

# Ermittlung des Kontaktbereiches beim Zahnradeingriff

V. Popov, W. Weese

*Ausgehend von den allgemeinen Kontaktbeziehungen für rotatorisch bewegte Starrkörper wird ein Gleichungssystem für alle potentiellen Kontaktpunkte aufgebaut. Zur Lösung des Gleichungssystems werden zwei Strategien angewendet – die sequentielle und die iterative Ermittlung des Kontaktbereiches. Durch die sequentielle Ermittlung wird der Rechenaufwand wesentlich reduziert. Mit der nachfolgenden Anwendung der iterativen Ermittlung des Kontaktbereiches werden alle Nebenbedingungen erfüllt.*

## 1 Einleitung

Zur Abschätzung der Zahnfußtragfähigkeit von Zahnrädern muß die maximal auftretende Zahnfußspannung während des gesamten Zahnradeingriffs bestimmt werden. Da die Eingriffsstellung der höchsten Zahnfußspannung von vornherein nicht bekannt ist, muß für jede mögliche Eingriffsstellung der beiden Zahnräder eine Kontaktanalyse durchgeführt werden. Die numerische Kontaktsimulation stellt eine zeitaufwendige Rechenaufgabe dar, da die zur Spannungsberechnung erforderliche Lastverteilung nur iterativ ermittelt werden kann. Aus diesem Grund ist ein Kontaktmodell mit wesentlich reduziertem Rechenaufwand entwickelt worden (Weese und Popov, 1994). Dieses Modell beruht auf der *Einflußzahlenmethode* (Neupert, 1983; Weck, 1992; Wanderer, 1994), die nach einmaliger Finite-Elemente-Berechnung pro Zahnrad die Kontaktanalyse an jeder Eingriffsstellung der Zahnräder erlaubt. Ausgehend von den allgemeinen Kontaktbeziehungen wird ein System aufgebaut, das die Gleichungen für alle potentiellen Kontaktpunktpaare (PKPP) einschließt. Da weder die tatsächlich kontaktierenden Punkte noch die Kontaktkräfte an diesen Punkten bekannt sind, muß das Gleichungssystem iterativ gelöst werden. In einem vorangegangenen Beitrag (Weese und Popov, 1994) sind die theoretischen Grundlagen der Kontaktmodellierung, die Berechnung der Einflußzahlen und die iterative Lösung des aufgebauten Gleichungssystems dargestellt. Der dort vorgestellte Lösungsweg hat den Nachteil, daß nach dem Ende der Iterationen negative Kontaktkräfte in der endgültigen Lösung vorhanden sein können. Im vorliegenden Beitrag wird die Lösung des Gleichungssystems mit weiteren Berechnungen ergänzt, durch die alle Nebenbedingungen zwangsläufig erfüllt werden. Zum besseren Verständnis wird der Aufbau und die Lösung des Gleichungssystems auch für ein konkretes Beispiel verfolgt.

## 2 Allgemeine Kontaktbeziehungen

Für geradzahnnte abweichungsfreie Zahnräder ist ein zweidimensionales Modell gerechtfertigt. Beim Modellaufbau wird ein lineares, homogenes und isotropes Materialverhalten vorausgesetzt. Für die kontaktierenden Zahnräder werden kleine lineare Verschiebungen und Verformungen angenommen, da die Körperverformungen im Vergleich zu den Körperdimensionen sehr klein sind (Altenbach, 1994).

