

# Numerische Untersuchungen zur Selbstsynchronisation von Unwuchtrotoren

F. Merten, L. Sperling

*Es wird ein linearer gedämpfter translatorischer Schwinger mit einem Freiheitsgrad betrachtet, der durch zwei separat angetriebene statisch unwichtige Rotoren erregt wird. Bei diesem System tritt durch die Rückwirkung der Schwingbewegung auf die Rotoren unter bestimmten, ziemlich allgemeinen Bedingungen der Effekt der Selbstsynchronisation auf. Für ausgewählte Systemparameter werden interessante Bewegungsverläufe, wie das Ausbilden des synchronen Bewegungszustandes, die Erhaltung der Rotationsbewegung nach Ausschalten eines Rotorantriebes und Sprungeffekte analog dem Sommerfeld-Effekt vorgestellt. Der zeitliche Verlauf der Bewegung ist das Ergebnis einer numerischen Simulation mit Hilfe der Simulationssprache ACSL. Um die numerischen Ergebnisse mit den analytischen Näherungsergebnissen vergleichen zu können, werden zunächst die Existenz- und Stabilitätsbedingungen für selbstsynchronisierte Bewegungen aufgestellt.*

## 1 Einleitung

Ausgangspunkt für die vorgenommenen numerischen Untersuchungen zur Selbstsynchronisation sind die von Sperling (1994/I, II) für ein allgemeines lineares Schwingungssystem, das durch statisch und dynamisch unwichtige Rotoren erregt wird, abgeleiteten Existenz- und Stabilitätsbedingungen für den synchronen Bewegungszustand. Diese Ableitung basiert auf den vor allem von Blechman (siehe z. B. Blechman, 1971, 1981) aus der Theorie der periodischen Lösungen nach Poincaré und Ljapunov sowie der Theorie der Stabilität einer Bewegung nach Ljapunov entwickelten allgemeinen Methoden. Die dabei auftretenden Vibrationsmomente, die die mittlere Rückwirkung des Schwingungssystems auf die Rotoren erfassen, lassen sich besonders effektiv mit Hilfe der von Sperling (1967) eingeführten harmonischen Einflußkoeffizienten ausdrücken. Diese stellen bestimmte Elemente der Frequenzgangmatrix des Schwingungssystems dar.

Den im folgenden für das untersuchte mechanische System konkret abgeleiteten Existenz- und Stabilitätsbedingungen liegen die allgemeinen Beziehungen aus Sperling (1994/I, II) zugrunde. Die dort eingeführten Bezeichnungen und Koordinatensysteme werden hier analog verwendet.

Die Näherungstheorie gilt unter der Voraussetzung kleiner Rotormassen im Vergleich zu den repräsentativen Massenparametern des Schwingungssystems in hinreichender Entfernung vom Resonanzbereich. Sie liefert Aussagen über die Existenz und die Stabilität stationärer synchroner Bewegungen, bei denen sich die Rotoren mit der gleichen mittleren Winkelgeschwindigkeit und stabilen Phasendifferenzen bewegen. Aussagen über den konkreten Verlauf transientser Bewegungen, wie das Einfangen in den synchronen Bewegungszustand, erhält man jedoch nicht. Derartige instationäre Vorgänge lassen sich mittels numerischer Integration der Bewegungsgleichungen (Simulation) des entsprechenden mechanischen Systems untersuchen. Weiterhin bietet die numerische Simulation die Möglichkeit, einige Einschränkungen der analytischen Näherungstheorie, wie z. B. die der kleinen Rotormasse, fallenzulassen. Es können in den Bewegungsgleichungen auch zusätzliche nichtlineare Glieder berücksichtigt werden.

Grundlage der numerischen Simulationen ist in der vorliegenden Arbeit die kontinuierliche Simulationssprache ACSL. Diese ist ein Werkzeug für die Modellierung und die Simulation dynamischer Systeme, die durch nichtlineare gewöhnliche Differentialgleichungen oder Übertragungsfunktionen beschrieben werden können. Neben umfangreichen Strukturen zur Modellbeschreibung stellt ACSL verschiedene Integrationsalgorithmen sowie Möglichkeiten zur grafischen und numerischen Ausgabe der Simulationsergebnisse zur Verfügung (siehe auch Breiteneker, 1993). Durch die Möglichkeit zum interaktiven Arbeiten mit dem dynamischen Modell stellt ACSL eine leistungsfähige Experimentierumgebung zur systematischen Untersuchung stationärer und transientser Bewegungsverläufe dar.

## 2 Mechanisches System

Bei dem untersuchten mechanischen System erregen zwei statisch unwuchtige Rotoren einen linearen gedämpften translatorischen Schwinger mit einem Freiheitsgrad. Die statischen Unwuchten werden als Punktmassen  $m_i$  mit den Exzentrizitäten  $\varepsilon_i$  aufgefaßt. Zusätzlich können die Rotoren noch aus unwucht-freien Massen bestehen, für die die Drehachsen Hauptachsen mit den Massenträgheitsmomenten  $J_i$  sind. Der Schwinger besitzt die Gesamtmasse  $M$ , die Dämpfungskonstante  $b$  und die Federkonstante  $c$ .

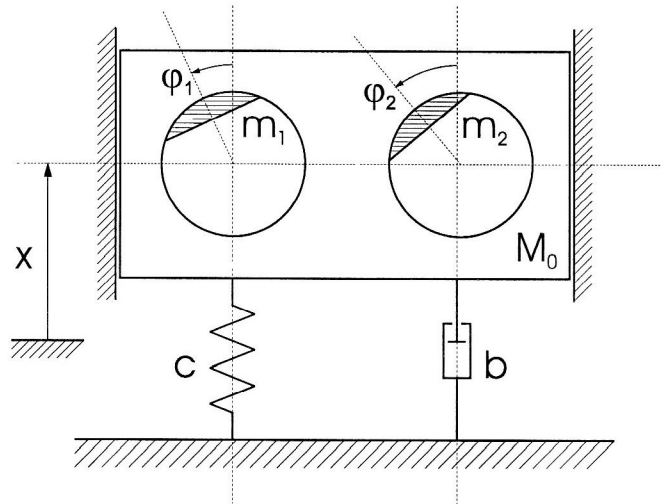


Bild 1. Mechanisches System

Für dieses System lassen sich die Bewegungsgleichungen

$$(m_1 \varepsilon_1^2 + J_1) \ddot{\varphi}_1 - m_1 \varepsilon_1 \ddot{x} \sin \varphi_1 = L_1^0 - k_1 \dot{\varphi}_1 \quad (1)$$

