

Parameteridentifikation inelastischer Deformationsgesetze

R. Kreißig

Es erfolgt eine Darstellung der Vorgehensweise bei der Parameteridentifikation inelastischer Deformationsgesetze durch Auswertung von Proben mit inhomogener Verteilung der Verzerrungen im Meßgebiet. Da in diesem Fall nur kinematische Größen als lokale experimentelle Ergebnisse zur Verfügung stehen, müssen die numerischen Vergleichswerte über schnelle FEM-Berechnungen mit immanenter Sensitivitätsanalyse der Materialparameter bereitgestellt werden. An einem Beispiel wird das Verfahren erfolgreich getestet.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E.h. Dr. h. c. mult. E. Stein zum 65. Geburtstag gewidmet.

1 Einleitung

Der Bedarf an der Lösung nichtlinearer Aufgaben der Festkörpermechanik ist in den letzten Jahren ständig gewachsen. Obwohl die dafür notwendigen Voraussetzungen hinsichtlich Hard- und Software vorhanden sind, kann es in Abhängigkeit vom vorliegenden Problem nach wie vor zu mehr oder weniger großen Abweichungen zwischen den numerischen und experimentellen Ergebnissen kommen, deren vorwiegende Ursache im stoffabhängigen Teil der eingesetzten Programme liegt. So stehen entweder keine geeigneten Deformationsgesetze zur Verfügung, oder es fehlen die darin enthaltenen Materialparameter. Deren Ermittlung bildet den Gegenstand der nun folgenden Betrachtungen.

2 Deformationsgesetz inelastischer Körper

Als ein spezielles Beispiel wird das Deformationsgesetz der klassischen Plastizitätstheorie bei kleinen Verzerrungen, es bildet die Grundlage für den Materialteil des im Rahmen der Parameteridentifikation eingesetzten FEM-Programms (vgl. 3.6), angegeben. An der Elastizitätsgrenze ist die Fließbedingung

$$F(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{h}) = 0 \quad (1)$$

erfüllt. Das lineare Elastizitätsgesetz

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{E} \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (2)$$

gilt bei Beanspruchung im elastischen Bereich

$$F < 0 \text{ oder } F = 0 \text{ und } \dot{\boldsymbol{\sigma}}^T \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^T \mathbf{E}^T \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} < 0 \quad (3)$$

Bei Belastung in den plastischen Bereich mit

$$F = 0 \text{ und } \dot{\boldsymbol{\sigma}}^T \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^T \mathbf{C}^T \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} > 0 \quad (4)$$

lautet das Deformationsgesetz

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{el} + \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{pl} = \mathbf{E}^{-1} \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \lambda \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (5)$$

In diesem Fall entwickeln sich die inneren Variablen \mathbf{h} entsprechend

$$\dot{\mathbf{h}} = \mathbf{q}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{h}, \mathbf{p})\dot{\lambda} \quad (6)$$

Die Materialsteifigkeitsmatrix $\mathbf{C}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{h}, \mathbf{p})$ entsteht aus Gleichung (5) durch Elimination von $\dot{\lambda}$ mittels der Konsistenzbedingung (Kreißig, 1992).

3 Parameterermittlung

3.1 Kennzeichnung des Verfahrens

Beim Sonderfall des orthotropen Ausgangszustands (z. B. in Halbzeugen) sind Vorversuche zur Erfassung der Elastizitätskonstanten sowie der plastischen Anfangsanisotropie erforderlich.

