

Grundlegende Konzepte in der Theorie Poröser Medien

W. Ehlers

Mit der Theorie Poröser Medien (TPM) liegt ein generelles kontinuumsmechanisch und thermodynamisch fundiertes Konzept zur makroskopischen Beschreibung allgemeiner Mehrphasenmaterialien vor. Insbesondere zielt die Theorie auf die Behandlung von ganz oder teilweise fluidgesättigten, porösen Festkörpermaterialien ab. Damit wird eine exzellente Grundlage für die Behandlung einer großen Anzahl von ingenieurwissenschaftlichen Fragestellungen und diversen Problemstellungen aus dem Gebiet der angewandten Naturwissenschaften bereitgestellt.

1 Motivation

In vielen Bereichen der Ingenieurpraxis und der angewandten Naturwissenschaften müssen Probleme behandelt werden, die sich nicht in die klassischen Disziplinen „Festkörpermechanik“ oder „Strömungsmechanik“ einordnen lassen, weil sie eine ganzheitliche Betrachtung eines gekoppelten Festkörper-Fluid-Problems verlangen (Poröse Medien). In die Klasse solcher Probleme fallen etwa geomechanische Fragestellungen, wie z. B. das klassische Konsolidationsproblem, Fragen zur Erschließung und zur Ausbeutung natürlicher Öl- und Gaslagerstätten, Untersuchungen zum kurz- oder langzeitlichen Verhalten großer Eismassen, wie z. B. der kontinentalen Eisschilde, aber auch Fragen der Biomechanik, wenn z. B. natürliches, blutdurchströmtes Gewebe mechanisch untersucht werden soll. Die Behandlung solcher Probleme mit Hilfe kontinuumsmechanischer Methoden, also weitestgehend im Rahmen einer phänomenologischen Betrachtungsweise, stellt zunächst die Frage nach dem Grad der Homogenisierung; d. h. es muß *a priori* entschieden werden, ob man (1) jedes Material für sich auf dem von diesem Material eingenommenen Gebiet mit den Mitteln der klassischen Kontinuumsmechanik der Einphasenmaterialien beschreiben will, oder ob man (2) von vornherein eine konzeptionelle Durchschnittsbildung über das gesamte Gebiet aus Festkörper- und Fluidanteilen durchführt und dann von einem statistisch gemittelten, „verschmierten“ Mehrphasenkontinuum ausgeht. Beide Vorgehensweisen haben Tradition und sind durch spezielle Vor- und Nachteile gekennzeichnet.

Der Vorteil der ersten Methode liegt in der Tatsache, daß man jeden Teilkörper auf der Grundlage seiner eigenen Bewegung (vgl. Bild 1) unter Voraussetzung der (häufig bereits bekannten) Konstitutivgleichungen des entsprechenden Einphasenmaterials beschreiben kann. Auf der anderen Seite muß man jedoch geeignete Übergangs- und Kontaktbedingungen formulieren, mit denen die Kopplungsmechanismen an den inneren Oberflächen des Gesamtkörpers erfaßt werden können. Und genau an dieser Stelle liegt das eigentliche Problem dieser Vorgehensweise, indem nämlich, abgesehen von einigen industriell gefertigten, fluidgesättigten Festkörpern, wie z. B. Stoßdämpfern oder Schwingungsdämpfern für Industriemaschinen, die Geometrie der inneren Porenstruktur ebenso unbekannt ist (und in der Regel auch bleibt) wie die äußere Geometrie der Einzelkörper von natürlichen Granulaten, z. B. Sandböden. Aus diesem enormen Nachteil, der diese Vorgehensweise in den meisten Fällen sogar unmöglich macht, ergibt sich die Notwendigkeit zur Durchschnittsbildung. Damit gibt man sich prinzipiell mit Informationen zufrieden, die nicht das einzelne Material mit der aus der klassischen Kontinuumsmechanik gewohnten Genauigkeit beschreiben, sondern die die jeweiligen lokalen physikalischen Eigenschaften der Teilkörper lediglich im Mittel wiedergeben. Um statistische Aussagen als repräsentative Aussagen werten zu können, muß man voraussetzen, daß (a) der betrachtete Bereich groß genug ist, um eine statistische Aussage zuzulassen und daß (b) die lokalen Substrukturen, z. B. die Korngrößen eines Granulats oder die lokale Verteilung der Konstituierenden im Kontrollraum, fein genug sind, um die verschmierte Modellbildung zu gestatten. Grundsätzlich ist es unerheblich, ob man die Durchschnittsbildung tatsächlich ausführt, indem man entweder eine allgemeine mathematische Durchschnittsbildungstheorie bemüht (vgl. z. B. Hassanizadeh und

Gray, 1979a, b) oder Untersuchungen an einer wie auch immer gestalteten Einheitszelle ausführt, oder ob man einen gedachten, virtuellen Durchschnittsbildungsprozeß voraussetzt, und sich dann nur noch mit den gemittelten Größen befaßt. In beiden Fällen erhält man ein Kontinuum mit statistisch verteilten, *de facto* unvermischbaren Konstituierenden, bei dem man davon ausgeht, daß sich alle am Gesamtkörper beteiligten Materialien nach der Durchschnittsbildung gleichzeitig und gemeinsam im gesamten Kontrollraum befinden, vgl. Bild 2. Diese Vorstellung führt automatisch auf die aus der Theorie der mischbaren Materialien (Mischungstheorie) bekannte Axiomatik von heterogen aus verschiedenen Stoffen konstituierten, superponierten Kontinua mit inneren Wechselwirkungen, durch die man die internen Kopplungsmechanismen zwischen den Phasen beschreibt. Bezüglich der klassischen Mischungstheorie, die ursprünglich zur makroskopischen Beschreibung von Gas- und anderen Fluidmischungen entwickelt worden ist, sei in diesem Zusammenhang auf Arbeiten von Truesdell (1957), Truesdell und Toupin (1960) sowie Bowen (1976) verwiesen.

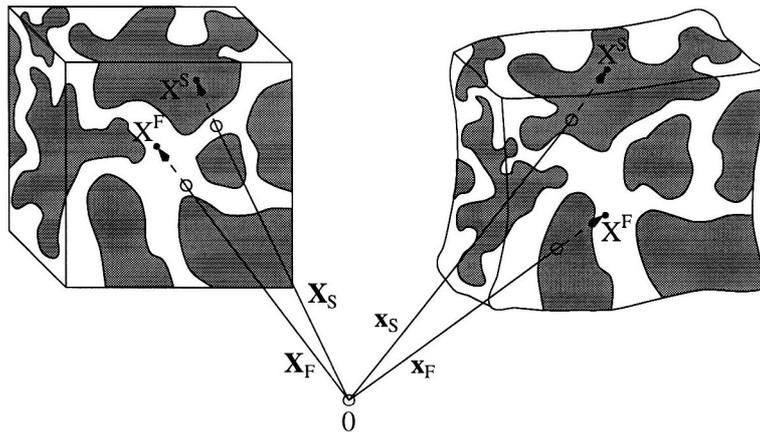


Bild 1. Gekoppeltes Festkörper-Fluid-Problem mit individuellen Bewegungsfunktionen der Teilkörper; Referenzkonfiguration (links) und aktuelle Konfiguration (rechts)

Da die Mischungstheorie kein volumetrisches Maß für die Anteile der die Mischung konstituierenden Teilkörper enthält, wird zur Beschreibung allgemeiner Mehrphasenmaterialien und insbesondere zur Beschreibung von Porösen Medien, also gekoppelter Festkörper-Fluid-Aggregate, zusätzlich vom Konzept der Volumenanteile Gebrauch gemacht. Damit ist die Theorie Poröser Medien definiert als eine Kontinuumstheorie für mehrphasige Materialien, die sich aus den Elementen „Mischungstheorie“ und „Konzept der Volumenanteile“ zusammensetzt.

