TECHNISCHE MECHANIK, Band 16, Heft 3, (1996), 227-236
Manuskripteingang: 19. April 1996

Ableitung der Gleichungen von Maggi für nichtholonome Systeme aus dem zweiten Newtonschen Gesetz

M. P. Juschkov

Ziel der Arbeit ist eine Ableitung der Maggischen Gleichungen aus dem zweiten Newtonschen Gesetz. Diese Gleichungen sind die allgemeinsten Gleichungen der nichtholonomen Mechanik, sie fordern keine Beschränkungen für die nichtholonomen Bedingungsgleichungen, welche sogar nichtlinear sein können. Mit den Maggischen Gleichungen kann man nicht nur die Bewegung des Systems untersuchen, sondern auch die Zwangskräfte leicht bestimmen. Als ein Beispiel der Theorie ist in der Arbeit das einfache Modell der Bewegung eines Automobils untersucht worden.

1 Geometrische Darstellung des Reaktionsvektors für nichtholonome Bindung bei Bewegung eines materiellen Punktes

Nehmen wir ein rechtwinkliges Koordinatensystem $Ox_1x_2x_3$ mit den Einheitsvektoren $\mathbf{i_1}, \mathbf{i_2}, \mathbf{i_3}$. Es sei ein Punkt mit der Masse m bewegt, wobei es jedoch eine nichtholonome Bindungsgleichung gibt.

$$\varphi(t, x, \dot{x}) = 0 \tag{1}$$

Auf den Punkt wirkt eine Kraft $\mathbf{F} = X_k \mathbf{i}_k$, $k = 1, 2, 3$. Hier und im weiteren gelte die Summationsvereinbarung. Für unseren gebundenen Massenpunkt kann man die Bewegungsgleichung schreiben:

$$m\mathbf{w} = \mathbf{F} + \mathbf{R} \tag{2}$$

Untersuchen wir eine geometrische Darstellung des Reaktionsvektors $\mathbf{R} = R_k \mathbf{i}_k$ für eine nichtholonome Bindung.

Statt Gleichung (1) bekommen wir

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\dot{x}_k + \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{x}_k}\ddot{x}_k = 0 \tag{3}$$

Wir kennen den Vektor $\boldsymbol{\nabla}\varphi = (\partial\varphi/\partial x_k)\mathbf{i}_k$. Poljachov (1972) hat noch einen neuen Vektor

$$\boldsymbol{\nabla}'\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{x}_k}\mathbf{i}_k$$

mit in die Betrachtung einbezogen. Mit Hilfe dieses Vektors können wir die Formel (3) folgendermaßen schreiben:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\varphi \cdot \mathbf{v} + \boldsymbol{\nabla}'\varphi \cdot \mathbf{w} = \mathbf{0} \tag{4}$$

Wir bilden das innere Produkt aus Gleichung (2) mit dem Vektor $\boldsymbol{\nabla}'\varphi$ und multiplizieren die Gleichung (4) mit der Masse m. Dann bekommen wir

$$\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\nabla}'\varphi = -m\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\varphi \cdot \mathbf{v}\right) - \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\nabla}'\varphi$$

Dann können wir

$$\mathbf{R} = \mathbf{N} + \mathbf{T}_0 \qquad \mathbf{N} = \Lambda \boldsymbol{\nabla}'\varphi \qquad \mathbf{T}_0 \perp \mathbf{N}$$

$$\Lambda = -\frac{m \quad \partial\varphi/\partial t + m\boldsymbol{\nabla}\varphi \cdot \mathbf{v} + \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\nabla}'\varphi}{|\boldsymbol{\nabla}'\varphi|^2} \tag{5}$$

bilden, wobei Λ einen vorläufig unbestimmten Faktor darstellt.

Bemerken wir besonders, daß vom mathematischen Ausdruck der Bindung (1) hier nur der Vektor $\mathbf{N}$ abhängig ist. Im einzelnen können die Gleichungen (1) und (2) rein mathematisch auch bei $\mathbf{T}_0 = 0$ befriedigt werden. Eine derartige nichtholonome Bindung nennen wir eine *ideale Bindung*. Falls $\mathbf{T}_0 \neq 0$ ist, so muß man speziell beschreiben, auf welche Weise der Vektor $\mathbf{T}_0$ entsteht. Für dieses Ziel muß man die weiteren Charakteristiken beschreiben, welche zeigen, wie diese Bindung (1) physikalisch realisiert ist. Gewöhnlich hängt T_0 wesentlich von der Größe N und weniger von $t, x, \dot{x}$ ab.