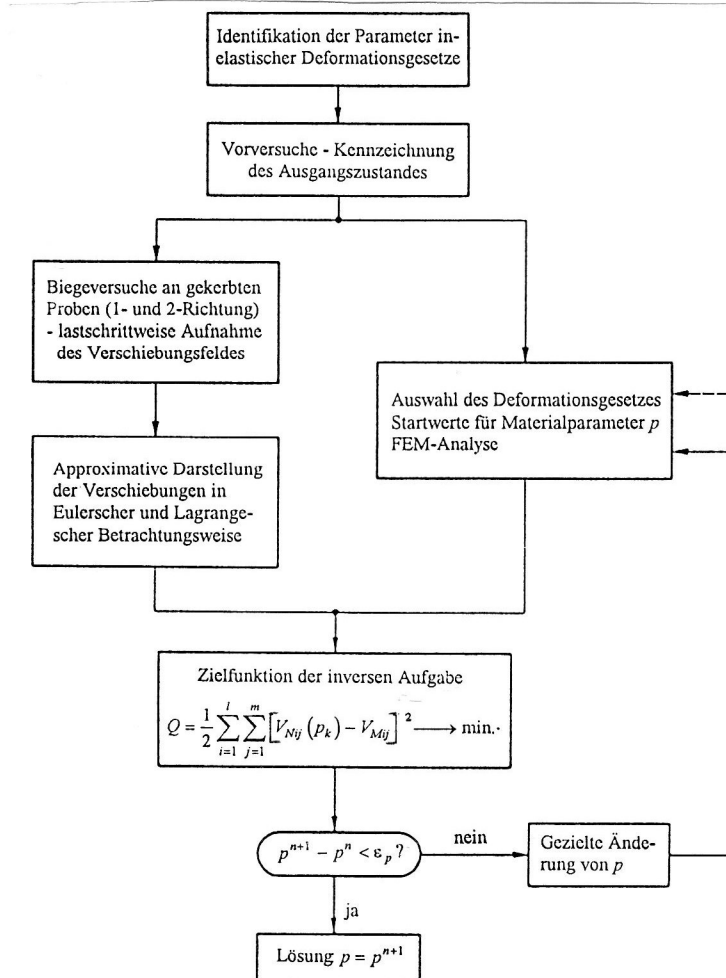


Bild 1. Vorgehensweise bei der Ermittlung der Materialparameter

Das Verfestigungsverhalten, das mit der Entwicklung einer allgemeinen Anisotropie verbunden sein kann, wird im Biegeversuch an gekerbten Proben analysiert. Zur lastschrittweisen Aufnahme der Verschiebungen dient das Moiréverfahren. Es schließen sich eine feldmäßige Darstellung der Verschiebungen und eine das Experiment begleitende FEM-Berechnung an. Letztere erfordert die Wahl eines Deformationsgesetzes und des Startwertes für den Parametervektor.

Mit der gezielten Änderung des Vektors der Materialparameter und der damit verbundenen, wiederholten numerischen Ermittlung des Verschiebungsfeldes wird die Anpassung an das Experiment vorgenommen. Wird

keine zufriedenstellende Übereinstimmung erreicht, ist es notwendig, ein anderes Deformationsgesetz zu verwenden.

3.2 Vorversuche

In diesen Experimenten werden zwei glatte Proben, deren Achsen mit den Orthotropierichtungen übereinstimmen, zwischen den Kräfteinleitungen auf reine Biegung beansprucht. Auf der Ober- und Unterseite der Proben sind in Längs- und Querrichtung Dehnungsmeßstreifen aufgeklebt. Als Ergebnisse fallen 2 Fließkurven und die Verläufe der Querdehnungen an. Nach dem Abspalten der plastischen Anteile der Verzerrungsinkremente an den Fließgrenzen und unter Annahme der Gültigkeit der Normalenregel stehen 8 Informationen (4 Fließspannungen, 4 Anstiege der Fließortkurve) für die Bestimmung der fünf in der Fließbedingung des ebenen Hauptspannungszustandes bei Orthotropie (Erweiterung der Hillschen Fließbedingung um lineare Terme zur Erfassung kinematischer Verschiebungen)

$$F \equiv h_1 \sigma_{11}^2 - \sigma_{11} \sigma_{22} + h_3 \sigma_{22}^2 + 2h_4 \sigma_{11} + 2h_5 \sigma_{22} + h_6 = 0 \quad (7)$$

auf tretenden, inneren Variablen zur Verfügung (Kreißig u.a., 1991/92/93).

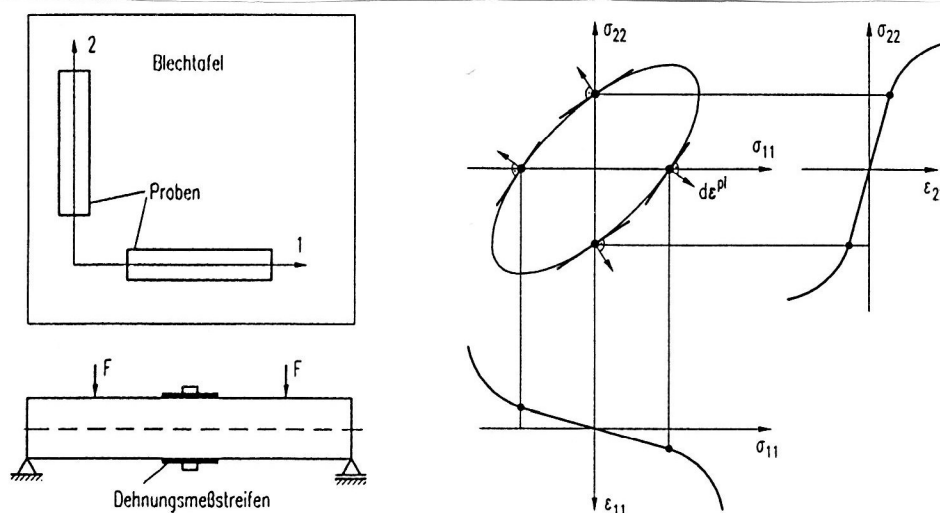


Bild 2. Vorversuche zur Bestimmung der Elastizitätskonstanten und der inneren Variablen zur Beschreibung der plastischen Anfangsorthotropie

