

Verbesserte FE-Diskretisierung bei Kontaktaufgaben

K. Graeff-Weinberg, H. Berger

Bei der Finite-Element-Analyse von Maschinenbauteilen treten häufig Kontaktprobleme auf. Die Bestimmung der in der Regel a priori unbekannt genauen Kontaktzone der Bauteile erfolgt in mehreren Berechnungsschritten. Dazu müssen mögliche Kontaktbereiche sehr fein diskretisiert werden, wobei vorzugsweise finite Elemente mit linearer Ansatzordnung verwendet werden. Dagegen sind für die Vernetzung der umliegenden Bereiche die im Maschinenbau üblichen finiten Elemente höherer – meist quadratischer oder kubischer – Ansatzordnung vorteilhafter. Die Verbindung derartiger zunächst inkompatibler Vernetzungsgebiete wird mit dem von den Autoren in (Graeff-Weinberg, 1995) vorgestellten pNh-Elementkonzept möglich. Diese Elemente gestatten einen C^0 -stetigen Übergang von einer beliebig feinen Diskretisierung auf ein grob diskretisiertes Gebiet gleicher oder höherer Ansatzordnung. Im vorliegenden Beitrag wird gezeigt, daß die pNh-Elementfamilie besonders vorteilhaft bei der Berechnung typischer Kontaktprobleme des Maschinenbaus eingesetzt werden kann.

1 Grundlagen

Kontaktprobleme sind sehr vielfältig. Sie treten beispielsweise als Stoßkontakt bei der Crash-Simulation, als rollender Kontakt in Antriebssystemen und Lagern oder verbunden mit großen Deformationen bei Umformprozessen auf. Wegen ihrer großen Bedeutung im Maschinenbau und im Bauwesen sind Kontaktprobleme seit langem ein Schwerpunkt ingenieurwissenschaftlicher Forschungen. Eine erste analytische Behandlung dieser Problematik wurde mit den 1881 von Hertz vorgestellten Kontaktformeln möglich. Sie finden auch heute noch für viele einfache Aufgabenstellungen Anwendung (Beitz, 1990). Seither haben sich besonders Forscher wie Mußchelischwili (1971) und Galin (1980) um die Weiterentwicklung der Kontakttheorie verdient gemacht. So ist es heute auch für viele komplizierte Geometrie- und Belastungsfälle möglich, das Verhalten kontaktierender Körper analytisch zu beschreiben. Eine Zusammenstellung theoretischer Grundlagen und analytischer Lösungen der Kontaktmechanik findet man beispielsweise bei Johnson (1987). In der praktischen Anwendung überwiegen heute jedoch wegen ihrer Allgemeinheit FE-Lösungsverfahren.

Hier wird der grundlegende Fall des quasistatischen Kontakts zwischen linear elastischen Körpern mit kleinen Verschiebungen und Verzerrungen betrachtet. Typische Kontaktaufgaben, die sich unter diesen Voraussetzungen behandeln lassen, sind z.B. Schraube-Mutter-Verbindungen, Befestigungen von Zahn- oder Schwungrädern auf Wellen, Fundament-Boden-Verbindungen oder Flanschverbindungen von Rohrleitungen.

Das System in Bild 1 besteht aus zwei Körpern A und B mit dem Gebiet $\Omega = \Omega^A \cup \Omega^B$, für das die Gleichungen der linearen Elastizitätstheorie gelten. Die Entfernung der Körper voneinander läßt sich mit Zwangsbedingungen \mathbf{Z} für die Verschiebungsfunktion \mathbf{u} in der allgemeinen Form

$$\mathbf{Z}(\mathbf{u}) \leq 0 \quad \text{in } \Omega^A \cap \Omega^B \quad (1)$$

beschreiben. Die Körper berühren sich in der Kontaktfläche Γ^C . Größe und Form der Kontaktfläche sind abhängig von Geometrie, Materialeigenschaften, Belastung und Lagerung des Systems. Ihre Beschreibung erfolgt mit Hilfe eines lokalen kartesischen Koordinatensystems $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{n}$. Dabei liegen \mathbf{t}_1 und \mathbf{t}_2 in der Tangentialebene, der Normalenvektor \mathbf{n} steht senkrecht auf der Kontaktfläche und zeigt vom Körper A zum Körper B. Für die Kontaktfläche werden geometrische und statische Kontaktbedingungen formuliert. Die Körper sind miteinander in Kontakt, wenn

$$\mathbf{Z}(\mathbf{u}) = \mathbf{n}(\mathbf{u}^A - \mathbf{u}^B - \mathbf{d}^0) = \mathbf{0} \quad \text{auf } \Gamma^C = \Gamma^A \cap \Gamma^B \quad (2)$$

gilt. Die geometrischen Kontaktbedingungen (2) fordern somit Gleichheit der Normalverschiebungen der Körper A und B nach Überwinden eines (positiven oder negativen) Anfangsspiels \mathbf{d}^0 . Der Vektor der relativen Verschiebungen der Körper in der Kontaktzone \mathbf{u}^C wird in eine Normalkomponente $u_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}^C$ und eine resultierende Tangentialkomponente $u_t = \mathbf{u}^C - \mathbf{n} u_n$ zerlegt, analog erhält man für den Kontaktspannungsvektor \mathbf{q}^C die Komponenten q_n^C und q_t^C .

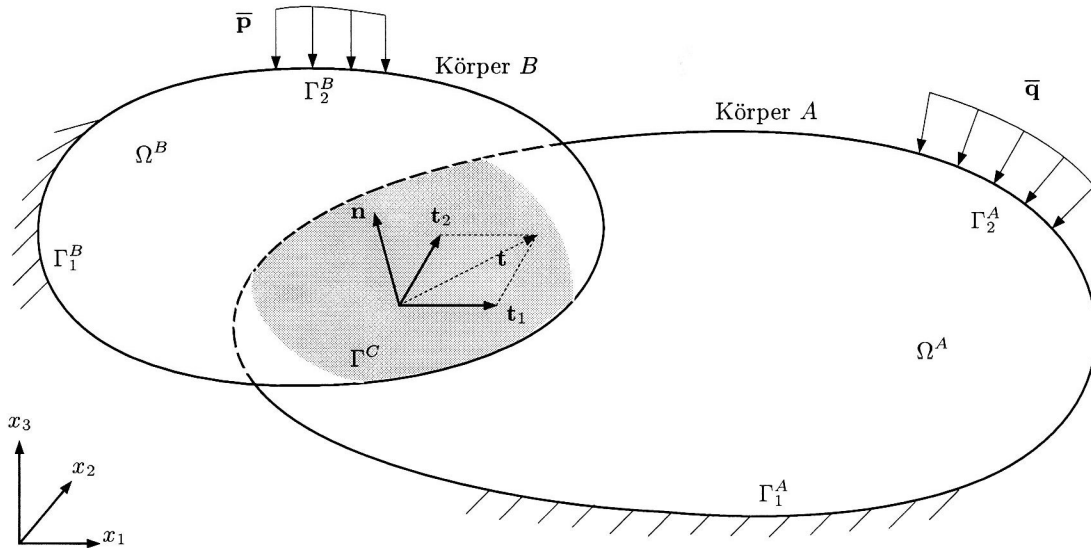


Bild 1. System aus zwei kontaktierenden Körpern

Da in der Kontaktfläche nur Druckspannungen übertragen werden können und die Komponenten des Kontaktspannungsvektors dem Reibgesetz genügen müssen, gilt

$$q_n^C \leq 0 \quad (3)$$

$$q_t^C = f(q_n^C) \quad (4)$$

Wird als Reibgesetz das Coulombsche Gesetz mit dem (isotropen) Reibkoeffizienten μ verwendet, d.h. gilt

$$|q_t^C| \leq \mu |q_n^C| \quad u_t^C q_t^C \leq 0 \quad (q_t^C - \mu q_n^C) u_t^C = 0 \quad (5)$$

dann erhält man als statische Kontaktbedingung für den Fall des Haftens

$$u_t^C = 0 \quad q_t^C - \mu q_n^C < 0 \quad \text{auf } \Gamma^C = \Gamma^A \cap \Gamma^B \quad (6)$$

und für den Fall des Gleitens

$$u_t^C \neq 0 \quad q_t^C - \mu q_n^C = 0 \quad \text{auf } \Gamma^C = \Gamma^A \cap \Gamma^B \quad (7)$$