$$(m_2 \varepsilon_2^2 + J_2) \ddot{\varphi}_2 - m_2 \varepsilon_2 \ddot{x} \sin \varphi_2 = L_2^0 - k_2 \dot{\varphi}_2 \quad (2)$$

$$M \ddot{x} + b \dot{x} + cx = \sum_{i=1}^2 m_i \varepsilon_i (\dot{\varphi}_i^2 \cos \varphi_i + \ddot{\varphi}_i \sin \varphi_i) \quad (3)$$

mit der Gesamtmasse

$$M = M_0 + m_1 + m_2 \quad (4)$$

aufstellen. Dabei beschreiben die ersten beiden Gleichungen die Bewegung der Rotoren und die dritte die Bewegung des Schwingers. Die rechten Seiten der Rotorgleichungen stellen die Antriebsmomente als im Arbeitsbereich linearisierte Kennlinien von Asynchronmotoren dar, wobei die  $k_i$  durch die Motorkennlinien und durch zusätzliche Dämpfungsmomente (Lagerreibung) bestimmt sind. Das System gekoppelter nichtlinearer Differentialgleichungen (1),(2) und (3) ist analytisch nicht geschlossen lösbar.

Für die Simulationen wurde ein Modellsystem mit den Tragsystemparametern  $M=1$  kg,  $b=1,2566$  kg/s und  $c=4\pi^2$  N/m gewählt, so daß sich eine Kennkreisfrequenz  $\omega = \sqrt{c/M} = 2\pi$  1/s und ein Dämpfungsgrad  $\vartheta = b/2M\omega = 0,1$  ergibt.

## 3 Existenz- und Stabilitätsbedingungen für den synchronen Bewegungszustand

Im folgenden werden, ausgehend von den in Sperling (1994/I, II) für den allgemeinen Fall angegebenen Existenz- und Stabilitätsbedingungen, die konkreten Bedingungen für das hier betrachtete mechanische System abgeleitet.

Der stationäre Zustand der selbstsynchronisierten Bewegung wird für ein System mit  $m$  Unwuchttrotoren durch die sogenannte erzeugende Lösung

$$\varphi_i^0 = \sigma_i(\Omega t + \alpha_i) \quad i = 1(1)m \quad (5)$$

mit der Winkelgeschwindigkeit der synchronen Bewegung  $\Omega$  beschrieben. Der Faktor  $\sigma_i$  kann dabei je nach Drehrichtung des Rotors die Werte  $+1$  oder  $-1$  annehmen. Die erzeugende Lösung hängt noch von den  $m$  Nullphasenwinkeln  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  ab.

Für den Zustand der Selbstsynchronisation gelten die Existenzbedingungen

$$P_i(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = \Omega_i - \Omega - \frac{1}{k_i} V_i = 0 \quad i = 1(1)m \quad (6)$$

mit den Vibrationsmomenten  $V_i$  sowie den sogenannten Partialwinkelgeschwindigkeiten

$$\Omega_i = \frac{\sigma_i L_i^0}{k_i} \quad (7)$$

Diese stellen die Winkelgeschwindigkeiten dar, mit denen die einzelnen Rotoren bei arretiertem Schwinger rotieren würden. Die Größen  $L_i^0$  und  $k_i$  sind dabei die Parameter der Motorkennlinie des entsprechenden Rotorantriebes.

Die wichtigste Aufgabe bei der analytischen Untersuchung der Selbstsynchronisation besteht in der Bestimmung der den Existenzbedingungen (6) genügenden Phasenwinkeldifferenzen  $\alpha_1 - \alpha_m, \dots, \alpha_{m-1} - \alpha_m$  und der synchronen Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$ .

Auf der Ljapunowschen Stabilitätstheorie basierende Entwicklungen (Blechman, 1971, 1981) zeigen, daß die Bewegungen nicht für alle Lösungen der Existenzbedingungen stabil sind. Im vorliegenden Falle der inneren Synchronisation gehört zu einer Lösung der Existenzbedingungen eine eindeutige und asymptotisch stabile Bewegung, wenn die Wurzeln der algebraischen Gleichung  $(m-1)$ -ten Grades in  $\lambda$

$$\det \left( \frac{\partial \mathbf{P}^*}{\partial \boldsymbol{\alpha}^{*T}} - \lambda \mathbf{E}_{m-1} \right) = 0 \quad (8)$$

mit

$$\mathbf{P}^* = [P_1 - P_m \quad \dots \quad P_{m-1} - P_m]^T \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\alpha}^* = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \dots \quad \alpha_{m-1}]^T \quad (9)$$

und  $\mathbf{E}_{m-1}$  als der  $(m-1) \times (m-1)$ -Einheitsmatrix alle negative Realteile besitzen.

Zur Auswertung der Existenz- und Stabilitätsbedingungen für das konkrete mechanische System benötigt man nun die expliziten Ausdrücke des Vibrationsmomentes  $V_i$  in Abhängigkeit von den Phasendifferenzen.

Beschränkt man sich auf statisch unwichtige Rotoren und legt man ohne Einschränkung der Allgemeinheit die  $\mathbf{e}_{ir}$ -Richtungen durch den Massenmittelpunkt  $C_i$  der Rotoren (siehe Bild 2), so gilt nach Sperling (1994/II) mit

$$\varepsilon_i := \varepsilon_{ir} \quad \varepsilon_{is} := 0 \quad f_i := f_{ir} = m_i \varepsilon_i \Omega^2 \quad f_{is} = 0 \quad (10)$$

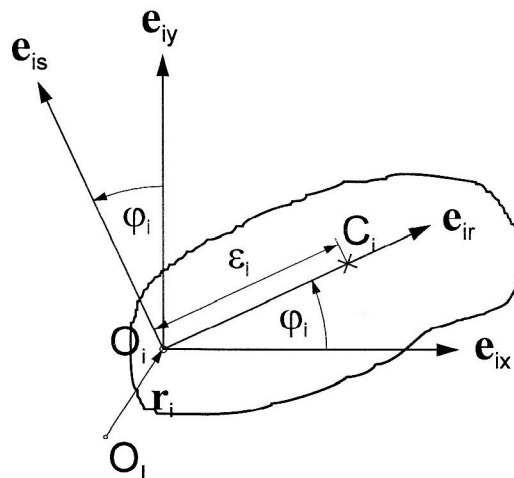


Bild 2. Unwuchtrotor

für die Vibrationsmomente

$$V_i = \sigma_i \frac{1}{T} \int_0^T m_i \varepsilon_i [\mathbf{e}_{is}^T \cdot \ddot{\mathbf{r}}_i]_0 dt = -\sigma_i \frac{1}{T} \int_0^T f_i [\mathbf{e}_{is}^T \cdot \mathbf{r}_i]_0 dt \quad (11)$$

In Bild 2 sind die Einheitsvektoren  $\mathbf{e}_{ix}$ ,  $\mathbf{e}_{iy}$ ,  $\mathbf{e}_{iz}$  schwinger-, d.h. näherungsweise raumfest und die Einheitsvektoren  $\mathbf{e}_{ir}$ ,  $\mathbf{e}_{is}$  rotorfest.  $O_I$  ist ein raumfester Bezugspunkt für den Ortsvektor  $\mathbf{r}_i$  zum Punkt  $O_i$  auf der Rotorachse. Die eckigen Klammern in Gleichung (11) enthalten skalare Produkte von Vektoren in Matrizendarstellung und sind für die erzeugende Lösung (5) zu bestimmen.