Analysieren wir jetzt eine holonome Bindung

$$f(t, x) = 0 \tag{6}$$

Aus der Bindung (6) bekommen wir

$$\varphi \equiv \dot{f} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x_k}\dot{x}_k = 0$$

und darum haben wir

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{x}_k} = \frac{\partial f}{\partial x_k}$$

Diese Formeln zeigen, daß für eine holonome Bindung (6) unser Vektor $\boldsymbol{\nabla}'\varphi$ dem gewöhnlichen Vektor $\boldsymbol{\nabla} f$ gleich ist. Hier ist es offenbar, daß der Vektor $\mathbf{N}$ auf der Fläche, welche der Gleichung (6) entspricht, senkrecht steht, und daß der Vektor $\mathbf{T}_0$ in der Tangentenebene zu dieser Fläche liegt. Falls die Bindung (6) wie eine materielle Fläche ausgeführt ist, so haben wir $\mathbf{T}_0 = 0$ nur für eine absolut glatte Fläche. Eine solche holonome Bindung bezeichnen wir als eine *ideale Bindung*. Für den Fall $\mathbf{T}_0 \neq 0$ können wir als Beispiel das Coulombsche Reibungsgesetz erwähnen

$$\mathbf{T}_0 = -k_1 N \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$$

wobei k_1 ein Bremskoeffizient ist, der die Rauhigkeit der materiellen Fläche beschreibt.

Für den zwei Zwangsbedingungen $\varphi^\kappa(t, x, \dot{x}) = 0$, $\kappa = 1, 2$ unterworfenen Punkt können wir die Zwangskraft so darstellen:

$$\mathbf{R} = \mathbf{N} + \mathbf{T}_0 \qquad \mathbf{N} = \Lambda_\kappa \boldsymbol{\nabla}'\varphi^\kappa \tag{7}$$

2 Der darstellende Punkt (ein Punkt, der nach Hertz die Bewegung eines beliebigen Systems von n materiellen Punkten beschreibt und darstellt)

Die Bewegung eines Punktsystems, das die Punkte ν mit den Massen m_ν, $\nu = \overline{1, n}$ hat, sei durch k nichtholonome Bedingungen eingeschränkt. Die Bewegungsgleichungen des Systems lauten

$$m_\nu \ddot{\mathbf{r}}_\nu = \mathbf{F}_\nu + \mathbf{R}_\nu \qquad \nu = \overline{1, n} \tag{8}$$

Der Einfachheit halber werden wir die Vektoren $\mathbf{r}_\nu, \mathbf{v}_\nu, \mathbf{F}_\nu, \mathbf{R}_\nu$, $\nu = \overline{1, n}$ durch die Skalare $x = (x_1, \ldots, x_{3n})$, $\dot{x} = (\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{3n})$, $X = (X_1, \ldots, X_{3n})$, $R = (R_1, \ldots, R_{3n})$ charakterisieren. Hier steht speziell eine durchgehende Numerierung. Zum Beispiel ist x_μ bei $\mu = 3(\nu - 1) + j$, wo $\nu = \overline{1, n}$, $j = 1, 2, 3$, eine

Axialkomponente des Ortsvektors $\mathbf{r}_\nu$ ($\nu = \overline{1,n}$) auf die Achse mit der Nummer j ($j = 1,2,3$). Führen wir noch die Bezeichnungen $m_\mu = m_\nu$ ein, wenn $\nu = \overline{1,n}$ und $\mu = 3\nu - 2,\, 3\nu - 1, 3\nu$ sind, dann können wir die folgenden skalaren Gleichungen statt der Vektorgleichungen (8) schreiben:

$$m_\mu \ddot{x}_\mu = X_\mu + R_\mu \qquad \mu = \overline{1,3n} \tag{9}$$

Ferner führen wir noch folgende Formeln ein:

$$\begin{aligned} &M = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu = \frac{1}{3}\sum_{\mu=1}^{3n} m_\mu \qquad && \tilde{m}_\mu = \frac{m_\mu}{M} \\ &y_\mu = \sqrt{\tilde{m}_\mu}\, x_\mu \qquad Y_\mu = \frac{X_\mu}{\sqrt{\tilde{m}_\mu}} \qquad && R'_\mu = \frac{R_\mu}{\sqrt{\tilde{m}_\mu}} \end{aligned} \tag{10}$$

Dann kann man das System (9) so darstellen:

$$M\ddot{y}_\mu = Y_\mu + R'_\mu \qquad \mu = \overline{1,3n} \tag{11}$$

Betrachten wir einen Raum mit senkrechten Achsen $y_1, \ldots, y_{3n}$, für den die Einheitsvektoren $\mathbf{j}_1, \ldots, \mathbf{j}_{3n}$ gelten. In diesem Raum kann man die Vektoren

$$\mathbf{y} = y_\mu \mathbf{j}_\mu \qquad \mathbf{V} = \dot{y}_\mu \mathbf{j}_\mu \qquad \mathbf{W} = \ddot{y}\mathbf{j}_\mu \qquad \mathbf{Y} = Y_\mu \mathbf{j}_\mu \qquad \mathbf{R}' = R'_\mu \mathbf{j}_\mu$$

einführen. Dann können wir statt der skalaren Gleichungen (11) folgende Vektorgleichung schreiben:

$$M\mathbf{W} = \mathbf{Y} + \mathbf{R}' \tag{12}$$

Diese Gleichung betrachten wir in unserem neuen Raum als eine Analogie zum zweiten Newtonschen Gesetz, wenn sich ein Punkt mit der Masse M unter der Wirkung der eingeprägten Kraft $\mathbf{Y}$ und unter der Wirkung der Zwangskraft $\mathbf{R}'$, welche aus den nichtholonomen Bindungen

$$\varphi^\kappa(t, y, \dot{y}) = 0 \qquad \kappa = \overline{1,k} \tag{13}$$

entsteht, bewegt. Den Vektor $\mathbf{R}'$ kann man in folgender Form darstellen:

$$\mathbf{R}' = \mathbf{N} + \mathbf{T}_0 \qquad \mathbf{N} = \Lambda_\kappa \boldsymbol{\nabla}'\varphi^\kappa \qquad \mathbf{T}_0 \perp \mathbf{N} \tag{14}$$

