

# Zum Einfluß der Elastoplastizität auf die Materialbeanspruchung und mögliche Rißbildung beim Vickerseindruck

V. Marx, H. Balke

*Es erfolgt eine Darstellung der Ergebnisse systematischer FEM-Simulationen des Eindringvorgangs eines starren Vickers- und Kegelindenter in ein elastisch-plastisches Material. Untersucht werden sollen Materialien mit einem großen Verhältnis der Härte  $H$  zum Elastizitätsmodul  $E$ . Zu diesen Stoffen gehören z. B. Gläser, Keramiken und Hartmetalle. Aus den sich ergebenden Spannungsfeldern kann auf eine mögliche Rißinitiierung geschlossen werden.*

## 1 Einleitung

Der seit etwa einhundert Jahren bekannte statische Härtetest dient nicht nur zur Berechnung einer Materialhärte, sondern auch immer mehr zur Bestimmung anderer Materialparameter, wie dem Elastizitätsmodul, der Fließeigenschaften und der Bruchzähigkeit.

Dazu sind jedoch eine erweiterte Versuchsdurchführung und -auswertung erforderlich. So werden zum Beispiel bei der registrierenden Härteprüfung simultan die aktuelle Indenterlast und die Eindringtiefe aufgezeichnet. Dies trägt besonders bei den modernen Mikro- und Nanoeindruckmethoden dazu bei, daß zusätzliche Informationen gewonnen werden können.

Zur Bestimmung von Materialparametern aus dem Härtetest benötigt man eine kontinuumsmechanische Beschreibung des Eindringvorgangs. Analytische Modelle existieren für den Eindruck eines rotations-symmetrischen Indenters in ein linear-elastisches Material unter der Annahme kleiner Verformungen und Verzerrungen. Die Gleitlinienmodelle liefern Lösungen für den Eindruck eines Kegels (Lockett, 1963) oder Keils (Hill, 1960) in ein starrplastisches Material. Die letztgenannten Beispiele sind eine gute Näherung für das Verhalten duktiler Metalle beim Eindringvorgang.

Die starrplastischen Lösungen verlieren ihre Gültigkeit bei Eindrücken an spröden Materialien. Aufgrund des hohen hydrostatischen Drucks unter dem Indenter zeigen diese Stoffe plastische Deformationen, die durch den bleibenden Eindruck nach der Entlastung deutlich werden. Der Härtetest stellt somit eine einfache Möglichkeit dar, an spröden Materialien plastische Deformationen zu erzeugen.

Die Lösung eines elastisch-plastischen Kontaktproblems mit der Berücksichtigung großer Verformungen und Verzerrungen ist analytisch nicht möglich. Das Problem soll in dieser Arbeit numerisch mit der Methode der finiten Elemente gelöst werden. In Abhängigkeit von den Eingabeparametern lassen sich unterschiedliche Rißmodi erklären. Aus den Ergebnissen können Schlußfolgerungen hinsichtlich der Materialparameterbestimmung aus dem Härtetest gewonnen werden. Untersucht wird der Einfluß unterschiedlicher Fließbedingungen auf die Simulationsergebnisse.

## 2 Modellierung

Das Deformationsverhalten spröder Materialien soll, vereinfacht durch ein isotropes, homogenes elastisch-plastisches Modell, ohne zeitabhängige Effekte beschrieben werden. Spröde Stoffe zeichnen sich im Vergleich zu duktilen Metallen durch einen hohen elastischen Deformationsanteil aus. Sie besitzen somit einen hohen Fließwiderstand, der auf die geringe Anzahl von aktivierbaren Gleitsystemen zurückgeführt werden kann.

Der elastische Deformationsanteil wird durch ein hypoelastisches Gesetz beschrieben. Eine einfache Form der Fließbedingung ist die nach Mises. Diese wird auch in Zeng u.a. (1996) als Ausdruck eines ersten geeigneten Schrittes zur Beschreibung spröden Deformationsverhaltens angesehen.

Die Mises-Fließbedingung ist druckunabhängig. Mit einem assoziierten Fließgesetz entstehen keine plastischen Volumenänderungen. Diese Annahmen, die für duktile, polykristalline Metalle gut erfüllt sind, müssen bei spröden Stoffen nicht notwendig zutreffen, weil dort quasiplastisches Verhalten durch Mikrorißbildung verursacht werden kann. Es sind außerdem noch andere druckabhängige Vorgänge wie

Materialverdichtung (an Gläsern) und spannungsinduzierte Phasenumwandlungen möglich. Von Zeng u.a. (1996) wird erwähnt, daß die Fließspannung bei Keramiken mit wachsenden Drücken zunimmt. Solche Effekte sind mittels einer druckabhängigen Fließbedingung erfassbar. Durch Erweiterung der Mises-Fließbedingung mit einem linearen Druckterm entsteht die Fließbedingung nach Drucker und Prager (1952)

$$f \equiv \sqrt{I_2^s} + \alpha I_1^\sigma - \frac{Y(\varepsilon_v^{pl})}{\sqrt{3}} = 0 \quad (1)$$

Der Parameter  $\alpha$  ist eine Materialkonstante. Die Größen  $I_1^\sigma$  und  $I_2^s$  sind die Invarianten des Spannungstensors bzw. -deviators. Die Fließspannung  $Y$  kann zur Berücksichtigung einer isotropen Verfestigung von der plastischen Vergleichsdehnung  $\varepsilon_v^{pl}$  abhängen. Für  $\alpha = 0$  erhält man als Sonderfall die Mises-Fließbedingung.

