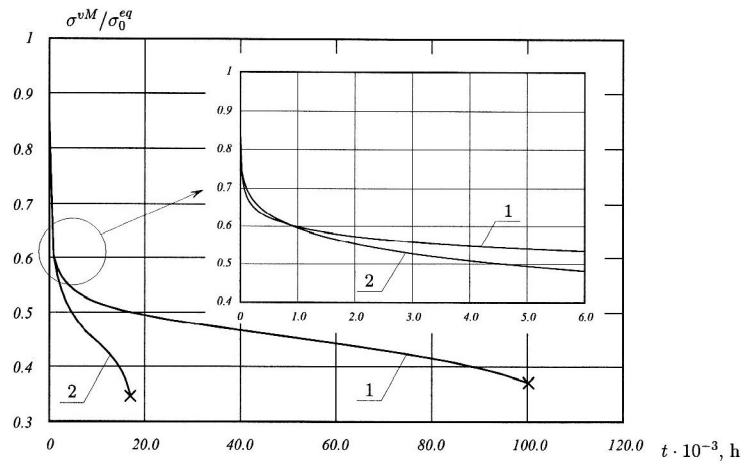


Bild 6. Zeitverläufe der maximalen Vergleichsspannung einer Zylinderschale basierend auf zwei Werkstoffmodellen: 1 - Modell (6), (7), 2 - Modell (11)

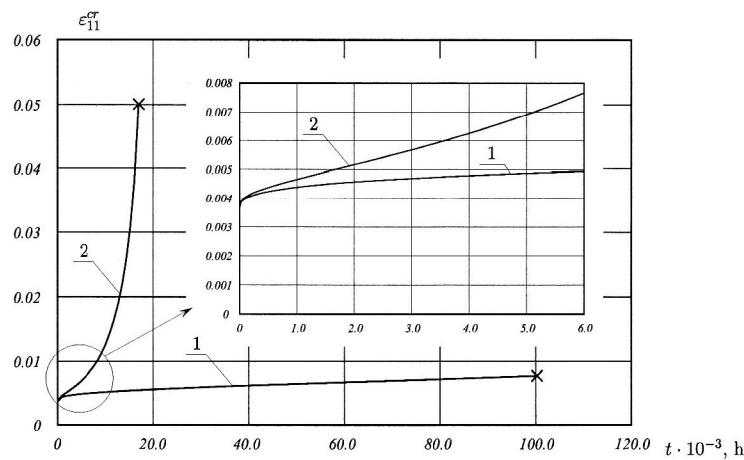


Bild 7. Zeitverläufe einer Kriechverzerrungskomponente einer Zylinderschale basierend auf zwei Werkstoffmodellen: 1 - Modell (6), (7), 2 - Modell (11)

Die Schädigungsentwicklung im Modell (11) ist proportional dem Verhältnis von maximaler Hauptspannung zur Vergleichsspannung nach von Mises mit μ als mikrostrukturabhängigem Kennwert. Um den Einfluß von μ auf das Makroverhalten zu zeigen, wird nach Perrin und Hayhurst (1996) die Evolutionsgleichung für die Variable ω zeitlich integriert. Als Ergebnis können Spannungszustände, die zu einer gleichen Bruchzeit führen, ermittelt werden. In den Achsen der normalisierten Hauptspannungen können diese Spannungszustände in der Form einer isochronen Fläche dargestellt werden. Bei $\mu = 0$ stellt die isochrone Fläche die von Mises-Ellipse dar, vgl. Perrin und Hayhurst (1996). Mit zunehmendem μ verschieben sich die isochronen Kurven zu den Hauptspannungsgeraden. Weiterhin sind die isochronen Kurven vom Spannungsniveau abhängig. Wird z.B. bei einer Vergleichsspannung von 100 MPa die Schädigungsevolution nur durch das von Mises-Kriterium beeinflusst, ist bei 40 MPa die Abhängigkeit von der maximalen Hauptspannung deutlich zu erkennen. Nach Perrin und Hayhurst (1996) wird μ als Index des Spannungszustandes bezeichnet. Für die Identifikation dieses Werkstoffkennwertes sind mehrachsige Kriechversuche bis zum Versagen erforderlich. Da solche Versuche in jedem Anwendungsfall sehr aufwendig sind, ist es sinnvoll, den Einfluß von μ auf die Langzeitfestigkeit von Platten zunächst numerisch zu überprüfen.