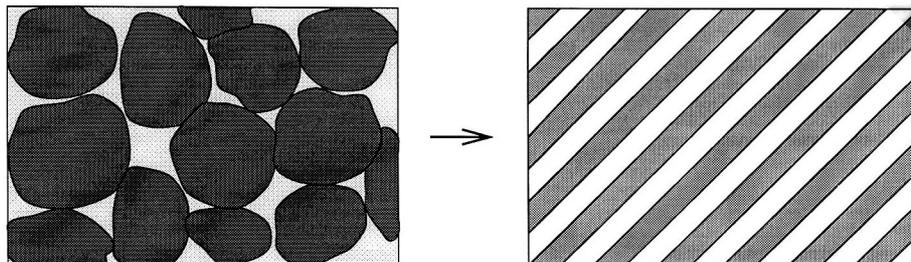


Bild 2. Geometrischer Aufbau (links) und statistisches Ersatzmodell (rechts) eines fluidgesättigten granularen Festkörpers

Das Konzept der Volumenanteile, das bereits Ende des achtzehnten Jahrhunderts und erneut Mitte des neunzehnten Jahrhunderts formuliert wurde (Woltman, 1794; Delesse, 1848) wurde schon in den klassischen Arbeiten zur Behandlung des Konsolidationsproblems angewandt, vgl. z. B. Biot (1935, 1941, 1956) oder Heinrich und Desoyer (1955, 1956, 1961). Einen exzellenten Überblick über die historische Entwicklung der TPM, insbesondere hinsichtlich der früheren Jahre, gibt de Boer (1995). Das Konsolidationsproblem, vgl. Bild 3, ist im übrigen dadurch gekennzeichnet, daß das Aufbringen einer zusätzlichen äußeren Belastung (z. B. durch ein Bauwerk) auf einen flüssigkeitsgesättigten Boden zu zeitabhängigen Deformationen führt, die begleitet werden von einem Prozeß austretenden Porenwassers. Der Konsolidationsprozeß ist dann abgeschlossen, wenn die effektive Spannung des Bodens, die über ein Konstitutivgesetz mit der Festkörperdeformation verbunden ist, einen neuen Gleichgewichtszustand mit der äußeren Zusatzlast bildet.

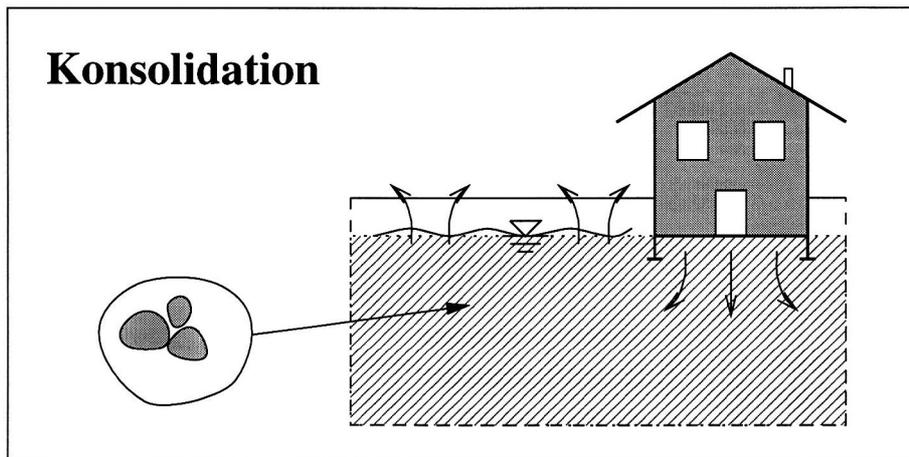


Bild 3. Schematische Darstellung des klassischen Konsolidationsproblems

In der vorliegenden Arbeit sollen die grundlegenden Konzepte der Theorie Poröser Medien vorgestellt werden. Dabei soll nicht eingegangen werden auf die Darstellung der theoretischen Durchschnittsbildung (Hassanzadeh und Gray, 1979a, b; de Boer et al., 1991; Plischka, 1992) oder auf die Vorgehensweise innerhalb *Lagrangescher* Formulierungsmodelle (vgl. z. B. Ehlers und Kubik, 1994). Außerdem soll der gesamte Bereich der konstitutiven Modellbildung für Poröse Medien ebenso ausgeklammert bleiben wie die numerische Behandlung von Anfangs-Randwertproblemen gekoppelter Festkörper-Fluid-Aggregate, z. B. mit Hilfe der Methode der finiten Elemente. Der interessierte Leser sei in diesem Zusammenhang auf Arbeiten von Bowen (1980, 1982), de Boer und Ehlers (1986, 1990a, b), Coussy (1994), Diebels und Ehlers (1996), Ehlers (1989, 1991, 1993a, b, 1995), Ehlers und Diebels (1995), Ehlers et al. (1995a), Prévost (1982, 1986), Schrefler et al. (1993), Simoni und Schrefler (1987), Wunderlich und Cramer (1991), Zienkiewicz und Shiomi (1984) sowie Zienkiewicz et al. (1990) verwiesen. Darüber hinaus können mikropolare Freiheitsgrade entweder für alle Konstituierenden des Gesamtmodells zugelassen werden (Diebels und Ehlers, 1995), oder man beschränkt sich innerhalb dieser Vorgehensweise auf ein mikropolares Festkörperskelett mit nicht-polaren Poreninhalten, so daß es gelingt, lokale Korndrehungen eines granularen Festkörpergerüsts zumindest im Mittel zu erfassen (Ehlers et al., 1995b). Auf die Einbeziehung von zusätzlichen mikropolaren Freiheitsgraden, die man z. B. für die numerische Untersuchung von Scherbandbildungen benötigt (Ehlers et al., 1995b), wird im folgenden ebenfalls verzichtet.

Bezüglich der verwendeten direkten Tensornotation sei auf de Boer (1982) verwiesen.

2 Das Konzept der Volumenanteile

Im Rahmen der konzeptionellen Modellbildung in der Theorie Poröser Medien geht man davon aus, daß sich alle k am Gesamtmodell beteiligten Partialkörper (poröser Festkörper und $k - 1$ Poreninhaltsstoffe) im Zustand idealer Unordnung befinden, also statistisch über den Kontrollraum verteilt sind. Diese Voraussetzung führt im Zusammenhang mit einem virtuellen oder einem ausgeführten Durchschnittsbildungsprozeß auf ein statistisches Ersatzmodell φ mit superponierten und interagierenden Konstituierenden φ^α ($\alpha = 1, \dots, k$):

$$\varphi = \sum_{\alpha=1}^k \varphi^\alpha \quad (1)$$

An jedem Punkt des Kontrollraums befinden sich demnach gleichzeitig materielle Punkte X^α aller k Konstituierenden, so daß die mathematischen Funktionen zur Beschreibung der geometrischen und physikalischen Eigenschaften der Teilkörper in jedem Raumpunkt des Kontrollraums definiert sind (Feldfunktionen).

Das Volumen V des Körpers \mathcal{B} resultiert aus der Summe der Partialvolumina V^α der Konstituierenden φ^α in \mathcal{B} :

$$V = \int_{\mathcal{B}} dv = \sum_{\alpha=1}^k V^\alpha \quad \text{mit} \quad V^\alpha = \int_{\mathcal{B}} dv^\alpha = \int_{\mathcal{B}} n^\alpha dv \quad (2)$$

Die Größe n^α ist damit definiert als der lokale Quotient des Volumenelements dv^α von φ^α bezogen auf das Volumenelement dv von φ

$$n^\alpha = \frac{dv^\alpha}{dv} \quad (3)$$

Die Beziehungen (2) und (3) repräsentieren das Konzept der Volumenanteile. Mit Gleichung (2) gilt die Sättigungsbedingung

$$\sum_{\alpha=1}^k n^\alpha = 1 \quad (4)$$

Ist das Gesamtvolumen V größer als die Summe der Partialvolumina der Teilkörper, d. h. liegen teilgesättigte oder leere Festkörperskelette vor, dann gilt abweichend von den Gleichungen (2) und (4)

$$V > \sum_{\alpha=1}^k V^\alpha \quad \text{mit} \quad \sum_{\alpha=1}^k n^\alpha < 1 \quad (5)$$