Die Zahnräder stellen ein typisches Beispiel für einen sektorsymmetrischen Körper dar. Deshalb werden für sie die allgemeinen Kontaktbeziehungen für rotatorische Starrkörperbewegungen angewendet. Im Bild 1 sind diese Beziehungen für ein potentielles Kontaktpunktpaar  $i$  (die potentiellen Kontaktpunkte  $i_1$  und  $i_2$ ) dargestellt, wenn die beiden Kontaktkörper 1 und 2 sich anfänglich am Punkt  $j$  berühren. Alle Verschiebungen, Spiele und Starrkörperbewegungen werden als Zentralwinkel in einem Polarkoordinatensystem, dessen Zentrum in der Drehachse des Körpers 1 liegt, dargestellt. Für jedes PKPP gilt die *Verschiebungsgleichung*

$$\varepsilon_{end} = \theta_1 + \theta_2 + \varepsilon_{anf} - \varphi \quad (1)$$

wobei mit  $\varepsilon_{anf}$  und  $\varepsilon_{end}$  die Anfangs- und Endspielwinkel sowie mit  $\theta_1$  und  $\theta_2$  die elastischen Winkelverschiebungen der Punkte  $i_1$  und  $i_2$  bezeichnet werden. Mit  $\varphi$  ist die Starrkörperdrehung des Körpers

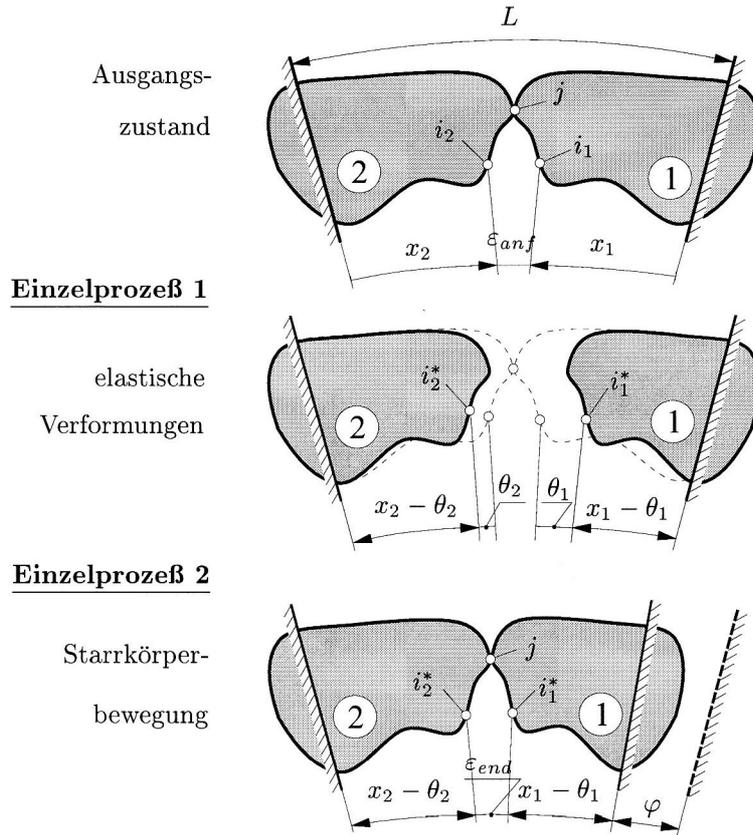


Bild 1. Allgemeine Kontaktbeziehungen für rotatorische Starrkörperbewegung

1 gekennzeichnet. Unter der Annahme

$$\theta_1 = a_{1j} F_j \quad \text{und} \quad \theta_2 = a_{2j} F_j \quad (2)$$

wobei mit  $a_{1j}$  und  $a_{2j}$  die *Einflußzahlen* der Punkte  $i_1$  und  $i_2$  bezeichnet werden, kann die Beziehung zwischen der einwirkenden Kontaktkraft  $F_j$  am Punkt  $j$  und den daraus resultierenden Verschiebungen  $\theta_1$  und  $\theta_2$  dargestellt werden. Aus den Gleichungen (2) und (1) ergibt sich die *Verschiebungsgleichung* für ein PKPP zu

$$\varepsilon_{end} = a F_j + \varepsilon_{anf} - \varphi \quad (3)$$

wobei mit  $a = a_{1j} + a_{2j}$  die Gesamteinflußzahl des PKPP gekennzeichnet wird. Algebraisch hat die *Gleichgewichtsbedingung* die Form