3.3 Biegeversuche an gekerbten Proben

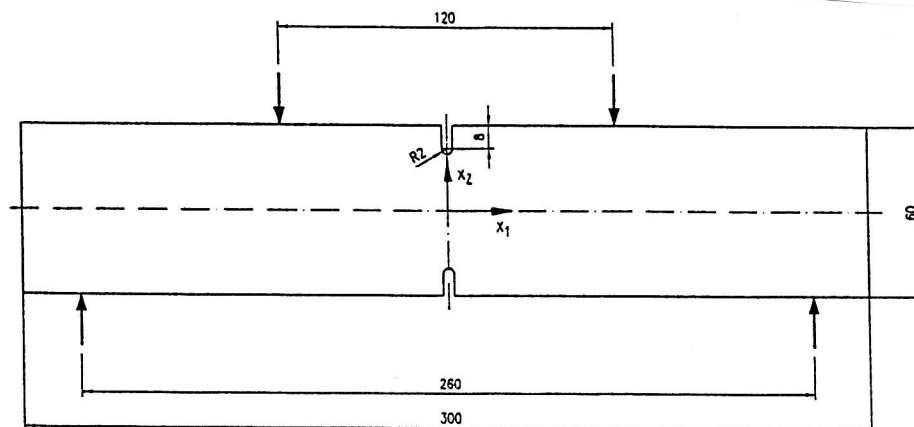


Bild 3. Gekerbte 4-Punkt-Biegeprobe

Für die Hauptversuche zur Analyse des Verfestigungsverhaltens wurden aus den folgenden Gründen gekerbte 4-Punkt-Biegeproben ausgewählt:

- einfache Realisierung des ebenen Spannungszustandes,
- große Anzahl unterschiedlicher Belastungswege der bei der Auswertung berücksichtigten, materiellen Teilchen in den Bereichen Zug/Zug bzw. Druck/Druck (→ Parameteranpassung im Mittel),
- Möglichkeit des Wechsels der Belastungsrichtung zur sicheren Erkennung der kinematischen Verfestigung.

Die mit dem Ziel großer Hauptspannungsverhältnisse optimierte Probenform ist im Bild 3 dargestellt.

3.4 Messung der Verschiebungen

Zur Messung der Verschiebungen in den einzelnen Lastschritten wird das Moiréverfahren eingesetzt (Naumann, 1992). Durch Überlagerung der deformierten Objekt- mit den unverformten Bezugsrastern entstehen im Auflicht Streifen, die sogenannten Isotheten (Bild 4). Sie verkörpern Höhenlinien der Felder der Verschiebungskomponenten u_1 und u_2 . Dabei sind u_1 und u_2 auf die Konfiguration des jeweils augenblicklichen Lastschrittes bezogen. Im Bereich kleiner Verzerrungen dient die Moiréstreifenmultiplikation zur Vergrößerung der Empfindlichkeit des Meßverfahrens.

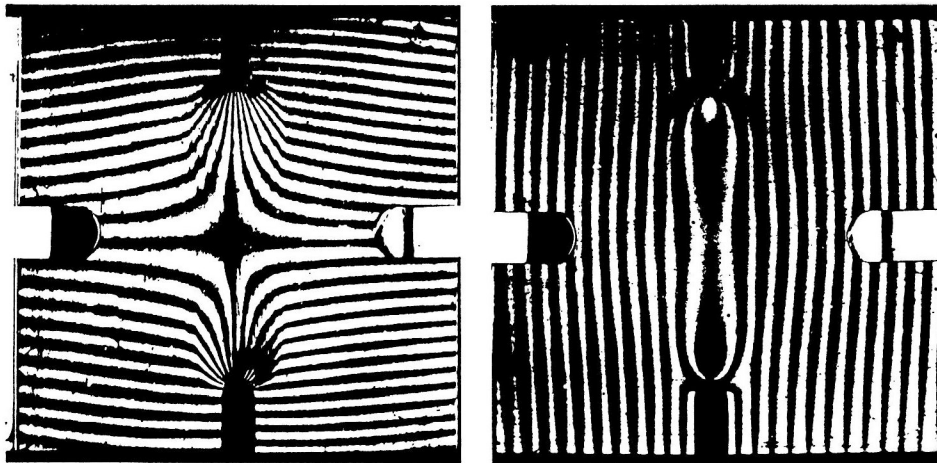


Bild 4. Isothetenfelder für die Verschiebungskomponenten u_1 und u_2 im Meßfeld der gekerbten Biegeprobe

3.5 Approximative Darstellung der Verschiebungen

Die Approximation der je Lastschritt punktweise vorliegenden Verschiebungskomponenten u_1 und u_2 erfolgt auf der Grundlage von Ansatzfunktionen der Serendipity-Klasse isoparametrischer 8-Knoten-Viereck-Elemente (Bohnsack, 1995), vgl. Bild 5. Dabei werden die Knotenpunktverschiebungen durch Minimierung des Funktionals

$$\begin{aligned} \Phi_i = & \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_E} \left\{ \frac{1}{m_k} \sum_{n=1}^{m_k} \alpha_{kn} [\tilde{u}(x_{1kn}, x_{2kn}) - u_{kn}]^2 \right\} + \frac{\epsilon_1}{2} \sum_{k=1}^{n_E} \left[G_k \int_{G_k} (\tilde{u}_{,11}^2 + 2\tilde{u}_{,12}^2 + \tilde{u}_{,22}^2) dG_k \right] \\ & + \frac{\epsilon_2}{2} \sum_{o=1}^{n_R} \left[l_o \int_{l_o} (u_{I,n} - u_{II,n})^2 dl_o \right] \end{aligned} \quad (8)$$

erhalten. Während der 1. Term die Gaußsche Fehlerquadratnorm verkörpert, dienen der 2. und 3. Term der Glättung innerhalb der Elemente bzw. an den Elementengrenzen. Diese Terme sichern auch dann ein reguläres Gleichungssystem, wenn in einzelnen Elementen keine Meßwerte vorliegen. Im Bild 6 sind die Ergebnisse für eine Biegeprobe aus Polyurethan als Testbeispiel dargestellt. Eine numerische Lösung liegt nicht vor.

