TECHNISCHE MECHANIK, Band 16, Heft 1, (1996), 13-22
Manuskripteingang: 11.12.1995

Konzepte der Materialtheorie

P. Haupt

Während die Bilanzrelationen der Kontinuumsmechanik als Naturgesetze universale Gültigkeit besitzen, beschreiben die Materialgleichungen die individuellen Eigenschaften eines jeden materiellen Körpers. Die systematische Entwicklung von mathematischen Modellen, die das Materialverhalten physikalisch konsistent und zutreffend wiedergeben, ist Aufgabe der Materialtheorie. Die Konzepte der Materialtheorie führen auf eine allgemeine Materialgleichung, nach der der 2. Piola-Kirchhoff Tensor durch die vergangene Geschichte des Greenschen Verzerrungstensors bestimmt ist. Als ein Beispiel zur Realisierung einer funktionalen Spannungs-Dehnungs-Beziehung wird ein Modell der Viskoplastizität diskutiert, das wesentliche Merkmale des Verhaltens eines austenitischen Stahls zutreffend wiedergibt.

1 Bilanzrelationen der Kontinuumsmechanik

Die Grundgleichungen der Kontinuumsmechanik bestehen aus Bilanzrelationen und Materialgleichungen. Dabei drücken die *Bilanzreaktionen* die universalen Beziehungen aus, die für jeden materiellen Körper $\mathscr{B}$ zu jeder Zeit t axiomatisch gefordert werden, während die *Materialgleichungen* die individuellen Eigenschaften eines jeden einzelnen materiellen Körpers darstellen.
Die universal gültigen Bilanzreaktionen der Thermomechanik beziehen sich jeweils auf den Impuls $\mathbf{I}$, den Drehimpuls $\mathbf{D}_c$, die Energie (Innere Energie E, Kinetische Energie K) und die Entropie S; die zeitlichen Veränderungen dieser Größen werden durch die thermomechanischen Einwirkungen der äußeren Umgebung auf das materielle System verursacht, das heißt, durch die resultierende Kraft $\mathbf{F}$, das resultierende Moment $\mathbf{M}_c$ und die Leistung L des angreifenden Kraftsystems, durch die dem System zugeführte Wärmeleistung Q und schließlich noch durch die Entropiezufuhr H:

Impulsbilanz: $$\dot{\mathbf{I}}(\mathscr{B},\, t) = \mathbf{F} \tag{1}$$

Drehimpulsbilanz: $$\dot{\mathbf{D}}_c(\mathscr{B},\, t) = \mathbf{M}_c \tag{2}$$

Energiebilanz (1. Hauptsatz der Thermodynamik): $$\dot{K}(\mathscr{B},\, t) + \dot{E}(\mathscr{B},\, t) = L_a + Q \tag{3}$$

Entropieungleichung (2. Hauptsatz der Thermodynamik): $$\dot{S}(\mathscr{B},\, t) \geq H \tag{4}$$

Nach der Entropieungleichung als einer möglichen Formulierung des Dissipationspostulates ist die zeitliche Änderung der Entropie S mindestens gleich der Entropiezufuhr H. Dabei ist diese Entropiezufuhr in geeigneter Weise zu definieren. Die weitgehend übliche konkrete Formulierung der Entropieungleichung verwendet die aus der Gleichgewichtsthermodynamik motivierbare Definition „Wärmezufuhr/Temperatur".
Den globalen Aussagen (1) bis (4) entsprechen unter hinreichenden Stetigkeitsannahmen lokale Aussagen

$$\rho\,\dot{\mathbf{v}}(\mathbf{x},\, t) = \operatorname{div}\mathbf{T}(\mathbf{x},\, t) + \rho\,\mathbf{f} \qquad \mathbf{T} = \mathbf{T}^T \tag{5}$$

$$\dot{e}(\mathbf{x},\, t) = -\frac{1}{\rho}\operatorname{div}\mathbf{q} + r + \frac{1}{\rho}\mathbf{T}\cdot\mathbf{D} \tag{6}$$

$$\dot{s}(\mathbf{x},\, t) + \frac{1}{\rho}\operatorname{div}\left(\frac{\mathbf{q}}{\Theta}\right) - \frac{r}{\Theta} \geq 0 \tag{7}$$

Die Bilanzrelation für die Entropie ist eine Ungleichung, die man als eine einschränkende Forderung an jede Lösung der Feldgleichungen aufzufassen hat. Die lokalen Bilanzgleichungen (5) und (6) beinhalten insgesamt 4 skalare Differentialgleichungen für das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, den Spannungszustand $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$, die spezifische Innere Energie $e(\mathbf{x}, t)$, den Wärmeflußvektor $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$, die spezifische Entropie $s(\mathbf{x}, t)$ und die thermodynamische Temperatur $\Theta\,(\mathbf{x}, t)$. Da dies insgesamt 15 skalaren Feldern entspricht, werden 11 zusätzliche Gleichungen benötigt, um das Differentialgleichungssystem abzuschließen. Diese Gleichungen stellen die stofflichen Eigenschaften eines materiellen Körpers dar und heißen daher *Materialgleichungen.* Üblicherweise werden Materialgleichungen für $\mathbf{T}$, $\mathbf{q}$, e und s formuliert.