$$T_1 = \sum_{j=1}^{n_k} b_j F_j \quad (4)$$

wobei  $b_j$  der geometrische Übertragungskoeffizient ist und in dieser Gleichung den Hebelarm der Kontaktkraft  $F_j$  am Punkt  $j$  darstellt. Mit  $T_1$  wird das Drehmoment am Körper 1 und mit  $n_k$  die Anzahl der kontaktierenden Punktpaare bezeichnet. Außerdem gelten für jedes PKPP die Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} \text{für kontaktierende Punkte:} & \quad F \geq 0 \quad \text{und} \quad \varepsilon_{end} = 0 \\ \text{für nichtkontaktierende Punkte:} & \quad F = 0 \quad \text{und} \quad \varepsilon_{end} > 0 \end{aligned} \quad (5)$$

sowie

$$\varphi = \text{konst} \quad (6)$$

Mehr Einzelheiten zur Ableitung der Gleichungen sowie die Definition der PKPP und die Bestimmung der Einflußzahlen sind in Weese und Popov (1994) zu finden. Im Bild 2 sind die PKPP bei Zahnrädern mit Innenverzahnung dargestellt.

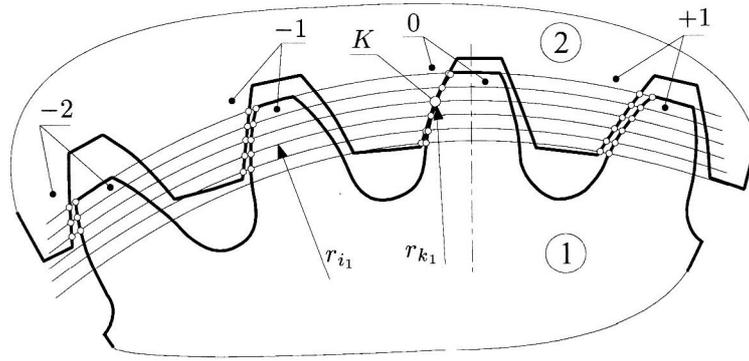


Bild 2. Potentielle Kontaktpunktpaare bei Zahnrädern mit Innenverzahnung

### 3 Aufbau des Gleichungssystems

Die Anwendung der Verschiebungsgleichung (3) für alle  $n$  potentiellen Kontaktpunkte liefert  $n$  Gleichungen

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{end1} \\ \varepsilon_{end2} \\ \vdots \\ \varepsilon_{endn} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{\text{bekannt}} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \varphi \\ \varphi \\ \vdots \\ \varphi \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_{anf1} \\ \varepsilon_{anf2} \\ \vdots \\ \varepsilon_{anf n} \end{bmatrix}}_{\text{bekannt}} \quad (7)$$

Zusammen mit der Gleichgewichtsbedingung (4)

$$\underbrace{[T_1]}_{\text{bekannt}} = \underbrace{[b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_n]}_{\text{bekannt}} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix} \quad (8)$$

bilden sie ein Gleichungssystem mit  $n + 1$  Gleichungen

$$\mathbf{e}_{end} = \mathbf{A} \mathbf{f} - \mathbf{p} + \mathbf{e}_{anf} \quad (9)$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{b}^T \mathbf{f} \quad (10)$$

wobei die einzelnen Matrizen und Vektoren die folgende Bedeutung haben:

|                    |   |                            |
|--------------------|---|----------------------------|
| $\mathbf{e}_{end}$ | $= [\varepsilon_{end1}, \varepsilon_{end2}, \dots, \varepsilon_{endn}]^T$   | - Vektor der Endspiele     |
| $\mathbf{e}_{anf}$ | $= [\varepsilon_{anf1}, \varepsilon_{anf2}, \dots, \varepsilon_{anf n}]^T$  | - Vektor der Anfangsspiele |
| $\mathbf{f}$       | $= [F_1, F_2, \dots, F_n]^T$  | - Vektor der Kontaktkräfte |
| $\mathbf{p}$       | $= [\varphi, \varphi, \dots, \varphi]^T = \varphi [1, 1, \dots, 1]^T$   | - Starrkörperdrehung       |
| $\mathbf{b}$       | $= [b_1, b_2, \dots, b_n]^T$  | - Übertragungsvektor       |
| $\mathbf{T}$       | $= [T_1]$   | - äußere Belastung         |
| $\mathbf{A}$       | $= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ | - Einflußzahlenmatrix      |