Verbunden mit der Definition der Volumenanteile n^α ist die Einführung von zwei unterschiedlichen Dichtefunktionen für jede Konstituierende φ^α :

- effektive Dichte: $\rho^{\alpha R} = \frac{dm^\alpha}{dv^\alpha}$
- Partialdichte: $\rho^\alpha = \frac{dm^\alpha}{dv}$

Die effektive (bzw. materielle) Dichte $\rho^{\alpha R}$ bezieht die lokale Masse dm^α auf das Volumenelement dv^α , während die partielle (bzw. globale) Dichte ρ^α dieselbe lokale Masse auf das Volumenelement dv bezieht. Damit folgt unmittelbar, daß die Dichtefunktionen über die Volumenanteile gekoppelt sind:

$$dm^\alpha = \begin{Bmatrix} \rho^{\alpha R} dv^\alpha \\ \rho^\alpha dv \end{Bmatrix} \quad \rightarrow \quad \rho^\alpha = n^\alpha \rho^{\alpha R} \quad (7)$$

Mit Hilfe dieser Beziehung kann im übrigen unmittelbar darauf geschlossen werden, daß die Eigenschaft materieller Inkompressibilität von φ^α wegen $\rho^{\alpha R} = \text{konst.}$ nicht gleichbedeutend ist mit der Eigenschaft globaler Inkompressibilität dieser Konstituierenden, da sich die Partialdichten immer noch ändern können durch Änderungen der Volumenanteile n^α .

3 Kinematik in der Theorie Poröser Medien

Innerhalb der Mischungstheorie, die als die wesentlichste Grundlage der Theorie Poröser Medien angesehen werden muß, beschreibt man ebenso wie in der TPM superponierte Kontinua mit inneren Wechselwirkungen und individuellen Bewegungszuständen. Mit dieser Modellbildung geht man davon aus, daß zu jeder Zeit t jeder Raumpunkt \mathbf{x} der aktuellen Konfiguration gleichzeitig von materiellen Punkten X^α aller Konstituierenden φ^α ($\alpha = S$: Festkörperskelett, $\alpha = \beta$: $k-1$ Porenfluide) eingenommen wird, die aus unterschiedlichen Referenzlagen \mathbf{X}_α zur Zeit t_0 stammen, vgl. Bild 4.

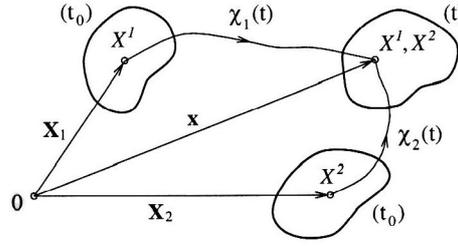


Bild 4. Bewegungszustand eines binären Modells

Jede Konstituierende besitzt eine eindeutige Bewegungsfunktion

$$\mathbf{x} = \chi_\alpha(\mathbf{X}_\alpha, t) \quad (8)$$

so daß sich an jedem Raumpunkt zur Zeit t nur ein materieller Punkt X^α von φ^α befinden kann. Die Forderung nach einer ein-eindeutigen Bewegung, bei der jedem materiellen Punkt X^α eine eindeutige Referenzlage \mathbf{X}_α zur Zeit t_0 zugewiesen wird, setzt die Existenz inverser Bewegungsfunktionen χ_α^{-1} im Zusammenhang mit nicht-singulären Jacobischen Determinanten J_α voraus:

$$\mathbf{X}_\alpha = \chi_\alpha^{-1}(\mathbf{x}, t) \quad J_\alpha = \det \frac{\partial \chi_\alpha}{\partial \mathbf{X}_\alpha} \neq 0 \quad (9)$$

Es folgt aus Gleichung (8), daß jeder Konstituierenden ein eigenes Geschwindigkeits- und Beschleunigungsfeld zugeordnet ist (Lagrangesche Beschreibung):

$$\dot{\mathbf{x}}_\alpha = \frac{\partial \chi_\alpha(\mathbf{X}_\alpha, t)}{\partial t} \quad \ddot{\mathbf{x}}_\alpha = \frac{\partial^2 \chi_\alpha(\mathbf{X}_\alpha, t)}{\partial t^2} \quad (10)$$

Mit Hilfe der inversen Bewegungsfunktion (9) ergibt sich daraus (Eulersche Beschreibung):

$$\dot{\mathbf{x}}_\alpha = \dot{\mathbf{x}}_\alpha(\mathbf{x}, t) \quad \ddot{\mathbf{x}}_\alpha = \ddot{\mathbf{x}}_\alpha(\mathbf{x}, t) \quad (11)$$

Die Mischungsgeschwindigkeit

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{1}{\rho} \sum_{\alpha=1}^k \rho^\alpha \dot{\mathbf{x}}_\alpha \quad \text{mit} \quad \rho = \sum_{\alpha=1}^k \rho^\alpha \quad (12)$$

kennzeichnet die baryzentrische bzw. die lokale Schwerpunktschwindigkeit des Gesamtkörpers. Die Größe ρ gibt die sogenannte Mischungsdichte an.

Nimmt man an, daß Γ eine beliebige, stetige und hinreichend oft stetig differenzierbare Funktion von (\mathbf{x}, t) ist, dann lautet die materielle Zeitableitung von Γ , die mit der Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{x}}_\alpha$ der Konstituierenden φ^α gebildet wird:

$$(\dot{\Gamma})_\alpha = \frac{d_\alpha}{dt} \Gamma = \frac{\partial \Gamma}{\partial t} + \text{grad } \Gamma \cdot \dot{\mathbf{x}}_\alpha \quad (13)$$

Das Symbol „grad“ kennzeichnet darin die partielle Ableitung nach dem Ortsvektor \mathbf{x} der aktuellen Konfiguration. Analog zu Gleichung (13) bildet man die sogenannte Mischungsableitung von Γ :

$$\dot{\Gamma} = \frac{d}{dt} \Gamma = \frac{\partial \Gamma}{\partial t} + \text{grad } \Gamma \cdot \dot{\mathbf{x}} \quad (14)$$

Bei der Beschreibung von gekoppelten Festkörper-Fluid-Problemen kann es von Vorteil sein, die Festkörperbewegung in der Lagrangeschen Form mit Hilfe des Verschiebungsvektors \mathbf{u}_s darzustellen, während für die $k-1$ Porenfluide mit der Sicker- bzw. Diffusionsgeschwindigkeit \mathbf{w}_β eine modifizierte Eulersche Beschreibung relativ zum sich deformierenden Festkörper gewählt wird:

$$\mathbf{u}_S = \mathbf{x} - \mathbf{X}_S \quad \mathbf{w}_\beta = \dot{\mathbf{x}}_\beta - \dot{\mathbf{x}}_S \quad (15)$$

Ohne die Phaseigenschaft der Konstituierenden φ^α *a priori* zu spezifizieren, bildet man mit den Gleichungen (8) und (9) den materiellen Deformationsgradienten \mathbf{F}_α und den inversen Deformationsgradienten \mathbf{F}_α^{-1} :

$$\mathbf{F}_\alpha = \text{Grad}_\alpha \mathbf{x} \quad \mathbf{F}_\alpha^{-1} = \text{grad } \mathbf{X}_\alpha \quad (16)$$