Das ist eine Analogie zu den Formeln (5) und (7). Dieser Punkt mit der Masse M, den wir in den Raum, der die Dimension $3n$ hat, eingeführt haben, bezeichnen wir als den *darstellenden Punkt.* Falls wir seine Bewegung, die den Bedingungen (13) unterworfen ist, kennen, so kennen wir auch mit den Formeln (10) die Bewegung des Punktsystems im gewöhnlichen Raum, der die Dimension 3 hat.

3 Die Bewegungsgleichungen des holonomen Systems. Die Idealität der holonomen Bindungen

Die Bewegung eines darstellenden Punktes wird durch die holonomen Bedingungen

$$f^\kappa(t, y) = 0 \qquad \kappa = \overline{1,k} \tag{15}$$

eingeschränkt. Falls diese Bedingungen ideal sind, so wie die Formeln (14) dies verlangen, dann ist die Vektorgleichung der Bewegung des Punktes

$$M\mathbf{W} = \mathbf{Y} + \Lambda_\kappa \boldsymbol{\nabla} f^\kappa \tag{16}$$

Führen wir verallgemeinerte Koordinaten q^σ, $\sigma = \overline{1,3n}$ ein, dann hat dieses Koordinatensystem die Grundbasis $\mathbf{e}_\sigma = \partial\mathbf{y}/\partial q^\sigma$, $\sigma = \overline{1,3n}$. Wir wählen die Koordinaten q^λ, $\lambda = \overline{1,l}$, $l = 3n - k$ willkürlich, und die anderen Koordinaten setzen wir fest als

$$q^{l+\kappa} = f^\kappa(t,y) \qquad \kappa = \overline{1,k} \tag{17}$$

Falls $q^{l+\kappa} = 0$, $\kappa = \overline{1,k}$, so werden die Bedingungen (15) befriedigt.

Es ergibt sich

$$\nabla f^\kappa \cdot \mathbf{e}_\sigma = \frac{\partial f^\kappa}{\partial y_\mu}\frac{\partial y_\mu}{\partial q^\sigma} = \frac{\partial q^{l+\kappa}}{\partial y_\mu}\frac{\partial y_\mu}{\partial q^\sigma} = \begin{cases} 0, & \sigma \neq l+\kappa \\ 1, & \sigma = l+\kappa \end{cases}$$

Multiplizieren wir die Gleichung (16) mit den Vektoren $\mathbf{e}_\sigma$, $\sigma = \overline{1,3n}$, dann bekommen wir

$$MW_\lambda \equiv \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\lambda} - \frac{\partial T}{\partial q^\lambda} = Q_\lambda \qquad \lambda = \overline{1,l} \tag{18}$$

$$MW_{l+\kappa} \equiv \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^{l+\kappa}} - \frac{\partial T}{\partial q^{l+\kappa}} = Q_{l+\kappa} + \Lambda_\kappa \qquad \kappa = \overline{1,k}. \tag{19}$$

Die Gleichungen (18) sind die Lagrangeschen Gleichungen zweiter Art. Sie bestimmen die Funktionen $q^\lambda(t)$, $\lambda = \overline{1,l}$. Danach können wir aus den Gleichungen (19) die allgemeinen Zwangskräfte Λ_κ, $\kappa = \overline{1,k}$, erhalten. Da wir die Formeln (17) haben, so sind die Vektoren der Dualbasis

$$\mathbf{e}^{l+\kappa} = \nabla f^\kappa \qquad \kappa = \overline{1,k}$$

Darum bemerken wir nach Gleichungen (18) und (19), daß wir im Raum $''L''$ mit der Basis $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_l\}$ die Bewegung untersuchen können und daß sich im Raum $''K''$ mit der Basis $\{\mathbf{e}^{l+1}, \ldots, \mathbf{e}^{3n}\}$, welcher auf dem vorigen Raum $''L''$ senkrecht steht, die allgemeinen Zwangskräfte befinden.