Als Eindringkörper wird die Vickerspyramide mit dem standardisierten Flankenwinkel von  $136^\circ$  verwendet. Aufgrund der Symmetrieeigenschaften der Pyramide reicht es aus, nur ein Achtel des elastisch-plastischen Halbraums zu modellieren. Wegen der großen Spannungsgradienten und um die Kontaktfläche exakt bestimmen zu können, ist eine hohe Netzdichte im Kontaktbereich notwendig. Das FEM-Modell muß ebenfalls ausreichende Außenabmessungen besitzen, damit die aufgetragenen Randbedingungen nicht das Ergebnis im Kontaktbereich ungünstig beeinflussen. Eigene Erfahrungen zeigen, daß ein Verhältnis von halber Kontaktdiagonalenlänge  $a$  zu einer typischen Modellaußenabmessung von etwa 1:10 einen guten Kompromiß darstellt.

Entsprechend dieser Anforderungen entstand das im Bild 1 gezeigte FEM-Modell. Dieses besteht aus etwa 10000 Elementen mit linearen Verschiebungsansätzen und hat etwa 35000 Knotenfreiheitsgrade. Aus

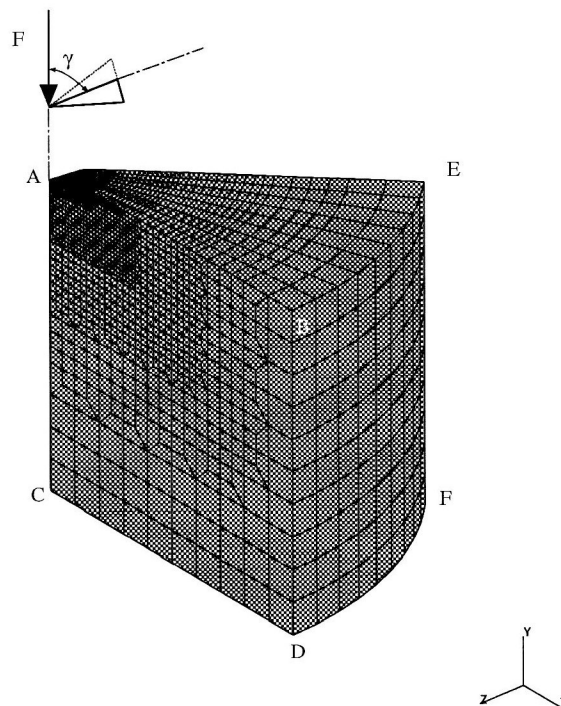


Bild 1. FEM-Modell des Vickerseindrucks

dieser Modellgröße resultieren Rechenzeiten vom etwa 2-3 Tagen (selbst auf leistungsstarken Rechnern), weil die Be- und Entlastung aufgrund der Nichtlinearität, insbesondere die Kontaktänderung, in vielen Schritten erfolgen muß.

Der Rechenaufwand kann durch ein äquivalentes nur zweidimensionales Kegelmodell reduziert werden. Die Äquivalenzüberlegung, daß die verdrängten Volumina von Kegel und Vickerspyramide bei identischer Eindringtiefe gleich sind, liefert einen Kegelspitzenwinkel von  $140,6^\circ$ . Von Marx (1997) wird gezeigt, daß wesentliche Ergebnisse der Berechnung von Kegel und Pyramide verglichen werden können. Dadurch reduziert sich der Rechenaufwand. Der Einfluß unterschiedlicher Materialparameterkombinationen wird anhand des äquivalenten Kegelmodells untersucht.

Die Qualität der Modellierung konnte durch einen Vergleich mit bekannten analytischen Lösungen des linear-elastischen Eindringproblems und anderen FEM-Simulationen bestätigt werden.