Das Symbol „Grad $_\alpha$ “ kennzeichnet darin die partielle Ableitung nach dem Ortsvektor \mathbf{X}_α der Referenzlage von φ^α . Da die Jacobische Determinante J_α bei ein-eindeutiger Bewegung immer verschieden von Null sein muß, ist der Bereich von $\det \mathbf{F}_\alpha$ wegen $\det \mathbf{F}_\alpha(t_0) = 1$ auf positive Werte beschränkt:

$$\det \mathbf{F}_\alpha > 0 \quad (17)$$

Mit der multiplikativen Zerlegung der Deformation \mathbf{F}_α in eine durch $\det \mathbf{F}_\alpha$ charakterisierte reine Volumendehnung und einen isochoren Anteil $\bar{\mathbf{F}}_\alpha$

$$\mathbf{F}_\alpha = (\det \mathbf{F}_\alpha)^{1/3} \bar{\mathbf{F}}_\alpha \quad \text{mit} \quad \det \bar{\mathbf{F}}_\alpha = 1 \quad (18)$$

läßt sich mit Hilfe der Symmetriegruppe für Fluide (isotrope Fluidkristalle) leicht zeigen (Cross, 1973; Ehlers, 1989), daß der Deformationsgradient \mathbf{F}_β für Fluide φ^β nur die folgende Form annehmen kann:

$$\mathbf{F}_\beta = (\det \mathbf{F}_\beta)^{1/3} \mathbf{I} \quad (19)$$

Dabei ist \mathbf{I} der Fundamentaltensor 2. Stufe (Identitätstensor). Unabhängig davon, ob die betrachtete Konstituierende ein Festkörper oder ein Fluid ist, erhält man für den räumlichen Geschwindigkeitsgradienten \mathbf{L}_α von φ^α

$$\mathbf{L}_\alpha = \text{grad } \dot{\mathbf{x}}_\alpha \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \mathbf{D}_\alpha = \frac{1}{2}(\mathbf{L}_\alpha + \mathbf{L}_\alpha^T) \\ \mathbf{W}_\alpha = \frac{1}{2}(\mathbf{L}_\alpha - \mathbf{L}_\alpha^T) \end{cases} \quad (20)$$

$(\dots)^T$ ist der zu (\dots) gehörende transponierte Tensor. Die Größen \mathbf{D}_α und \mathbf{W}_α repräsentieren als symmetrischer und schiefsymmetrischer Anteil von \mathbf{L}_α den Deformationsgeschwindigkeitstensor und den Drehgeschwindigkeitstensor (Wirbeltensor) von φ^α .

Zusammenfassend kann man feststellen, daß die Kinematik der Mischung φ ihrem Charakter nach der Kinematik eines Einphasen-Fluids gleicht, da die Mischung ebenso wie das Fluid nicht über eine ausgezeichnete Referenzlage verfügt und damit nur in ihrer jeweiligen aktuellen Konfiguration sinnvoll beschrieben werden kann.

4 Bilanzrelationen in der Theorie Poröser Medien

Die Diskussion von Bilanzrelationen für Mehrphasenmaterialien basiert auf den von Truesdell eingeführten „Methaphysischen Prinzipien“ der Mischungstheorie (vgl. Truesdell, 1984, S. 221):

1. All properties of the mixture must be mathematical consequences of properties of the constituents.
2. So as to describe the motion of a constituent, we may in imagination isolate it from the rest of the mixture, provided we allow properly for the actions of the other constituents upon it.
3. The motion of the mixture is governed by the same equations as is a single body.

Grundlage der Truesdellschen Prinzipien ist die Idee, daß sich die Bilanzrelationen sowohl für die Konstituierenden φ^α als auch für den ganzen Mehrphasenkörper $\varphi = \sum_{\alpha=1}^k \varphi^\alpha$ in Analogie zu den Bilanzgleichungen

der klassischen Kontinuumsmechanik der Einphasenmaterialien darstellen lassen, sofern man den Kopplungsmechanismen (Produktionsgrößen) zwischen den Phasen φ^α gebührend Rechnung trägt.

Die allgemeinen Bilanzrelationen für den Mehrphasenkörper φ können daher direkt aus der klassischen Kontinuumsmechanik der Einphasenmaterialien übernommen werden.

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}} \psi \, dv &= \int_{\mathcal{S}} (\boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{n}) \, da + \int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{\sigma} \, dv + \int_{\mathcal{B}} \hat{\boldsymbol{\psi}} \, dv \\ \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{\Psi} \, dv &= \int_{\mathcal{S}} (\boldsymbol{\Phi} \cdot \mathbf{n}) \, da + \int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{\sigma} \, dv + \int_{\mathcal{B}} \hat{\boldsymbol{\Psi}} \, dv \end{aligned}} \quad (21)$$

Darin ist ψ bzw. $\boldsymbol{\Psi}$ die volumenspezifische, skalar- oder vektorwertige Dichte der zu bilanzierenden mechanischen Größe (d. h. Massendichte, Bewegungsgröße, Drall, innere Energie oder Entropie), $\boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{n}$ bzw. $\boldsymbol{\Phi} \cdot \mathbf{n}$ ist die Oberflächendichte (bzw. der Ausfluß) der mechanischen Größe infolge äußerer Nahwirkung, \mathbf{n} ist der nach außen orientierte Oberflächennormaleneinheitsvektor, $\boldsymbol{\sigma}$ bzw. $\boldsymbol{\sigma}$ ist die Zufuhr der mechanischen Größe infolge äußerer Fernwirkung, $\hat{\boldsymbol{\psi}}$ bzw. $\hat{\boldsymbol{\Psi}}$ ist die Produktion der mechanischen Größe infolge möglicher Kopplungsmechanismen zwischen φ und der Umgebung von φ . Differentiation der linken Seite von Gleichung (21) und Umformung der in Gleichung (21) enthaltenen Oberflächenintegrale in Volumenintegrale liefert unter Voraussetzung stetiger Integranden die lokalen Bilanzrelationen

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{\psi} + \boldsymbol{\psi} \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}} &= \operatorname{div} \boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\sigma} + \hat{\boldsymbol{\psi}} \\ \dot{\boldsymbol{\Psi}} + \boldsymbol{\Psi} \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}} &= \operatorname{div} \boldsymbol{\Phi} + \boldsymbol{\sigma} + \hat{\boldsymbol{\Psi}} \end{aligned}} \quad (22)$$

Die speziellen Bilanzen für Masse, Bewegungsgröße (Impuls), Drall, Energie und Entropie werden in der üblichen Weise axiomatisch eingeführt und können mit Hilfe der globalen und der lokalen Formen der allgemeinen Bilanzrelation dargestellt werden, vgl. Tabelle 1.

	$\psi, \boldsymbol{\Psi}$	$\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\Phi}$	$\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}$	$\hat{\boldsymbol{\psi}}, \hat{\boldsymbol{\Psi}}$
Masse	ρ	$\mathbf{0}$	0	0
Impuls	$\rho \dot{\mathbf{x}}$	\mathbf{T}	$\rho \mathbf{b}$	$\mathbf{0}$
Drall	$\mathbf{x} \times (\rho \dot{\mathbf{x}})$	$\mathbf{x} \times \mathbf{T}$	$\mathbf{x} \times (\rho \mathbf{b})$	$\mathbf{0}$
Energie	$\rho(\varepsilon + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}})$	$\mathbf{T}^T \dot{\mathbf{x}} - \mathbf{q}$	$\rho(\mathbf{b} \cdot \dot{\mathbf{x}} + r)$	0
Entropie	$\rho \eta$	$-\boldsymbol{\phi}_\eta$	$\boldsymbol{\sigma}_\eta$	$\hat{\eta}$

Tabelle 1. Bilanzrelationen für das Mehrphasenkontinuum φ

Neben den im vorangegangenen bereits angegebenen Größen sind in Tabelle 1: \mathbf{T} der Cauchy'sche Spannungstensor, \mathbf{b} die äußere Volumenkraft pro Masseneinheit, ε die spezifische innere Energie, \mathbf{q} der Wärmefluß infolge äußerer Nahwirkung, r die Wärmezufuhr infolge äußerer Fernwirkung, η die spezifische Entropie, $\boldsymbol{\phi}_\eta$ der Entropiezufußvektor infolge äußerer Nahwirkung, $\boldsymbol{\sigma}_\eta$ die Entropiezufuhr infolge äußerer Fernwirkung und $\hat{\eta}$ die volumenspezifische, niemals negative Entropieproduktion des Gesamtmodells. Einsetzen der in Tabelle 1 aufgelisteten Größen in die lokalen Bilanzrelationen (22) liefert bei Beachtung der jeweils „niedrigeren“ Bilanzen die folgenden, aus der Theorie der Einkomponentenkontinua bekannten Aussagen, vgl. z. B. Hutter (1977) und Haupt (1993):

- Massenbilanz: $\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}} = 0$
- Impulsbilanz: $\rho \dot{\mathbf{x}} = \operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{b}$
- Drallbilanz: $\mathbf{0} = \mathbf{I} \times \mathbf{T} \quad \rightarrow \quad \mathbf{T} = \mathbf{T}^T$ (23)
- Energiebilanz: $\rho \dot{\varepsilon} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{L} + \rho r - \operatorname{div} \mathbf{q}$
- Entropiegleichung: $\rho \dot{\eta} \geq \operatorname{div}(-\phi_\eta) + \sigma_\eta$

Das in (23)₃ verwendete äußere Vektorprodukt zwischen den Tensoren \mathbf{I} und \mathbf{T} kennzeichnet den zweifachen axialen Vektor, der dem schiefssymmetrischen Anteil von \mathbf{T} zugeordnet ist.