Das Gleichungssystem wird durch weitere  $n$  Nebenbedingungen (5) für jedes potentielle Kontaktpunktpaar  $i = 1 \dots n$  ergänzt

$$\begin{aligned} &\text{entweder } \varepsilon_{end i} = 0 \quad \text{und} \quad F_i \geq 0 \\ &\text{oder } \varepsilon_{end i} > 0 \quad \text{und} \quad F_i = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

Damit stehen für die Lösung des Kontaktproblems insgesamt  $2n + 1$  Bedingungen zur Verfügung. Die Anfangsspiele  $\mathbf{e}_{anf}$  und die Übertragungskoeffizienten  $\mathbf{b}$  sind aus der Zahnradgeometrie und der relativen Lage der kontaktierenden Zahnräder zu bestimmen, soweit die äußere Belastung  $T_1$  angegeben wird. Als Unbekannte gelten die Starrkörperbewegung  $\varphi$  sowie die Vektoren der Endspielwinkel  $\mathbf{e}_{end}$  und der Kontaktkräfte  $\mathbf{f}$ . Die Anzahl der Unbekannten ist ebenfalls  $2n + 1$  und damit der Anzahl der Bekannten gleich. Das System kann aber nicht direkt gelöst werden, da die ergänzenden  $n$  Nebenbedingungen Ungleichungen sind. Deshalb wird ein iteratives Verfahren angewendet.

Die Verschiebungsgleichungen (9) mit einbezogener Gleichgewichtsbedingung (10) bilden das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \varepsilon_{end 1} \\ \varepsilon_{end 2} \\ \vdots \\ \varepsilon_{end n} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n & 0 \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & -1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & -1 \end{bmatrix}}_{\text{bekannt}} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \\ \varphi \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} -T_1 \\ \varepsilon_{anf 1} \\ \varepsilon_{anf 2} \\ \vdots \\ \varepsilon_{anf n} \end{bmatrix}}_{\text{bekannt}} \quad (12)$$

das hier Originalsystem genannt wird. Die Einflußzahlenmatrix  $\mathbf{A}$  ist um eine Zeile und eine Spalte erweitert. Die erste Zeile der Matrix beinhaltet die Gleichgewichtsbedingung. Die letzte Spalte steht für die unbekannte Starrkörperdrehung  $\varphi$ . Die äußere Belastung  $T_1$  und die Starrkörperdrehung  $\varphi$  sind in den Vektor der Anfangsspiele  $\mathbf{e}_{anf}$  bzw. in den Kraftvektor  $\mathbf{f}$  einbezogen.

## 4 Lösung des Gleichungssystems

Die Lösung des Gleichungssystems (12) stellt eine typische Aufgabe der linearen Optimierung dar (Schwarz, 1993). Sie besteht darin, eine lineare Funktion (Zielfunktion) in mehreren Variablen extremal zu machen, wobei die Variablen linearen Ungleichungen zu genügen haben. Ein effizientes Verfahren der linearen Optimierung ist die Simplex-Methode, die oft zur Lösung von Kontaktaufgaben eingesetzt wird. So z.B. stellen Vijayakar u.a. (1988) ein modifiziertes Simplex-Verfahren vor, bei dem das Ziel die Minimierung des Ungleichgewichtes ist. Andere Lösungswege bestehen in der Ermittlung des unbekanntes Kontaktbereiches. Weck und Bong (1987) sowie Dandekar und Conant (1992) stellen solche Verfahren vor. Im vorliegenden Beitrag wird als Lösungsstrategie die Ermittlung des Kontaktbereiches ausgewählt. Zwei Iterationsstrategien führen zur Problemlösung – die *sequentielle* und die *iterative* Ermittlung der kontaktierenden Punktpaare. Zur Lösung des aufgebauten Untergleichungssystems wird die Gauß-Elimination benutzt.