Wird berücksichtigt, daß im vorliegenden Beispiel eine Schwingerbewegung nur in  $\mathbf{e}_{ix}$ -Richtung möglich ist, so lassen sich die Vibrationsmomente nach dem Einführen der harmonischen Einflußkoeffizienten

$$A_{xx} := A_{xx}^{ik} = A_{xx}^{ki} \quad \bar{A}_{xx} := \bar{A}_{xx}^{ik} = \bar{A}_{xx}^{ki} \quad (12)$$

schließlich in folgender Form darstellen:

$$V_i = \frac{1}{2} f_i \sum_{k=1}^m f_k [A_{xx} \sin(\alpha_i - \alpha_k) + \bar{A}_{xx} \cos(\alpha_i - \alpha_k)] \quad (13)$$

Bei Beschränkung auf nur zwei statisch ungewichtige Rotoren erhält man mit der Phasendifferenz  $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$

$$V_1 = \frac{1}{2} f_1 [A_{xx} f_2 \sin \alpha + \bar{A}_{xx} (f_1 + f_2 \cos \alpha)] \quad (14)$$

$$V_2 = \frac{1}{2} f_2 [-A_{xx} f_1 \sin \alpha + \bar{A}_{xx} (f_2 + f_1 \cos \alpha)] \quad (15)$$

Die Einflußzahlen sind im vorliegenden Fall zu bestimmen, indem man die stationäre Lösung der Differentialgleichung

$$M\ddot{x} + b\dot{x} + cx = f_0 \cos \Omega t \quad f_0 = 1 \quad (16)$$

in der Gestalt

$$x(t) = A_{xx} \cos \Omega t + \bar{A}_{xx} \sin \Omega t \quad (17)$$

darstellt. Man erhält

$$A_{xx} = \frac{1}{M} \frac{\omega^2 - \Omega^2}{\Delta} \quad \bar{A}_{xx} = \frac{1}{M} \frac{2\delta\Omega}{\Delta} \quad (18)$$

mit

$$\Delta = (\omega^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2 \quad \delta = \frac{b}{2M} \quad (19)$$

Nach Einsetzen der Gleichungen (7), (14) und (15) mit der Gleichung (18) in die Existenzbedingungen (6) erhält man für das vorliegende System die folgenden konkreten Existenzbedingungen für den selbstsynchronisierten Bewegungszustand:

$$P_1(\alpha)k_1 = \sigma_1 L_1^0 - k_1 \Omega - \frac{\Omega^4}{2M\Delta} \{2m_1^2 \varepsilon_1^2 \delta \Omega + m_1 m_2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 [(\omega^2 - \Omega^2) \sin \alpha + 2\delta \Omega \cos \alpha]\} = 0 \quad (20)$$

$$P_2(\alpha)k_2 = \sigma_2 L_2^0 - k_2 \Omega - \frac{\Omega^4}{2M\Delta} \{2m_2^2 \varepsilon_2^2 \delta \Omega + m_1 m_2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 [-(\omega^2 - \Omega^2) \sin \alpha + 2\delta \Omega \cos \alpha]\} = 0 \quad (21)$$

Aus Gleichung (8) ergibt sich für das betrachtete System die Stabilitätsbedingung

$$(\omega^2 - \Omega^2) \cos \alpha + 2\delta \Omega \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \sin \alpha > 0 \quad (22)$$

die sich für gleiche Anstiege der Motorkennlinien  $k_1 = k_2$  vereinfacht zu

$$(\omega^2 - \Omega^2) \cos \alpha > 0 \quad (23)$$

Aus dieser Relation ist ersichtlich, daß die stabile selbstsynchronisierte Bewegung im unterkritischen Bereich ( $\Omega^2 < \omega^2$ ) durch den Bereich der Phasenwinkeldifferenz  $\alpha = 270^\circ \dots 90^\circ$  und im überkritischen Bereich ( $\Omega^2 > \omega^2$ ) durch  $\alpha = 90^\circ \dots 270^\circ$  bestimmt ist.

#### 4 Simulationsergebnisse

Zunächst werden einige Zeitverläufe vorgestellt, die die Ausbildung des synchronen Bewegungszustandes zeigen. Zur numerischen Integration der Bewegungsgleichungen (1)-(3) wurde als Integrationsalgorithmus ein Runge-Kutta-Fehlberg-Verfahren der Ordnung 5/6 mit automatischer Schrittweitensteuerung verwendet. Die Berechnung der Zustandsvariablen erfolgte mit doppelter Genauigkeit (double precision). Zur Schrittweitensteuerung wurde für jede Zustandsvariable ein maximaler relativer Fehler von  $10^{-6}$  festgelegt. Vergleichsrechnungen mit anderen in ACSL implementierten Integrationsalgorithmen bestätigen die hinreichende Genauigkeit der mit diesen Optionen erzielten Simulationsergebnisse.

Zur Simulation des Einfangs in den selbstsynchronisierten Zustand wurde der Schwinger durch Zuweisen einer sehr großen Masse ( $M = 1000$  kg) zunächst arretiert. Nach dem Hochlauf der Rotoren erfolgte die Freigabe des Schwingers ( $M = 1$  kg).