Die durchgeführten Berechnungen beschränken sich nicht auf ein konkretes Material, sondern betrachten einen Bereich des Verhältnisses der Härte  $H$  zum Elastizitätsmodul  $E$  zwischen 0,01 und 0,1. Darin sind die eingangs genannten spröden Stoffe zu finden. Der Ausgangspunkt ist ein idealplastisches Material mit einer Fließspannung  $Y$ . Danach sollen der Einfluß einer isotropen Verfestigung mit einem konstanten plastischen Modul  $h' = \frac{\partial Y}{\partial \epsilon_p}$  bzw. ein durch unterschiedliche  $\alpha$  gemäß Gleichung (1) charakterisiertes druckabhängiges Fließen untersucht werden. Die elastischen Eigenschaften ( $E = 210$  GPa,  $\nu = 0,28$ ) bleiben für alle berechneten Varianten (etwa 70, die in die Auswertung einfließen) konstant. Die plastischen Eingabegrößen ( $Y$  und  $h'$ ;  $Y$  und  $\alpha$ ) werden systematisch variiert. Aufgrund einer Normierung hängen die Ergebnisse höchstens von zwei dimensionslosen Parametern ab ( $Y/E$ ,  $h'/E$  bzw.  $\alpha$ ).

Die Belastung erfolgt bis zu einer für alle Varianten gleichen maximalen Eindringtiefe  $h_{max}$  von 0,04 mm. Dem schließt sich die vollständige Entlastung an.

Die Berechnungen wurden mit den Programmen ABAQUS 5.4 und MARC K6.1 durchgeführt. Die Ergebnisse der beiden Programme stimmen sehr gut überein.

### 3 Prinzipielle Ergebnisse

Es gibt verschiedene Möglichkeiten der Härte-Definition. Der mittlere Druck  $p_m$  berechnet sich aus der Indenterlast  $F$  und der dazugehörigen projizierten Kontaktfläche  $A_p$ . Für den Kegel ist  $A_p$  die mit dem Kontaktradius  $a$  gebildete Kreisfläche (In dieser Arbeit wird für die charakteristische Kontaktlänge die gleiche Abkürzung beim Kegel und der Pyramide verwendet.).

$$p_m = \frac{F}{A_p} = \frac{F}{\pi a^2} \quad (2)$$

Beim Vickerseindruck muß man beachten, daß  $A_p$  nur in Ausnahmefällen quadratisch ist. Die Simulationsergebnisse zeigen außerdem, daß sich die projizierte Kontaktfläche während der Entlastung kaum ändert. Somit kann der mittlere Druck in die klassische Vickershärte HV umgerechnet werden. Der mittlere Druck dient in dieser Arbeit als Härtemaß  $H$ .

In Abhängigkeit von den Materialeigenschaften stellt sich ein spezielles Deformationsprofil ein. Bild 2 zeigt die beiden Extremfälle im belasteten Zustand. Das duktile Verhalten zeichnet sich dadurch aus,

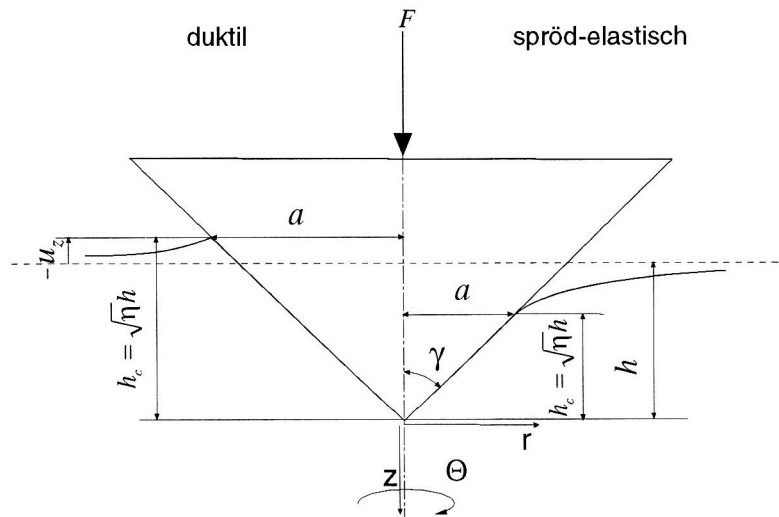


Bild 2: Vergleich der Grenzfälle der Deformationsprofile

daß das Material fließt und am Kontaktrand eine als *pile-up* bezeichnete Lippe bildet. Ein elastisches oder elastisch-plastisches Material mit einem hohen Fließwiderstand wird am Kontaktrand eingezogen (*sink-in*), wie es bei vielen spröden Stoffen der Fall ist. Wegen dieses Sachverhalts ergibt sich ein materialabhängiger Zusammenhang zwischen Eindringtiefe  $h$  und  $A_p$ . Bei den sogenannten selbstähnlichen Eindringkörpern, wie Kegel und Pyramide, hat dieser Zusammenhang folgende Struktur:

$A_p = C(\text{Material}) \cdot h^2$ . Die Deformationsprofile der Pyramide hängen vom Umfangswinkel  $\Theta$  ab. Für selbstähnliche Indenter ist der mittlere Druck während der Belastung eine Konstante. Deshalb ergibt sich der Belastungszweig der Kraft-Eindring-Kurve (siehe Bild 3) als quadratische Parabel. Aufgrund des