### 4.1 Sequentielle Ermittlung des Kontaktbereiches

Die erste Strategie basiert auf dem allmählichen Eintreten des Kontaktes für potentielle Kontaktpunkte. Am Anfang berühren sich die beiden Körper in einem Punkt  $s$ . Dieser Berührungspunkt kann aus der Körpergeometrie bestimmt werden. Für das anfänglich kontaktierende Punktpaar  $s$  gilt

$$\varepsilon_{anf s} = \varepsilon_{end s} = 0 \quad (13)$$

Zu jedem Iterationsschritt werden die schon kontaktierenden Punktpaare um eins ergänzt. Das ergänzende Punktpaar ist das mit dem nächstkleinsten Anfangsspiel. Deshalb sollen die Punktpaare nach der Größe ihrer Anfangsspiele angeordnet werden. Bei jedem Iterationsschritt wird ein Untersystem aufgebaut, das nur die Zeilen und Spalten der kontaktierenden Punktpaare und die entsprechenden Übertragungskoeffizienten enthält. Zum besseren Verständnis werden die einzelnen Algorithmusschritte auch

für ein konkretes Beispiel verfolgt. Das Beispiel im Bild 3 zeigt zwei kontaktierende Körper mit  $n = 7$

Richtung der Starrkörperbewegung

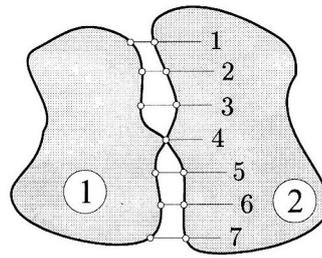


Bild 3. Beispiel für zwei kontaktierende Körper

potentiellen Kontaktpunktpaaren. Das anfänglich kontaktierende Punktpaar hat die Nummer  $s = 4$ . Die anderen potentiellen Kontaktpunktpaare werden ansteigend nach der Größe ihres Anfangsspiels angeordnet. So ergibt sich die Anordnung des allmählichen Kontakteintretens: 6, 1, 2, 5, 3, 7. Die folgende Gleichung zeigt das Untersystem beim zweiten Iterationsschritt (mit zwei kontaktierenden Punktpaaren 4 und 6):

$$\begin{bmatrix} b_4 & b_6 & 0 \\ a_{44} & a_{46} & -1 \\ a_{64} & a_{66} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_4 \\ F_6 \\ \varphi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -T_1 \\ \varepsilon_{anf 4} \\ \varepsilon_{anf 6} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (14)$$

In allgemeiner Form kann das System (14) durch

$$\mathbf{A}^U \mathbf{f}^U + \mathbf{e}_{anf}^U = \mathbf{0} \quad (15)$$

dargestellt werden. Die rechte Seite der Gleichung (14) ist bekannt, da die Endspiele für die kontaktierenden Punktpaare gleich Null sind. Als Unbekannte gelten nur die Kontaktkräfte und die Starrkörperdrehung in  $\mathbf{f}^U$ . Da die Anzahl der Unbekannten gleich der Anzahl der vorhandenen Gleichungen ist, kann ein numerisches Verfahren zur direkten Lösung des Untersystems, wie z.B. die Gauß-Elimination, angewendet werden. Nach der Bestimmung der Kontaktkräfte und der Starrkörperdrehung werden die Endspiele gemäß

$$\varepsilon_{endi} = \sum_{j=1}^n a_{ij} F_j - \varphi + \varepsilon_{anf i} \quad \text{für } i = 1 \dots n \quad (16)$$

ermittelt. Der Iterationsprozeß wird abgebrochen, wenn alle Endspiele nicht negativ geworden sind