Wir zeigen jetzt, wie man die Idealität der holonomen Bindungen auch von anderer Seite beschreiben kann. Bei unseren zwei Räumen haben wir für die Beschleunigung folgende Formeln:

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}_L + \mathbf{W}^K \qquad \mathbf{W}_L = W_L^\lambda \mathbf{e}_\lambda \qquad \mathbf{W}^K = W_{l+\kappa}^K \mathbf{e}^{l+\kappa} \qquad \mathbf{W}_L \cdot \mathbf{W}^K = 0$$

Dann schreiben wir statt einer Gleichung (12) zwei Gleichungen

$$M\mathbf{W}_L = \mathbf{Y}_L + \mathbf{R}'_L \tag{20}$$

$$M\mathbf{W}^K = \mathbf{Y}^K + \mathbf{R}'^K \tag{21}$$

Unsere Basis $\{\mathbf{e}^{l+1}, \ldots, \mathbf{e}^{3n}\}$ bekommen wir aus den Bedingungsgleichungen, und dabei haben wir $\mathbf{R}'^K \equiv \mathbf{N} = \Lambda_\kappa \nabla f^\kappa$. Nach der Formel (15) ergibt sich

$$q^{l+\kappa} = \dot{q}^{l+\kappa} = \ddot{q}^{l+\kappa} = 0 \qquad \kappa = \overline{1,k}$$

und darum, falls wir die Funktionen $q^\lambda(t)$, $\lambda = \overline{1,l}$ kennen, kennen wir auch die Beschleunigung $\mathbf{W}^K$, weil für die Komponenten gilt

$$W_{l+\kappa}^K = g_{l+\kappa,\sigma}\ddot{q}^\sigma + \Gamma_{l+\kappa,\alpha\beta}\dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta \qquad \alpha, \beta = \overline{0,3n} \qquad q^0 = t \qquad \dot{q}^0 = 1$$

Gerade dieser Vektor $\mathbf{W}^K$ ergibt die Zwangskraftkomponente $\mathbf{R}'^K$ bei der bekannten Kraft $\mathbf{Y}$. Anders ist es für den Vektor $\mathbf{W}_L$ in der Gleichung (20). Hier erscheint die Zwangskraftkomponente $\mathbf{R}'_L = \mathbf{T}_0$, welche von den Gleichungen (15) unabhängig ist. Die Gleichung (20) kann man bei jedem beliebigen Vektor $\mathbf{R}'_L$ befriedigen, sogar auch bei $\mathbf{R}'_L = \mathbf{0}$. In diesem Fall ist der Vektor $\mathbf{W}_L$ (welcher senkrecht auf dem Vektor $\mathbf{W}^K$ steht) unabhängig von den holonomen Bedingungen und die Bewegungsgleichung hat eine Form wie bei der freien Bewegung.

$$M\mathbf{W}_L = \mathbf{Y}_L \tag{22}$$

Also können wir auch sagen, daß die holonomen Bedingungen dann ideal sind, wenn sie den Vektor $\mathbf{W}_L$ nicht beeinflussen.

4 Die Bewegungsgleichungen des nichtholonomen Systems. Die Idealität der nichtholonomen Bindungen

Gegeben seien die nichtholonome Bedingungen

$$\varphi^\kappa(t, q, \dot{q}) = 0 \qquad \kappa = \overline{1,k} \qquad q = (q^1, \ldots, q^{3n}). \tag{23}$$

Nehmen wir statt der Veränderlichen $\dot{q} = (\dot{q}^1, \ldots, \dot{q}^{3n})$ die neuen Veränderlichen $v_* = (v_*^1, \ldots, v_*^{3n})$

$$v_*^\rho = v_*^\rho(t, q, \dot{q}) \qquad \rho = \overline{1,3n} \tag{24}$$

Setzen wir voraus, daß eine Umkehrung existiere

$$\dot{q}^\sigma = \dot{q}^\sigma(t, q, v_*) \qquad \sigma = \overline{1,3n} \tag{25}$$

Nehmen wir ferner an, daß die Ableitungen der Funktionen (24) und (25) stetig sind. Dann können wir zwei Systeme linear unabhängiger Vektoren einführen.

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\tau = \frac{\partial \dot{q}^\sigma}{\partial v_*^\tau}\mathbf{e}_\sigma \qquad \boldsymbol{\varepsilon}^\rho = \frac{\partial v_*^\rho}{\partial \dot{q}^\tau}\mathbf{e}^\tau \tag{26}$$

Für diese Vektoren gilt

$$\boldsymbol{\varepsilon}^\rho \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_\tau = \frac{\partial v_*^\rho}{\partial \dot{q}^\sigma}\frac{\partial \dot{q}^\sigma}{\partial v_*^\tau} = \delta_\tau^\rho = \begin{cases} 0 & \rho \neq \tau \\ 1 & \rho = \tau \end{cases}$$

Darum können wir diese Vektoren als die Vektoren der Grundbasis und der Dualbasis verwenden. Bezeichnen wir diese Basen als *nichtholonome Basen.*

Setzen wir solche letzten Veränderlichen in den Formeln (24) ein

$$v_*^{l+\kappa} = \varphi^\kappa(t, q, \dot{q}) \qquad l = 3n - k \qquad \kappa = \overline{1,k} \tag{27}$$

Es sei bemerkt, daß dann bei den Bedingungen (23) gilt

$$v_*^{l+\kappa} = 0 \qquad \kappa = \overline{1,k}$$

Außerdem haben wir

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{l+\kappa} = \frac{\partial \varphi^\kappa}{\partial \dot{q}^\tau}\mathbf{e}^\tau \equiv \boldsymbol{\nabla}'\varphi^\kappa \qquad \kappa = \overline{1,k}$$