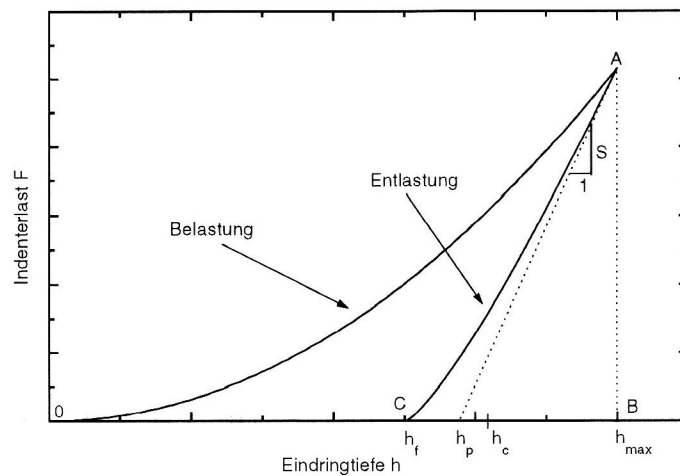


Bild 3. Kraft-Eindring-Kurve

hohen elastischen Deformationsanteils bei spröden Stoffen kann man eine große elastische Rückfederung beobachten. Die bleibende Eindringtiefe  $h_f$ , die an der Indenterspitze gemessen wird, ist relativ klein im Vergleich zu jener bei duktilen Metallen (dort gilt  $h_f \approx h_{max}$ ). Bei isotroper Verfestigung findet während der Entlastung keine Weiterplastifizierung statt. Die Krümmung der Entlastungskurve entsteht durch die Änderung der Kontaktfläche. Zu Beginn der Entlastung ändert sich  $A_p$  nur wenig, deshalb erscheint die Kurve nahezu linear. Zum Ende der Entlastung verkleinert sich die Kontaktfläche bezogen auf die Lastschritte immer schneller.

Eine mathematische Beschreibung ist mit dem von Oliver (1992) vorgeschlagenen Potenzgesetz der Form  $F = A(h - h_f)^n$  sehr gut möglich, wobei die Exponenten  $n$  in Abhängigkeit von  $H/E$  zwischen 1,25 und 1,4 liegen. Wegen der elastischen Entlastung kann der E-Modul aus dem Anstieg der Tangente an die Entlastungskurve bestimmt werden (im Bild 3 mit  $S$  gekennzeichnet). Außerdem läßt sich aus der Analyse des Entlastungsvorganges auch auf die Eindruckgeometrie unter Vollast schließen und so die Härte ohne Kontaktflächenermittlung berechnen (Oliver, 1992).

Bild 4 zeigt den Vergleich der Deformationsprofile im be- und entlasteten Zustand für ein sehr sprödes

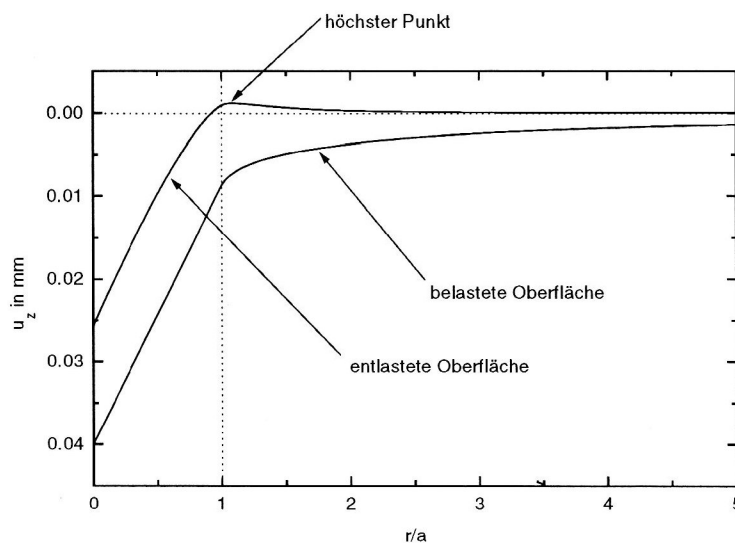


Bild 4. Vergleich der be- und entlasteten Oberflächenprofile ( $H/E = 0,1$  – idealplastischer Kegeleindruck)

Material. Deutlich wird die große axiale Rückfederung im Kontaktbereich. Diese ist an der Indenterspitze

größer als am Kontaktrand. Bei großen  $H/E$  liegt der höchste Punkt außerhalb des Kontaktradius  $a$ . Dadurch können im Experiment Fehler bei der Kontaktflächenmessung entstehen, die dann um etwa 10 % überschätzt wird. Die Oberflächenprofile hängen sowohl im belasteten als auch im entlasteten Zustand stark von  $h'/E$  ab. Aus den gemessenen Geometrien können Informationen über die Größe der Verfestigung abgeleitet werden.