2 Materialeigenschaften

Die mathematische Modellierung der Materialeigenschaften ist Aufgabe der *Materialtheorie.* Ziel der Materialtheorie ist die Bereitstellung von allgemeinen Prinzipien und systematischen Methoden zur Konstruktion von mathematischen Modellen, die die individuellen Eigenschaften der materiellen Körper in geeigneter Weise darstellen. Eine mathematische Modellierung des Materialverhaltens kann auf drei Ebenen stattfinden: Man formuliert *Materialgleichungen*, materielle *Symmetrieeigenschaften* und geometrische *Zwangsbedingungen.*
Eine *Materialgleichung* ist eine Beziehung, die die individuelle Antwort eines materiellen Elementes auf einen Eingangsprozeß darstellt. In der Kontinuumsmechanik ist eine Materialgleichung eine Relation zwischen Deformations- und Spannungsprozessen. Dabei kann entweder die Spannungsgeschichte oder die Deformationsgeschichte als Eingangsprozeß angesehen werden, oder auch eine Kombination aus beiden, soweit dies physikalisch sinnvoll ist. In weiterführenden Theorien sind die Darstellungen der Eingangsprozesse und Materialantworten komplexer: So setzt eine Berücksichtigung der Temperaturabhängigkeit der Materialeigenschaften eine allgemeine Theorie der Thermodynamik voraus, die dann zusammen mit der Mechanik den prinzipiellen Hintergrund für die Materialbeschreibung bildet. In diesem Zusammenhang treten weitere unabhängige und abhängige Variable auf: Temperatur, Temperaturgradient, Innere Energie, Entropie, Wärmefluß und Entropiefluß. Mit Hilfe derartiger Größen wird im Rahmen einer Thermomechanik das nichtmechanische Materialverhalten modelliert. Im Fall der *Elastizität* werden alle Materialgleichungen durch Funktionen dargestellt, die man auch Materialfunktionen nennt. Zur Modellierung des inelastischen Materialverhaltens, d.h. zur Konkretisierung der allgemeinen Kategorien der *Viskoelastizität*, *Plastizität* und *Viskoplastizität* reichen die Materialfunktionen nicht aus, weil funktionale Relationen dargestellt werden müssen. *Funktionale* kann man entweder explizit darstellen, beispielsweise durch Integrale über den Verlauf der Eingangsprozesse oder implizit durch Differentialgleichungen (Theorie der Inneren Variablen). Die klassischen Theorien der Kontinuumsmechanik und ihre Erweiterungen geben Hinweise, wie explizite oder implizite Darstellungen von funktionalen Spannungs-Dehnungs-Relationen aussehen können. Sie werden in der Materialtheorie in einen allgemeinen Rahmen eingeordnet (siehe dazu Truesdell und Noll, 1965 sowie Haupt, 1993).

Die Materialgleichungen sind nicht das einzige Mittel zur Darstellung von Materialeigenschaften. Der Begriff der materiellen *Symmetrieeigenschaften* soll unabhängig von jeder konkreten Spannungs-Dehnungs-Beziehung die Tatsache ausdrücken, daß das Materialverhalten mehr oder weniger richtungsabhängig sein kann. Ein Konzept, das eine quantitative Darstellung der Richtungsabhängigkeit ermöglicht, beruht auf der Untersuchung der Abhängigkeit einer Materialgleichung von der Wahl der Referenzkonfiguration: Bleibt eine Spannungs-Dehnungs-Beziehung unter gewissen Transformationen der Referenzkonfigurationen invariant, so liegt eine materielle Symmetrieeigenschaft vor. Die ausschließliche Betrachtung der materiellen Symmetrieeigenschaften ermöglicht eine Einteilung der Stoffe in Fluide und Festkörper. In diesem Sinne ist ein Fluid generell durch andere Symmetrieeigenschaften gekennzeichnet als ein Festkörper. Die Gesamtheit der Festkörper zerfällt ihrerseits in Untermengen, die sich durch den Grad der materiellen Symmetrie unterscheiden. Bei der Darstellung der materiellen Symmetrieeigenschaften bleibt die spezielle Struktur der Materialgleichungen grundsätzlich offen. Die Einordnung der materiellen Körper nach ihren Symmetrieeigenschaften umfaßt daher prinzipiell alle vier Kategorien des Materialverhaltens, d.h. Elastizität, Viskoelastizität, Plastizität und Viskoplastizität.

Eine *Innere Zwangsbedingung* (kinematische oder geometrische Zwangsbedingung) ist eine Einschränkung der Bewegungsmöglichkeiten eines materiellen Körpers, die man als Materialeigenschaft a priori definieren kann. Eine geometrische Zwangsbedingung ist eine Idealisierung, die unabhängig von jeder speziellen Form der Materialgleichungen und auch unabhängig von jeder speziellen materiellen Symmetrieeigenschaft eingeführt werden kann. Das bekannteste Beispiel für eine geometrische Zwangsbedingung ist die insbesondere in der Strömungsmechanik häufig vorkommende Annahme der Inkompressibilität: Ein inkompressibler materieller Körper kann nur volumenerhaltende Bewegungen ausführen, wobei das Materialverhalten ansonsten ganz beliebig ist. Die weitestgehende Innere Zwangsbedingung führt auf den Begriff des starren Körpers. Starre

Körper können außer dieser geometrischen Zwangsbedingung keine weiteren mechanischen Materialeigenschaften haben und sind daher für die Kontinuumsmechanik weniger von Interesse.

3 Allgemeine Prinzipien der Materialtheorie

Im Hinblick auf eine systematische Konstruktion von Materialmodellen durch Materialgleichungen, Symmetrieeigenschaften und geometrische Zwangsbedingungen ist es sinnvoll, allgemeine Ideen und Prinzipien zu beachten, die sich im Verlauf der Entwicklung der Materialtheorie als nützlich, einleuchtend oder gar zwingend notwendig herausgestellt haben. Drei Prinzipien seien besonders hervorgehoben:

1) Das *Prinzip des Determinismus* der Mechanik geht davon aus, daß der momentane Spannungszustand $\mathbf{T}(\mathscr{P}, t)$ in einem materiellen Punkt $\mathscr{P}$ durch die vergangene Geschichte der Bewegung des materiellen Körpers eindeutig bestimmt ist.