In der Theorie der Einkomponentenmaterialien ist es üblich (und richtig), für den Entropiezufluß und die Entropiezufuhr ebenso wie für die äußere Volumenkraft ($\mathbf{f} = \rho \mathbf{b}$) *a priori* Konstitutivgleichungen der Form

$$\phi_\eta = \frac{1}{\Theta} \mathbf{q} \quad \sigma_\eta = \frac{1}{\Theta} \rho r \quad (24)$$

einzuführen. Darin ist Θ die absolute Kelvinsche Temperatur. Mit den Gleichungen (24) und (23)₅ erhält die Entropiegleichung des Einphasenmaterials dann folgende Form:

$$\rho \dot{\eta} \geq \operatorname{div} \left(-\frac{1}{\Theta} \mathbf{q} \right) + \frac{1}{\Theta} \rho r \quad (25)$$

Die Übertragung dieser Ungleichung auf mehrphasige Materialien führt allerdings zu falschen Ergebnissen und kann daher nicht benutzt werden. Dieses Problem hat in der Literatur der sechziger Jahre zu erheblichen Irritationen geführt, die einen über mehr als fünf Jahre anhaltenden Disput ausgelöst haben (Ehlers, 1989).

Entsprechend den Truesdellschen Prinzipien erhält man die globalen Formen der allgemeinen Bilanzrelationen für jede Konstituierende φ^α des Mehrphasenkontinuums φ in direkter Analogie zu den Gleichungen (21).

$$\begin{aligned} \frac{d_\alpha}{dt} \int_{\mathcal{B}} \psi^\alpha dv &= \int_{\mathcal{S}} (\phi^\alpha \cdot \mathbf{n}) da + \int_{\mathcal{B}} \sigma^\alpha dv + \int_{\mathcal{B}} \hat{\psi}^\alpha dv \\ \frac{d_\alpha}{dt} \int_{\mathcal{B}} \Psi^\alpha dv &= \int_{\mathcal{S}} (\Phi^\alpha \cdot \mathbf{n}) da + \int_{\mathcal{B}} \Sigma^\alpha dv + \int_{\mathcal{B}} \hat{\Psi}^\alpha dv \end{aligned} \quad (26)$$

Die darin enthaltenen mechanischen Größen $(\dots)^\alpha$ haben dieselbe Bedeutung für φ^α , die die in den Gleichungen (21) enthaltenen Größen (\dots) für φ besitzen. Differentiation der linken Seite von Gleichung (26) und Umformung der Oberflächen- in Volumenintegrale liefert für stetige Integranden die lokalen Formen

$$\begin{aligned} \left(\psi^\alpha \right)'_\alpha + \psi^\alpha \operatorname{div}' \mathbf{x}_\alpha &= \operatorname{div} \phi^\alpha + \sigma^\alpha + \hat{\psi}^\alpha \\ \left(\Psi^\alpha \right)'_\alpha + \Psi^\alpha \operatorname{div}' \mathbf{x}_\alpha &= \operatorname{div} \Phi^\alpha + \Sigma^\alpha + \hat{\Psi}^\alpha \end{aligned} \quad (27)$$

Die Voraussetzung der Truesdellschen metaphysischen Prinzipien bedingt auf der einen Seite, daß die lokalen Bilanzrelationen des gesamten Mehrphasenkontinuums φ durch die Bilanzen (22) des entsprechenden Einphasenkörpers gegeben sind. Auf der anderen Seite müssen sich diese Bilanzen aber als Summe der lokalen Bilanzrelationen (27) aller k Konstituierenden φ^α darstellen lassen. Aus dieser Forderung ergeben sich Zwangsbedingungen in der Form von Summenrelationen. Für eine vektorwertige mechanische Größe erhält man z. B. die folgenden Aussagen:

- mechanische Größe: $\boldsymbol{\psi} = \sum_{\alpha=1}^k \boldsymbol{\psi}^\alpha$
- Fluß : $\boldsymbol{\Phi} \mathbf{n} = \sum_{\alpha=1}^k \left[\boldsymbol{\Phi}^\alpha - \boldsymbol{\psi}^\alpha \otimes (\mathbf{x}'_\alpha - \dot{\mathbf{x}}) \right] \mathbf{n}$
- Zufuhr : $\boldsymbol{\sigma} = \sum_{\alpha=1}^k \boldsymbol{\sigma}^\alpha$
- Produktion : $\hat{\boldsymbol{\psi}} = \sum_{\alpha=1}^k \hat{\boldsymbol{\psi}}^\alpha$

(28)

Entsprechende Zwangsbedingungen können für eine skalarwertige mechanische Größe direkt aus den Gleichungen (28) geschlossen werden.

Die speziellen Bilanzen für Masse, Bewegungsgröße (Impuls), Drall, Energie und Entropie ergeben sich in direkter Analogie zum Einkomponentenkontinuum, sofern man für die Interaktionswirkung zusätzliche Produktionsterme einführt. Die allgemeine Darstellung dieser Bilanzen kann Tabelle 2 entnommen werden. Die darin enthaltenen Größen $(\dots)^\alpha$ haben für φ^α dieselbe Bedeutung wie die entsprechenden Größen aus Tabelle 1 für φ . Zusätzlich ist $\hat{\rho}^\alpha$ die durch mögliche Massenaustauschprozesse zwischen den einzelnen Phasen φ^α des Mehrphasenkontinuums φ verursachte Dichteproduktion von φ^α , $\hat{\mathbf{s}}^\alpha$ ist die totale Impulsproduktion von φ^α , $\hat{\mathbf{h}}^\alpha$ ist die totale Drallproduktion, \hat{e}^α ist die totale Energieproduktion und $\hat{\eta}^\alpha$ ist die totale Entropieproduktion von φ^α .

Wie in der Theorie der Einphasenmaterialien ist es für jede Phase φ^α des Mehrphasenkörpers φ möglich (und richtig), für den Entropiezufuß und die Entropiezufuhr die folgenden Konstitutivannahmen zu benutzen:

$$\phi_\eta^\alpha = \frac{1}{\Theta^\alpha} \mathbf{q}^\alpha \quad \sigma_\eta^\alpha = \frac{1}{\Theta^\alpha} \rho^\alpha r^\alpha \quad (29)$$

Mit der Einführung von Θ^α innerhalb der Konstitutivannahmen (29) läßt man die Möglichkeit zu, daß jede Konstituierende φ^α lokal über eine eigene Temperaturfunktion verfügt.