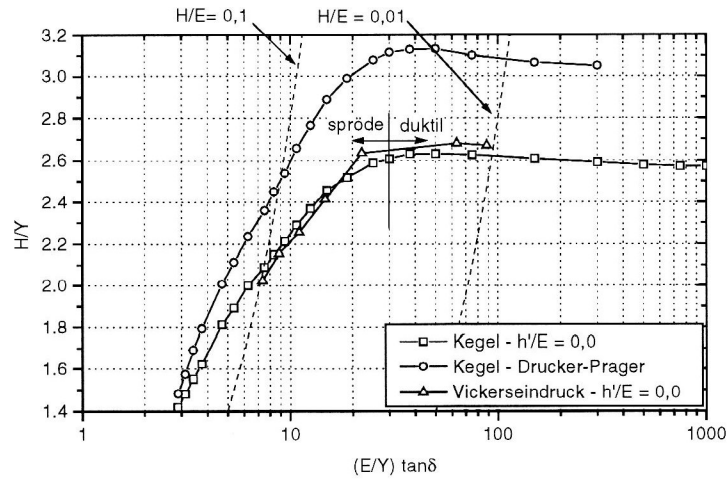


Bild 5. Entwicklung der relativen Härte  $H/Y$

Von Eindrücken in duktile Metalle ist bekannt, daß die Härte in einem konstanten Verhältnis zur Fließspannung steht ( $H \approx 3Y$ ). Mit zunehmendem elastischen Deformationsanteil hängt  $H$  aber auch immer mehr von den elastischen Eigenschaften ab, wie Bild 5 zeigt.

Der Winkel  $\delta$  ist komplementär zum halben Spitzenwinkel  $\gamma$  (siehe Bild 2). Man erkennt im Bild 5 den Bereich mit einem konstanten  $H/Y$ , der etwa ab  $H/E \approx 0,03$  in einen Bereich übergeht, in dem  $Y/E$  einen großen Einfluß auf  $H/Y$  hat.

Am Übergangspunkt zwischen dem konstanten und abfallenden Teil findet der Wechsel von *pile-up* zu *sink-in* statt. Außerdem sieht man in Bild 5 die gute Übereinstimmung zwischen Vickersindenter und äquivalentem Kegel. Streuungen entstehen durch die Schwierigkeit der genauen Kontaktflächenermittlung beim Vickersseindruck, weil das 3D-Netz gröber ist als das der Kegelmodellierung.

Die Kurve der Drucker-Prager-Fließbedingung wurde mit  $\alpha = 0,0339$  berechnet. Ein positives  $\alpha$  führt bei der vorherrschenden Druckbelastung zu einer gesteigerten Härte.

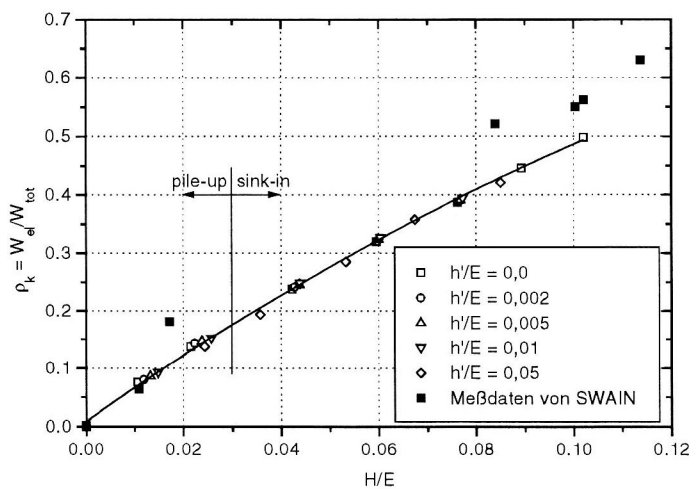


Bild 6. Relative wiedergewonnene Arbeit  $\rho_k = W_{el}/W_{tot}$

Die experimentelle Bestimmung der Kontaktfläche ist bei Mikro- und Nanoeindrücken sehr aufwendig. Die Kontaktfläche und somit die Härte kann aber auch durch eine energetische Auswertung der Kraft-

Eindring-Kurve berechnet werden. Dazu setzt man die während der Entlastung zurückgewonnene Arbeit  $W_{el}$  (Fläche CAB in Bild 3) ins Verhältnis zur Fläche unter der Belastungskurve  $W_{tot}$  (Fläche OAB). Bild 6 zeigt die gute Korrelation zwischen der Härte und dem erwähnten Arbeitsverhältnis. Auch experimentelle Daten aus (Swain, 1996) bestätigen das prinzipielle Ergebnis. Diese Methode der Auswertung bietet eine stabile Möglichkeit, die Härte ohne Kontaktflächenmessung zu bestimmen. Diese Möglichkeit besteht unabhängig von der Höhe der Verfestigung.