2) Das *Prinzip der lokalen Wirkung* fordert, daß der Spannungszustand in $\mathscr{P}$ nur von der Bewegungsgeschichte einer kleinen Umgebung dieses Punktes beeinflußt wird und nicht von der Bewegung aller Körperpunkte.

Das sehr allgemeine Prinzip des Determinismus wird durch das Prinzip der lokalen Wirkung eingeschränkt. Eine solche Einschränkung ist sicher zwingend notwendig, da man sonst wohl kaum Materialgleichungen formulieren und dadurch Materialeigenschaften beschreiben könnte.

Eine wissenschaftlich fundierte Beschreibung des Materialverhaltens muß unabhängig sein von willkürlich wählbaren Darstellungsmitteln, wie Koordinatensystem und Bezugssystem. Dementsprechend müssen Materialgleichungen geeignete Invarianzeigenschaften besitzen. In der Kontinuumsthermomechanik wird üblicherweise eine Invarianzanforderung erhoben, die unter der Bezeichnung *Materielle Objektivität* bekannt ist.

3) Das *Prinzip der Materiellen Objektivität* postuliert, daß jede Darstellung von Materialeigenschaften unabhängig vom Bezugssystem sein soll: Eine Materialgleichung ist invariant gegenüber einem beliebigen Wechsel des Bezugssystems und sie enthält keinerlei Informationen über die Bewegung des verwendeten Bezugssystems relativ zu einem zugrundeliegenden Inertialsytem. Das Prinzip der materiellen Objektivität in dieser Formulierung ist eine Annahme, die die mathematische Form der Materialgleichungen einschränkt.

Die drei Prinzipien - Determinismus, Lokale Wirkung, Materielle Objektivität - sind nicht die einzigen Forderungen, die man an ein physikalisch sinnvolles Materialmodell richten muß. So erzwingt bereits der generelle Aufbau der Kontinuumsmechanik ein Prinzip der Verträglichkeit mit den Bilanzrelationen: Keine Materialgleichung darf zu den Bilanzrelationen der Kontinuumsmechanik und -thermodynamik im Widerspruch stehen. Trivial ist in diesem Zusammenhang sicher die Verträglichkeit mit der Drehimpulsbilanz, da diese lediglich die Symmetrie des Spannungstensors erfordert. Im Gegensatz dazu ist die Frage der Verträglichkeit mit der Impulsbilanz nur für ganz spezielle Sonderfälle beantwortbar: Über den mathematischen Charakter der Anfangs-Randwertaufgabe, die durch Kombination eines Materialmodells mit der Impulsbilanz entsteht, kann man im Hinblick auf die Existenz von Lösungen kaum allgemeine Aussagen machen. Ebensowenig sind allgemeine Aussagen über die Eindeutigkeit der Lösung von Randwertaufgaben zu erwarten, zumal die Forderung nach Eindeutigkeit bei nichtlinearen Problemen oft gar nicht sinnvoll ist. Ähnliches gilt zweifellos auch für die Energiebilanz der Thermodynamik. Die Verträglichkeit mit der Entropieungleichung (Prinzip der Irreversibilität) ist unverzichtbar, allerdings vielfach auch ein einfacheres Problem: Für gewisse Klassen von Materialmodellen kann man die Formulierung der Materialgleichungen a priori so einrichten, daß die Erfüllung der Entropieungleichung garantiert ist (siehe dazu Haupt, 1995).

Weitere Prinzipien, die die Konstruktion von Materialmodellen unterstützen, könnten genannt werden, wie etwa das Prinzip der *Äquipräsenz*, das Prinzip des *Fading Memory* etc. Insgesamt ist die Frage bisher unbeantwortet geblieben, welche allgemeingültigen Prinzipien und Forderungen notwendig und hinreichend wären, um die physikalische Konsistenz und Plausibilität von Materialmodellen in jeder Hinsicht sicherzustellen. Diese Frage ist als das *Offene Hauptproblem der Materialtheorie* bezeichnet worden (Truesdell und Noll, 1965, Sect. 20). Im Hinblick darauf kann die Materialtheorie auch heute noch nicht als abgeschlossene Theorie angesehen werden, die axiomatisch vollständig aufgebaut werden könnte: Es gibt allenfalls ein paar systematische Gesichtspunkte, deren Beachtung von Nutzen sein kann.

Die allgemeinen Prinzipien der Materialtheorie führen auf die Definitionsgleichung des Einfachen Materials, nach der der momentane Spannungszustand von dem vergangenen zeitlichen Verlauf des Deformationsgradienten $\mathbf{F}(\tau) \equiv \mathbf{F}(\mathbf{X}, \tau) = \mathrm{Grad}\, \mathbf{x}(\mathbf{X}, \tau)$ abhängt:

$$\mathbf{T}(t) = \underset{\tau \leq t}{\mathfrak{G}} \left[\mathbf{F}(\tau)\right] \tag{8}$$