Zur Entwicklung von FE-Näherungslösungen wird in der Elastizitätstheorie gewöhnlich vom Prinzip der virtuellen Arbeit

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T \delta \boldsymbol{\epsilon} d\Omega = \int_{\Omega} \bar{\mathbf{p}}^T \delta \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Gamma_2} \bar{\mathbf{q}}^T \delta \mathbf{u} d\Gamma \quad (8)$$

($\boldsymbol{\sigma}$ Spannungsvektor, $\boldsymbol{\epsilon}$ Dehnungsvektor, $\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{q}}$ Vektoren der vorgegebenen Volumen- bzw. Randlasten) bzw. von dem zugeordneten Prinzip vom Minimum des elastischen Gesamtpotentials ausgegangen (Zienkiewicz, 1989). Bei Kontaktproblemen wird der belastete Rand des Gesamtsystems (8) in einen Teil Γ_2 mit den vorgegebenen Randlasten $\bar{\mathbf{q}}$ und den Kontaktrand Γ^C zerlegt. Wegen der Nichtlinearität erfordert die Berechnung gewöhnlich ein inkrementelles Vorgehen, bei dem die gesamte wirkende Belastung in einer Folge von Lastschritten aufgebracht wird. Unter den genannten Voraussetzungen erhält man so für ein Lastinkrement Δ eine linearisierte Variationsformulierung der Form

$$\int_{\Omega} \Delta \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{D} \delta \Delta \mathbf{u} d\Omega = \int_{\Omega} \Delta \bar{\mathbf{p}}^T \delta \Delta \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Gamma_2} \Delta \bar{\mathbf{q}}^T \delta \Delta \mathbf{u} d\Gamma + \int_{\Gamma^C} \Delta \bar{\mathbf{q}}^{CT} \delta \Delta \mathbf{u}^C d\Gamma \quad (9)$$

(**D** Differentialmatrix). Das Integral über Γ^C läßt sich als Inkrement der virtuellen Arbeit der Kontaktspannungen interpretieren (Egert, 1991). Die normalen Kontaktspannungskomponenten leisten keine virtuelle Arbeit, weil für $q_n^C < 0$ keine relative Verschiebung der Körper in Normalenrichtung auftritt. Wenn die Körper aufeinander haften, verschwindet infolge $\Delta \mathbf{u}^C = 0$ der zusätzliche Arbeitsanteil. Gleiten die Körper aufeinander, bewirken die tangentialen Kontaktspannungen und -verschiebungen eine virtuelle Dissipationsarbeit.

Die Kontaktbedingungen (2) bis (7) werden als Zwangsbedingungen für die Verschiebungsfunktion des FE-Systems zusammengefaßt und lauten in ihrer linearen Form (Gabbert, 1987)

$$\mathbf{Z}(\mathbf{u}) = \mathbf{Z}\mathbf{u} + \mathbf{z}^0 = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (10)$$

Sie können direkt in das FE-Gleichungssystem eingearbeitet werden und sind dann exakt erfüllt. Bei komplexen Zwangsbedingungen entsteht dadurch jedoch ein erheblicher rechentechnischer Aufwand. Einfacher zu realisieren ist die Berücksichtigung der Zwangsbedingungen als Nebenbedingungen im elastischen Gesamtpotential, wobei man zwei grundlegende Möglichkeiten unterscheidet:

- die Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren.
- die Penalty-Funktion-Methode

Der Grundgedanke beider Methoden besteht darin, ein Problem mit Nebenbedingungen durch ein Problem ohne Nebenbedingungen zu ersetzen. Bei der Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren werden die Zwangsbedingungen exakt erfüllt. Dabei entsteht jedoch ein erweitertes FE-Gleichungssystem, bei dem die Steifigkeitsmatrix nicht mehr positiv definit ist. Da die Lösungsverfahren für FE-Gleichungssysteme überwiegend positive Definitheit der Matrix voraussetzen, sind zur Anwendung dieser Methode spezielle Gleichungslöser erforderlich. Hier wird deshalb das Penalty-Verfahren vorgezogen.

Bei der Penalty-Funktion-Methode wird das Verlassen des zulässigen Bereiches im Sinne der L^2 -Norm „bestraft“. Dazu wird dem zu minimierenden Funktional ein Penalty-Term

$$\frac{1}{2} \alpha_P \int_{\Omega} \mathbf{Z}(\mathbf{u})^T \mathbf{Z}(\mathbf{u}) d\Omega \quad (11)$$

hinzugefügt. Durch Minimieren des so erweiterten elastischen Gesamtpotentials gelangt man zu dem modifizierten FE-Gleichungssystem

$$(\mathbf{K} + \mathbf{K}^C) \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{f} + \mathbf{f}^C \quad (12)$$

Die Zwangsmatrix \mathbf{K}^C und der Zwangsvektor \mathbf{f}^C enthalten die Zwangsbedingungen des Systems.

$$\mathbf{K}^C = \alpha_P \int_{\Omega} \mathbf{Z}^T \mathbf{Z} d\Omega \quad (13)$$

$$\mathbf{f}^C = \alpha_P \int_{\Omega} \mathbf{Z}^T \mathbf{z}^0 d\Omega \quad (14)$$

Bei der Anwendung der Penalty-Funktion-Methode ist die Wahl der Penalty-Zahl α_P von zentraler Bedeutung (Nour-Omid, 1987). Die Zwangsbedingungen werden für $\alpha_P \rightarrow \infty$ exakt erfüllt. Praktisch verursacht eine zu große Penalty-Zahl jedoch numerische Schwierigkeiten. Die Kondition der Gesamtsteifigkeitsmatrix verschlechtert sich, im Extremfall wird die Matrix singulär. Ist die Penalty-Zahl zu klein, wird dagegen die Erfüllung der Zwangsbedingungen schlecht angenähert. Physikalisch läßt sich α_P als eine Feder interpretieren, die Verschiebungen verhindern soll. Da die Federsteifigkeit nicht unendlich groß ist, ergeben sich sehr kleine Verschiebungen.

Allgemein kommen bei der FE-Berechnung von Kontaktaufgaben sowohl die Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren (Bathe, 1985; Mottershead 1993) als auch die Penalty-Funktion-Methode (Buczowski,

1989); Wriggers, 1993) zum Einsatz. Beide Methoden liefern praktisch gleichwertige Ergebnisse (Crisfield, 1992; Mottershead, 1992). Kombiniert man sie miteinander, dann erhält man eine Lagrangesche Multiplikatoren-Methode, die um Penalty-Terme erweitert wurde (augmented Lagrange formulation, z.B. Simo (1991)). Ein wesentlicher Vorteil ist hier, daß die Penalty-Zahl kleiner ist als beim reinen Penalty-Verfahren und so eine bessere Kondition der Steifigkeitsmatrix erreicht wird. Ein ähnlicher Gedanke liegt der von Simo (1984) vorgeschlagenen gestörten Lagrangeschen Methode (perturbed Lagrange formulation) zugrunde.

2 Der Kontaktalgorithmus

Der hier verwendete Kontaktalgorithmus basiert auf einer Kontaktelemente-Technik. Es können damit ebene, rotationssymmetrische und dreidimensionale Kontaktaufgaben mit a priori unbekanntem Kontaktgebiet gelöst werden. Die Reibung zwischen den Körpern wird berücksichtigt. Sonderfälle, wie das Überwinden eines Anfangsspalt und die Berechnung von Schrumpferverbindungen, lassen sich ebenfalls berechnen. Im folgenden soll die Vorgehensweise erläutert werden.