Zum Abschluß dieses Abschnitts muß darauf verwiesen werden, daß bei realen Indentern immer Imperfektionen vorhanden sind. Damit wird die Selbstähnlichkeit des Problems verletzt. Darauf soll aber hier nicht näher eingegangen werden.

#### 4 Spannungsfeld und Rißinitiierung mit der Mises-Fließbedingung

Bei Härteeindrücken an spröden Materialien kann es zur Makrorißbildung kommen. Es sind verschiedene Rißmodi bekannt, die von der Art des Indenters, der Höhe der Belastung und dem Material abhängen (siehe Bild 7). Eine ausführliche Zusammenstellung findet sich z. B. in (Cook, 1990). Von besonderem

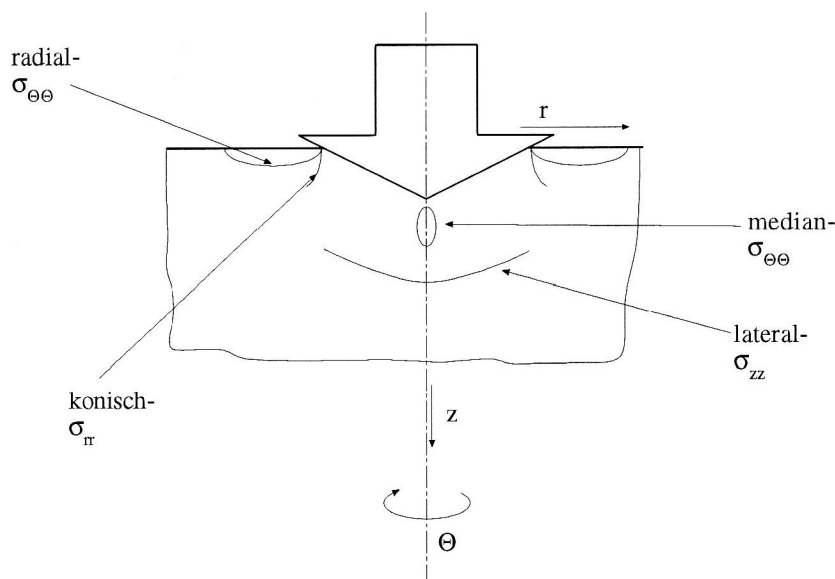


Bild 7. Rißmodi und erzeugende Spannungen

Interesse sind die radialen Oberflächenrisse und die unterhalb des Indenters entstehenden medianen Risse, die beim Vickers-Eindruck zu einem halbkreisförmigen Riß führen können. Aus der Geometrie dieses Risses und der Belastung kann man die Bruchzähigkeit  $K_{Ic}$  bestimmen (Lawn, 1980).

Für die nachfolgende Betrachtung soll vereinfacht davon ausgegangen werden, daß die maximale Hauptspannung im Zugbereich die Ursache für die Rißinitiierung ist. Es wurden die Spannungen an der Oberfläche, auf der Indenterachse und in der  $rz$ -Ebene ausgewertet. Das für die nachfolgenden Darstellungen verwendete  $rz$ -Koordinatensystem zeigt Bild 2. Die Spannungen an der Oberfläche werden in ein lokales Koordinatensystem transformiert, dessen Achsen tangential und normal zur verformten Oberflächenkontur sind. Für die Rißinitiierung an der Oberfläche kommen die Umfangsspannung  $\sigma_{\theta\theta}$  (radiale Risse) und die Tangentialspannung  $\sigma_{tt}$  (ringförmige Risse) in Frage.

Die Oberflächenspannungen eines idealplastischen Materials mit einem kleinen  $H/E$  zeigt Bild 8. Die Spannungen sind mit der Härte  $H$  und die Abszisse mit dem Kontaktradius  $a$  normiert. Im Kontaktbereich herrschen Druckspannungen vor. Die Umfangsspannung hat am plastischen Rand ein Zugmaximum, welches während der Entlastung etwas nach außen wandert. Ein weiteres Spannungsmaximum existiert am Kontaktrand. Dieses liegt nach der Entlastung immer im Zugbereich. Während der Entlastung vergrößern sich die Umfangsspannungen. Mit Verfestigung sind die Umfangsspannungen am Kontaktrand auch unter Vollast positiv. Außerdem entstehen bei Verfestigung an der Indenterspitze große Zugspannungen, die zum Aufreißen führen können. Die plastische Zone ist an der Oberfläche etwa doppelt so groß wie der Kontaktradius.