Diese allgemeine Formulierung einer mechanischen Materialgleichung ist für die Erfüllung des Prinzips der materiellen Objektivität lediglich notwendig, jedoch noch nicht hinreichend. Eine erneute Anwendung des Prinzips der Materiellen Objektivität führt mit den Definitionen

$$\tilde{\mathbf{T}} = (\det \mathbf{F})\mathbf{F}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{F}^{T-1} \qquad \text{(2. } \textit{Piola-Kirchhoff}\text{-Tensor)} \tag{9}$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{F}^T\mathbf{F} - \mathbf{1}\right) \qquad (\textit{Green}\text{scher Verzerrungstensor}) \tag{10}$$

auf die *Reduzierte Form*

$$\tilde{\mathbf{T}}(\mathrm{t}) = \underset{\tau \leq t}{\mathfrak{F}} \left[\mathbf{E}(\tau)\right] \tag{11}$$

Aus der Annahme der Materiellen Objektivität ergibt sich somit der wichtige Hinweis, daß es grundsätzlich sinnvoll ist, den *Green*schen Verzerrungstensor $\mathbf{E}$ mit dem 2. *Piola-Kirchhoff*-Tensor $\tilde{\mathbf{T}}$ in Materialgleichungen zu verknüpfen (s. Truesdell und Noll, 1965).
Durch Konkretisierung der Relation (11) kann man nun eine Vielzahl von Materialmodellen aufstellen, die gegenüber einem Wechsel des Bezugssystems invariant sind. Dabei hat es sich als äußerst zweckmäßig erwiesen, nicht nach expliziten Darstellungen der funktionalen Beziehungen zu suchen, sondern diese implizit durch Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen darzustellen, die man als Evolutionsgleichungen für zusätzlich eingeführte Innere Variable auffassen kann. Ein aktuelles Beispiel für die Realisierung derartiger Darstellungsmöglichkeiten ist das im folgenden skizzierte Materialmodell der Viskoplastizität.

4 Ein Modell der Viskoplastizität

In neueren Arbeiten (Lion, 1994 und Haupt and Lion, 1995) wurde ein Materialmodell vorgeschlagen, mit dem das viskoplastische Verhalten austenitischer Stähle in wesentlichen Grundzügen beschreibbar ist. Dieses Materialmodell wurde auf der Grundlage allgemeiner Konzepte der Materialtheorie entwickelt, die z. B. in Haupt (1993) diskutiert werden. Das konstitutive Modell gilt für kleine Deformationen; dementsprechend bezeichnet $\mathbf{E}$ im folgenden den linearisierten *Green*schen Verzerrungstensor und $\mathbf{T}$ (nach wie vor) den *Cauchy*schen Spannungstensor.
Die grundlegende Annahme des Modells ist eine additive Zerlegung des Spannungszustandes in eine Gleichgewichtsspannung und eine Überspannung,

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_{\mathrm{eq}} + \mathbf{T}_{\mathrm{ov}} \tag{12}$$

Für die Materialgleichung der *Gleichgewichtsspannung* $\mathbf{T}_{\mathrm{eq}}$ wird ein geschwindigkeitsunabhängiges Funktional angenommen und für die *Überspannung* (Nichtgleichgewichtsspannung) ein geschwindigkeitsabhängiges Fading-Memory-Funktional. Dieses Funktional soll eine Relaxationseigenschaft besitzen und für hinreichend kleine Deformationsgeschwindigkeiten asymptotisch verschwinden. Beide Funktionale werden wie folgt durch gewöhnliche Differentialgleichungen implizit definiert:

Gleichgewichtsspannung:

Zerlegung der Deformation

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\mathrm{e}} + \mathbf{E}_{\mathrm{p}} \tag{13}$$

Elastizitätsbeziehung

$$\mathbf{T}_{\mathrm{eq}}^{\mathrm{D}} = 2\mu_{\mathrm{eq}}\mathbf{E}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{D}} \qquad \frac{1}{3}\mathrm{tr}\mathbf{T}_{\mathrm{eq}} = \kappa_{\mathrm{eq}}\mathrm{tr}\mathbf{E}_{\mathrm{e}} \qquad \left(\mathbf{T}_{\mathrm{eq}}^{\mathrm{D}} = \mathbf{T}_{\mathrm{eq}} - \frac{1}{3}\left(\mathrm{tr}\,\mathbf{T}_{\mathrm{eq}}\right)\mathbf{1}\right) \tag{14}$$

Fließ- und Belastungsbedingung

$$F = \frac{1}{2}\left\|\mathbf{T}_{\mathrm{eq}}^{\mathrm{D}} - \mathbf{X}^{\mathrm{D}}\right\|^2 - \frac{1}{3}g_0^2 \qquad B = \left(\mathbf{T}_{\mathrm{eq}}^{\mathrm{D}} - \mathbf{X}^{\mathrm{D}}\right) \cdot \dot{\mathbf{T}}_{\mathrm{eq}} \tag{15}$$

Fließregel

$$\dot{\mathbf{E}}_{\mathrm{p}}(\mathrm{t}) = \begin{cases} \lambda\left(\mathbf{T}_{\mathrm{eq}} - \mathbf{X}\right)^{\mathrm{D}} & \text{für } F = 0 \text{ und } B > 0 \\ 0 & \text{für alle anderen Fälle} \end{cases} \tag{16}$$

Kinematische Verfestigung

$$\mathbf{X} = \sum_k \mathbf{X}_k \tag{17}$$

$$\dot{\mathbf{X}}_k(t) = c_k\dot{\mathbf{E}}_{\mathrm{p}}(t) - b_k\dot{z}(t)\mathbf{X}_k \tag{18}$$