Das Bild 3 zeigt den Bewegungsverlauf bei der Selbstsynchronisation für den überkritischen Bereich der Winkelgeschwindigkeiten. Die Simulation erfolgte dabei mit den folgenden Rotorparametern:  $m_1 = m_2 = 0,1M$ ,  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0,01$  m,  $k_1 = k_2 = 3,0 \cdot 10^{-4}$  Nms,  $L_1^0 = 25,2 \cdot 10^{-4}$  Nm,  $L_2^0 = 24,0 \cdot 10^{-4}$  Nm. Im linken Teil des Bildes sind die Winkelgeschwindigkeiten der beiden Rotoren  $\dot{\varphi}_1$  und  $\dot{\varphi}_2$  dargestellt, rechts die Phasenwinkeldifferenz  $\alpha$  sowie die Auslenkung des Schwingers  $x$ . Man erkennt, daß sich die beiden Rotoren bei arretiertem Schwinger mit unterschiedlichen Winkelgeschwindigkeiten bewegen. Nach Freigabe des Schwingers stellt sich nach kurzem Einschwingen des Systems der selbstsynchronisierte Bewegungszustand ein. Den der Näherungstheorie entsprechenden konstanten Mittelwerten der Winkelgeschwindigkeiten und der Phasenwinkeldifferenz sind dabei aufgrund der Rückwirkung der Schwingbewegung periodische Anteile überlagert. Bei diesem Beispiel beträgt die mittlere synchrone Winkelgeschwindigkeit  $\Omega = 8,155$  1/s. Mit  $\bar{\alpha} = 238,7^\circ$  liegt die mittlere Phasenwinkeldifferenz innerhalb des für den überkritischen Bereich der Winkelgeschwindigkeiten aus der Stabilitätsbedingung resultierenden Bereiches  $90^\circ < \alpha < 270^\circ$ .

Die Simulation für unterkritische Winkelgeschwindigkeiten erfolgte mit unterschiedlichen Unwuchtmassen:  $m_1 = 0,2M$ ,  $m_2 = 0,1M$ . Bei diesem Beispiel wurden die Parameter des Rotorantriebes mit

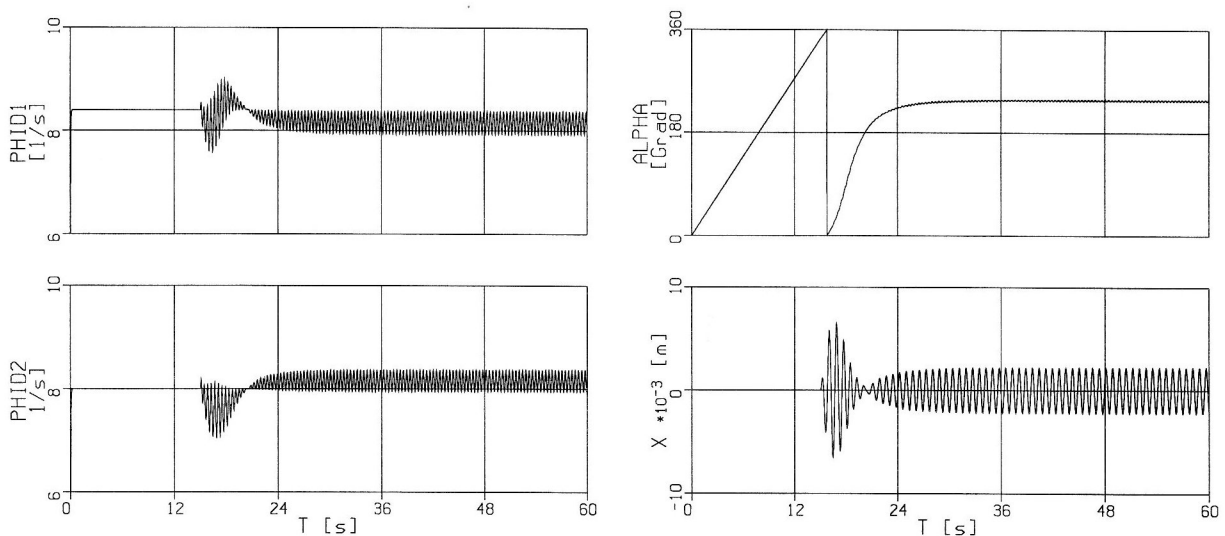


Bild 3. Selbstsynchronisation im überkritischen Bereich

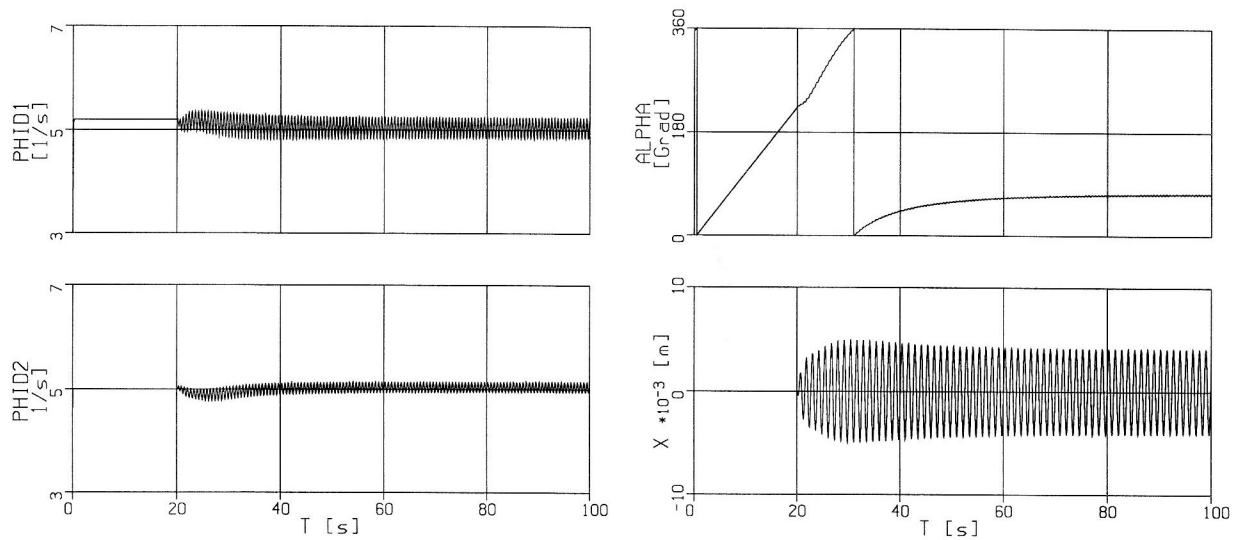


Bild 4. Selbstsynchronisation im unterkritischen Bereich

$k_1 = k_2 = 5,0 \cdot 10^{-4}$  Nms,  $L_1^0 = 26,0 \cdot 10^{-4}$  Nm,  $L_2^0 = 25,0 \cdot 10^{-4}$  Nm so gewählt, daß sich nach Freigabe des Schwingers wiederum eine selbstsynchronisierte Bewegung einstellt. Die mittlere synchrone Winkelgeschwindigkeit beträgt  $\Omega = 5,045$  1/s und die Phasendifferenz  $\bar{\alpha} = 72,8^\circ$ . Bedingt durch die unterschiedlichen Unwuchtmassen ergeben sich im Ergebnis der Simulation unterschiedliche Amplituden des harmonischen Anteils der Winkelgeschwindigkeiten (Bild 4).