Das beschriebene Spannungsfeld ermöglicht bei kleinen  $H/E$  radiale Risse hauptsächlich während der Entlastung. Unter Vollast dürften kaum Risse auftreten. Verfestigung erhöht das Bestreben zur radialen

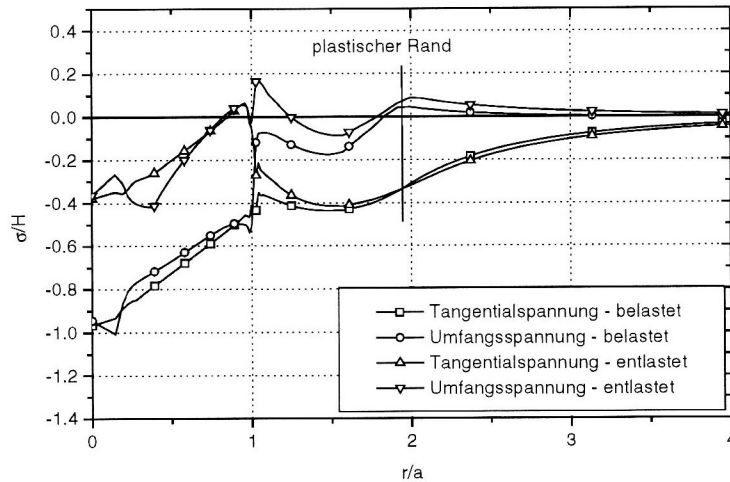


Bild 8: Oberflächenspannungen – Kegel ( $H/E = 0,01$ , idealplastisch)

Rißentstehung. Ringförmige Risse sind nicht zu erwarten.

Bei großen  $H/E$  reicht die plastische Zone nur noch wenig über den Kontaktrand hinaus. Das Spannungsmaximum am plastischen Rand fällt deshalb mit dem am Kontaktrand zusammen. So entsteht ein durchgängiger Zugbereich, der radiale Oberflächenrisse bevorzugt während der Entlastung entstehen läßt.

Die Radialspannungen auf der Indenterachse besitzen ihr Zugmaximum am plastischen Rand. Während der Entlastung verringert sich dieses Maximum. Es ist hervorzuheben, daß die Spannungen auf der Indenterachse bis auf die an der Spitze unabhängig von  $H/E$  sind.

Bild 9 bringt die Überlegungen für ein Material mit  $H/E = 0,1$  zum Abschluß. Es zeigt die Umfangsspannungen in der  $rz$ -Ebene. Dabei entspricht die dunkelste Zone dem Druckbereich und die hellste der maximalen Zugspannung. Unter Vollast treten die maximalen Spannungen unterhalb des Indenters

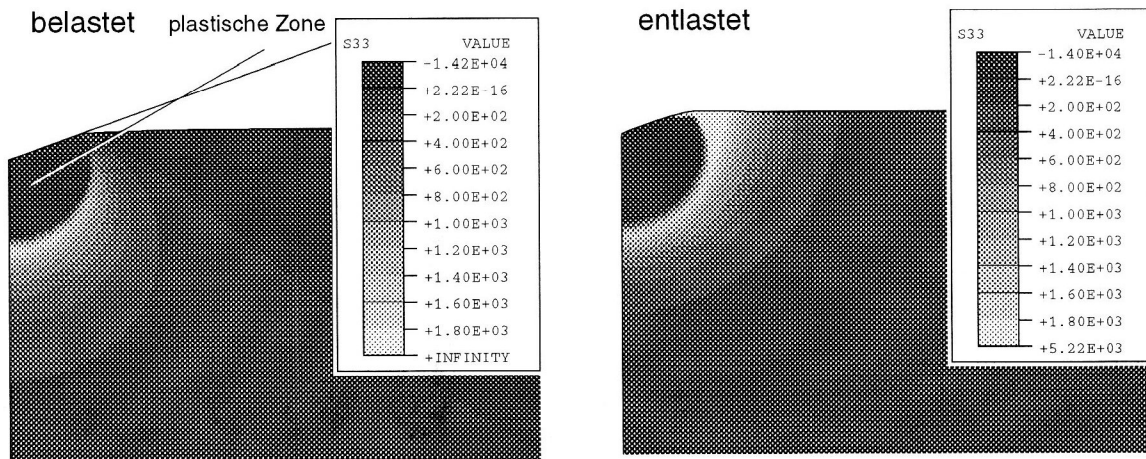


Bild 9: Umfangsspannungsverteilung in der  $rz$ -Ebene –  $H/E = 0,1$

am plastischen Radius auf. Dieses Maximum verlagert sich während der Entlastung an die Oberfläche. Ein solches Spannungsfeld paßt genau zu der an Gläsern ( $H/E \approx 0,1$ ) beobachteten Rißinitiierung und -ausbreitung, da dort bei der Belastung mediane Risse entstehen, die während der Entlastung an die Oberfläche kommen und einen halbkreisförmigen Riß bilden.