Verallgemeinerte Bogenlänge

$$\dot{z}(t) = \frac{\dot{s}(t)}{1 + \alpha_p p} \tag{19}$$

$$\dot{s}(t) = \sqrt{\frac{2}{3}}\left\|\dot{\mathbf{E}}_p(t)\right\| \tag{20}$$

$$\dot{p}(t) = \frac{\dot{s}(t)}{s_p\left(1 + \alpha_\delta\delta\right)}\left(\|\mathbf{X}\| - p\right) \tag{21}$$

$$\dot{\delta}(t) = \frac{\dot{s}(t)}{s_\delta}(p - \delta) \tag{22}$$

Diese Materialgleichungen definieren ein geschwindigkeitsunabhängiges Funktional für die Gleichgewichtsspanung $\mathbf{T}_{\mathrm{eq}}$, das einer modifizierten Version der klassischen Plastizität entspricht. Eine Modifikation besteht in dem Modell der kinematischen Verfestigung: Der Backstress Tensor $\mathbf{X}$ setzt sich nach (17) additiv aus mehreren Termen zusammen und erlaubt so eine genauere Modellierung der Spannungs-Dehnungs-Kennlinie (s. Chaboche und Rousselier, 1983). Eine weitere Modifikation ist die Einführung der verallgemeinerten Bogenlänge $z(t)$ als Funktional der plastischen Bogenlänge bzw. der akkumulierten plastischen Dehnung $s(t)$. Dieses Funktional ist durch Gleichung (20) und die drei Evolutionsgleichungen (19), (21) und (22) definiert. Eine wichtige Eigenschaft dieser Evolutionsgleichungen ist die Möglichkeit, im Zusammenhang mit zyklischen Deformationsprozessen Verfestigungs- und Entfestigungsvorgänge darzustellen. Dies wurde in der Arbeit von Kamlah (1994) und in den Arbeiten Haupt et al. (1992) sowie Haupt und Kamlah (1995) entwickelt. Zum Vergleich kann man auf Valanis (1974) verweisen, wo die verallgemeinerte Bogenlänge eine Funktion der gewöhnlichen Bogenlänge und kein Funktional ist. In Bild 1 wird das zyklische Verfestigungsverhalten, das durch das Funktional der Gleichgewichtsspannung dargestellt wird, veranschaulicht. Gezeigt wird die Antwort der Gleichgewichtsspannung auf einen zyklischen Dehnungsprozeß mit zwei unterschiedlichen Mitteldehnungen. Die Evolutionsgleichung (22) bewirkt eine Unsymmetrie in der Veränderlichkeit der Amplitude der Spannungsantwort beim Wechsel der Dehnungsamplitude. Aus Versuchen geht hervor, daß der Abfall der Spannungsamplitude in der Folge einer verminderten Dehnungsamplitude langsamer verläuft als das durch eine Erhöhung der Spannungsamplitude verursachte Anwachsen der Dehnungsamplitude. Die Bilder 2 und 3 zeigen, daß dieses Verhalten durch die Materialgleichungen (12) - (22) wiedergegeben wird.

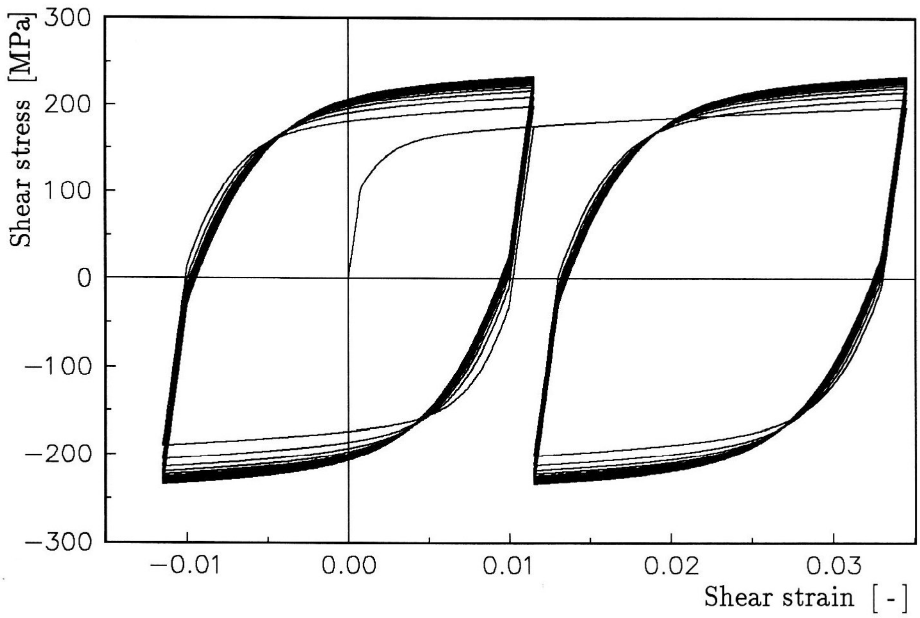

Bild 1. Antwort der Gleichgewichtsspannung auf einen zyklischen Dehnungsprozeß mit zwei unterschiedlichen Mitteldehnungen