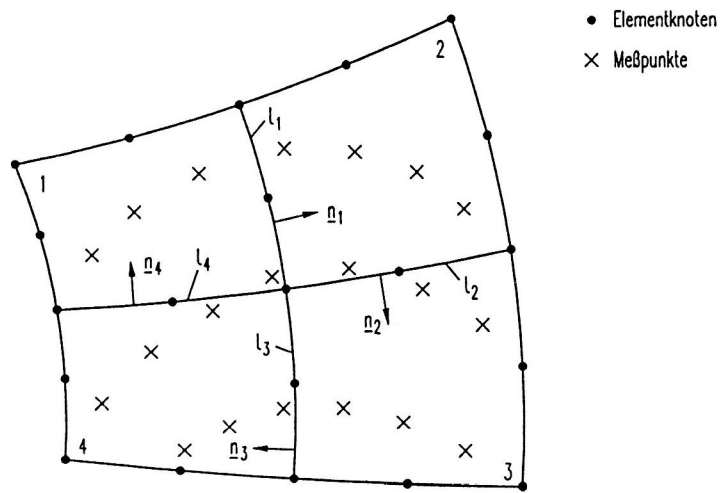


Bild 5. Finite Elemente mit Meßpunkten auf den Isotheten

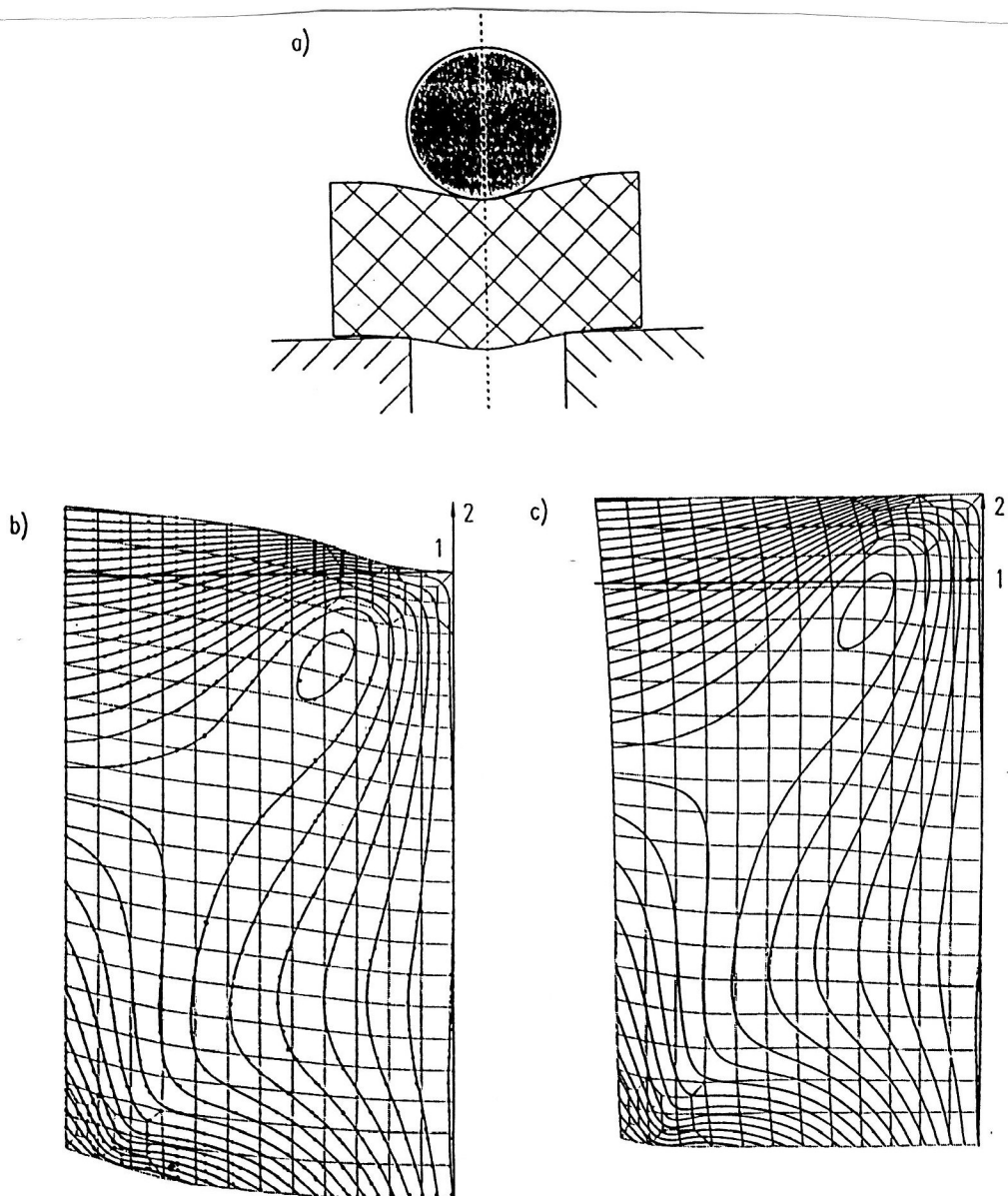


Bild 6. a) PU-Biegeprobe sowie Höhenlinien des u_1 -Feldes in b) räumlicher und c) materieller Darstellung