2.1 Formulierung der Kontaktelemente

Kontakt zwischen zwei FE-diskretisierten Körpern kann allgemein beschrieben werden als Kontakt zwischen Kontaktknoten und zugeordneter Zielfläche. Bei kleinen Verformungen und Gleitungen ist es ausreichend, dem Kontaktknoten statt einer Zielfläche einen Zielknoten zuzuordnen, die Kontaktbedingungen werden dann zwischen den Knotenpaaren formuliert. Ein Kontaktelement erhält man, wenn die Kontaktknoten als Knotenpunkte eines finiten Elementes definiert werden. Mit Kontaktelementen werden dann die Kontaktbedingungen elementweise als Eigenschaften einer fiktiven Zwischenschicht zwischen den Körpern beschrieben.

Kontaktelemente stammen ursprünglich aus der Geomechanik, wo sie zur Beschreibung von Bauteil-Boden-Wechselwirkungen eingesetzt wurden (Goodmann, 1968). Später wurde diese Technik auch für Kontaktprobleme des Maschinenbaus übernommen (Feldmann, 1981; Hinzmann, 1980). Kontaktelemente mit Reibung wurden beispielsweise von Hinzmann (1980) und Mazurkiewicz (1983) beschrieben. Keuser (1985) und andere erweiterten das Kontaktelement-Konzept auf gekrümmte Kanten und dreidimensionale Probleme. Heute verfügt die Mehrheit der kommerziellen FE-Programmsysteme über Kontaktalgorithmen auf der Basis von Kontaktelementen. Ihre Vorteile liegen vor allem in einer relativ leichten Implementierbarkeit und der Möglichkeit, lokale Eigenschaften der Kontaktzone (Reibgesetz, Richtungsabhängigkeit) zu erfassen.

Kontaktelemente sind isoparametrische Elemente. Man ordnet sie im potentiellen Kontaktgebiet der Konstruktion an, um gegebenenfalls die Kopplung der Körper zu realisieren. Kontaktelemente übertragen also in ihrer Normalenrichtung keine Zugkräfte und die Größe ihrer Tangentialkräfte wird durch das Reibgesetz bestimmt. Nach ihrer FE-Formulierung unterscheidet man drei Kontaktelementtypen (Bild 2):

Die **Flächen- oder Linienkontaktelemente** bestehen aus zwei Flächen- (bzw. im ebenen Fall Linien) mit dem Abstand d , der Dicke der Elemente. Ist die Dicke gleich Null, dann sind die Körper A und B in Kontakt, das Element ist geschlossen und nimmt an der Kraftübertragung teil. Die inneren Elementkräfte werden aus den Verschiebungen der Oberflächen sowie den normalen und tangentialen Steifigkeitskoeffizienten der Elemente berechnet. Diese Elementsteifigkeiten müssen iterativ so bestimmt werden, daß die Kontaktbedingungen erfüllt sind. Im geöffneten Fall gibt es keine Verbindung zwischen den Oberflächen der Körper A und B, die Elementsteifigkeiten verschwinden.

Die **Schichtkontaktelemente** bestehen aus einem fiktiven anisotropen Material mit voneinander unabhängigen Materialkonstanten. Der Elastizitätsmodul kennzeichnet das Verhalten des Elementes in Normalenrichtung, die Schubmoduli das Verhalten in den tangentialen Richtungen. Zur Erfüllung der Kontaktbedingungen werden die Materialkonstanten iterativ angepaßt (Stadter, 1979). Liegt kein Kontakt vor, sind die Materialgrößen gleich Null.

Die **Federkontaktelemente** sind die einfachsten Kontaktelemente, sie entsprechen der Kopplung einzelner Knotenpaare. In den drei lokalen Richtungen werden die Knoten durch diskrete, voneinander

unabhängige Federn gekoppelt. Die Federsteifigkeiten werden so bestimmt, daß die Kontaktbedingungen erfüllt sind.

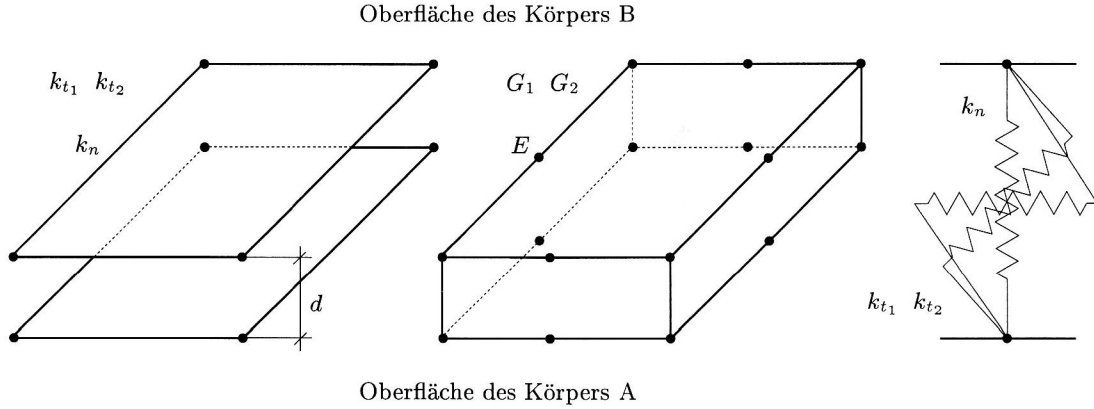


Bild 2: Flächen-, Schicht- und Federkontaktelement

Der Einsatz von Federkontaktelelementen ist nur dann zu empfehlen, wenn die anschließenden FE-Strukturen mit Elementen vom Polynomgrad $p=1$ vernetzt sind. Anderenfalls kann es infolge der unterschiedlichen Wichtung von Seitenmitten- und Eckknoten bei der Kraftverteilung im Element zu numerischen Schwierigkeiten kommen. In einigen Fällen, z.B. zwischen Körpern, die mit den üblichen 20-Knoten-Hexaedern der Serendipity-Klasse ($p=2$) vernetzt sind, ist der Einsatz von Federkontaktelelementen nicht möglich (Buczowski, 1994). Die Flächen- und Schichtkontaktelemente sind dagegen allgemein anwendbar. Allerdings ist der numerische Aufwand bei den Schichtkontaktelelementen erfahrungsgemäß höher (Altenbach, 1990). Mit den Flächenkontaktelelementen lassen sich darüberhinaus relativ einfach auch Anfangszwänge (z.B. infolge einer Schrupfverbindung) berücksichtigen. Deshalb wird hier mit Flächen- bzw. Linienkontaktelelementen gearbeitet.

Die Ansatzfunktionen \mathbf{G} der Flächen- bzw. Linienkontaktelemente (im folgenden einfach als Kontaktelemente bezeichnet) sind kompatibel zur Vernetzung der anschließenden Körper, Interpolationsstützstellen $\hat{\mathbf{u}}$ sind die Elementknoten. Für die Verschiebungen im Element gilt

$$\mathbf{u}^C = \mathbf{G}\hat{\mathbf{u}}^C = [\mathbf{G} \quad -\mathbf{G}][\hat{\mathbf{u}}^A \quad \hat{\mathbf{u}}^B]^T - \mathbf{G}\mathbf{d}^0 \quad (15)$$

Da die Verformungen voraussetzungsgemäß klein sind, wird die Geometrieapproximation auf die Elementmittelfläche bezogen ($\hat{\mathbf{x}}$ Koordinaten der Stützstellen).

$$\mathbf{x} = \mathbf{G}\hat{\mathbf{x}} \quad \text{mit} \quad \hat{\mathbf{x}} = \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{x}}^A + \hat{\mathbf{x}}^B) \quad (16)$$

Um die Kontaktbedingungen zu formulieren, wird in die Elementmittelfläche ein orthonormales Koordinatensystem gelegt. Dazu werden aus den Krümmungen der natürlichen Koordinaten die Tangentenvektoren $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi_1}$ und $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi_2}$ berechnet und aus ihrem Vektorprodukt $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi_2}$ die Normale auf dem Flächenelement ermittelt. Den Normaleneinheitsvektor erhält man so mit

$$\mathbf{n} = \frac{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi_2}}{|\mathbf{J}|} \quad \text{wobei} \quad |\mathbf{J}| = \left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi_2} \right| \quad (17)$$

und die tangentialen Koordinaten \mathbf{t}_1 und \mathbf{t}_2 mit

$$\mathbf{t}_1 = \frac{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi_1}}{\left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi_1} \right|} \quad \text{und} \quad \mathbf{t}_2 = \mathbf{n} \times \mathbf{t}_1 \quad (18)$$

$|\mathbf{J}|$ entspricht der Determinante der Jacobi-Matrix. Für die inneren Kräfte im Kontaktelement gilt voraussetzungsgemäß

$$\mathbf{q}^C = \tilde{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{u}^C \quad (19)$$

wobei $\tilde{\mathbf{k}}$ eine Diagonalmatrix mit den Steifigkeitskoeffizienten k_{t_1} , k_{t_2} und k_n ist.