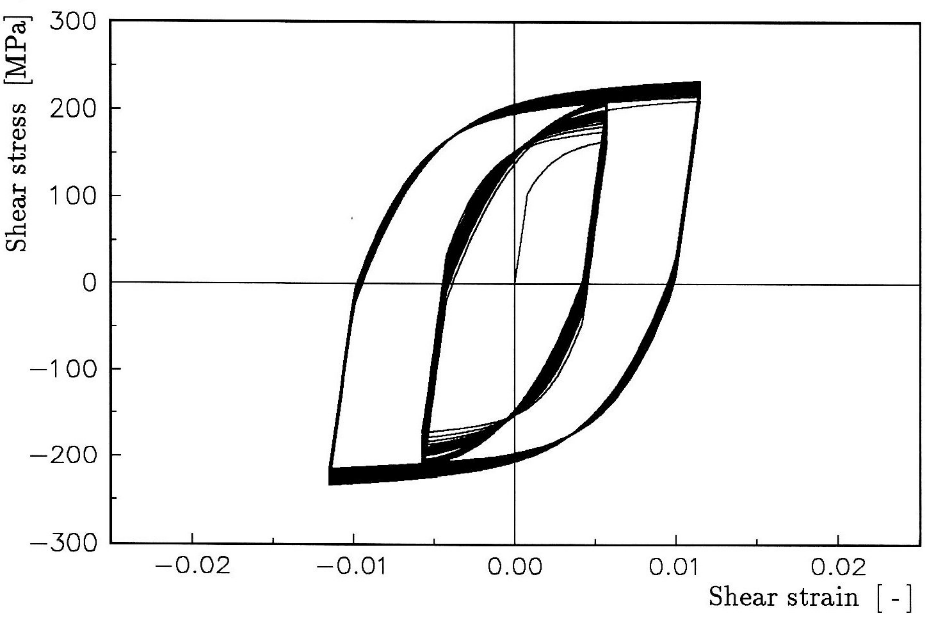

Bild 2. Antwort der Gleichgewichtsspannung auf einen zyklischen Dehnungsprozeß mit drei unterschiedlichen Dehnungsamplituden (0.006 - 0.012 - 0.006).

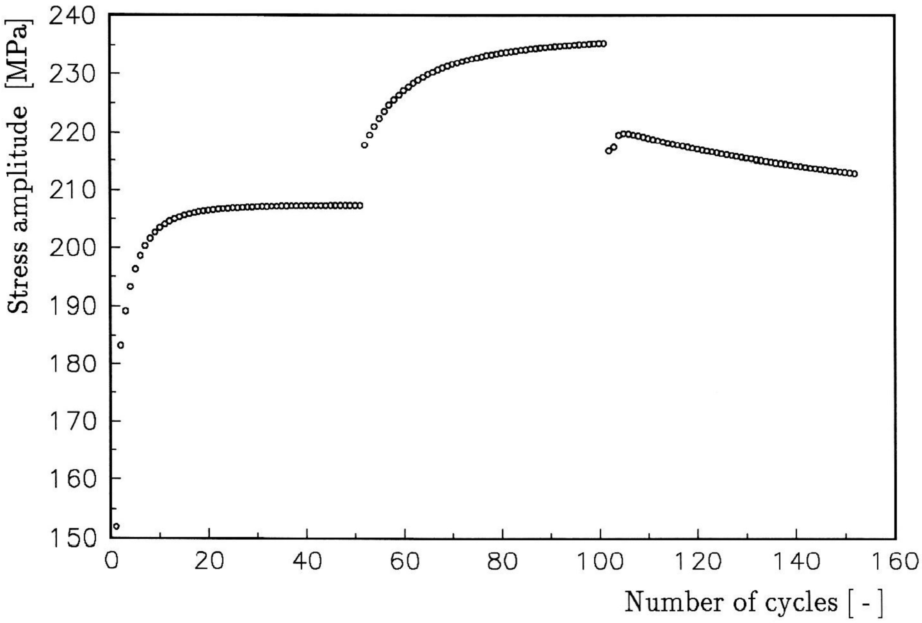

Bild 3. Antwort der Gleichgewichtsspannung auf einen zyklischen Dehnungsprozeß mit drei unterschiedlichen Dehnungsamplituden (0.006 - 0.012 - 0.006). Entwicklung der Dehnungsamplitude

Das Funktional für die geschwindigkeitsabhängige *Überspannung* $\mathbf{T}_{\text{ov}}$ ist durch die folgenden Annahmen definiert:

$$\mathbf{T}_{\text{ov}} = \sum_k \mathbf{T}_{\text{ov}k} \tag{23}$$

$$\dot{\mathbf{T}}^{\text{D}}_{\text{ov}k}(t) = 2\mu_0\lambda_k\dot{\mathbf{E}}^{\text{D}}(t) - \frac{1}{z_{\text{o}k}M\left(\left\|\mathbf{T}^{\text{D}}_{\text{ov}}\right\|\right)}\mathbf{T}^{\text{D}}_{\text{ov}k} - \beta\lambda_k\dot{\mathbf{T}}^{\text{D}}_{\text{eq}}(t) \tag{24}$$

$$\operatorname{tr}\dot{\mathbf{T}}_{\text{ov}k}(t) = \kappa_0\lambda_k\operatorname{tr}\dot{\mathbf{E}}(t) - \frac{1}{z_{\text{o}k}M\left(\left\|\mathbf{T}^{\text{D}}_{\text{ov}}\right\|\right)}\operatorname{tr}\mathbf{T}_{\text{ov}k} - \beta\lambda_k\operatorname{tr}\dot{\mathbf{T}}_{\text{eq}}(t) \tag{25}$$

$$M\left(\left\|\mathbf{T}^{\text{D}}_{\text{ov}}\right\|\right) = \exp\left(-\frac{\left\|\mathbf{T}^{\text{D}}_{\text{ov}}\right\|}{\sigma_0}\right) \tag{26}$$

$$\beta\begin{cases} 1 \text{ für } \mathbf{T}_{\text{ov}}\cdot\dot{\mathbf{T}}^{\text{D}}_{\text{eq}}(\text{t}) > 0 \\ 0 \text{ für } \mathbf{T}_{\text{ov}}\cdot\dot{\mathbf{T}}^{\text{D}}_{\text{eq}}(\text{t}) \le 0 \end{cases} \tag{27}$$