	$\boldsymbol{\psi}^\alpha, \boldsymbol{\psi}^\alpha$	$\boldsymbol{\phi}^\alpha, \boldsymbol{\Phi}^\alpha$	$\boldsymbol{\sigma}^\alpha, \boldsymbol{\sigma}^\alpha$	$\hat{\boldsymbol{\psi}}^\alpha, \hat{\boldsymbol{\psi}}^\alpha$
Masse	ρ^α	$\mathbf{0}$	0	$\hat{\rho}^\alpha$
Impuls	$\rho^\alpha \mathbf{x}'_\alpha$	\mathbf{T}^α	$\rho^\alpha \mathbf{b}^\alpha$	$\hat{\mathbf{s}}^\alpha$
Drall	$\mathbf{x} \times (\rho^\alpha \mathbf{x}'_\alpha)$	$\mathbf{x} \times \mathbf{T}^\alpha$	$\mathbf{x} \times (\rho^\alpha \mathbf{b}^\alpha)$	$\hat{\mathbf{h}}^\alpha$
Energie	$\rho^\alpha (\varepsilon^\alpha + \frac{1}{2} \mathbf{x}'_\alpha \cdot \mathbf{x}'_\alpha)$	$\mathbf{T}^{T\alpha} \mathbf{x}'_\alpha - \mathbf{q}^\alpha$	$\rho^\alpha (\mathbf{b}^\alpha \cdot \mathbf{x}'_\alpha + r^\alpha)$	\hat{e}^α
Entropie	$\rho^\alpha \eta^\alpha$	$-\phi_\eta^\alpha$	σ_η^α	$\hat{\eta}^\alpha$

Tabelle 2. Bilanzrelationen für die Konstituierenden φ^α des Mehrphasenkontinuums φ

In der Mischungstheorie besteht die Möglichkeit, die totalen Produktionsterme in einen direkten Anteil und einen durch die „niedrigeren“ Produktionsgrößen verursachten Zusatzterm zu zerlegen.

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{s}}^\alpha &= \hat{\mathbf{p}}^\alpha + \hat{\rho}^\alpha \mathbf{x}'_\alpha \\
\hat{\mathbf{h}}^\alpha &= \hat{\mathbf{m}}^\alpha + \mathbf{x} \times \left(\hat{\mathbf{p}}^\alpha + \hat{\rho}^\alpha \mathbf{x}'_\alpha \right) \\
\hat{e}^\alpha &= \hat{\varepsilon}^\alpha + \hat{\mathbf{p}}^\alpha \cdot \mathbf{x}'_\alpha + \hat{\rho}^\alpha \left(\varepsilon^\alpha + \frac{1}{2} \mathbf{x}'_\alpha \cdot \mathbf{x}'_\alpha \right) \\
\hat{\eta}^\alpha &= \hat{\zeta}^\alpha + \hat{\rho}^\alpha \eta^\alpha
\end{aligned} \tag{30}$$

In Gleichung (30)₁ kann die direkte Impulsproduktion $\hat{\mathbf{p}}^\alpha$ als volumenbezogene lokale Interaktionskraft zwischen φ^α und den übrigen Konstituierenden verstanden werden, während der zweite Summand den durch die Dichteproduktion verursachten Anteil der Impulsproduktion darstellt. Entsprechend versteht man in Gleichung (30)₂ die direkte Drallproduktion $\hat{\mathbf{m}}^\alpha$ als volumenbezogenes lokales Interaktionsmoment, während die übrigen Anteile den durch die totale Impulsproduktion verursachten Anteil der Drallproduktion repräsentieren. Die in Gleichung (30)₃ dargestellte gesamte Energieproduktion \hat{e}^α , verursacht durch mechanische und nichtmechanische Austauschprozesse, enthält den direkten Anteil $\hat{\varepsilon}^\alpha$, einen durch die direkte Impulsproduktion verursachten Anteil und einen Anteil, der die durch die Dichteproduktion verursachten Austauschprozesse der spezifischen inneren und der kinetischen Energie enthält. Die gesamte Entropieproduktion $\hat{\eta}^\alpha$ von φ^α , vgl. Gleichung (30)₄, enthält den direkten Anteil $\hat{\zeta}^\alpha$ sowie einen durch die Dichteproduktion verursachten Zusatzterm. Die im direkten Vergleich zum Einkomponentenmaterial naheliegende Aussage, daß $\hat{\eta}^\alpha$ oder $\hat{\zeta}^\alpha$ die niemals negative Entropieproduktion von φ^α ist, wird nicht eingeführt. Eine solche Aussage ist zwar hinreichend, auf der anderen Seite aber nicht notwendig, und stellt daher eine viel zu starke Restriktion an den thermodynamischen Prozeß von φ dar; vgl. dazu die ausführliche Diskussion in Ehlers (1989).

Die in Tabelle 2 zusammengestellten Bilanzrelationen liefern bei Beachtung der jeweils „niedrigeren“ Bilanzen, der Konstitutivgleichungen (29) und der in den Gleichungen (30) angegebenen additiven Zerlegung der Produktionsterme die folgenden lokalen Aussagen für φ^α :

- Massenbilanz: $(\rho^\alpha)'_\alpha + \rho^\alpha \operatorname{div} \mathbf{x}'_\alpha = \hat{\rho}^\alpha$
- Impulsbilanz: $\rho^\alpha \mathbf{x}''_\alpha = \operatorname{div} \mathbf{T}^\alpha + \rho^\alpha \mathbf{b}^\alpha + \hat{\mathbf{p}}^\alpha$
- Drallbilanz: $\mathbf{0} = \mathbf{I} \times \mathbf{T}^\alpha + \hat{\mathbf{m}}^\alpha \quad \rightarrow \quad \mathbf{T}^\alpha \neq (\mathbf{T}^\alpha)^T$ (31)
- Energiebilanz: $\rho^\alpha (\varepsilon^\alpha)'_\alpha = \mathbf{T}^\alpha \cdot \mathbf{L}_\alpha + \rho^\alpha r^\alpha - \operatorname{div} \mathbf{q}^\alpha + \hat{e}^\alpha$
- Entropiebilanz: $\rho^\alpha (\eta^\alpha)'_\alpha = \operatorname{div} \left(-\frac{1}{\Theta^\alpha} \mathbf{q}^\alpha \right) + \frac{1}{\Theta^\alpha} \rho^\alpha r^\alpha + \hat{\zeta}^\alpha$

Die in diesen Bilanzen enthaltenen Produktionsterme sind an die folgenden Zwangsbedingungen gebunden, vgl. Gleichung (28)₄ sowie Tabelle 1 und Tabelle 2:

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha=1}^k \hat{\rho}^\alpha &= 0 \\
\sum_{\alpha=1}^k \hat{\mathbf{s}}^\alpha &= \mathbf{0} \\
\sum_{\alpha=1}^k \hat{\mathbf{h}}^\alpha &= \mathbf{0} \\
\sum_{\alpha=1}^k \hat{\varepsilon}^\alpha &= 0 \\
\sum_{\alpha=1}^k \hat{\eta}^\alpha &\geq 0
\end{aligned} \tag{32}$$

Insbesondere enthält Gleichung (32)₅ die axiomatische Aussage des Entropieprinzips für Mischungen und andere Mehrphasenmaterialien, daß nämlich nicht (hinreichend) die Entropieproduktionsterme von φ^α jeweils für sich niemals negativ sind, sondern daß nur die Summe der Entropieproduktionen als Entropieproduktion des Gesamtkörpers (notwendig) niemals negativ sein darf.

Für den Zusammenhang zwischen den in den einzelnen Bilanzrelationen von φ^α auftretenden Größen und den entsprechenden Größen von φ erhält man die folgenden Aussagen mit Hilfe der Summenrelationen (28) sowie den Tabellen 1 und 2:

$$\begin{aligned}
\mathbf{T} &= \sum_{\alpha=1}^k (\mathbf{T}^\alpha - \rho^\alpha \mathbf{d}_\alpha \otimes \mathbf{d}_\alpha) \\
\rho \mathbf{b} &= \sum_{\alpha=1}^k \rho^\alpha \mathbf{b}^\alpha \\
\rho \varepsilon &= \sum_{\alpha=1}^k \rho^\alpha \left(\varepsilon^\alpha + \frac{1}{2} \mathbf{d}_\alpha \cdot \mathbf{d}_\alpha \right) \\
\mathbf{q} &= \sum_{\alpha=1}^k \left[\mathbf{q}^\alpha - (\mathbf{T}^\alpha)^T \mathbf{d}_\alpha + \rho^\alpha \varepsilon^\alpha \mathbf{d}_\alpha + \frac{1}{2} \rho^\alpha (\mathbf{d}_\alpha \cdot \mathbf{d}_\alpha) \mathbf{d}_\alpha \right] \\
\rho r &= \sum_{\alpha=1}^k \rho^\alpha (r^\alpha + \mathbf{b}^\alpha \cdot \mathbf{d}_\alpha) \\
\rho \eta &= \sum_{\alpha=1}^k \rho^\alpha \eta^\alpha
\end{aligned} \tag{33}$$

Die in den Gleichungen (33) auftretende Größe

$$\mathbf{d}_\alpha = \dot{\mathbf{x}}_\alpha - \dot{\mathbf{x}} \tag{34}$$

ist die Geschwindigkeit von φ^α relativ zur momentanen baryzentrischen Geschwindigkeit von φ . Bei der Anwendung der Mischungstheorie auf mischbare Stoffe stellt \mathbf{d}_α damit die Diffusionsgeschwindigkeit der Konstituierenden dar.