Betrachtet wird eine Quadratplatte unter gleichmäßig verteilter Belastung $q_z = 2.6$ MPa. In den Berechnungen wurde $L = 1$ m, $h = 5 \cdot 10^{-2}$ m angenommen. Der Einfluß des Indexes μ auf die Verformung, die Lebensdauerabschätzung sowie auf die Verteilung der Schädigungsvariablen für eine Quadratplatte sind im Bild 8 dargestellt, wobei bei den Berechnungen μ zwischen 0 und 5 variiert wurde. Die Werte in der zweiten Zeile stellen die maximale Durchbiegung im kritischen Zeitpunkt bezogen auf die maximale

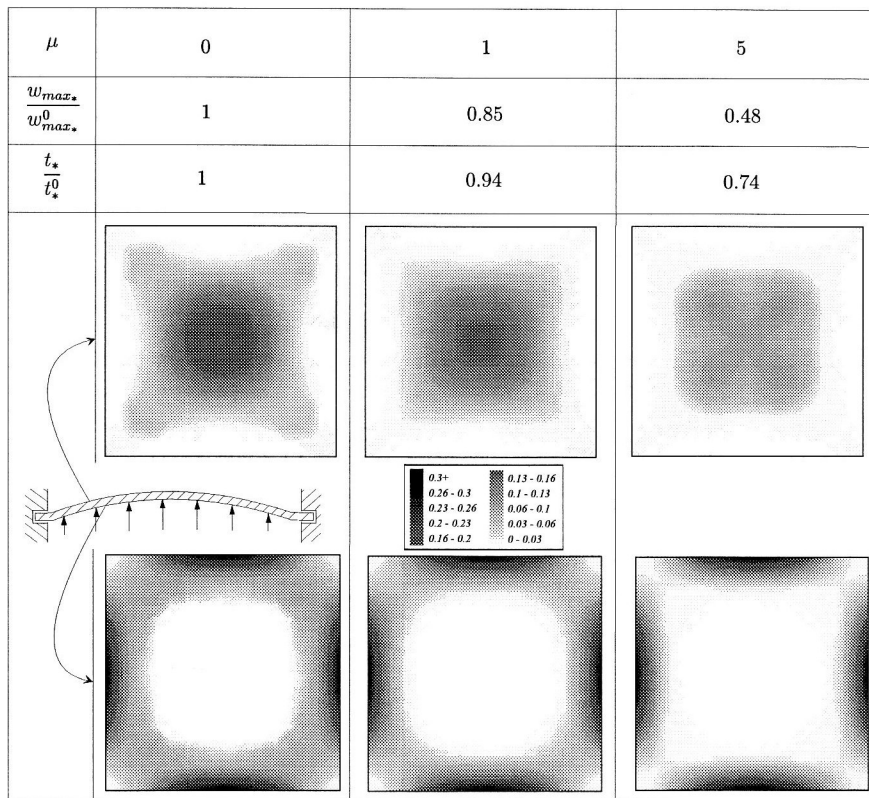


Bild 8. Einfluß des Indexes μ auf die maximale Durchbiegung, die Bruchzeit und die Schädigungsverteilung für eine Quadratplatte; $t_*^0 = 5.8 \cdot 10^4$ h und $w_{max*}^0 = 0.78h$

Durchbiegung bei $\mu = 0$ dar. In der dritten Zeile sind die numerisch ermittelten Werte der Zeit bis zum kritischen Schädigungszustand bezogen auf t_* bei $\mu = 0$ aufgetragen. Es ist zu erkennen, daß die Vernachlässigung des Einflusses der maximalen Hauptspannung, was dem Fall $\mu = 0$ entspricht, zu einer wesentlichen Überschätzung der Verformung und der Lebensdauer führt.

4.3. Einfluß der geometrischen Nichtlinearität auf die Lebensdauerabschätzung

Die Analyse dünnwandiger Bauteile erfordert die Einbeziehung der geometrischen Nichtlinearitäten. Dies ist mit einem erheblichen zusätzlichen numerischen Aufwand verbunden, insbesondere wenn man komplexe dünnwandige Systeme mit der Finite-Elemente-Methode berechnet.

Deswegen war es sinnvoll, den Einfluß geometrisch nichtlinearer Terme auf die Kriechlösungen zunächst an ausgewählten Beispielen der Schalentheorie zu überprüfen. Für das bereits diskutierte Beispiel einer Quadratplatte mit einer auf einer kleinen Fläche verteilten Belastung wird die Vergleichsberechnung durchgeführt, wobei die geometrisch-nichtlinearen Terme in den Gleichungen vernachlässigt wurden. Im Bild 9 ist der Zeitverlauf der maximalen Durchbiegung für die Quadratplatte dargestellt. Die Linie 1 entspricht der Lösung, die bereits für die Quadratplatte diskutiert wurde. Die Linie 2 zeigt die Lösung ohne Einbeziehung der geometrisch-nichtlinearen Terme. Man sieht, daß ab einer gewissen Größe der Durchbiegung die klassische, geometrisch-lineare Theorie eine wesentliche Überschätzung der Verformung liefert.