Mit den Gleichungen (15) und (19) erhält man aus dem zusätzlichen Arbeitsanteil in (9) durch Variation für jedes Element die Kontaktelementbeziehung

$$\mathbf{K}_e^C \mathbf{u}_e^C = \mathbf{f}_e^C \quad (20)$$

mit der Kontaktelementsteifigkeitsmatrix \mathbf{K}_e^C und dem Zwangsvektor im Kontaktelement \mathbf{f}_e^C .

$$\mathbf{K}_e^C = \int_{\Gamma^c} [\mathbf{G} - \mathbf{G}]^T \tilde{\mathbf{k}} [\mathbf{G} - \mathbf{G}] d\Gamma \quad (21)$$

$$\mathbf{f}_e^C = \mathbf{K}_e^C \mathbf{d}_e \quad (22)$$

Mit (20) bis (22) lassen sich die globale Kontaktsteifigkeit \mathbf{K}^C und der Zwangsvektor \mathbf{f}^C aufbauen. Sie entsprechen den mit der Penalty-Funktion-Methode abgeleiteten Beziehungen (12) bis (14). Praktisch können die Elementsteifigkeitskoeffizienten in $\tilde{\mathbf{k}}$ als Penalty-Zahlen betrachtet werden, die die Berücksichtigung der Kontaktbedingungen erzwingen. Die Festlegung der Anfangssteifigkeit entspricht dem Problem der Wahl der Penalty-Zahl. Bewährt hat sich eine Anfangssteifigkeit, die um den Faktor 10^5 größer ist als die durchschnittliche Steifigkeit der Festkörper (vgl. Gabbert (1987), Nour-Omid (1987)).

Der konkrete Ausdruck der Kontaktelementsteifigkeitsmatrix \mathbf{K}_e^C und des Zwangsvektors \mathbf{f}_e^C ist abhängig von der Ansatzordnung im Element und von der Dimension des Problems (vgl. Hinzmann (1980), Ladra (1993)). Bei dem hier erarbeiteten Berechnungsalgorithmus werden Kontaktelemente mit Ansatzfunktionen der Ordnung $p=1$ und $p=2$ eingesetzt. Natürlich ist auch die Formulierung von Kontaktelementen höherer Ansatzordnung denkbar. Da jedoch ein Kontaktelement nur den Zustand geöffnet oder geschlossen haben kann (nicht teilweise geöffnet), ist der Einsatz höherwertiger Elemente nicht gewinnbringend. Eine verbesserte Berechnungsgenauigkeit ist in Kontaktgebieten nur durch h -Verfeinerung, also Anordnung von möglichst vielen Kontaktelementen zu erreichen.

2.2 Lösung der Kontaktaufgabe

Sowohl die Bestimmung der Kontaktzone als auch die Erfüllung des Reibgesetzes erfolgen in jedem Lastschritt iterativ (Zienkiewicz, 1989). Durch Nutzung einer Substrukturtechnik (Zienkiewicz, 1989) läßt sich die Kontaktiteration auf wenige Freiheitsgrade im FE-Gesamtsystem begrenzen. Dazu werden die Körper A und B vernetzt und die Knoten auf der potentiellen Kontaktfläche als externe Knoten kondensiert, die dann die sogenannte Hyperstruktur bilden. Zwischen diesen Knoten werden die Kontaktelemente angeordnet. Die Gesamtsteifigkeitsmatrix \mathbf{K} und der Lastvektor $\Delta \mathbf{f}$ werden so in einen Festkörperteil \mathbf{K}^{AB} , $\Delta \mathbf{f}^{AB}$ und einen Kontaktteil $\Delta \mathbf{K}^C$, $\Delta \mathbf{f}^C$ zerlegt. Der Festkörperteil bleibt während der Iteration unverändert, nur der — verhältnismäßig kleine — Kontaktteil wird modifiziert. Der Iterationsaufwand wird durch diese Zerlegung auf ein Minimum reduziert.

Zur numerischen Formulierung der Kontaktbedingungen werden die primären Ergebnisgrößen der FE-Rechnung, die Knotenverschiebungen und -kräfte herangezogen. Der aktuelle Abstand \mathbf{d} der Knoten eines Knotenpaares beträgt

$$\mathbf{d} = -\mathbf{u}^A + \mathbf{u}^B + \mathbf{d}^0 \quad (23)$$

Ist das Anfangsspiel $\mathbf{d}^0 \neq 0$, dann läßt sich für das Knotenpaar auch eine dimensionsunabhängige fiktive Dehnung ϵ

$$\epsilon = \frac{-\mathbf{u}^A + \mathbf{u}^B}{\mathbf{d}^0} \quad (24)$$

berechnen. Die geometrische Kontaktbedingung für die Berührung der Körper lautet somit

$$d_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{d} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \epsilon_n = \mathbf{n} \cdot \epsilon = -1 \quad (25)$$