Führen wir zwei zueinander senkrechte Räume $''L''$ und $''K''$ mit den nichtholonomen Basen $\{\boldsymbol{\varepsilon}_1, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}_l\}$ und $\{\boldsymbol{\varepsilon}^{l+1}, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}^{3n}\}$ in die Betrachtung ein, dann können wir die Beschleunigung so darstellen:

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}_L + \mathbf{W}^K \qquad \mathbf{W}_L = W_L^\lambda \boldsymbol{\varepsilon}_\lambda \qquad \mathbf{W}^K = W_{l+\kappa}^K \boldsymbol{\varepsilon}^{l+\kappa} \qquad \mathbf{W}_L \cdot \mathbf{W}^K = 0$$

Entsprechend diesem kann man statt der Gleichung (12) zwei Gleichungen in den Formen (20) und (21) schreiben. Aber man muß bedenken, daß wir jetzt für die Räume $''L''$ und $''K''$ zwei nichtholonome Basen haben.

Den Vektor $\mathbf{W}^K$ kann man aus inneren Produkten finden.

$$\mathbf{W} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{l+\kappa} = (\ddot{q}^\sigma + \Gamma^\sigma_{\alpha\beta}\dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta)\frac{\partial \varphi^\kappa}{\partial \dot{q}^\sigma} \qquad \kappa = \overline{1,k}$$

Darum bekommen wir folgendes: Wir kennen den Vektor $\mathbf{W}^K$, wenn wir die Bedingungsgleichungen (23) und alle Funktionen $q^\sigma = q^\sigma(t)$, $\sigma = \overline{1,3n}$ kennen. Wie wir aus der Gleichung (20) ersehen, bekommen wir diesen Vektor $\mathbf{W}^K$ (bei der Wirkung der Kraft $\mathbf{Y}$) mit Hilfe der Zwangskraft $\mathbf{R}'^K = \mathbf{N} = \Lambda_\kappa \boldsymbol{\nabla}' \varphi^\kappa$. Im Unterschied zu diesem ist der Vektor $\mathbf{W}_L$ von den nichtholonomen Bindungsgleichungen unabhängig. Die Beschleunigungskomponente kann man aus der Gleichung (20) bei beliebigem Vektor $\mathbf{R}'_L$ bekommen. Im einzelnen kann man $\mathbf{R}'_L = 0$ haben, und in diesem Fall hat die Bewegungsgleichung eigentlich die Form (22). Falls die nichtholonomen Bindungen (23) die Beschleunigungskomponente $\mathbf{W}_L$ nicht beeinflussen, so können wir solche Bindungen *ideale nichtholonome Bindungen* nennen. Für diese Bindungen haben wir $\mathbf{R}'_L \equiv \mathbf{T}_0 = 0$, und darum ist

$$\mathbf{R}' = \mathbf{R}'^K = \mathbf{N} = \Lambda_\kappa \boldsymbol{\nabla}' \varphi^\kappa$$

Bilden wir das innere Produkt des zweiten Newtonschen Gesetzes

$$M\mathbf{W} = \mathbf{Y} + \Lambda_\kappa \boldsymbol{\nabla}' \varphi^\kappa$$

mit den Vektoren $\boldsymbol{\varepsilon}_\lambda$, $\lambda = \overline{1,l}$, dann bekommen wir die Bewegungsgleichungen für das ideale nichtholonome System.

$$(MW_\sigma - Q_\sigma)\frac{\partial \dot{q}^\sigma}{\partial v_*^\lambda} = 0 \qquad \lambda = \overline{1,l} \tag{28}$$

Diese Gleichungen hat Maggi 1901 für lineare nichtholonome Bindungen aufgestellt. Später hat Przeborski (1931) den Fall der nichtlinearen nichtholonomen Bedingungen mit Hilfe des verallgemeinerten D'Alembert–Lagrangeschen Prinzips betrachtet.

Falls uns die Anfangsbedingungen bekannt sind, können wir die Gleichungen (23) und (28) lösen.

$$q^\sigma = q^\sigma(t) \qquad \sigma = \overline{1,3n} \tag{29}$$

Es sei nebenbei bemerkt, daß die Erhaltung des Bewegungsgesetzes (29) zeigt, daß wir durch die Wahl der Anfangsbedingungen einen beliebigen Zustand des Systems bekommen können. Das bedeutet, daß sich bei Einführung der nichtholonomen Bedingungen die Anzahl der Freiheitsgrade des Systems nicht verändert. Darum ist es nicht gut, für das nichtholonome System Beschränkungen der virtuellen Verrückungen einzuführen. Besser wäre es zu sagen, daß die nichtholonomen Bedingungen den virtuellen Geschwindigkeiten gewisse Beschränkungen auferlegen.

Bilden wir das innere Produkt des zweiten Newtonschen Gesetzes mit den Vektoren $\boldsymbol{\varepsilon}_{l+\kappa}$, $\kappa = \overline{1,k}$, dann bekommen wir die andere Gruppe der Maggischen Gleichungen.

$$(MW_\sigma - Q_\sigma)\frac{\partial \dot{q}^\sigma}{\partial v_*^{l+\kappa}} = \Lambda_\kappa \qquad \kappa = \overline{l,k} \tag{30}$$

Bei bekannter Bewegung (29) ergeben diese Gleichungen die verallgemeinerten Zwangskräfte Λ_κ der nichtholonomen Bindungen (23).