Sind die Unterschiede der Partialwinkelgeschwindigkeiten zu groß, so kann sich kein synchroner Bewegungszustand einstellen. Bild 5 zeigt die Simulation mit den gleichen Parametern wie bei der ersten Simulation, nur der konstante Anteil des Motormomentes wurde erhöht auf  $L_1^0 = 25,8 \cdot 10^{-4}$  Nm. Nach Freigabe des Schwingers ist keine Selbstsynchronisation zu beobachten, sondern ein schwebungsähnlicher Verlauf der Schwingbewegung. Die mittleren Winkelgeschwindigkeiten der Rotoren nähern sich periodisch an und entfernen sich wieder, so daß sich keine feste Phasenbeziehung einstellt. Die Periodendauer der Schwebung verkürzt sich dabei mit zunehmender Differenz der Partialwinkelgeschwindigkeiten. In Bild 5 ist zu erkennen, daß sich durch die Rückwirkung der Schwingbewegung auf die Rotoren die Zeitspanne, in der die Phasenwinkeldifferenz von  $0^\circ$  bis  $360^\circ$  durchlaufen wird, vergrößert.

Für den Fall gleicher Anstiege der Motorkennlinien  $k = k_1 = k_2$  können nun zum Vergleich der Simulationsergebnisse mit den Resultaten der analytischen Näherung die Differenzen der konstanten Anteile der

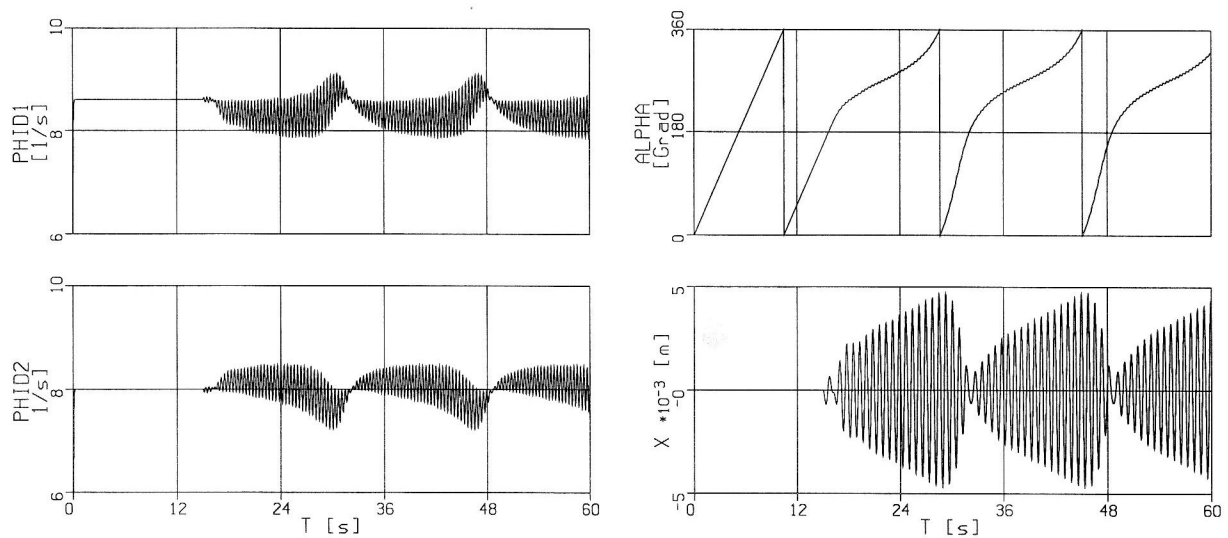


Bild 5. Keine Selbstsynchronisation

Antriebsmomente  $L_1^0 - L_2^0$  über deren Summen  $L_1^0 + L_2^0$  für vorgegebene Phasenwinkeldifferenz  $\alpha$  dargestellt werden. Durch Bildung der Summe und der Differenz der Existenzbedingungen (20) und (21) erhält man die Beziehungen

$$L_1^0 + L_2^0 = 2k\Omega + \frac{\Omega^4}{M\Delta} \{ \delta\Omega(m_1^2 \varepsilon_1^2 + m_2^2 \varepsilon_2^2) + 2\delta\Omega \cos \alpha \} \quad (24)$$

$$L_1^0 - L_2^0 = \frac{\Omega^4}{M\Delta} \{ \delta\Omega(m_1^2 \varepsilon_1^2 - m_2^2 \varepsilon_2^2) + m_1 m_2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 (\omega^2 - \Omega^2) \} \quad (25)$$

Die aus der analytischen Näherung folgenden Kurven  $L_1^0 - L_2^0$  über  $L_1^0 + L_2^0$  sind für das Beispielsystem mit den unterschiedlichen Unwuchtmassen unter Beachtung der Stabilitätsbedingung für verschiedene vorgegebene Phasenwinkeldifferenzen  $\alpha$  in Bild 6 als Linien dargestellt. Das abrupte Ende dieser Kurven in Resonanznähe ist darin begründet, daß gleichzeitig mit den Existenzbedingungen (20) und (21) die Stabilitätsbedingung (23) gilt.

Die Simulationsergebnisse sind als Punkte eingezeichnet. Jeder Punkt ist dabei das Ergebnis einer eigenständigen Simulation, bei der ausgehend von einem stabilen synchronen Bewegungszustand der konstante Anteil des Motormomentes  $L_1^0$  solange kontinuierlich erhöht wird, bis die mittlere Phasenwinkeldifferenz  $\bar{\alpha}$  den vorgegebenen Wert erreicht. Die Erhöhung von  $L_1^0$  erfolgt so langsam, daß die Bewegung als quasistationär angesehen werden kann.

Bild 6 zeigt, daß die Simulationsergebnisse mit den Resultaten der analytischen Näherung für das untersuchte System mit relativ großen Unwuchtmassen ( $m_1 = 0,2M$ ,  $m_2 = 0,1M$ ) und deutlicher Dämpfung (Dämpfungsgrad  $\vartheta = 0,1$ ) gut übereinstimmen. Bemerkenswert ist auch die Übereinstimmung dieser Ergebnisse bis in die Nähe der Resonanz. Der Resonanzbereich ist durch die Überschneidung der analytischen Kurven für den unterkritischen Bereich ( $\alpha = 30^\circ, 60^\circ, 75^\circ$ ) mit denen für den überkritischen Bereich ( $\alpha = 210^\circ, 240^\circ, 255^\circ$ ) gekennzeichnet. Der im Ergebnis der Simulation ermittelte Bereich, in dem eine stabile Selbstsynchronisation erzielt werden kann, erstreckt sich bis zu einem Abstimmungsverhältnis  $\eta = \Omega/\omega$  von 0,96. Überkritisch ist für  $\alpha = 255^\circ$  ab  $\eta = 1,10$  eine stabile selbstsynchronisierte Bewegung möglich. Für Phasenwinkeldifferenzen, die weiter innerhalb des Stabilitätsgebietes liegen, kann die Selbstsynchronisation auch in größerer Nähe zur Resonanz noch realisiert werden.