Demzufolge gilt für den Kontaktzustand des Knotenpaares

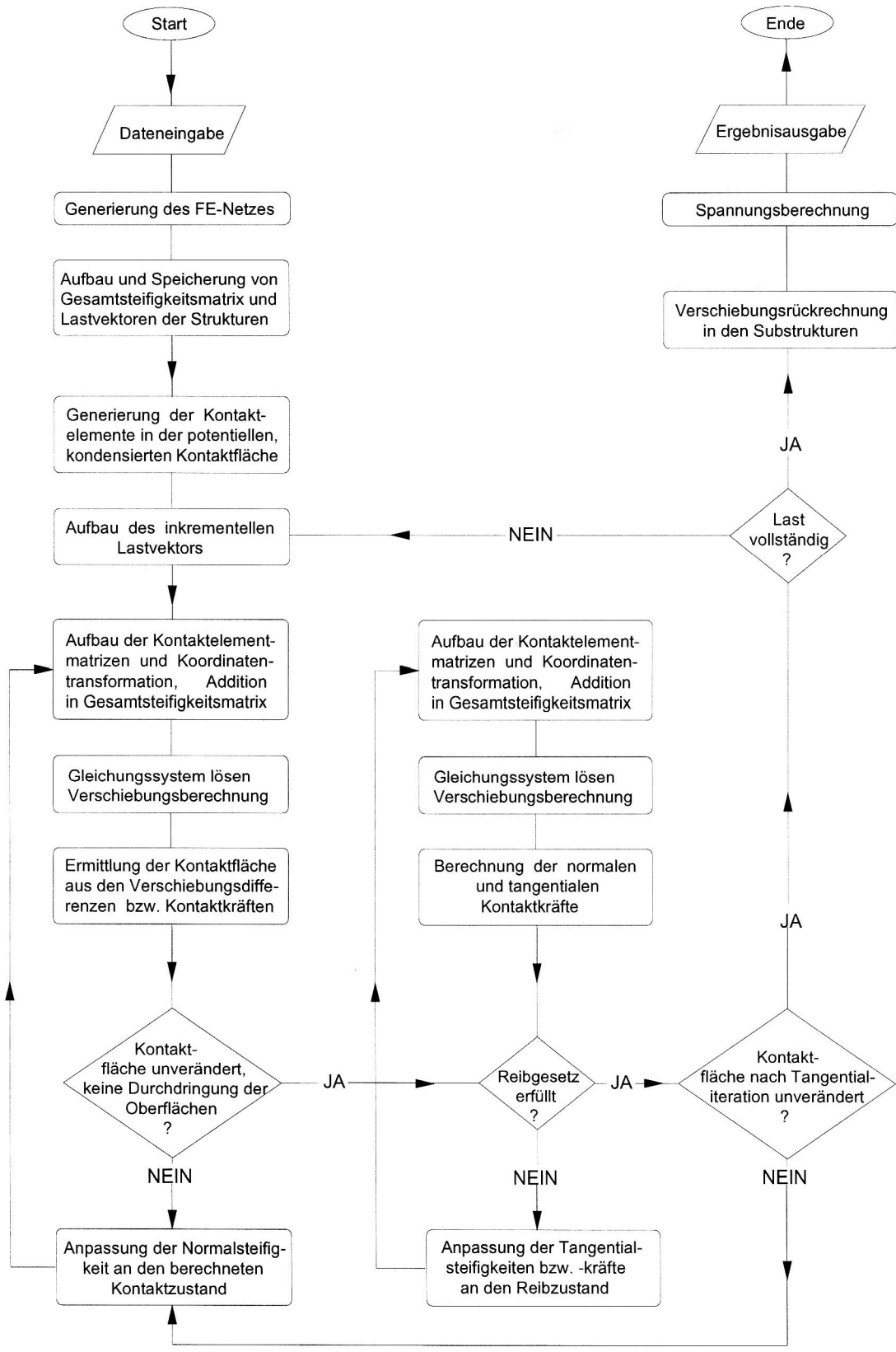


Bild 3: Kontaktalgorithmus

- bei $d_n > 0$ bzw. $\epsilon_n > -1$ berühren sich die Körper nicht,
- bei $d_n = 0$ bzw. $\epsilon_n = -1$ liegt Kontakt vor,
- bei $d_n < 0$ bzw. $\epsilon_n < -1$ durchdringen sich die Körper unzulässig.

Wenn an keinem Knoten Kontakt vorliegt, wird das Element geöffnet. Wenn sich die Körper durchdringen, muß die Normalsteifigkeit des Kontaktelementes erhöht werden. Liegen an den Knotenpaaren unterschiedliche Kontaktzustände vor, dann wird zur endgültigen Entscheidung die statische Kontaktbedingung herangezogen. Bei Berührung der Körper muß die Normalkomponente der resultierenden Schnittkraft im Element F_n eine Druckbelastung repräsentieren.

$$F_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{F} < 0 \quad (26)$$

Nach dem Coulombschen Reibgesetz haften die Oberflächen, wenn für die resultierende Tangentialkraft $F_t = \sqrt{F_{t1}^2 + F_{t2}^2}$ die Bedingung

$$F_t \leq \mu |F_n| \quad (27)$$

erfüllt ist. Anderenfalls gleiten die Oberflächen aufeinander, und es muß entweder durch Veränderung der Tangentialsteifigkeitskoeffizienten oder durch entsprechende Zwangskräfte eine tangentiale Verschiebung $u_t > 0$ zugelassen werden. Für die Kontaktkräfte im Element muß schließlich gelten

$$F_t - \mu |F_n| = 0 \quad (28)$$

Der Ablauf des Kontaktalgorithmus ist schematisch in Bild 3 dargestellt. Die FE-Rechnung beginnt mit der Netzgenerierung, dem Aufbau der Steifigkeitsmatrizen und des Lastvektors für die Substrukturen. Durch Kondensation wird daraus das FE-Gleichungssystem auf Hyperstrukturebene berechnet. Der Kontaktalgorithmus startet mit dem Erzeugen des inkrementellen Lastvektors. Dann werden die Steifigkeitsmatrizen und Zwangsvektoren der einzelnen Kontaktelemente aufgebaut, ins globale Koordinatensystem transformiert und zum FE-Gleichungssystem addiert. Aus den berechneten Knotenverschiebungen und -kräften wird die Kontaktfläche bestimmt. Die Normalsteifigkeitskoeffizienten der Elemente werden nun dem Kontaktzustand angepaßt und die Normaliteration mit dem erneuten Aufbau der Kontaktelementbeziehungen fortgesetzt. Bleibt die Kontaktfläche in zwei aufeinanderfolgenden Iterationsschritten unverändert, dann beginnt die Tangentialiteration mit der Berechnung der normalen und tangentialen Kräfte in den Kontaktelementen. Erfüllen sie das Coulombsche Reibgesetz, dann wird zum nächsten Lastschritt übergegangen. Anderenfalls werden die Tangentialsteifigkeitskoeffizienten bzw. -kräfte entsprechend der Iterationsvorschrift verändert und die Tangentialiteration fortgesetzt, bis das Reibgesetz mit ausreichender Genauigkeit erfüllt ist. Anschließend wird überprüft, ob sich dadurch die Kontaktfläche verändert. Ist das der Fall, dann beginnt der Iterationszyklus erneut. Die Kontaktberechnung ist beendet, wenn die Last vollständig aufgebracht wurde. Anschließend erfolgt die Verschiebungsrückrechnung für die Substrukturen und die Spannungsberechnung in den finiten Elementen.

3 Die pNh-Technik

Bei vielen Kontaktproblemen sind die möglichen Kontaktbereiche auf kleine Bereiche der Struktur begrenzt. Um die Kontaktzone zu ermitteln, ist daher eine feine Elementunterteilung entlang des potentiellen Kontaktrandes erforderlich. Allen bekannten FE-Kontaktalgorithmen ist gemeinsam, daß finite Elemente der Polynomordnung $p=1$, maximal $p=2$ zum Einsatz kommen. Die Genauigkeit, mit der die Kraftverteilung in der Kontaktzone bestimmt wird, hängt somit von der Netzfeinheit im potentiellen Kontaktgebiet ab. Bei der Berechnung des Spannungs- und Verformungszustandes von Maschinenbauteilen haben sich dagegen großflächigere finite Elemente höherer Ansatzordnung als besonders effektiv erwiesen. Deshalb sollten in den umliegenden Gebieten mit glattem Lösungsverlauf höherwertige Elemente eingesetzt werden. Für die FE-Diskretisierung typischer Kontaktaufgaben ist somit eine Kombination von h-verfeinerten Teilgebieten mit p-Vernetzungen im übrigen Berechnungsgebiet zu empfehlen. Aus diesem Grund wurde von den Autoren ein pNh-Elementkonzept entwickelt. Diese Technik erlaubt es, derartige a priori inkompatible Vernetzungsgebiete kompatibel miteinander zu verbinden (Bild 4).

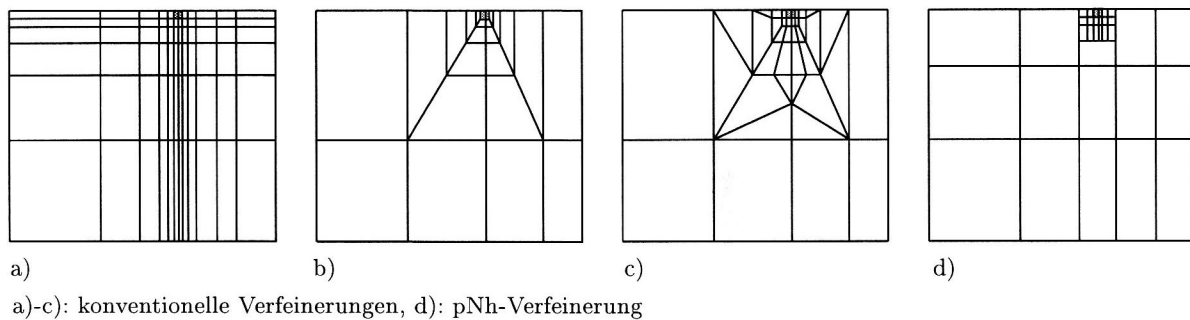


Bild 4: Netzverfeinerungstechniken

pNh-Elemente sind finite Elemente beliebiger Ansatzordnung (i.allg. $p=2\dots 8$), die auf einer oder mehreren Elementseiten eine Diskretisierung mit N h-Elementen (kleine Elemente niedriger Ansatzordnung $p=1,2$) ermöglichen. Die pNh-Elemente unterscheiden sich von den herkömmlichen p -Elementen dadurch, daß auf mindestens einer Elementseite Zwischenknoten eingeführt werden, die N h-Formfunktionen aufspannen (Bild 5). Die Ansatzordnung der h-Diskretisierung auf dem Rand ist in der Regel geringer als die der p -Diskretisierung im übrigen Elementgebiet. Diese Technik führt auf bereichsweise definierte Formfunktionen niedriger Ordnung. Anzahl und Länge der h-Abschnitte sind variabel. Die p -Ansatzfunktionen können sowohl isoparametrisch als auch hierarchisch formuliert sein. Die Herleitung der pNh-Elementformulierungen sowie ihre numerischen Besonderheiten sind in (Graeff-Weinberg, 1995; Graeff-Weinberg, 1996) beschrieben, Ansatzfunktionen der Elemente findet man in (Graeff-Weinberg, 1996).