Das Bild 10 zeigt die Zeitverläufe der Schädigungsvariable in zwei Punkten der Platte. Die klassische Theorie führt zu einer Beschleunigung der Schädigungsentwicklung. Die geometrisch-nichtlineare Theorie liefert eine Verzögerung der Schädigungsrate. Dies ist damit erklärbar, daß bei finiten Durchbiegungen Membrankräfte entstehen, deren Zunahme dem aktuellen Biegezustand entgegenwirkt. Als Folge wird im Rahmen der klassischen Theorie die Lebensdauer wesentlich unterschätzt.

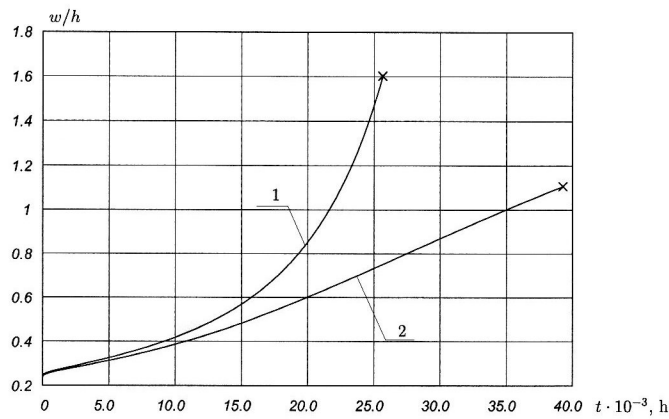


Bild 9. Zeitverlauf der maximalen Durchbiegung einer Quadratplatte unter Anwendung der zwei Schalentheorien: 1 – geometrisch–linear, 2 – geometrisch–nichtlinear

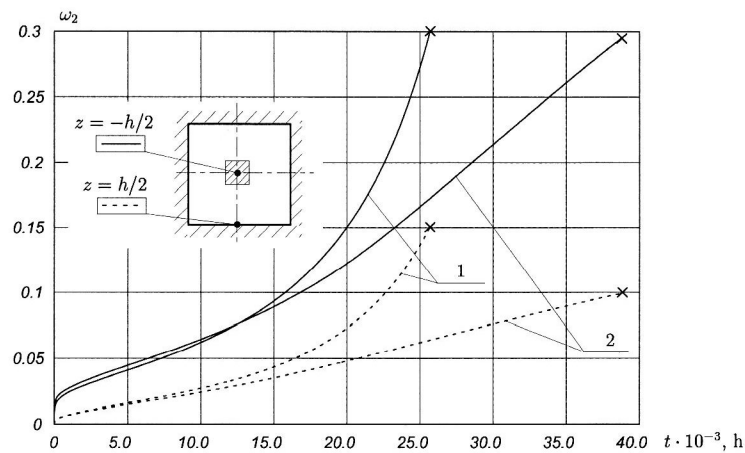


Bild 10. Zeitverläufe der Schädigungsvariable in zwei Punkten der Plattenseiten: 1 – geometrisch–lineare Theorie, 2 – geometrisch–nichtlineare Theorie

5 Zusammenfassung und Ausblick

An numerischen Beispielen wurden unterschiedliche Faktoren studiert, die die Lebensdauerabschätzung dünnwandiger Bauteile wesentlich beeinflussen. Als erstes wurden zwei schädigungsmechanische Kriechmodelle verwendet. Das erste Modell ist rein empirisch und basiert auf einem phänomenologischen Schädigungsparameter. Das zweite Modell hat einen physikalischen Hintergrund und definiert innere Zustandsvariablen entsprechend den bekannten Mechanismen der Kriechdeformation und der intergranularen Hohlraumbildung. Beide Modelle ermöglichen eine qualitativ gleiche Beschreibung einachsiger Kriechkurven, was experimentell für eine Aluminiumlegierung exemplarisch nachgewiesen wurde. Eine qualitative Übereinstimmung in der Charakterisierung der Spannungsrelaxation in dünnwandigen Bauteilen, basierend auf den beiden Werkstoffmodellen, wurde nur für die Übergangsperiode erreicht. Die Ursache dafür liegt darin, daß die Sensitivität der Kriechverzerrungsrate zur Spannung von beiden Modellen nur für den Spannungsbereich, für den die Werkstoffkennwerte identifiziert wurden, gleich wiedergegeben wird. Als Konsequenz liefern beide Werkstoffmodelle starke Unterschiede in der Lebensdauerabschätzung. Die Identifikation von rein phänomenologischen Modellen erfordert Kriechkurven bei niedrigen Spannungen, deren Ermittlung wegen der Dauer eines Kriechversuches bis zum Versagen für jeden Anwendungsfall schwierig ist. In diesem Fall müssen mechanismenorientierte Zusammenhänge (z.B. Abhängigkeiten der Hohlraumbildung vom Spannungsniveau) bei der Werkstoffmodellierung mit aufgenommen werden.