Nach der Approximation der Meßwerte wurden die Höhenlinien des Verschiebungsfeldes berechnet. Sie verlaufen nahezu exakt durch die entsprechend gekennzeichneten Meßpunkte (Bild 6b). Da bei Biegeproben bereits kleine Verzerrungen ($\epsilon < 5\%$) mit endlichen Verschiebungen gekoppelt sind, die Parameteridentifikation aber die Verfolgung materieller Teilchen bedingt, muß das Verschiebungsfeld in die Ausgangskonfiguration transformiert werden (Bild 6c). Hier besitzt ein materielles Teilchen zu allen Zeiten t gleiche Ortskoordinaten. Auch dabei fällt die Kontrolle der Genauigkeit positiv aus. So müssen die Ober- und Unterseite sowie die Symmetrieachse der Probe nach der Transformation Geraden sein bzw. bleiben. Lediglich im Bereich des Auflagers (Singularität) ergaben sich auch wegen der zu geringen Anzahl von Meßpunkten Abweichungen.

3.6 Begleitende FEM-Analyse

Kriterien für die Auswahl eines Programms zur Ermittlung der von den Materialparametern abhängigen, numerischen Vergleichsgrößen waren

- ein geringer Modellfehler (große Genauigkeit der berechneten Feldgrößen),
- ein variabler Materialteil,
- die Möglichkeit der Sensitivitätsanalyse im Zusammenhang mit der Lösung des Anfangs-Randwert-Problems und
- kurze Rechenzeiten.

Als sehr gut geeignet erwies sich das FEM-Programm PMEP der Chemnitzer DFG-Forschergruppe „Scientific Parallel Computing“ (Michael u.a., 1995), dessen schematischer Aufbau dem Bild 7 zu entnehmen ist.

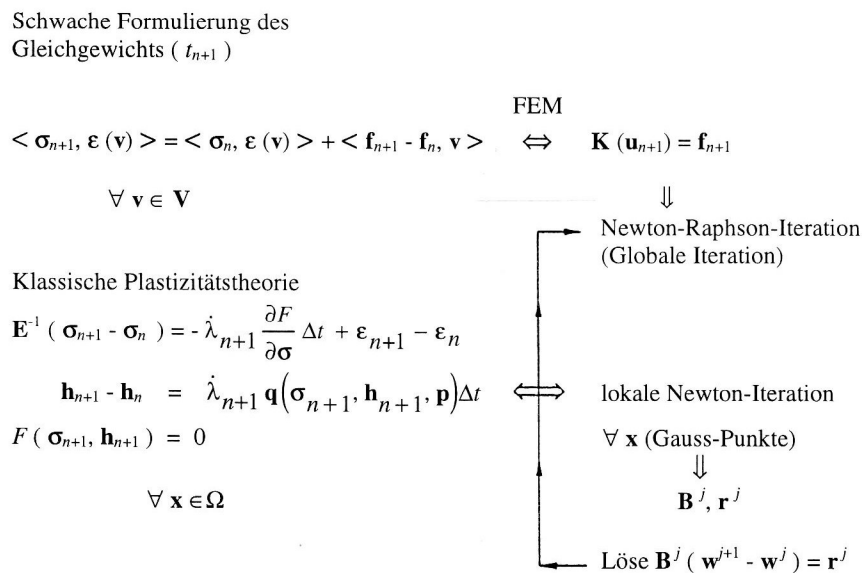


Bild 7. Schematischer Aufbau des FEM-Programms PMEP nach Michael u.a. (1995)

Es wurde eine konsequente Newton-Linearisierung, welche aus einer globalen Newton-Raphson-Iteration zur Berechnung der Verschiebungen und einer eingeschachtelten Newton-Iteration in den Gaußpunkten zur impliziten Zeitintegration des Deformationsgesetzes besteht, realisiert. Am Ende aller Iterationen eines Lastschrittes (Zeitpunkt t_{n+1}) sind das Gleichgewicht und die Fließbedingung F exakt erfüllt. Durch die Verwendung der konsistenten Materialsteifigkeit wird eine quadratische Konvergenz des Newton-Verfahrens erreicht.

Die Variabilität des Materialteils, der die stoffabhängigen Gleichungen der klassischen Plastizitätstheorie enthält, wird mit der quadratischen Fließbedingung

$$F \equiv h_{ijkl}(s_{ij} - \alpha_{ij})(s_{kl} - \alpha_{kl}) + h_0 = 0 \quad (9)$$

und der Erfassung von Verfestigungsarten, welche sich mit Entwicklungsgleichungen für die inneren Variablen der Form (6) darstellen lassen, gewährleistet.