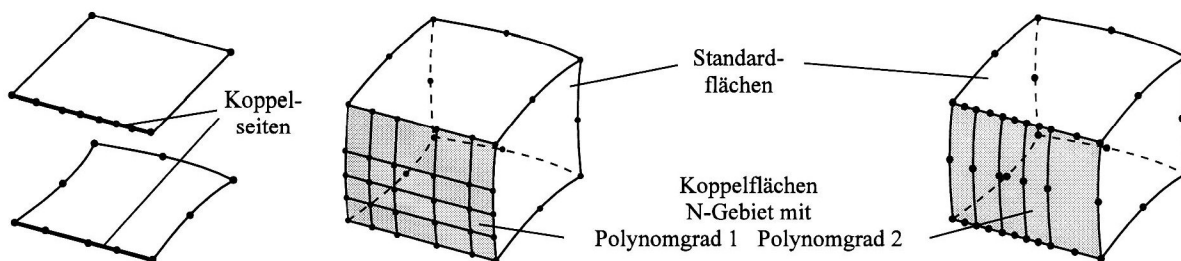


Bild 5. pNh-Elemente

Die isoparametrischen pNh-Elemente sowie der verwendete Kontaktalgorithmus wurden in das Programmsystem COSAR (Computer System for Analysis & Research) implementiert. In COSAR werden überwiegend isoparametrische Elemente der Serendipity-Klasse mit quadratischer Ansatzordnung ($p=2$) eingesetzt. Die isoparametrischen pNh-Elemente sind daher sowohl zu den Serendipity-Elementen als auch zu den beschriebenen Kontaktelementen kompatibel.

4 Beispielrechnungen

Die prinzipielle Funktionsfähigkeit des vorgestellten Algorithmus sowie der Einsatz der pNh-Elemente bei der Kontaktanalyse wurde anhand von Testbeispielen überprüft. Dabei war deutlich zu erkennen, daß Kontaktelemente mit quadratischen Ansatzfunktionen schlechter für die Kontaktanalyse geeignet sind als lineare Kontaktelemente, weil häufig an Seitenmitten- und Eckknoten unterschiedliche Kontaktzustände vorliegen. Zurückzuführen ist dieses Verhalten auf die unterschiedliche Wichtung der Knoten bei der Kraftverteilung im Element. Besonders deutlich ist das bei Kontaktflächen, die mit Serendipity-Ansatzfunktionen vom Polynomgrad $p=2$ vernetzt sind. Hier haben sogar bei konstantem Druck die Schnittkräfte unterschiedliche Vorzeichen. Aus diesem Grund werden Kontaktanalysen in vielen Anwen-

dungen und kommerziellen Systemen grundsätzlich nur zwischen FE-Strukturen vom Polynomgrad $p=1$ gelöst.

Um die Vorteile der höherwertigen Elemente bei der Verformungs- und Spannungsberechnung zu erhalten, werden beispielsweise von Buczkowski et.al. (1989), (1994) jeweils 4 Hexaeder linearer Ansatzordnung an ein Hexaederelement quadratischer Ansatzordnung angeschlossen. Die Kopplung erfolgt hier über Zwangsbedingungen für die Verschiebungsfunktion mittels Penalty-Funktion-Methode. Das führt zu Abhängigkeiten der Lösungsgenauigkeit von der gewählten Penalty-Zahl. Eine Alternative dazu bietet die hier gezeigte Anwendung von pNh-Elementen. Damit kann entweder die Kontaktzone selbst mit linearen Ansatzfunktionen beschrieben oder die unmittelbare Umgebung des Kontaktbereichs mit linearen Elementen vernetzt werden. Die anschließenden Strukturen können mit Elementen höherer Ansatzordnung berechnet werden.

4.1 Zylinder auf elastischer Unterlage

Es wurde ein unendlich langer Zylinder berechnet, der durch eine Last q auf eine elastische Unterlage gedrückt wird. Die analytische Lösung für den ebenen Verzerrungszustand (Beitz, 1990) basiert auf der von Hertz entwickelten Kontakttheorie, mit der die Berührfläche und der Kontaktdruck zweier aufeinander gepreßter Scheiben berechnet werden können.

Ein Viertel des Zylinder wird mit einem sehr groben FE-Netz modelliert. Die Belastung wurde als entsprechend verteilte Linienlast aufgebracht. An das potentielle Kontaktgebiet grenzen zwei pNh-Elemente, wobei im Kontaktgebiet 15 Kontaktelemente einmal linearer und einmal quadratischer Ansatzordnung angeordnet wurden. Die beiden pNh-Elemente realisieren damit eine 1:5 bzw. 1:10 Verfeinerung. Die Nh-Kanten haben folglich 5 bzw. 10 h-Abschnitte der Polynomordnung 1 bzw. 2 (Bild 6).

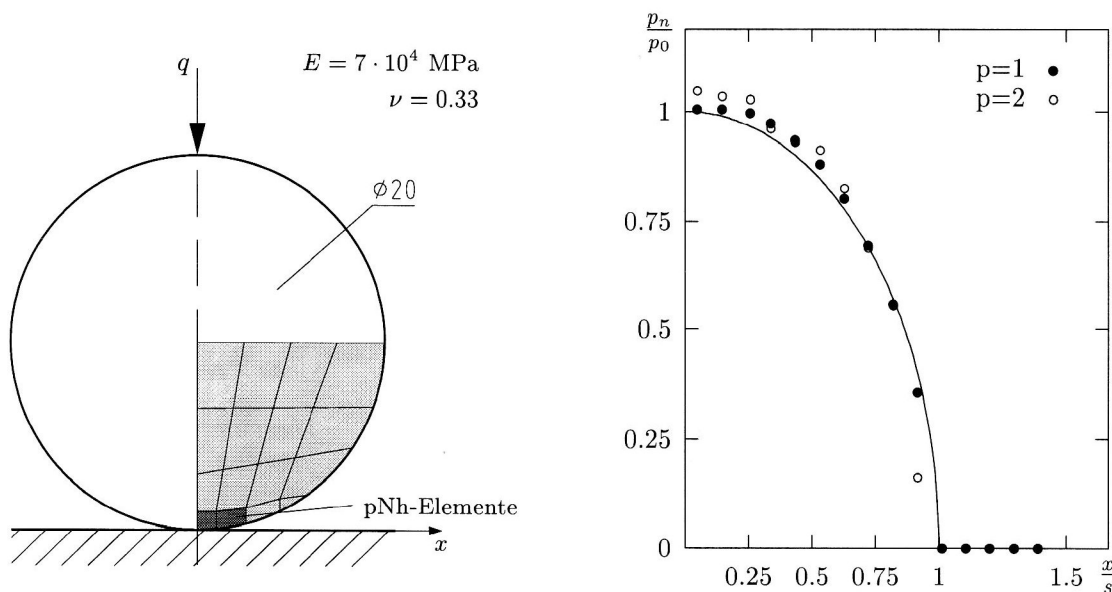


Bild 6. Zylinder auf elastischer Unterlage

Bei der Berechnung wurde von einer a priori unbekanntem Kontaktzone ausgegangen. Der vorhandene Anfangsspalt geht als Zwangskraft entsprechend Gleichung (22) in das FE-Gleichungssystem ein. Die Belastung wurde hier in einem Schritt aufgebracht, die Kontaktiteration ist dann nach 6-8 Iterationsschritten beendet. Mit beiden FE-Modellen berechnet man eine Kontaktzone s , die der analytischen Lösung entspricht. In Bild 6 ist der auf die Gesamlast bezogene Kontaktdruck p_n/p_0 über der Berührfläche aufgetragen. Bild 7 enthält die Druckspannungsverteilung im Zylinder und in der mitmodellierten Unterlage. Die Kontaktdruckverteilung wird durch die linearen Kontaktelemente deutlich besser wiedergegeben als durch die quadratischen. Das bestätigt die oben getroffene Aussage, daß im Kontaktbereich Elemente linearer Ansatzordnung vorzuziehen sind. Insgesamt demonstriert dieses Beispiel sehr anschaulich die Eignung der pNh-Elemente zur feinen Diskretisierung der Kontaktzone. Obwohl die angrenzenden Strukturen nur grob vernetzt wurden, ist die Approximation des Kontaktverhaltens von hoher Qualität.