Also können wir behaupten, daß wir bei idealen nichtholonomen Bedingungen den $''L''$-Raum und den $''K''$-Raum haben. Der $''L''$-Raum ist ein Bewegungsraum, und der $''K''$-Raum ist ein Zwangskräfteraum. Diese Räume stehen senkrecht aufeinander, und man kann die Bewegung und die Zwangskräfte mit Hilfe der Gleichungen (28) und (30) untersuchen.

Falls wir statt eines Punktsystems ein allgemeines mechanisches System mit dem Freiheitgrad $''s''$ der Bewegung haben, so muß man die generalisierten Koordinaten $q^1, \ldots, q^s$ einführen und in allen Formeln statt $''3n''$ überall $''s''$ einsetzen.

Die Maggischen Gleichungen sind die allgemeinsten Gleichungen der nichtholonomen Mechanik, sie fordern keine Beschränkungen für die nichtholonomen Bedingungsgleichungen, welche sogar nichtlinear sein können. Es sei betont, daß man für ein konkretes mechanisches System die Maggischen Gleichungen etwa so leicht wie die Lagrangeschen Gleichungen aufstellen kann. In der Tat haben wir folgende Ausdrücke

$$MW_\sigma - Q_\sigma \equiv \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\sigma} - \frac{\partial T}{\partial q^\sigma} - Q_\sigma \qquad \sigma = \overline{1, s}$$

und dazu müssen wir nur noch die Formeln (24) und (27) einführen, die Umkehrung (25) suchen und die Ableitungen $\partial \dot{q}^\sigma / \partial v_*^\tau$, $\sigma, \tau = \overline{1, s}$ bilden.

5 Automobil-Bewegungsgleichungen und die Zwangskräfte der nichtholonomen Bedingungen

Als Beispiel für die Theorie untersuchen wir die Bewegung eines Automobils (Bild 1). Der Körper und die vordere Achse haben die Massen M_1 und M_2. Die Trägheitsmomente bezüglich der vertikalen Achsen sind J_1 und J_2. In Längsrichtung des Körpers wirkt eine aktive Kraft $F_1(t)$, und eine Widerstandskraft F_2 ist entgegen der Geschwindigkeit $\mathbf{v}_C$ des Schwerpunktes des Körpers gerichtet. Die vordere Achse kann sich unter der Wirkung des Drehmomentes $\mathcal{L}_1(t)$ und des Widerstandsmomentes $\mathcal{L}_2$ um die vertikale Achse im Schwerpunkt A drehen. Wir vernachlässigen die Drehung der Räder.

Bilden wir jetzt die Maggischen Gleichungen dieses Systems. Der Wagen bewegt sich in der horizontalen Ebene, in welcher es ein unbewegtes Koordinatensystem Oxy gibt. Führen wir folgende verallgemeinerte Koordinaten ein: $q^1 = \varphi$ — ein Winkel zwischen der Körperlängsachse und der Koordinatenachse Ox, $q^2 = \theta$ — ein Winkel zwischen der Autovorderachse und dem Perpendikel zur Körperlängsachse, $q^3 = x_C$, $q^4 = y_C$ — die Koordinaten des Körperschwerpunktes C.

Es gibt zwei nichtholonome Bedingungen, welche zeigen, daß der Wagen sich nicht längs der vorderen und hinteren Autoachsen bewegt.

$$-\dot{x}_B \sin\varphi + \dot{y}_B \cos\varphi = 0$$

$$-\dot{x}_A \sin(\varphi + \theta) + \dot{y}_A \cos(\varphi + \theta) = 0$$

Hier sind x_A, y_A, x_B, y_B die Koordinaten der Schwerpunkte der vorderen und hinteren Wagenachse. Ihre Abstände vom Körperschwerpunkt sind l_1 und l_2. Darum können wir die nichtholonomen Bedingungen auch folgendermaßen schreiben:

$$\begin{aligned} &-\dot{x}_C \sin\varphi + \dot{y}_C \cos\varphi - l_2\dot{\varphi} = 0 \\ &-\dot{x}_C \sin(\varphi + \theta) + \dot{y}_C \cos(\varphi + \theta) + l_1\dot{\varphi}\cos\theta = 0 \end{aligned} \tag{31}$$