$$\varepsilon_{endi} \geq 0 \quad \text{für } i = 1 \dots n \quad (17)$$

Anderenfalls wird ein weiteres Punktpaar (in diesem Beispiel – Punktpaar 1) in Kontakt angenommen und das Untersystem um je eine Zeile und eine Spalte erweitert. Beim dritten Iterationsschritt (mit drei kontaktierenden Punktpaaren 4, 6 und 1) hat das Gleichungssystem die Form

$$\begin{bmatrix} b_4 & b_6 & b_1 & 0 \\ a_{44} & a_{46} & a_{41} & -1 \\ a_{64} & a_{66} & a_{61} & -1 \\ a_{14} & a_{16} & a_{11} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_4 \\ F_6 \\ F_1 \\ \varphi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -T_1 \\ \varepsilon_{anf 4} \\ \varepsilon_{anf 6} \\ \varepsilon_{anf 1} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (18)$$

Aus dieser Vorgehensweise folgt, daß die Anzahl der Iterationen und damit die Anzahl der direkt zu lösenden Gleichungssysteme gleich der Anzahl der kontaktierenden Punktpaare ist. Erfahrungsgemäß ist die Anzahl der kontaktierenden Punktpaare wesentlich kleiner als die Anzahl der potentiellen Punktpaare.

Das führt zu relativ geringen Rechenzeiten im Vergleich zu einer Lösung mit klassischen Optimierungsverfahren.

Weitere Möglichkeiten zur Beschleunigung des ganzen Iterationsprozesses bestehen in der Tatsache, daß mit dem nächsten Iterationsschritt (18) das schon aufgebaute Untersystem (14) nur geringfügig geändert wird. Die zeitintensivste Rechenarbeit bei der Gauß-Elimination stellt die Zerlegung der Matrix  $\mathbf{A}^U$  dar. Deshalb sollte die in einem Iterationsschritt durchgeführte Zerlegung beim nächsten Schritt wieder benutzt werden. Das ist möglich, wenn die zusätzliche Zeile und Spalte als letzte in die Matrix hinzugefügt werden können.

Zur Beibehaltung einer gewissen Anordnung des Gleichungssystems, die die programmtechnische Verwirklichung des Algorithmus begünstigt, ist es wünschenswert, die Zeile der Gleichgewichtsbedingung und die Spalte der Starrkörperdrehung als erste oder als letzte in der Matrix  $\mathbf{A}^U$  aufzuheben. Da bei der Gauß-Elimination alle Elemente der Hauptdiagonalen keine Nullelemente sein dürfen, kann die Spalte der Starrkörperdrehung nicht als erste erscheinen. Wenn die Zeile und die Spalte als letzte angeordnet werden, sollen die hinzuzufügende Zeile und Spalte davor gestellt werden. Dann kann die letzte Matrixzerlegung nicht vollständig benutzt werden.

Die Lösung dieses Problems liegt in der Elimination der unbekanntes Starrkörperdrehung  $\varphi$  aus dem Originalsystem (12) durch Subtrahieren einer Zeile aus allen anderen mit Ausnahme der ersten Zeile, die unverändert bleibt. Die zu subtrahierende Zeile wird nicht zufällig ausgewählt, sondern ist die Zeile des anfänglich kontaktierenden Punktpaares  $s$ . Durch die Subtraktion werden die Elemente der Zeile  $s$  und der Spalte der Starrkörperdrehung zu Nullelementen:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \varepsilon_{end\ 1} \\ \vdots \\ \varepsilon_{end\ s} = 0 \\ \vdots \\ \varepsilon_{end\ n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n & 0 \\ a_{11}^E & a_{12}^E & \dots & a_{1n}^E & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}^E & a_{n2}^E & \dots & a_{nn}^E & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_s \\ \vdots \\ F_n \\ \varphi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -T_1 \\ \varepsilon_{anf\ 1} \\ \vdots \\ \varepsilon_{anf\ s} = 0 \\ \vdots \\ \varepsilon_{anf\ n} \end{bmatrix} \quad (19)$$

Die erlaubte Elimination der Zeile und Spalte aus dem System (19) führt zum Aufbau eines äquivalenten Systems