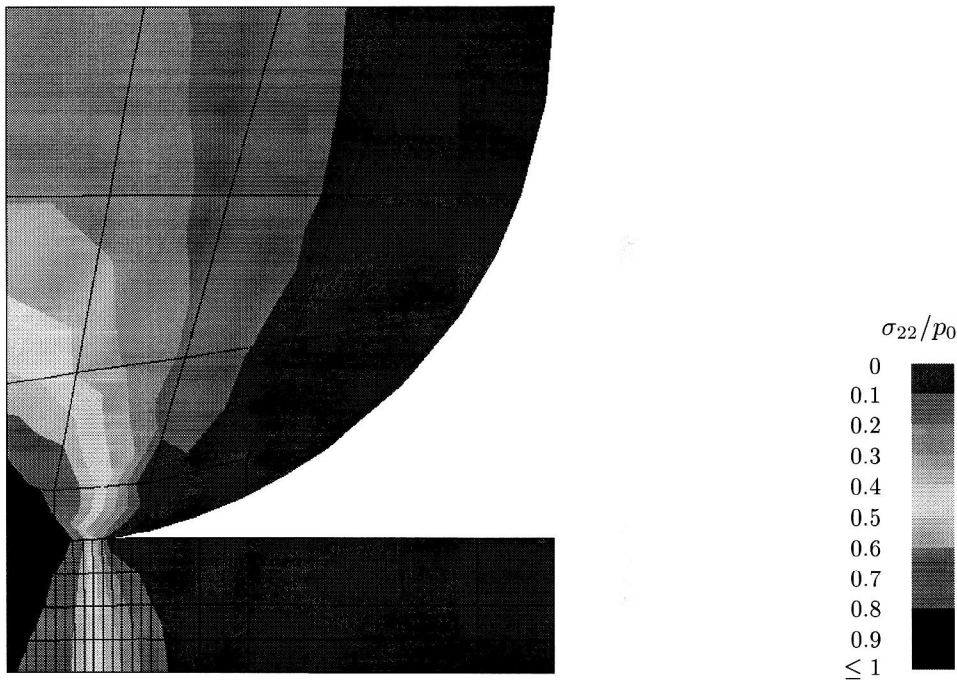


Bild 7. Druckspannungsverteilung

4.2 Flanschverbindung

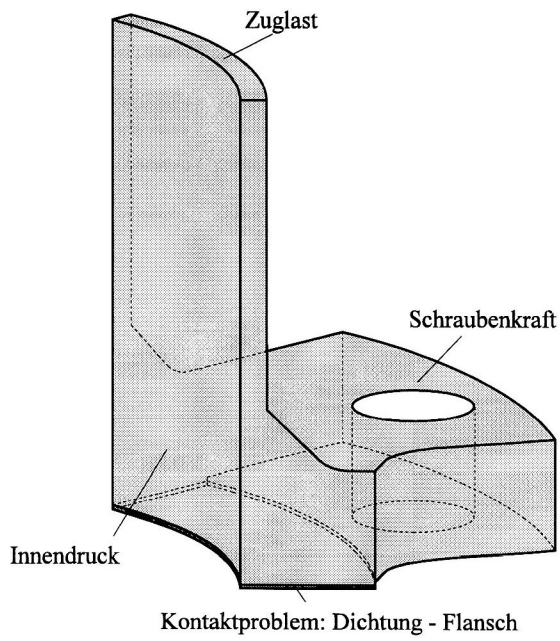
Am Beispiel des Flansches in Bild 8a wird gezeigt, daß die pNh-Technik sowohl zur Diskretisierung von Kontaktzonen als auch zur starken lokalen Netzverdichtung in kritischen Bereichen der Struktur geeignet ist.

Flanschverbindungen sind als Bestandteile komplexer Rohrleitungssysteme gewöhnlich hohen Beanspruchungen ausgesetzt. Der hier untersuchte Flansch gehört zu einer Tiefbrunnenanlage. Belastet wird der Flansch durch Innendruck, durch aus der Verschraubung resultierende Kräfte sowie durch das relativ hohe Eigengewicht der anschließenden Rohrleitung. Dadurch liegt zwischen Flansch und Dichtung ein Kontaktproblem vor.

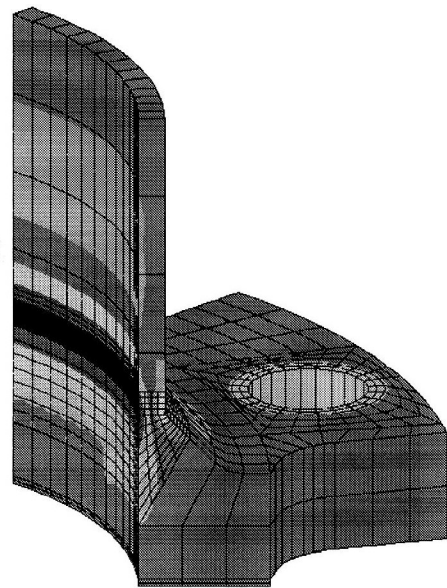
Zunächst wurden mit einem vereinfachten rotationssymmetrischen Modell Variantenrechnungen zur Gestaltung des Kontaktgebietes vorgenommen. Bei Belastung des Flansches kommt es auf der Innenseite zum Abheben und folglich zu einer schlechten Abdichtung (Bild 9). Es wurden deshalb Modelle mit angeschrägten Dichtungsflächen untersucht. Ziel war es, einen Anfangsspalt zwischen Flansch und Dichtung so zu dimensionieren, daß bei Betriebslast im gesamten Gebiet Kontakt vorliegt (Berger, 1995).

Unter Ausnutzung der Symmetriebedingungen läßt sich das 3D-Berechnungsmodell auf $\frac{1}{8}$ des Flansches reduzieren. Infolge der geometrischen Details ist dennoch ein recht stark strukturiertes FE-Netz erforderlich. Nach einer ersten Rechnung mit einem groben Startnetz sind die Bereiche lokalisiert worden, in denen eine Netzverdichtung notwendig ist.

Bild 8b zeigt im dreidimensionalen FE-Modell des Flansches den Zugspannungsverlauf in axialer Richtung unter Betriebslast. Man erkennt, daß durch die Netzverdichtung der Spannungsverlauf im Übergangsbereich detailliert wiedergegeben wird. Würde man beispielsweise hier auf die Lokalisierung der Verfeinerung mittels pNh-Technik verzichten, dann wird durch automatische Netzgenerierung für die Struktur ein FE-Netz mit ≈ 42000 Freiheitsgraden gegenüber den hier entstehenden 11000 Freiheitsgraden generiert. Für eine FE-Berechnung mit COSAR wären dann ca. 2 Gigabyte Speicherplatz erforderlich, statt der hier benötigten 300 Megabyte.