Zum Test der Genauigkeit der mit dem Programm PMEP ermittelten Feldgrößen Verschiebungen und Spannungen sowie einer Aufwandsanalyse wurden vergleichende Berechnungen mit dem kommerziellen FEM-Programm MARC durchgeführt. Für den ebenen Spannungszustand besitzen beide Programme einen prinzipiell gleichen Algorithmus. Das gewählte Beispiel ist eine 4-Punkt-Biegeprobe nach Bild 3, bei welcher die 30 Grobelemente einer Probenhälfte in jeweils 256 8-Knoten-Viereckelemente (level 4) unterteilt wurden (Bild 8). Das entspricht rund 47 000 Freiheitsgraden. Bei den Berechnungen mit den beiden Programmen waren die Vernetzung und der Elementtyp identisch. Es wurde ein isotroper und linear elastischer Werkstoff mit linearer, isotroper Verfestigung angenommen.

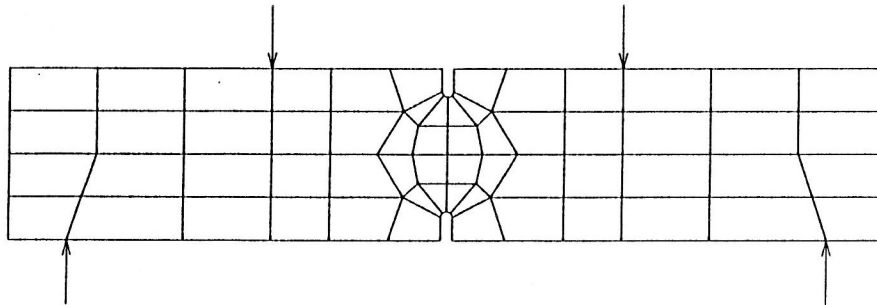


Bild 8. 4-Punkt-Biegeprobe mit Grobelementen

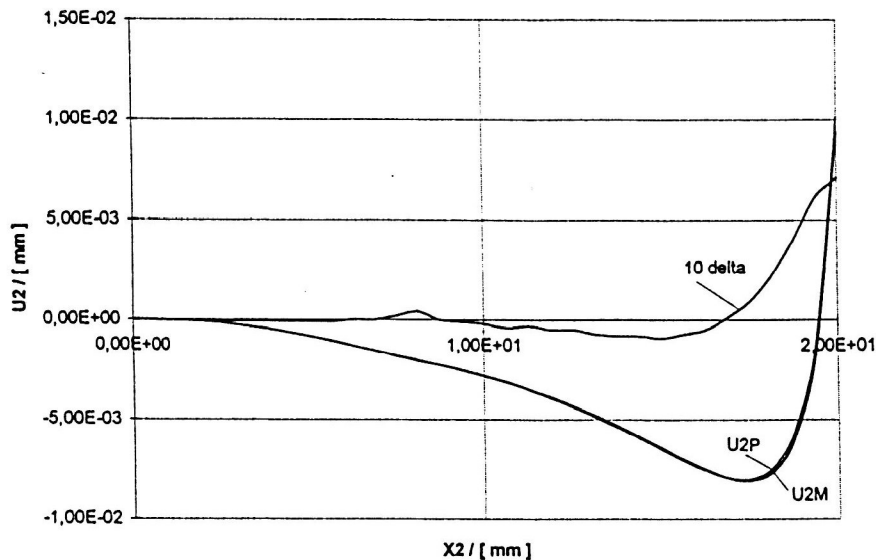


Bild 9. Verschiebungen u_{2M} und u_{2P} für den Lastschritt 16

Wie dem Bild 9 entnommen werden kann, stimmen die Verschiebungen u_2 auf der Symmetrieachse auch nach 16 Lastschritten ($\epsilon_V^{pl} \approx 5\%$ im Kerbgrund) sehr gut überein.

Wegen seines großen Komforts wird mit dem Programm MARC für das obige Beispiel auf einer Workstation Silicon Graphics Indigo (risk R 4000 Prozessor) zwangsläufig eine größere Rechenzeit (MARC: ~ 221 min, PMEP: ~ 175 min) benötigt. Auf einem Parallelrechner Parsytec GC Power Plus, aus Effektivitätsgründen wurden von den 128 vorhandenen nur 16 Prozessoren genutzt, läuft das Programm PMEP noch 11 Minuten. Um den Einfluß unterschiedlicher Prozessoren zu eliminieren, wurde eine weitere Berechnung auf der Parsytec-Anlage mit einem Prozessor bzw. 16 Prozessoren durchgeführt. Infolge der begrenzten Speicherkapazität beim Einsatz eines Prozessors konnten dabei nur 1920 Elemente (level 3, relativ größere Anzahl von Koppelknoten) verwendet werden. Der Zeitaufwand verringerte sich hier auf etwa 1/12 (~ 38 min bei einem Prozessor, ~ 3 min bei 16 Prozessoren).