Bei der Beurteilung der physikalischen Bedeutung des Zusammenhangs zwischen den Größen des Gesamtkörpers und der Summe der Größen der Konstituierenden kann von den folgenden Interpretationen ausgegangen werden:

- Solange kein Diffusionsprozeß existiert ($\mathbf{d}_\alpha = \mathbf{0}$), sind alle in den Gleichungen (33) angegebenen Größen des Gesamtkörpers identisch mit der Summe der entsprechenden Größen der Konstituierenden.
- Existiert jedoch ein Diffusionsprozeß ($\mathbf{d}_\alpha \neq \mathbf{0}$), dann können die Summen über \mathbf{T}^α , $\rho^\alpha \varepsilon^\alpha$, \mathbf{q}^α und $\rho^\alpha r^\alpha$ als die sogenannten inneren Anteile bzw. die Kerne der Größen \mathbf{T} , $\rho \varepsilon$, \mathbf{q} und ρr verstanden werden. Die von der Diffusionsgeschwindigkeit \mathbf{d}_α abhängenden Zusatzgrößen haben die folgende Bedeutung: Der durch den Diffusionsprozeß verursachte Anteil des Spannungstensors \mathbf{T} ist für jede Konstituierende vergleichbar mit der Reynolds-Spannung bei der turbulenten Strömung eines Einphasenfluids. In den Ausdruck $\rho \varepsilon$ geht die kinetische Diffusionsenergie der Phasen ein. Der nichtmechanische Zuflußvektor \mathbf{q} wird beeinflußt durch die Summe der Zuflüsse infolge Diffusionsarbeit der partialen Kontaktkräfte sowie der Zuflußvektoren der durch den Diffusionsprozeß erzeugten inneren und kinetischen Energien. Schließlich

sitzt die äußere nichtmechanische Energiequelle p_r einen Zusatzterm, der aus der Summe der Diffusionsarbeiten der äußeren Volumenkräfte herrührt.

Mit den Beziehungen (31) bis (33) kann das Entropieprinzip für Mischungen in der folgenden Form dargestellt werden:

$$\sum_{\alpha=1}^k \left[\rho^\alpha (\eta^\alpha)'_{\alpha} + \hat{p}^\alpha \eta^\alpha + \operatorname{div} \left(\frac{1}{\Theta^\alpha} \mathbf{q}^\alpha \right) - \frac{1}{\Theta^\alpha} \rho^\alpha r^\alpha \right] \geq 0 \quad (35)$$

Die Anwendung der Mischungsableitung auf die partialen Entropiefunktionen η^α liefert anstelle von Gleichung (35)

$$\rho \dot{\eta} \geq \sum_{\alpha=1}^k \operatorname{div} \left(-\frac{1}{\Theta^\alpha} \mathbf{q}^\alpha - \rho^\alpha \eta^\alpha \mathbf{d}_\alpha \right) + \sum_{\alpha=1}^k \frac{1}{\Theta^\alpha} \rho^\alpha r^\alpha \quad (36)$$

Diese Form kann leicht mit der für das Gesamtmodell geltenden Ungleichung (23)₅ verglichen werden.

$$\phi_\eta = \sum_{\alpha=1}^k \left(\frac{1}{\Theta^\alpha} \mathbf{q}^\alpha + \rho^\alpha \eta^\alpha \mathbf{d}_\alpha \right) \quad \sigma_\eta = \sum_{\alpha=1}^k \frac{1}{\Theta^\alpha} \rho^\alpha r^\alpha \quad (37)$$

Man erkennt unmittelbar, daß die in den Gleichungen (28) definierten Summenrelationen auch für den Entropiezufluß sowie die Entropiezufuhr gelten. Im Vergleich der Gleichungen (24) mit den Gleichungen (37) erkennt man außerdem, daß die Entropieprinzipie für Einphasenmaterialien und für Mehrphasenmaterialien nur dann identische Ungleichungen liefern, wenn der Diffusionsprozeß verschwindet ($\mathbf{d}_\alpha = \mathbf{0}$) und wenn zusätzlich alle $\varphi^\alpha \in \varphi$ dieselbe Kelvinsche Temperatur ($\Theta^\alpha = \Theta$) aufweisen.

5 Abschließende Bemerkungen

In der vorliegenden Arbeit wurden die grundlegenden Konzepte der Theorie Poröser Medien (TPM) diskutiert und in einem einheitlichen Kalkül zusammengestellt. Die hier im Rahmen einer makroskopischen Vorgehensweise für mehrphasige Materialien mit *de facto* unvermischbaren Konstituierenden eingeführte Definition der TPM, bestehend aus den Elementen „Mischungstheorie“ und „Konzept der Volumenanteile“, führt auf eine in sich konsistente Kontinuumstheorie, die sich auf eine große Anzahl von Problemstellungen anwenden läßt. In der Arbeitsgruppe des Autors wurde die TPM z. B. erfolgreich angewandt, um das geometrisch nichtlineare, elastisch-plastische Konsolidationsproblem theoretisch und numerisch zu behandeln; letzteres mit Hilfe der Methode der finiten Elemente. Erweiterungen der TPM hinsichtlich einer zusätzlichen Erfassung der mittleren Korndrehungen granularer Stoffe wurden unter Berücksichtigung mikropolarer Freiheitsgrade durchgeführt und auf das Lokalisierungsproblem (Scherbandbildung) der Geomechanik angewandt. Die Lösung weiterer Probleme wird folgen.

Literatur

1. Biot, M. A.: Le problème de la consolidation des matières argileuses sous une charge. Ann. Soc. Sci. Bruxelles, B55, (1935), 110-113.
2. Biot, M. A.: General Theory of Three-dimensional Consolidation. J. Appl. Phys., 12, (1941), 155-164.
3. Biot, M. A.: Theory of Propagation of Elastic Waves in a Fluid-saturated Porous Solid, I. Low frequency range. J. Acoust. Soc. Am. 28, (1956), 168-178.
4. de Boer, R.: Vektor- und Tensorrechnung für Ingenieure. Springer-Verlag, Berlin, (1982).
5. de Boer, R.: Highlights in the Historical Development of the Porous Media Theory toward a Consistent Macroscopic Approach. Appl. Mech. Rev., 49, (1996), im Druck.