a) Sektormodell



b) Axiale Normalspannungen

Bild 8. 3D-Flanschmodell

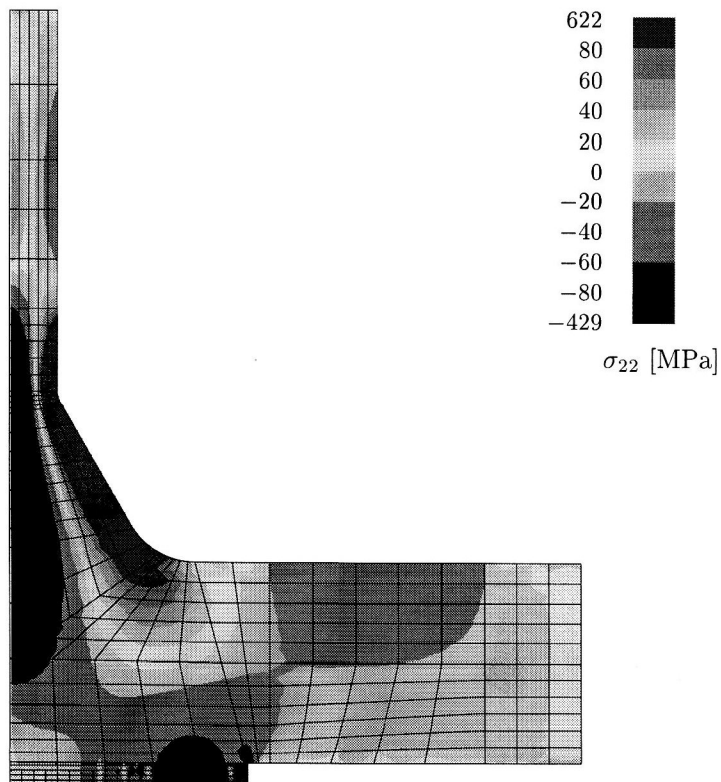


Bild 9: Vereinfachtes rotationssymmetrisches Modell

5 Zusammenfassung

Mit Hilfe des pNh-Elementkonzeptes ist es möglich, eine feine Diskretisierung von Kontakträndern bei grober Vernetzung des übrigen Berechnungsgebietes vorzunehmen. Die Spannungswiedergabe der anschließenden Struktur wird durch einen Belastungssprung in den pNh-Elementen nicht verfälscht. Besonders vorteilhaft ist die Kopplung höherwertiger mit linearen Elementen. Dadurch kann beispielsweise die Kontaktiteration mit h-Elementen linearer Ansatzordnung durchgeführt werden, wogegen das übrige Bauteil selbst günstiger mit höherwertigen Elementen erfaßt wird. Die Beispielrechnungen zeigen aber auch, daß die praktische Anwendung des pNh-Elementkonzeptes wesentlich von der Bereitstellung geeigneter Pre- und Postprozessoren abhängt.

Literatur

1. Altenbach, J.; Égert, J.; Páczelt, I.: Lösung ebener und rotationssymmetrischer elastischer Kontaktaufgaben mit Hilfe spezieller finiter Elemente. ZAMM, 70, (1990), 71–75.
2. Bathe, K. J.; Chaudary, A.: A solution method for planar and axisymmetric contact problems. Int. J. Num. Meth. Engng. 21, (1985), 65–88.
3. Beitz, W.; Küttner, K. H.: Dubbel – Taschenbuch für den Maschinenbau. Springer-Verlag, (1990).
4. Berger, H., Gabbert, U., Zehn, M.: Untersuchungen zum Kontaktverhalten Flansch-Dichtung bei konstruktiver Veränderung der Dichtungsfläche des Flansches. Arbeitsbericht, FEMCOS-GmbH, (1995).
5. Buczkowski, R.: Inkrementelle Finite-Elemente-Modellierung des Kontaktproblems mit Berücksichtigung der nichtlinearen Eigenschaften der Kontaktzone. Dissertation, TU Magdeburg, (1989).
6. Buczkowski, R.; Kleiber, M.; Gabbert, U.: On linear and higher order standard finite elements for 3D-nonlinear contact problems. Comp. & Struct. 53, (1994), 817–823.
7. Crisfield, M. A.: A review of contact and friction in finite element analysis. NAFEMS, Finite Element Methods & Standards, R0022, (1992).
8. Égert, J.: Lösung von ebenen und räumlichen Kontaktproblemen mit Hilfe spezieller finiter Kontaktelemente. Dissertation, TU Magdeburg, (1991).
9. Feldmann, H.: Spannungsberechnung an Gewinden von Schraube-Mutter-Verbindungen mittels der Methode der finiten Elemente. Dissertation, TH Braunschweig, (1981).
10. Gabbert, U.: Die Finite-Element-Methode in den Ingenieurwissenschaften unter dem Aspekt der rechentechnischen Realisierung im Rahmen universeller Programmsysteme. Habilitation, TU Magdeburg, (1987).
11. Galin, L. A.: Kontaktnie sadatschi v teorii uprugosti i vjaskouprugosti. Verlag Nauka, Moskau, (1980).
12. Goodman, R. E.; Taylor, R. L.; Brekke, T. L.: A model for the mechanics of jointed rock. Journ. Soil Mech. and Found. 94, (1968), 637–659.
13. Graeff-Weinberg, K.: Ein Finite-Element-Konzept zur lokalen Netzverdichtung und seine Anwendung auf Koppel- und Kontaktprobleme. Dissertation, Universität Magdeburg, (1996).
14. Graeff-Weinberg, K.; Berger, H.: Ein neues FE-Konzept zur Kopplung inkompatibler Vernetzungen. Technische Mechanik 15, (1995), 215–227.
15. Hinzmann, D.: Beitrag zur Berechnung des Kontaktproblems mit Reibung mittels der Methode der finiten Elemente. Dissertation, TH Braunschweig, (1980).
16. Johnson, K. L.: Contact mechanics. Cambridge University Press, (1987).
17. Keuser, M.: Verbundelemente für nichtlineare Finite-Element-Berechnungen von Stahlbaukonstruktionen. VDI Fortschrittberichte, Reihe 4, Bauingenieurwesen Nr. 71, (1985).
18. Ladra, U.: Realisierung von 3D-Kontaktalgorithmen in COSAR. Großer Beleg, Institut für Mechanik, TU Magdeburg, (1993).

19. Mazurkiewicz, M.; Ostachowicz, W.: Theory of finite element method for elastic contact of solid bodies. *Comp. & Struct.* 17, (1983), 51–59.
20. Mehlhorn, G.; Kolleger, J.; Keuser, M.; Kolmar, W.: Nonlinear contact problems – A finite element approach implemented in ADINA. *Comp. & Struct.* 21, (1985), 69–80.
21. Mottershead, J. E.: Finite element analysis of contact and friction – A survey. *NAFEMS, Finite Element Methods & Standards*, R0025, (1992).
22. Mottershead, J. E.: Lagrange multiplier formulation for FEM. In M. H. Ahabadi und C. A. Brebbia, Hrsg., *Computational Methods in Contact Mechanics*. Elsevier Applied Science Publishers, (1993).
23. Mußchelischwili, N. I.: Einige Grundaufgaben zur mathematischen Elastizitätstheorie. Fachbuchverlag Leipzig, (1971).
24. Nour-Omid, B.; Wriggers, P.: A note on the optimal choice of penalty parameters. *Communications in Applied Numerical Methods* 3, (1987), 581–585.
25. Simo, J. C.; Laursen, T. A.: On the formulation and numerical treatment of finite deformation frictional contact problems. In P. Wriggers und W. Wagner, Hrsg., *Nonlinear Computational Methodes*, Springer-Verlag, (1991).
26. Simo, J. C.; Wriggers, P.; Taylor R. L.: A perturbed lagrangian formulation for the finite element solution of contact problems. Report No. UCB/SESM-84/14, Department of Civil Engineering, Univ. of California, Berkeley, (1984).
27. Stadter, J. T.; Weiss, R. O.: Analysis of contact through finite element gaps. *Comp. & Struct.* 10, (1979), 867–873.
28. Wriggers, P.; Imhof, M.: On the treatment of unilateral contact problems. *Archive of Applied Mechanics* 63, (1993), 116–129.
29. Zienkiewicz, O. C.; Taylor, R. L.: *The Finite Element Method. Vol. 1: Basic Formulation and Linear Problems*. McGraw-Hill Book Company, (1989).

Anschrift: Dr.-Ing. K. Graeff-Weinberg, Dr.-Ing. H. Berger, Institut für Mechanik, Otto-von-Guericke-Universität, Postfach 4120, D-39016 Magdeburg