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \varepsilon_{end\ 1} \\ \varepsilon_{end\ 2} \\ \vdots \\ \varepsilon_{end\ n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ a_{11}^E & a_{12}^E & \dots & a_{1n}^E \\ a_{21}^E & a_{22}^E & \dots & a_{2n}^E \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^E & a_{n2}^E & \dots & a_{nn}^E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -T_1 \\ \varepsilon_{anf\ 1} \\ \varepsilon_{anf\ 2} \\ \vdots \\ \varepsilon_{anf\ n} \end{bmatrix} \quad (20)$$

in dem die Zeile  $s$  nicht mehr vorhanden ist. Die Elemente des äquivalenten Systems (20) werden gemäß

$$a_{ij}^E = a_{ij} - a_{sj} \quad (21)$$

berechnet. Alle Anfangs- und Endspiele in (19) bleiben nach der Elimination unverändert, da  $\varepsilon_{anf\ s} = \varepsilon_{end\ s} = 0$  ist. Nach der Lösung des Gleichungssystems (20) werden die Kontaktkräfte ermittelt. Die Starrkörperdrehung  $\varphi$  kann aus der Verschiebungsgleichung des Punktpaares  $s$  berechnet werden

$$\varphi = \sum_{j=1}^n a_{sj} F_j \quad (22)$$

Ein Untersystem des äquivalenten Gleichungssystems (20) ist nunmehr nach unten und rechts aus-

baufähig. Aus Gleichung (14) erhält man im zweiten Iterationsschritt

$$\begin{bmatrix} b_4 & b_6 \\ a_{64}^U & a_{66}^U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_4 \\ F_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -T_1 \\ \varepsilon_{anf 6} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (23)$$

und aus Gleichung (18) ergibt sich im dritten Iterationsschritt

$$\begin{bmatrix} b_4 & b_6 & b_1 \\ a_{64}^U & a_{66}^U & a_{61}^U \\ a_{14}^U & a_{16}^U & a_{11}^U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_4 \\ F_6 \\ F_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -T_1 \\ \varepsilon_{anf 6} \\ \varepsilon_{anf 1} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (24)$$

wobei die Matrixkoeffizienten gemäß

$$\begin{array}{lll} a_{64}^U = a_{64} - a_{44} & a_{66}^U = a_{66} - a_{46} & a_{61}^U = a_{61} - a_{41} \\ a_{14}^U = a_{14} - a_{44} & a_{16}^U = a_{16} - a_{46} & a_{11}^U = a_{11} - a_{41} \end{array}$$

berechnet werden.

Die sequentielle Ermittlung des Kontaktbereiches unter Nutzung der Ergebnisse der vorhergehenden Iteration zeichnet sich durch geringen Rechenaufwand aus, aber hat den Nachteil, daß negative Kontaktkräfte in der endgültigen Lösung vorhanden sein können. Das ist eine Folge des Abbruchkriteriums, bei dem nur die Nebenbedingung  $\varepsilon_{endi} \geq 0$  zwangsläufig erfüllt wird. Dieser Nachteil tritt bei der iterativen Ermittlung des Kontaktbereiches nicht auf.

## 4.2 Iterative Ermittlung des Kontaktbereiches

Die zweite Strategie basiert auf der iterativen Ermittlung der kontaktierenden Punktpaare. Es wird ebenfalls mit einem kontaktierenden Punktpaar  $s$  angefangen. In jedem Iterationsschritt wird ein Untersystem aufgebaut, das auch die Spalte der Starrkörperdrehung enthält. Zur Lösung des Systems wird ebenfalls die Gauß-Elimination angewendet. Nach der Bestimmung der Kontaktkräfte und der Starrkörperdrehung  $\varphi$  werden alle Endspiele nach Gleichung (16) berechnet. Das Untersystem für den nächsten Iterationsschritt wird nach der Durchführung der folgenden Modifikationsmaßnahmen aufgebaut:

1. Alle Punktpaare mit negativen Endspielen  $\varepsilon_{endi} < 0$  werden in das Gleichungssystem eingefügt
2. Alle Punktpaare mit negativen Kontaktkräften  $F_i < 0$  werden aus dem Gleichungssystem herausgenommen

Der Iterationsprozeß wird abgebrochen, wenn keine von beiden Modifikationen durchgeführt werden mußte. Die berechneten Kontaktkräfte und Starrkörperverschiebungen gelten als Lösung der Kontaktaufgabe.