Wir führen nun neue Veränderliche ein (siehe Formeln (24) und (27))

$$v_*^1 = \dot{\varphi} \qquad v_*^2 = \dot{\theta}$$

$$v_*^3 = -l_2\dot{\varphi} - \dot{x}_C \sin\varphi + \dot{y}_C \cos\varphi \qquad v_*^4 = l_1\dot{\varphi}\cos\theta - \dot{x}_C \sin(\varphi + \theta) + \dot{y}_C \cos(\varphi + \theta)$$

und bilden die Umkehrungen

$$\dot{q}^1 \equiv \dot{\varphi} = v_*^1 \qquad \dot{q}^2 \equiv \dot{\theta} = v_*^2$$

$$\dot{q}^3 \equiv \dot{x}_C = \beta_1^3 v_*^1 + \beta_3^3 v_*^3 + \beta_4^3 v_*^4 \qquad \dot{q}^4 \equiv \dot{y}_C = \beta_1^4 v_*^1 + \beta_3^4 v_*^3 + \beta_4^4 v_*^4$$

$$\beta_1^3 = (l_1 \cos\varphi \cos\theta + l_2 \cos(\varphi + \theta))/\sin\theta \qquad \beta_3^3 = \cos(\varphi + \theta)/\sin\theta \tag{32}$$

$$\beta_4^3 = -\cos\varphi/\sin\theta \qquad \beta_1^4 = (l_1 \sin\varphi \cos\theta + l_2 \sin(\varphi + \theta))/\sin\theta$$

$$\beta_3^4 = \sin(\varphi + \theta)/\sin\theta \qquad \beta_4^4 = -\sin\varphi/\sin\theta$$

Die kinetische Energie T des Systems hat die Form

$$2T = M^*(\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2) + J^*\dot{\varphi}^2 + J_2\dot{\theta}^2 + 2J_2\dot{\varphi}\dot{\theta} + 2M_2 l_1 \dot{\varphi}(-\dot{x}_C \sin\varphi + \dot{y}_C \cos\varphi)$$

$$\text{mit} \qquad M^* = M_1 + M_2 \qquad \text{und} \qquad J^* = J_1 + J_2 + M_2 l_1^2 \tag{33}$$

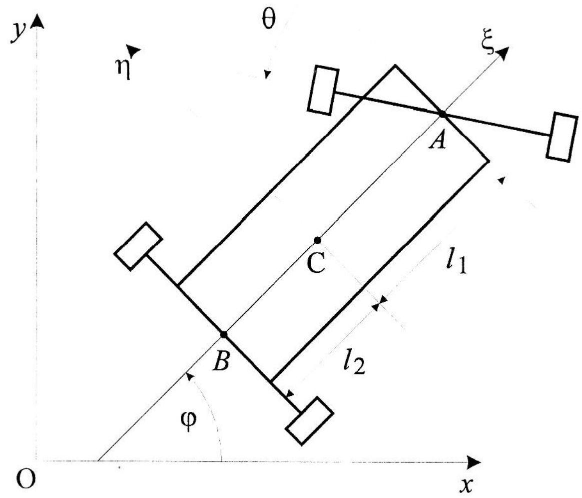

Bild 1. Ein nichtholonomes System

Die allgemeinen Kraftkomponenten, die auf das System wirken, kann man so darstellen:

$$Q_1 \equiv Q_\varphi = 0$$

$$Q_2 \equiv Q_\theta = \mathcal{L}_1(t) - \mathcal{L}_2$$

$$Q_3 \equiv Q_{x_C} = F_1(t)\cos\varphi - F_2\dot{x}_C/v_C \tag{34}$$

$$Q_4 \equiv Q_{y_C} = F_1(t)\sin\varphi - F_2\dot{y}_C/v_C$$

$$v_C = \sqrt{\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2}$$

Wir schreiben nun die erste Maggische Gleichung für unseren Fall als

$$(MW_1 - Q_1)\frac{\partial \dot{q}^1}{\partial v_*^1} + (MW_3 - Q_3)\frac{\partial \dot{q}^3}{\partial v_*^1} + (MW_4 - Q_4)\frac{\partial \dot{q}^4}{\partial v_*^1} = 0 \tag{35}$$

Die zweite Maggische Gleichung fällt mit der Lagrangeschen Gleichung zweiter Art zusammen, weil die nichtholonomen Bedingungen (31) von der Geschwindigkeit $\dot{\theta}$ unabhängig sind.

$$MW_2 - Q_2 = 0 \tag{36}$$

Die Ausdrücke MW_σ kann man durch die kinetische Energie T nach den folgenden Formeln berechnen:

$$MW_\sigma = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\sigma} - \frac{\partial T}{\partial q^\sigma} \qquad \sigma = \overline{1,4}$$

Nach den Formeln (32) bis (34) schreiben wir die Wagenbewegungsgleichungen (35) und (36) folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
&[J^* + M_2 l_1(\beta_1^4 \cos\varphi - \beta_1^3 \sin\varphi)]\ddot{\varphi} + J_2\ddot{\theta} + (M^*\beta_1^3 - M_2 l_1 \sin\varphi)\ddot{x}_C + (M^*\beta_1^4 + M_2 l_1 \cos\varphi)\ddot{y}_C \\
&= M_2 l_1 \dot{\varphi}^2(\beta_1^3 \cos\varphi + \beta_1^4 \sin\varphi) + [F_1(t)\cos\varphi - F_2\dot{x}_C/v_C]\beta_1^3 + [F_1(t)\sin\varphi - F_2\dot{y}_C/v_C]\beta_1^4 \\
&J_2(\ddot{\theta} + \ddot{\varphi}) = \mathcal{L}_1(t) - \mathcal{L}_2
\end{aligned} \tag{37}$$