6. de Boer, R.; Ehlers, W.: Theorie der Mehrkomponentenkontinua mit Anwendung auf bodenmechanische Probleme, Teil I. Forschungsberichte aus dem Fachbereich Bauwesen, Heft 40, Universität-GH-Essen, (1986).
7. de Boer, R.; Ehlers, W.: Uplift, Friction and Capillarity - Three Fundamental Effects for Liquid-saturated Porous Solids. *Int. J. Solids Structures*, 26, (1990 a), 43-57.
8. de Boer, R.; Ehlers, W.: The Development of the Concept of Effective Stresses. *Acta Mech.*, 83, (1990 b), 77-94.
9. de Boer, R.; Ehlers, W.; Kowalski, S.; Plischka, J.: Porous Media - A Survey of Different Approaches. Forschungsberichte aus dem Fachbereich Bauwesen, Heft 54, Universität-GH-Essen, (1991).
10. Bowen, R. M.: Theory of Mixtures. In: *Continuum Physics, Vol. III* (herausgegeben von A. C. Eringen), Academic Press, New York, (1976), 1-127.
11. Bowen, R. M.: Incompressible Porous Media Models by Use of the Theory of Mixtures. *Int. J. Engng. Sci.*, 18, (1980), 1129-1148.
12. Bowen, R. M.: Compressible Porous Media Models by Use of the Theory of Mixtures. *Int. J. Engng. Sci.*, 20, (1982), 697-735.
13. Coussy, O.: *Mechanics of Porous Continua*. Wiley, Chichester, (1994).
14. Cross, J. J.: Mixtures of Fluids and Isotropic Solids. *Arch. Mech.*, 25, (1973), 1025-1039.
15. Delesse, M.: Pour déterminer la composition des roches. *Annales des mines*, 13, (1848), 379-388.
16. Diebels, S.; Ehlers, W.: Dynamic Analysis of a Fully Saturated Porous Medium Accounting for Geometrical and Material Non-linearities. *Int. J. Num. Meths. Eng.*, 39, (1996), 81-97.
17. Diebels, S.; Ehlers, W.: On Fundamental Concepts of Multiphase Micropolar Materials. *Technische Mechanik*, Band 16, Heft 1, (1996), 77-88.
18. Ehlers, W.: Poröse Medien - ein kontinuumsmechanisches Modell auf der Basis der Mischungstheorie. Forschungsberichte aus dem Fachbereich Bauwesen, Heft 47, Universität-GH-Essen, (1989).
19. Ehlers, W.: Toward Finite Theories of Liquid-saturated Elasto-plastic Porous Media. *Int. J. Plasticity*, 7, (1991), 443-475.
20. Ehlers, W.: Constitutive Equations for Granular Materials in Geomechanical Context. In: *Continuum Mechanics in Environmental Sciences and Geophysics* (herausgegeben von K. Hutter), pp. 313-402. CISM Courses and Lecture Notes No. 337, Springer-Verlag, Wien, (1993 a).
21. Ehlers, W.: Compressible, Incompressible and Hybrid Two-phase Models in Porous Media Theories. In: *Anisotropy and Inhomogeneity in Elasticity and Plasticity* (herausgegeben von Y. C. Angel), pp. 25-38. AMD-Vol. 158, ASME, New York, (1993 b).
22. Ehlers, W.: A Single Surface Yield Function for Geomaterials. *Arch. Appl. Mech.*, 65, (1995), 246-259.
23. Ehlers, W.; Diebels, S.: Dynamic Deformations in the Theory of Fluid-saturated Porous Solid Materials. In: *Anisotropy, Inhomogeneity and Nonlinearity in Solid Mechanics* (herausgegeben von D. F. Parker und A. H. England), Kluwer, Dordrecht, (1995), 241-246.
24. Ehlers, W.; Kubik, J.: On Finite Dynamic Equations for Fluid-saturated Porous Media. *Acta Mech.*, 105, (1994), 101-117.
25. Ehlers, W.; Diebels, S.; Mahnkopf, D.: Elasto-plastic Consolidation of Fluid-saturated Soils. In: *Computational Plasticity, Vol. 2* (herausgegeben von D. R. J. Owen, E. Oñate und E. Hinton), Pineridge Press, Swansea, (1995 a), 1689-1700.
26. Ehlers, W.; Diebels, S.; Volk, W.: Ein elastisch-plastisches Materialmodell für flüssigkeitsgesättigte poröse Festkörper unter Einbeziehung der Mikrorotation. In: *Festschrift zum 60. Geburtstag von Prof. Dr.-Ing. Reint de Boer*, Universität-GH Essen, (1995 b).
27. Haupt, P.: Foundations of Continuum Mechanics. In: *Continuum Mechanics in Environmental Sciences and Geophysics* (herausgegeben von K. Hutter), CISM Courses and Lecture Notes No. 337, Springer-Verlag, Wien, (1993), 1-77.

28. Hassanizadeh, M.; Gray, W. G.: General Conservation Equations for Multi-phase Systems: 1. Averaging Procedure. *Adv. Water Res.*, 2, (1979 a), 131-144.
29. Hassanizadeh, M.; Gray, W. G.: General Conservation Equations for Multi-phase Systems: 2. Mass, Momenta, Energy, and Entropy Equations. *Adv. Water Res.*, 2, (1979 b), 191-203.
30. Heinrich, G.; Desoyer, K.: Hydromechanische Grundlagen für die Behandlung von stationären und instationären Grundwasserströmungen. *Ing.-Archiv*, 23, (1955), 182-185.
31. Heinrich, G.; Desoyer, K.: Hydromechanische Grundlagen für die Behandlung von stationären und instationären Grundwasserströmungen, II. Mitteilung. *Ing.-Archiv*, 24, (1956), 81-84.
32. Heinrich, G.; Desoyer, K.: Theorie dreidimensionaler Setzungs Vorgänge in Tonschichten. *Ing.-Archiv*, 30, (1961), 225-253.
33. Hutter, K.: The Foundations of Thermodynamics, its Basic Postulates and Implications. A Review of Modern Thermodynamics. *Acta Mech.*, 27, (1977), 1-54.
34. Plischka, J.: Die Bedeutung der Durchschnittsbildungstheorie für die Theorie poröser Medien. Dissertation, Fachbereich Bauwesen, Universität-GH-Essen, (1992).
35. Prévost, J. H.: Nonlinear Transient Phenomena in Saturated Porous Media. *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, 20, (1982), 3-18.
36. Prévost, J. H.: Constitutive Equations for Pressure-sensitive Soils: Theory, Numerical Implementation, and examples. In: *Geomechanical Modelling in Engineering Practice* (herausgegeben von R. Dungar und J. A. Studer), Balkema, Rotterdam, (1986), 331-350.
37. Schrefler, B. A.; Simoni, L.; Turska, E.; Zhan, X. Y.: Zur Berechnung von ungesättigten Konsolidationsproblemen. *Bauingenieur*, 68, (1993), 375-384.
38. Simoni, L.; Schrefler, B. A.: Mapped infinite elements in soil consolidation. *Int. J. Num. Meths. Eng.*, 24, (1987), 513-527.
39. Truesdell, C.: Sulle basi delle termomeccanica. *Rend. Lincei*, 22, (1957), 33-38, 158-166.
40. Truesdell, C.: Thermodynamics of Diffusion. In: *Rational Thermodynamics, Second Edition* (herausgegeben von C. Truesdell), Springer-Verlag, New York, (1984), 219-236.
41. Truesdell, C.; Toupin, R. A.: The Classical Field Theories. In: *Handbuch der Physik, Band III/1* (herausgegeben von S. Flügge), Springer-Verlag, Berlin, (1960), 226-902.
42. Woltman, R.: *Beyträge zur Hydraulischen Architectur, Dritter Band.* Johann Christian Dieterich, Göttingen, (1794).
43. Wunderlich, W.; Cramer, H.: A Unified Approach to the Dynamic Analysis of Soils as Multiphase Media. In: *Finite Elements in the 90's* (herausgegeben von E. Oñate, J. Periaux und A. Samuelsson), Springer-Verlag/CIMNE, Barcelona, (1991), 537-546.
44. Zienkiewicz, O. C.; Shiomi, T.: Dynamic Behaviour of Saturated Porous Media: The Generalized Biot Formulation and its Numerical Solution. *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.*, 8, (1984), 71-96.
45. Zienkiewicz, O. C.; Chan, A. H. C.; Pastor, M.; Paul, D. K., Shiomi, T.: Static and Dynamic Behaviour of Soils: a Rational Approach to Quantitative Solutions: I. Fully Saturated Problems. *Proc. R. Soc. Lond.*, A 429, (1990), 285-309.

Anschrift: Professor Dr.-Ing. Wolfgang Ehlers, Institut für Mechanik (Bauwesen), Universität Stuttgart, D-70 550 Stuttgart