Die gesamte Überspannung $\mathbf{T}_{\text{ov}}$ ist die Summe der partiellen Überspannungen $\mathbf{T}_{\text{ov}k}$, für die die Evolutionsgleichungen (24) und (25) gelten. Das Produkt $z_0 M(\cdot)$ entspricht einer spannungsabhängigen Relaxationszeit. Die Materialfunktion $M(\cdot)$ ist positiv monoton fallend und bewirkt eine nichtlineare Geschwindigkeitsabhängigkeit der Überspannung. Die letzten Terme in den Gleichungen (24) und (25) veranlassen die folgende Eigenschaft: Beim Start eines Dehnungsprozesses aus einem Gleichgewichtszustand heraus (d. h. beispielsweise nach einem Relaxationsvorgang) entspricht die Steigerung der Spannung-Dehnungskennlinie der spontanen Elastizität. Auch dieses Verhalten des Materialmodells ist durch Experimente motiviert.

Spannungs-Dehnungs-Kennlinien, die die physikalische Bedeutung des gesamten Materialmodells veranschaulichen, sind in den Bildern 4, 5 und 6 wiedergegeben. Alle numerischen Modellrechnungen (auch die zu den Bildern 1 bis 3) basieren auf Materialparametern, die aus Torsionsversuchen an dünnwandigen zylindrischen Rohren identifiziert wurden (Lion, 1994). Die Zahlenwerte dieser Parameter sind in der folgenden Tabelle 1 aufgeführt.

μ_{eq} MPa	κ_{eq} MPa	q_0 MPa	c_1 MPa	b_1 -	c_2 MPa	b_2 -	α_p MPa^{-1}	s_p -	α_δ MPa^{-1}	s_δ -
67000	664000	180	40370	650	2340	120	0.0078	0.065	0.004	2.4

μ_0 Mpa	κ_0 Mpa	σ_0 Mpa	λ_1 -	z_{01} s	λ_2 -	z_{02} s
70000	683000	6.75	0.96	180	0.04	7900

Tabelle 1. Materialparameter, identifiziert aus Torsionsversuchen

Die skizzierten Spannungs-Dehnungs-Kennlinien entsprechen dem gemessenen Verhalten des untersuchten Materials. Weitere Einzelheiten sind in der Arbeit Haupt und Lion (1995) zu finden. Die thermodynamische Konsistenz des Modells im Sinne einer identischen Erfüllung der Entropieungleichung wird in Haupt (1995) nachgewiesen.

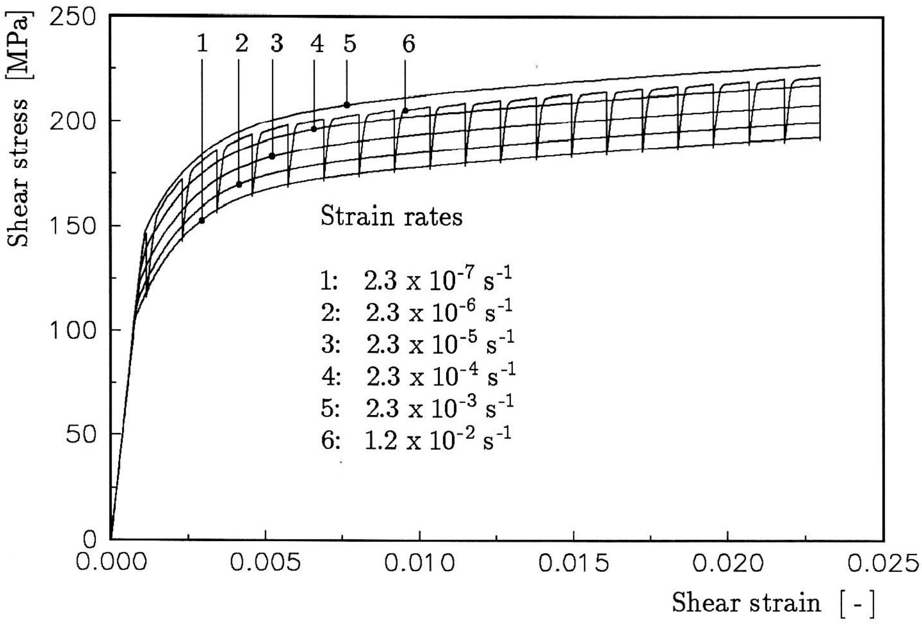

Bild 4. Spannungsantwort des vollständigen Modells auf monotone Dehnungsprozesse mit verschiedenen Dehnungsgeschwindigkeiten und Haltezeiten