3.7 Berechnung der Materialparameter, Sensitivitätsanalyse

Zur Berechnung der Materialparameter muß die Zielfunktion

$$Q = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \left\{ \left[\bar{u}_{1ij}(p_k) - u_{1ij} \right]^2 + \left[\bar{u}_{2ij}(p_k) - u_{2ij} \right]^2 \right\} \quad (10)$$

minimiert werden (vgl. Bild 1). Als Vergleichswerte dienen die numerisch ($\bar{u}_{1ij}(p_k), \bar{u}_{2ij}(p_k)$) und die experimentell ermittelten Verschiebungen (u_{1ij}, u_{2ij}). Bei der Anwendung von Gradientenverfahren ist es erforderlich, für die Festlegung der Suchrichtung

$$s = -A \left[\frac{\partial Q}{\partial p_a} \right] \quad (11)$$

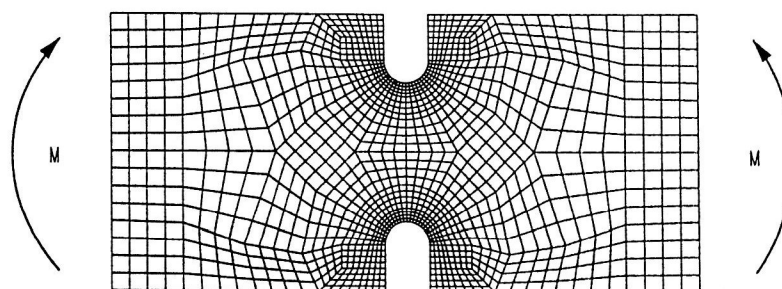
die Ableitungen

$$\frac{\partial Q}{\partial p_a} = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \left[\left(\bar{u}_{1ij} - u_{1ij} \right) \frac{\partial \bar{u}_{1ij}}{\partial p_a} + \left(\bar{u}_{2ij} - u_{2ij} \right) \frac{\partial \bar{u}_{2ij}}{\partial p_a} \right] \quad (12)$$

zu bestimmen. Durch die große Anzahl von Suchschritten (siehe auch 4.) und die damit verbundenen langen Rechenzeiten, pro Schritt ist ein vollständiges Anfangs-Randwert-Problem zu lösen, verbietet sich eine numerische Sensitivitätsanalyse über die Variation des Parametervektors \mathbf{p} . Deshalb wird ein in der Strukturoptimierung üblicher Weg eingeschlagen, welchen Stein und Mahnen (1993) für die Identifikation der Parameter viskoplastischer Modelle mittels Finite Element Methoden und Gradientenverfahren modifiziert haben. Er besteht darin, daß sich die benötigten Verschiebungsableitungen $\partial \bar{u}_{1ij} / \partial p_a$ und $\partial \bar{u}_{2ij} / \partial p_a$ im Zusammenhang mit den Newton-Iterationen der konsistenten Linearisierung (vgl. 3.6) ermitteln lassen. Von Bohnsack (1995) wurde dieser Algorithmus im Programm PMEP realisiert. Eingesetzt wurden das einfache Gradientenverfahren mit $\mathbf{A} = \mathbf{I}$ und das Gauß-Newton-Verfahren mit $\mathbf{A} = \mathbf{H}^{-1}$. In der Hesse-Matrix \mathbf{H} werden dabei nur die Terme mit den Produkten der ersten Ableitungen erfaßt.

4 Testbeispiel

Im gewählten Testbeispiel (Bild 10) wurde das Experiment durch eine FEM-Analyse ersetzt. Das erbringt den Vorteil der Kenntnis der Materialparameter. Wie dem Bild 10 zu entnehmen ist, wurden aus Gründen des Aufwandes die Einleitung des Biegemomentes vereinfacht sowie die Anzahl der Freiheitsgrade und der Lastschritte verringert.



Anzahl der Elemente	: 616
Anzahl der Freiheitsgrade	: 4178
Anzahl der Lastschritte	: 6
max. plast. Vergleichsdehnung	: $4,02 \cdot 10^{-2}$

Bild 10. Gekerbte Biegeprobe

Wie in 3.6 wurden nur 16 der 128 vorhandenen Prozessoren des Computers Parsytec GCPP genutzt. Das verwendete Deformationsgesetz besteht aus der Fließbedingung

$$F \equiv \frac{3}{2} (s_{ij} - \alpha_{ij})(s_{ij} - \alpha_{ij}) - \sigma_F^2 = 0 \quad (13)$$

sowie aus der Kombination von isotroper Verfestigung entsprechend

$$\sigma_F = \sigma_{F0} + a (\varepsilon_V^{pl})^{\frac{n}{1000}} \quad (14)$$

und kinematischer Verfestigung nach Prager

$$\dot{\alpha}_{ij} = c \dot{\varepsilon}_{ij}^{pl} \quad (15)$$

Von den verschiedenen Startvektoren der Materialparameter werden die Ergebnisse nur für denjenigen angegeben, welcher die relativ größte Abweichung gegenüber den für das „numerische Experiment“ verwendeten Parametern besitzt (Tabelle 1).

Materialparameter	Werte im num. Experiment	Startwerte	rel. Abweichung in Prozent	berechnete Werte
σ_{F0} in N/mm^2	400	350	12,5	399,8
a in N/mm^2	500	300	40	496,9
n	500	600	20	497,2
c in N/mm^2	5000	2000	60	4996,9

Tabelle 1. Ergebnisse für das Testbeispiel

Zur Erreichung der guten Ergebnisse nach Tabelle 1 waren insgesamt 19 Suchschritte (einfaches Gradientenverfahren: 2, Gauß-Newton-Verfahren: 17) bei einer cpu-Zeit von 7631 s (~ 127 min) erforderlich.