Bei mittleren  $H/E$  gibt es dagegen meist nur radiale Oberflächenrisse während der Entlastung. Die berechneten Spannungsfelder des Vickersindrucks gleichen in der Ebene der Indenterdiagonalen denen des äquivalenten Kegeleindrucks. Durch die Geometrie der Vickerspyramide werden radiale Oberflächenrisse, ausgehend von den Ecken, bevorzugt.

## 5 Spannungsfeld und Rißinitiierung mit der Drucker-Prager-Fließbedingung

Die prinzipielle Möglichkeit des druckabhängigen Fließens wurde im Abschnitt 2 diskutiert. Bei großen  $H/E$  wird der Einfluß unterschiedlichen Fließverhaltens auf das Spannungsfeld immer kleiner, weil der elastische Deformationsanteil wächst.

Die Änderungen, die durch druckabhängiges Fließen entstehen, betreffen hauptsächlich die Tangentialspannungen an der Oberfläche. Mit zunehmendem  $\alpha$  nach Gleichung (1) sind diese beim Kegeleindruck stark vergrößert. Somit wird eine ringförmige Rißbildung möglich. Mit einem negativen  $\alpha$  kann nach Lambropoulos (1996) das Verdichtungsphänomen beim Eindruck in anomale Gläser beschrieben werden. An diesen Gläsern beobachtet man wesentlich weniger Risse als an anderen. Die reduzierten berechneten Spannungen bestätigen dies. Bei der Simulation des Vickerseindrucks treten die erhöhten Tangentialspannungen nicht so stark wie beim Kegel auf. Beide Indenter zeigen aber bei kleinen  $H/E$  und positiven  $\alpha$  nach der Entlastung große Zugspannungen in axialer Richtung unterhalb des Indenters. Damit wäre ein Abplatzen von Oberflächenschichten erklärbar.

Ausführlichere Ergebnisse zu diesem und auch zum Thema Reibung finden sich in Marx (1997).

## 6 Zusammenfassung

Die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit zeigen, wie unterschiedliche Fließeigenschaften das Spannungsfeld um einen Härteeindruck mit einer Vickerspyramide oder einem Kegelindenter beeinflussen. In Abhängigkeit von  $H/E$  ergeben sich daraus verschiedene Möglichkeiten der Rißinitiierung. Experimentelle Beobachtungen anderer Autoren werden bestätigt. Die Beschreibung des Deformationsverhaltens spröder Stoffe beim Härteeindruck durch ein elastisch-plastisches Gesetz ist sinnvoll. Mit der Mises-Fließbedingung können die meisten Effekte erklärt werden. Die Annahme eines erweiterten Fließverhaltens (Verfestigung und Druckabhängigkeit) läßt eine Anpassung an spezielle Materialien zu. Durch eine genauere Auswertung des Härte-tests, z. B. der Vermessung der Deformationsprofile, werden zusätzliche Informationen zur Bestimmung des Fließverhaltens (Verfestigung) gewonnen.

## Literatur

1. Cook, R.F.; Pharr, G.M.: Direct observations and analysis of indentation cracking in glasses and ceramics. *J. Am. Ceram. Soc.*, 73, (1990), Nr. 4, 787–817.
2. Drucker, D.C.; Prager, W.: Soil mechanics and plasticity or limit design. *Quart. Appl. Math.*, 10, (1952), 157–163.
3. Hill, R.: *The Mathematical Theory of Plasticity*. Oxford: Oxford University Press, (1960).
4. Lambropoulos, J.C.; Xu, S.; Fang, T.: Constitutive law for the densification of fused silica, with applications in polishing and microgrinding. *J. Am. Ceram. Soc.*, 79, (1996), Nr. 6, 1441–1452.
5. Lawn, B.R.; Evans, A.G.; Marshall, D.B.: Elastic/plastic indentation damage in ceramics: The median/radial crack system. *J. Am. Ceram. Soc.*, 63, (1980), 574–581.
6. Lockett, F.J.: Indentation of a rigid/plastic material by a conical indenter. *J. Mech. Phys. Solids*, 11, (1963), 345–355.
7. Marx, V.: *Simulation des Härteeindrucks an spröden Materialien*. Dissertation, TU Dresden, (1997).
8. Oliver, W.C.; Pharr, G.M.: An improved technique for determining hardness and elastic modulus using load and displacement sensing indentation experiments. *J. Mater. Res.*, 7, (1992), Nr. 6, 1564–1583.
9. Swain, M.V.: Persönliche Mitteilung, (1996).
10. Zeng, K.; Söderlund, E.; Giannakopoulos, A.E.; Rowcliffe, D.J.: Controlled indentation: A general approach to determine mechanical properties of brittle materials. *Acta mater.*, 44, (1996), Nr. 3, 1127–1141.

---

*Anschrift:* Dr.-Ing. V. Marx, Prof. Dr.-Ing. habil. H. Balke, Institut für Festkörpermechanik, Technische Universität Dresden, D-01062 Dresden