Bei der iterativen Ermittlung des Kontaktbereiches wird in jedem Iterationsschritt erneut ein Gleichungssystem aufgebaut und gelöst, wobei keine früheren Iterationsergebnisse benutzt werden können. Auch sind die zu lösenden Untersysteme relativ groß. Sie können sogar alle potentiellen Punktpaare enthalten, was zum größeren Rechenaufwand führt. Der Vorteil der iterativen Ermittlung besteht in der zwangsläufigen Erfüllung der Nebenbedingungen durch die vorgenommenen Modifikationsmaßnahmen.

## 5 Zusammenfassung

Im vorliegenden Beitrag sind zwei Iterationsstrategien zur Lösung des Gleichungssystems dargestellt worden, die auf der *sequentellen* und der *iterativen* Ermittlung des Kontaktbereiches basieren. Als beste Strategie zur Bestimmung des Kontaktbereiches beim Zahnradengriff hat sich die Anwendung beider Lösungswege gezeigt. Zuerst wird die sequentielle Ermittlung des Kontaktbereiches angewendet und mit

geringem Rechenaufwand eine Lösung erreicht. Für den Fall, daß in der Endlösung negative Kontaktkräfte vorhanden sind, wird der schon bestimmte Kontaktbereich als Startlösung für eine iterative Ermittlung benutzt. Dann wird in ein bis drei Iterationsschritten der endgültige Kontaktbereich bestimmt, wobei alle Kontaktkräfte und Endspiele nicht negativ sind. Damit werden die Vorteile der sequentiellen und der iterativen Ermittlung ausgenutzt. Die Zweckmäßigkeit dieser Lösungsstrategie hat sich bei den Kontaktberechnungen von Zahnrädern bewährt.

## Literatur

1. Altenbach, J.; Altenbach, H.: Einführung in die Kontinuumsmechanik. Teubner Verlag, Stuttgart, (1994).
2. Dandekar, B.; Conant, R.: Numerical Analysis of Elastic Contact Problems Using the Boundary Integral Equation Method. Part 1: Theory. Int. Journal for Numerical Methods in Engineering 33 (1992), 1513–1522.
3. Neupert, B.: Berechnung der Zahnkräfte, Pressungen und Spannungen von Stirn- und Kegelradgetrieben. Dissertation, RWTH Aachen, (1983).
4. Schwarz, H.: Numerische Mathematik. Teubner Verlag, Stuttgart, (1984).
5. Vijayakar, S.; Busby, H.; Houser, D.: Linearization of Multibody Frictional Contact Problems. Computers & Structures 29 (4), (1988), 569–576.
6. Wanderer, G.: Zahnsteifigkeit aus FE-ermittelten Einflußzahlen. VDI Fortschritt-Berichte, Reihe 11, Nr. 211, VDI-Verlag, Düsseldorf, (1994).
7. Weck, M.: Moderne Leistungsgetriebe: Verzahnungsauslegung und Betriebsverhalten. Springer Verlag, Berlin, (1992).
8. Weck, M.; Bong, H.-B.: Zur Kraftverteilung in Gleit- und Wälzkontakten. VDI-Zeitschrift 129, (1987), 72–75.
9. Weese, W.; Popov, V.: Modellierung des mehrflächigen Reibungskontaktes zweier Rotationskörper. Technische Mechanik 14, 3/4, (1994), 221–230.

---

*Anschrift:* Dipl.-Ing. Vladimir Popov, Graduiertenkolleg MBI; Professor Dr.-Ing. habil. Walter Weese, Institut für Mechanik, Otto-von-Guericke-Universität, Postfach 4120, D-39016 Magdeburg