In den in Bild 6 gestrichelt dargestellten Bereichen der analytischen Kurven ist im Ergebnis der Simulation

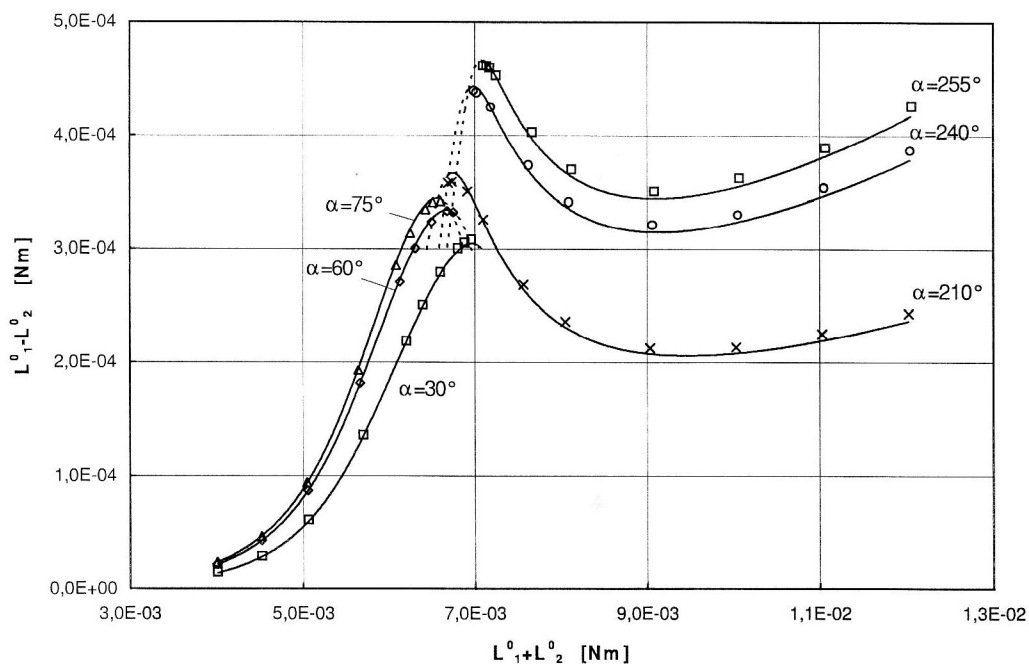


Bild 6. Vergleich zwischen analytischer Näherungslösung und Simulationsergebnissen für das System mit unterschiedlichen Unwuchtmassen

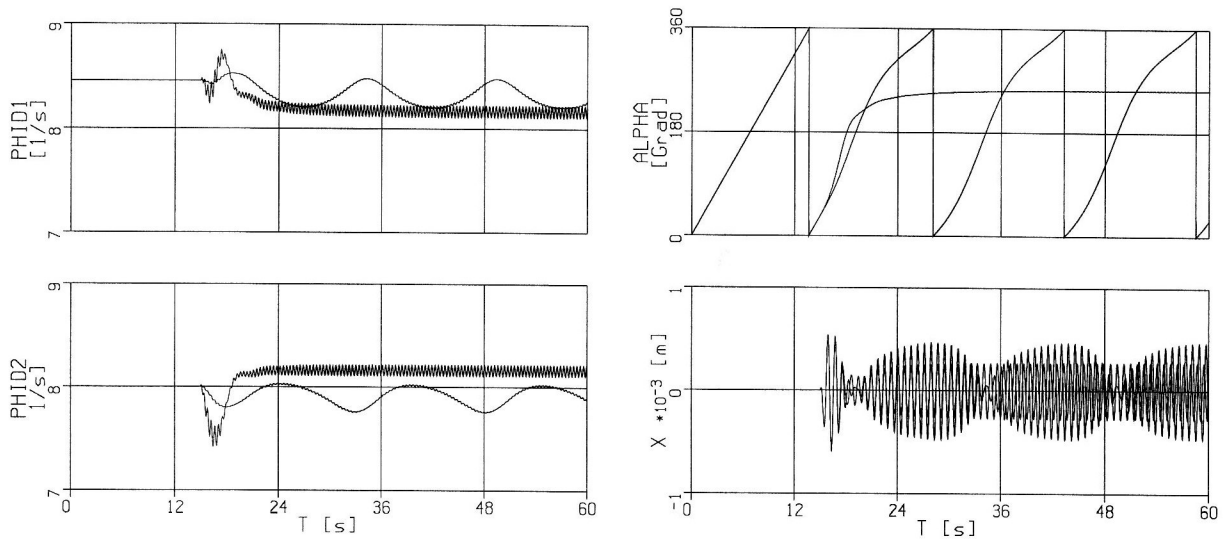


Bild 7. Einfluß zusätzlicher Massenträgheitsmomente auf die Selbstsynchronisation

keine stabile selbstsynchronisierte Bewegung mit der entsprechenden vorgegebenen Phasenwinkeldifferenz  $\alpha$  zu erzielen. Bei den diesen Kurvenabschnitten entsprechenden Antriebsparametern wird entweder keine Synchronisation oder ein Sprung im Sinne des Sommerfeld-Effektes (siehe auch Merten, 95) mit anschließender Selbstsynchronisation beobachtet.

Da in die Existenzbedingungen (20) und (21) nur die Unwuchten  $m_i \varepsilon_i$  eingehen und keine Massenträgheitsmomente zusätzlicher unwuchtfreier rotierender Massen, ist die Untersuchung des Einflusses zusätzlicher Massenträgheitsmomente  $J_1$  und  $J_2$  (vgl. Gln. (1) und (2)) auf die Selbstsynchronisation von Interesse.