Bevor mit der Auswertung konkreter Experimente und einer sich anschließenden Verifikation der Ergebnisse an Belastungswegen, welche von denen der erstgenannten Versuche abweichen, begonnen wird, müssen noch einige numerische Tests erfolgen. Sie betreffen z.B. die Simulation von Meßfehlern und die Untersuchung eines Lastwechsels.

Literatur

1. Bohnsack, E.: Continuous Field Approximation of Experimentally Given Data by Finite Elements, Computer & Structures, zur Veröffentlichung eingereicht (1995).
2. Bohnsack, E.: Parameteridentifikation für elastisch-plastische Stoffgesetze an Proben mit inhomogener Spannungsverteilung, erscheint als Kurzfassung in der ZAMM.
3. Kreißig, R.: Einführung in die Plastizitätstheorie. Mit technischen Anwendungen, Fachbuchverlag, Leipzig, Köln (1992).
4. Kreißig, R.; Naumann, J.: Identifikation elastisch-plastischer Deformationsgesetze mit Hilfe des Moiréverfahrens, Arbeitsbericht des Sonderforschungsbereichs 319, TU Braunschweig (1991/92/93).
5. Mahnken, R.; Stein, E.: Identification of Parameters for Visco-plastic Models via Finite-Element Methods and Gradient Methods, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik der Universität Hannover, Bericht 93/5.
6. Michael, D.; Meyer, A.: Some Remarks on the Simulation of Elasto-plastic Problems on Parallel Computers, Preprint SPC 95...13 der DFG-Forschergruppe „Scientific Parallel Computing“, Chemnitz (1995).
7. Naumann, J.: Grundlagen und Anwendung des In-plane Moiréverfahrens in der experimentellen Festkörpermechanik, Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 18, Nr. 110, Düsseldorf (1992).
8. Stein, E.; Bischoff, D.; Mahnken, R.: Identifikation von Materialparametern mit Finite-Element Methoden, Arbeitsbericht des Sonderforschungsbereichs 319, TU Braunschweig (1991/92/93).

Symbole

A	quadratische Matrix
B	Materialmatrix
C	Materialsteifigkeitsmatrix im plastischen Bereich
E	Elastizitätsmatrix
H	Hesse-Matrix
h	Vektor der inneren Variablen
I	Einheitsmatrix
p	Vektor der Materialparameter
q	Vektor der Verfestigungsfunktionen
s	Vektor der Suchrichtung beim Gradientenverfahren
ε	Verzerrungsvektor
ε_{el}	elastischer Anteil des Verzerrungsvektors
ε_{pl}	plastischer Anteil des Verzerrungsvektors
ε_p	Fehlerschranke für den Vektor der Materialparameter
σ	Spannungsvektor
(\cdot)	Ableitung nach der Zeit
a	Materialparameter
c	Materialparameter nach Prager
F	Fließbedingung
G_k	Fläche des k -ten Elementes
h_{ijkl}	Koordinaten des Tensors vierter Stufe der inneren Variablen
$h_1 \dots h_5$	spezielle Koordinaten des Tensors h_{ijkl}
h_0, h_6	skalare innere Variable
l	Anzahl der Lastschritte
l_o	Längen gemeinsamer Elementränder
m	Anzahl der Meßwerte je Lastschritt
m_k	Anzahl der Meßwerte im k -ten Element (i -ter Lastschritt)
n	Materialparameter
n_E	Anzahl der Elemente
n_R	Anzahl der gemeinsamen Elementränder
Q	Zielfunktion für die Berechnung der Materialparameter
s_{ij}	Koordinaten des Spannungsdeviators
u_{kn}	Meßwerte der Verschiebungskomponenten u_1 und u_2 eines Lastschrittes in den Punkten $P_{kn}(x_{1kn}, x_{2kn})$
\tilde{u}	approximierte Verschiebungskomponenten u_1 oder u_2 eines Lastschrittes
$\tilde{u}_I, \tilde{u}_{II}$	approximierte Verschiebungskomponenten u_1 oder u_2 in einem Lastschritt beiderseits eines gemeinsamen Elementrandes
\bar{u}_1, \bar{u}_2	mittels der FEM berechnete Verschiebungskomponenten in einem Lastschritt
V_{Mij}	j -ter Meßwert im i -ten Lastschritt
V_{Nij}	j -ter numerischer Wert im i -ten Lastschritt
α_{ij}	Koordinaten des Deviators der kinematischen Verschiebungen nach Prager
α_{kn}	Wichtungsfaktoren
$\varepsilon_1, \varepsilon_2$	Wichtungsfaktoren
ε_v^{pl}	plastische Vergleichsdehnung
$\hat{\lambda}$	Proportionalitätsfaktor in der Normalenregel
σ_F	Fließspannung
σ_{FO}	Anfangsfließspannung
ϕ_i	Funktional zur Berechnung der Knotenpunktverschiebungen im i -ten Lastschritt
$\frac{\partial F}{\partial \sigma}$	Gradientenvektor der Fließfläche

Anschrift: Professor Dr.-Ing. Reiner Kreißig, Institut für Mechanik, Technische Universität Chemnitz-Zwickau, Postfach 964, D-09009 Chemnitz