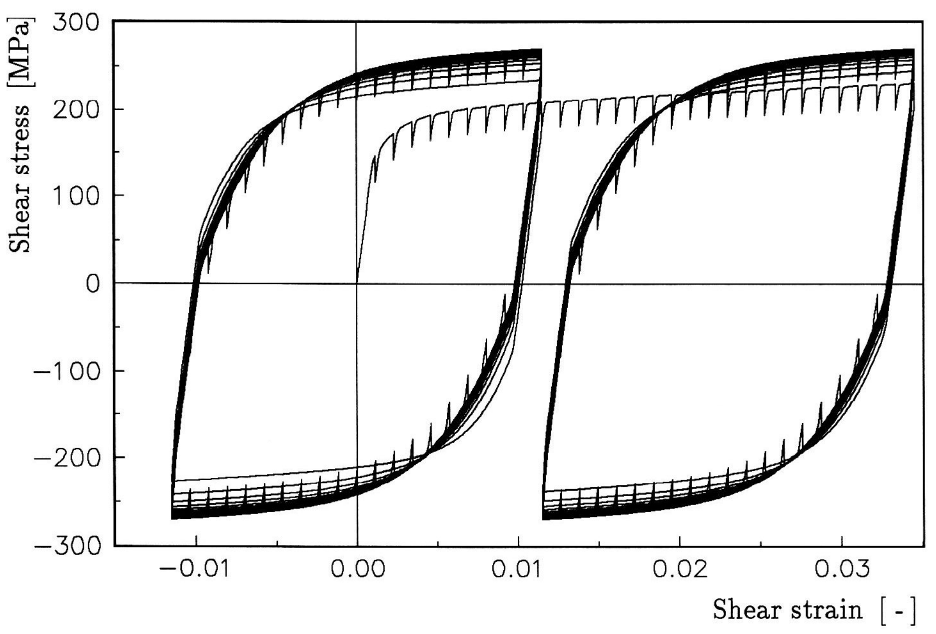

Bild 5. Antwort der Gesamtspannung auf einen zyklischen Dehnungsprozeß mit zwei unterschiedlichen Mitteldehnungen und Haltezeiten (vgl. Bild 1).

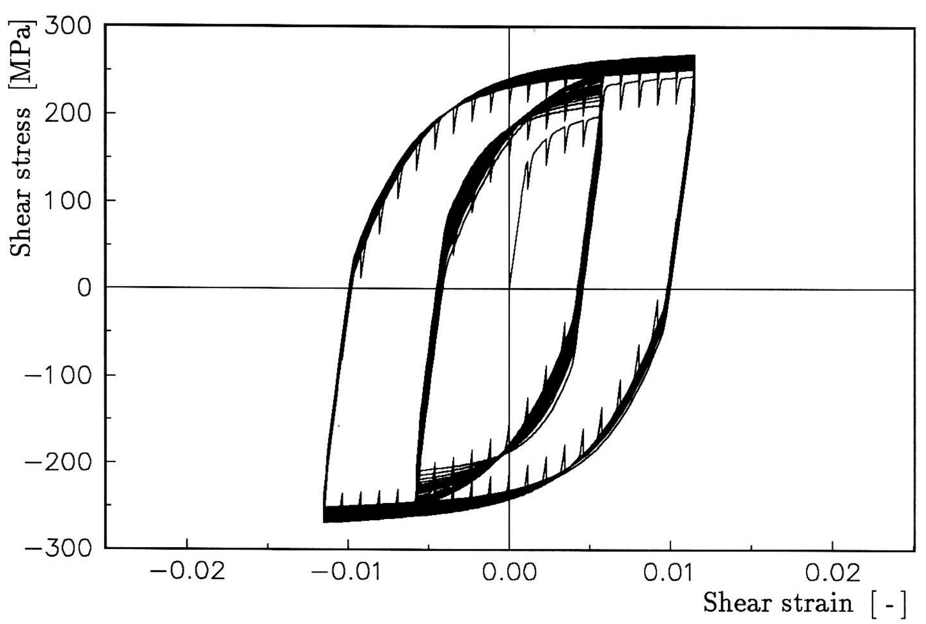

Bild 6. Antwort der Gesamtspannung auf einen zyklischen Dehnungsprozeß mit drei unterschiedlichen Dehnungsamplituden (0.006 - 0.012 - 0.006) und Haltezeiten (vgl. Bild 2).

Literatur

1. Chaboche, J. L., and Rousselier, G.: On the Plastic and Viscoplastic Constitutive Equations. Journal of Pressure Vessel Technology, Vol. 105, (1983), pp. 153-164.

2. Haupt, P.:, On the Mathematical Modelling of Material Behavior in Continuum Mechanics. Acta Mechanica, Vol. 100, (1993), pp. 129-154.

3. Haupt, P.: On the Thermodynamic Representation of Viscoplastic Material Behavior. Proceedings of the ASME Materials Division Vol. 1 (MD-Vol. 69-1), THE AMERCAN SOCIETY OF MECHANICAL ENGINEERS, (1995), pp. 503-519.

4. Haupt, P., and Kamlah, M.: Representation of Cyclic Hardening and Softening Properties Using Continuous Variables, "International Journal of Plasticity, Vol. 11, (1995), pp. 267-291.

5. Haupt, P., Kamlah, M., and Tsakmakis, Ch., Continuous Representation of Hardening Properties in Cyclic Plasticity. International Journal of Plasticity, Vol. 8, (1992), pp. 803-817.

6. Haupt, P., and Lion, A.: Experimental Identification and Mathematical Modeling of Viscoplastic Material Behavior. Continuum Mechanics and Thermodynamics, Vol. 7, (1995), pp. 149-167.

7. Kamlah, M.: Zur Modellierung des Verfestigungsverhaltens von Materialien mit statischer Hysterese im Rahmen der phänomenologischen Thermomechanik. Doctoral Thesis, University of Kassel, Germany, (1994).

8. Lion, A.: Materialgleichungen der Viskoplastizität Experimente, Modellbildung und Parameteridentifikation. Doctoral Thesis, University of Kassel, Germany, (1994).

9. Truesdell, C. A., and Noll, W.: The Non-Linear Field Theories of Mechanics. Encyclopedia of Physics, Vol. III/3, Springer Berlin, Heidelberg, New York, (1965).

10. Valanis, K. C.: Effect of Prior Deformation on Cyclic Response of Metals. Journal of Applied Mechanics, Vol. 41, (1974), pp. 441-447.

Adresse: Professor Dr.-Ing. Peter Haupt, Institut für Mechanik der Universität Gh Kassel, Mönchebergstr. 7, D- 35109 Kassel