Falls wir die Anfangsbedingungen und die analytischen Ausdrücke der Funktionen $F_1, \mathcal{L}_1, F_2, \mathcal{L}_2$ kennen, so können wir die nichtlinearen Differentialgleichungen (31) und (37) numerisch lösen. Dann bekommen wir das Bewegungsgesetz des Automobils.

$$\varphi = \varphi(t) \qquad \theta = \theta(t) \qquad x_C = x_C(t) \qquad y_C = y_C(t) \tag{38}$$

Jetzt kann man die allgemeinen Zwangskräfte suchen. Die zweite Gruppe der Maggischen Gleichungen (30) sieht folgendermaßen aus:

$$\Lambda_1 = (MW_3 - Q_3)\frac{\partial \dot{q}^3}{\partial v_*^3} + (MW_4 - Q_4)\frac{\partial \dot{q}^4}{\partial v_*^3}$$

$$\Lambda_2 = (MW_3 - Q_3)\frac{\partial \dot{q}^3}{\partial v_*^4} + (MW_4 - Q_4)\frac{\partial \dot{q}^4}{\partial v_*^4}$$

oder ausführlicher

$$\begin{aligned}
\Lambda_1 = &[M^*\ddot{x}_C - M_2 l_1(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi) - F_1(t)\cos\varphi + F_2\dot{x}_C/v_C]\beta_3^3 \\
&+ [M^*\ddot{y}_C + M_2 l_1(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi) - F_1(t)\sin\varphi + F_2\dot{y}_C/v_C]\beta_3^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Lambda_2 = &[M^*\ddot{x}_C - M_2 l_1(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi) - F_1(t)\cos\varphi + F_2\dot{x}_C/v_C]\beta_4^3 \\
&+ [M^*\ddot{y}_C + M_2 l_1(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi) - F_1(t)\sin\varphi + F_2\dot{y}_C/v_C]\beta_4^4
\end{aligned}$$

Setzen wir hier das Bewegungsgesetz (38) ein, dann bekommen wir die Zwangskräfte als Funktionen der Zeit $\Lambda_i = \Lambda_i(t)$, $i = 1, 2$. Diese Funktionen erlauben uns zu erforschen, wann die nichtholonomen Bedingungen (31) erfüllt sind. Falls die Zwangskräfte den Coulombschen Reibungskräften gleich sind, so werden diese Bedingungen nicht befriedigt, und das Automobil kann sich längs seiner Achsen bewegen.

6 Zusammenfassung

Im Artikel werden die Gleichungen von Maggi aus dem zweiten Newtonschen Gesetz hergeleitet. Diese Gleichungen kann man für beliebige nichtholonome Bedingungen erhalten, welche sogar nichtlinear sein können. Die Maggischen Gleichungen lassen sich fast so leicht wie die Lagrangeschen Gleichungen aufstellen, nur muß man zusätzlich von allgemeinen Geschwindigkeiten zu neuen Quasigeschwindigkeiten übergehen, eine Umkehrung bilden und die erhaltenen Funktionen differenzieren. Bei idealen nichtholonomen Bedingungen bekommen wir zwei Gruppen Maggischer Gleichungen. Falls wir die Anfangsbedingungen kennen, so lösen wir numerisch die erste Gruppe von Differentialgleichungen zusammen mit den Bedingungsgleichungen und bekommen so das Bewegungsgesetz des mechanischen Systems. Danach berechnen wir aus der zweiten Gruppe der Maggischen Gleichungen die allgemeinen Zwangskräfte als Funktionen der Zeit. Als Beispiel dieser Theorie wurde ein einfaches Modell der Bewegung des Automobils untersucht. Es sind die Bewegungsgleichungen und die allgemeinen Zwangskräfte dargestellt. Falls bei der Bewegung die Zwangskräfte den Coulombschen Reibungskräften gleich werden, so kann das Automobil längs seiner vorderen und hinteren Achse gleiten.

Literatur

1. Bulgakov B.W.: Schwingungen. Moskau, (1954), S. 892., (russ.)
2. Maggi G.A.: De alcune nuove forme delle equazioni della dinamica. Applicabil ai sistemi aholonomi. Atti della Reale Acad. Naz. dei Lincei, Vol. 10, Ser. 5, (1901), 287 - 292
3. Poljachov N.N.: Bewegungsgleichungen des mechanischen Systems bei nichtlinearen nichtholonomen Bedingungen im allgemeinen Fall. Westnik Leningradskogo Universitäta, Nr. 1, Wipusk 1, (1972), 124 - 132, (russ.)
4. Poljachov N.N.: Über Differentialprinzipien der Mechanik, welche aus den Bewegungsgleichungen eines nichtholonomen Systems erhalten werden können. Westnik Leningradskogo Universitäta, Nr. 13, Wipusk 3, (1974), 106 - 114, (russ.)
5. Przeborski A.: Die allgemeinsten Gleichungen der klassischen Dynamik. Math. Zeitschrift, Berlin, Bd. 36, Nr. 2, (1931 - 1932), 184 - 194

Anschrift: Professor M.P. Juschkov, Fakultät für Mathematik und Mechanik, Staatsuniversität St. Petersburg, Bibliotheksplatz 2, Stary Peterhof, RUS-198904 Sankt-Petersburg