In Bild 7 sind die simulierten Bewegungsverläufe für ein System mit  $m_1 = m_2 = 0,01M$ ,  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0,01$  m,  $k = 3,0 \cdot 10^{-6}$  Nms,  $L_1^0 = 25,2 \cdot 10^{-6}$  Nm,  $L_2^0 = 24,0 \cdot 10^{-6}$  Nm für  $J_1 = J_2 = 0$  und

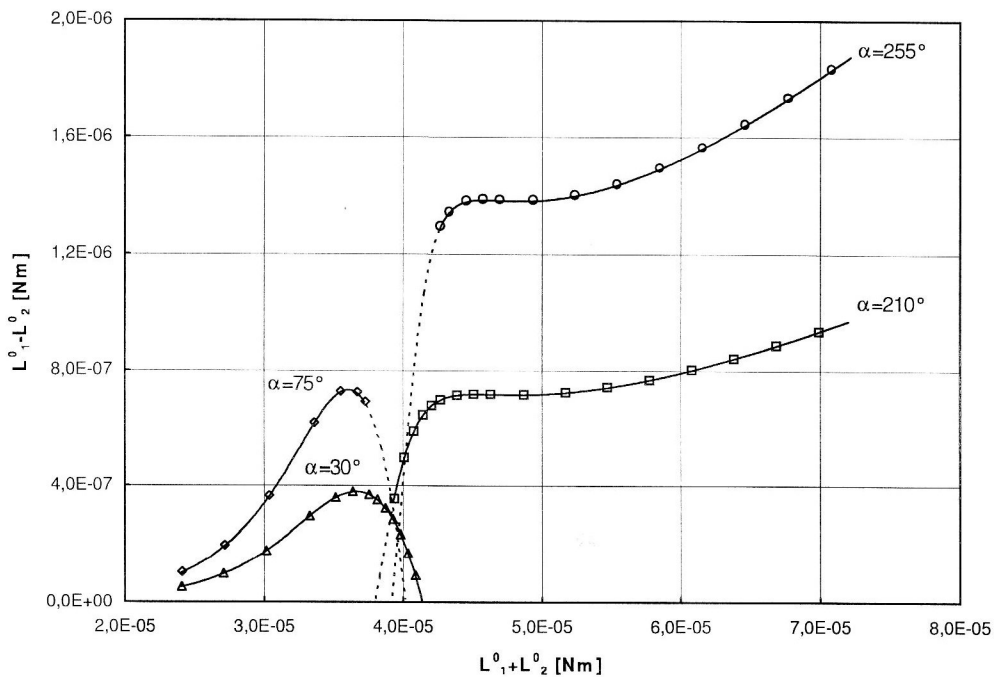


Bild 8. Vergleich zwischen analytischer Näherungslösung und Simulationsergebnissen bei Vorhandensein zusätzlicher Massenträgheitsmomente



$J_1 = J_2 = 1,0 \cdot 10^{-5} \text{ kgm}^2$  miteinander verglichen. Nach Freigabe des Schwingers erfolgt für  $J_1 = J_2 = 0$  die Selbstsynchronisation mit der mittleren Phasenwinkeldifferenz  $\bar{\alpha} = 254,2^\circ$ . Bei Vorhandensein zusätzlicher unwuchtfreier Massen mit den Massenträgheitsmomenten  $J_1 = J_2 = 1,0 \cdot 10^{-5} \text{ kgm}^2$  stellt sich nach Freigabe des Schwingers bei sonst gleichen Systemparametern kein synchroner Bewegungszustand ein. Zusätzliche Massenträgheitsmomente der Unwuchttrotoren können also das Einfangen in den selbstsynchronisierten Zustand verhindern.

Vergleicht man für das System mit den oben aufgeführten Parametern mit  $J_1 = J_2 = 1,0 \cdot 10^{-5} \text{ kgm}^2$  die Ergebnisse aus der Simulation mit denen aus der analytischen Näherung anhand der Darstellung von  $L_1^0 - L_2^0$  über  $L_1^0 + L_2^0$ , so ist bei langsamer quasistationärer Erhöhung von  $L_1^0$  bis zum Erreichen der jeweils vorgegebenen Phasenwinkeldifferenz  $\alpha$  auch bei Vorhandensein der zusätzlichen Massenträgheitsmomente eine gute Übereinstimmung der Ergebnisse zu beobachten (Bild 8). Stabile selbstsynchronisierte Bewegungen können in der Simulation wieder bis in Resonanznähe (für  $\alpha = 75^\circ$  bis  $\eta = 0,94$  und für  $\alpha = 255^\circ$  ab  $\eta = 1,11$ ) erzielt werden. Die entsprechenden Simulationen mit  $J_1 = J_2 = 0$  und sonst gleichen Systemparametern liefern keine signifikanten Abweichungen von den hier genannten Ergebnissen für  $J_1 = J_2 = 1,0 \cdot 10^{-5} \text{ kgm}^2$ , so daß für diesen Fall auf eine Darstellung von  $L_1^0 - L_2^0$  über  $L_1^0 + L_2^0$  verzichtet werden kann.

Bei Systemen mit flachen Motorkennlinien treten in Resonanznähe Instabilitätsgebiete im Sinne des Sommerfeld-Effektes auf, die nicht durch die Existenz- und Stabilitätsbedingungen erklärt werden können. Zur Simulation der für den Sommerfeld-Effekt charakteristischen Sprungerscheinungen wurde ein Modellsystem mit den Rotorparametern  $m_1 = m_2 = 0,1M$ ,  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0,01 \text{ m}$ ,  $k = 1,0 \cdot 10^{-4} \text{ Nms}$  und  $L_2^0 = 7,4 \cdot 10^{-4} \text{ Nm}$  gewählt.  $L_1^0$  wurde ausgehend von  $L_1^0 = 7,6673 \cdot 10^{-4} \text{ Nm}$  kontinuierlich erhöht. Bild 9 zeigt den Bewegungsverlauf. Zunächst befindet sich das System in einem stabilen selbstsynchronisierten Zustand mit der unterkritischen synchronen Winkelgeschwindigkeit  $\Omega = 6,12 \text{ 1/s}$  und der mittleren Phasenwinkeldifferenz  $\bar{\alpha} = 45,4^\circ$ . Nach einiger Zeit ist ein Sprung in den überkritischen Bereich mit anschließender Selbstsynchronisation mit  $\Omega = 7,56 \text{ 1/s}$  und  $\bar{\alpha} = 194,0^\circ$  zu beobachten. Es konnten bei den Simulationen mit verschiedenen Systemparametern auch Fälle nachgewiesen werden, bei denen nach dem Sprung kein synchroner Bewegungszustand mehr vorlag.