Weiterhin müssen bei finiten Durchbiegungen geometrisch–nichtlineare Terme in der Analyse berücksichtigt werden. Die geometrisch–lineare Analyse liefert eine wesentliche Unterschätzung der Lebensdauer.

Besonderes Interesse für die Ableitung weiterer Aussagen zur Sicherheit und Zuverlässigkeit von Lebensdaueruntersuchungen erfordert eine Implementierung geeigneter Werkstoffmodelle in Finite-Elemente-Programme sowie einen Ansatz von Schalengleichungen mit verbesserten kinematischen Hypothesen.

Literatur

1. Altenbach, H.; Altenbach, J.; Zolochovsky, A.: *Erweiterte Deformationsmodelle und Versagenskriterien der Werkstoffmechanik*. Stuttgart: Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, (1995)
2. Altenbach, H.; Moratschkovsky, O.; Naumenko, K.; Sychov, A.: Zum Kriechen dünner Rotationschalen unter Einbeziehung geometrischer Nichtlinearität sowie der Asymmetrie der Werkstoffeigenschaften. *Forschung im Ingenieurwesen*, **62**, (1996), 3, 47–57
3. Altenbach, H.; Naumenko, K.: Creep bending of thin-walled shells and plates by consideration of finite deflections. *Comp. Mech.*, **19**, (1997), 6, 490–495
4. Altenbach, H.; Morachkovsky, O.; Naumenko, K.; Sychov, A.: Geometrically-nonlinear bending of thin-walled shells and plates under creep-damage conditions. *Arch. Appl. Mech.*, **67**, (1997), 339–352
5. Betten, J.; Borrmann, M.; Butters, T.: Materialgleichungen zur Beschreibung des primären Kriechverhaltens innendruckbeanspruchter Zylinderschalen aus isotropem Werkstoff. *Ing. Arch.*, **60**, (1989), 3, 99–109
6. Bondar, A.; Chrzanowski, M.: Cracking of creeping plates in terms of continuum damage mechanics. *Mech. Teor. i Stos.*, **32**, (1994), 1, 31–41
7. Chosh, R.N.; McLean, M.: High temperature deformation in engineering alloys-modelling for strain of load control. *Acta Metall. Mater.*, **40**, (1992), 11, 3075–3083
8. Cocks, A.C.F.; Leckie, F.A.: Creep rupture of shell structures subjected to cyclic loading. *Trans. ASME. J. Appl. Mech.*, **55**, (1988), 294–298
9. Hayhurst, D.R.; Leckie, F.A.: Constitutive equations for creep rupture. *Acta Metallurgica*, **25**, (1977), 1059–1070
10. Hayhurst, D.R.: The use of continuum damage mechanics in creep analysis for design. *J. of Strain Analysis* **25**, (1994), 3, 233–241
11. Inoue, T.: Inelastic constitutive models under plasticity-creep interaction condition. Theories and evaluations. *JSME Ser. I* **31**, (1994), 4, 653–663
12. Kachanov, L.M.: O vremeni razrusheniya v usloviyakh polzuchesti. *Izv. Akad. Nauk SSR*, **8**, (1958), 26–31
13. Kowalewski, Z.L.; Hayhurst, D.R.; Dyson, B.F.: Mechanism-based creep constitutive equations for an aluminium alloy. *J. of Strain Analysis*, **29**, (1994), 4, 309–316
14. Lemaitre, J.; Chaboche, J.-L.: *Mechanics of solid materials*. Cambridge u.a.: Cambridge University Press, (1990)
15. Murakami, S., *Progress of continuum damage mechanics*. *JSME*, **30**, (1987), 263, 701–710
16. Perrin, I.J.; Hayhurst, D.R.: Creep constitutive equations for a 0.5Cr-0.5Mo-0.25V ferritic steel in the temperature range 600–675°C. *J. of Strain Analysis*, **31**, (1996), 4, 299–314
17. Rabotnov, Y.N.: *Creep Problems in Structural Members.*, Amsterdam: North-Holland, (1969)
18. Skrzypek, J.J.: *Plasticity and Creep*. Boca Raton: CRC Press, (1993)

Anschriften: Prof. Dr.-Ing. Dr.h.c. Johannes Altenbach, Förderstedter Str. 28, 39112 Magdeburg, Prof. Dr.-Ing. Holm Altenbach, Dr.-Ing. Konstantin Naumenko, Fachbereich Werkstoffwissenschaften, Lehrstuhl für Technische Mechanik, Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, D-06099 Halle