Der Vergleich zwischen den Simulationsergebnissen und den Resultaten der analytischen Näherung erfolgt für den Fall flacher Motorkennlinien wiederum anhand der Darstellung von  $L_1^0 - L_2^0$  über  $L_1^0 + L_2^0$  (Bild 10). Der Sprungbereich ist durch das Überlappen der Kurven für den unterkritischen und den überkritischen Fall gekennzeichnet. Bedingt durch den Sommerfeld-Effekt können in diesem Bereich (Strichlinien) in der Simulation keine stabilen selbstsynchronisierten Bewegungen mit den vorgegebenen Phasenwinkeldifferenzen realisiert werden. In hinreichender Entfernung von der Resonanz ergeben sich im Ergebnis der Simulation wieder stabile selbstsynchronisierte Bewegungen (für  $\alpha = 75^\circ$  bis  $\eta = 0,92$  und für  $\alpha = 255^\circ$  ab  $\eta = 1,16$ ). Die Simulationsergebnisse stimmen dann mit den Ergebnissen aus der analytischen Näherung wieder gut überein.

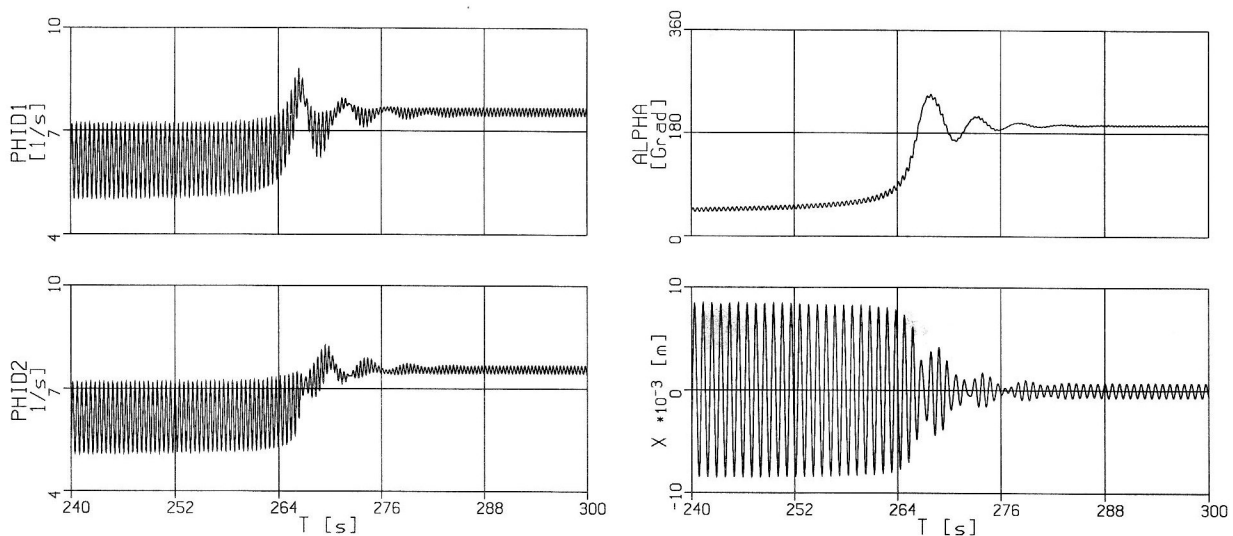


Bild 9. Sommerfeldeffekt

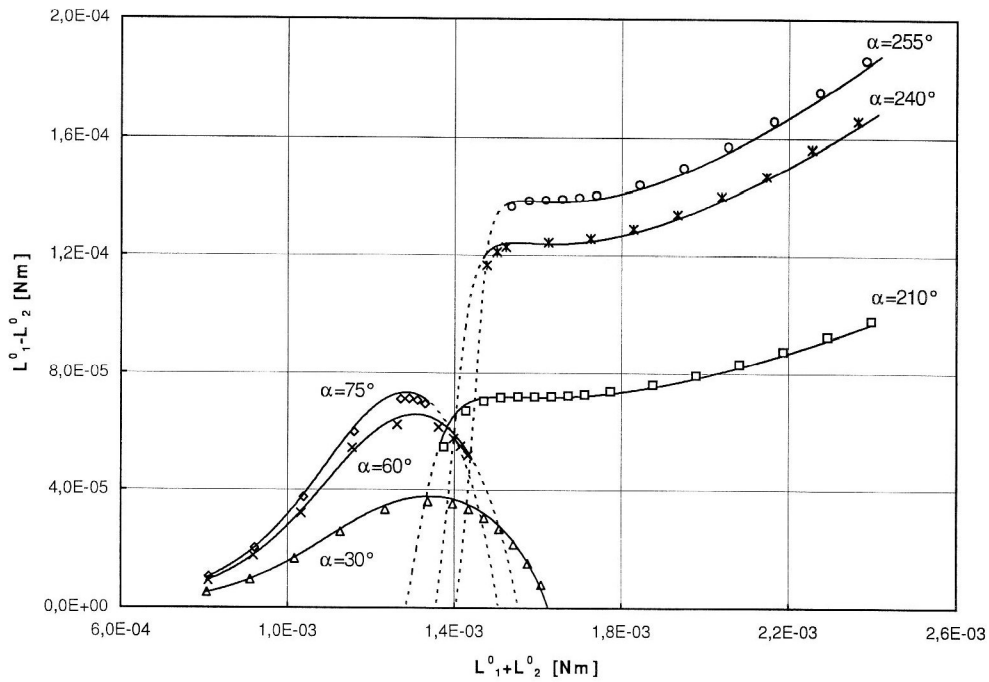


Bild 10. Vergleich zwischen analytischer Näherungslösung und Simulationsergebnissen bei flachen Motorkennlinien

Abschließend werden zwei interessante Bewegungsverläufe vorgestellt, die sich nach dem Ausfall eines Rotorantriebes ergeben. Das Abschalten eines Antriebes wird dabei durch das Nullsetzen des konstanten Anteils des Motormomentes  $L_1^0$  und das Verkleinern des Anstieges  $k_1$ , so daß dieser nur noch die Lagerreibung repräsentiert, simuliert. Ausgangspunkt für die Simulationen ist zum einen ein unterkritischer und zum anderen ein überkritischer selbstsynchronisierter Bewegungszustand. Bei diesen Simulationen ist mit  $b = 0,4 \text{ kg/s}$  die Dämpfung des Schwingungssystems kleiner als bisher. In Bild 11 ist der simulierte Bewegungsverlauf für die Systemparameter  $m_1 = m_2 = 0,1M$ ,  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0,01 \text{ m}$ ,  $k = 4,0 \cdot 10^{-3} \text{ Nms}$ ,  $L_1^0 = 19,98 \cdot 10^{-3} \text{ Nm}$  und  $L_2^0 = 20,00 \cdot 10^{-3} \text{ Nm}$  dargestellt. Nach dem Abschalten des Rotorantriebes 1 ( $L_1^0 = 0$ ,  $k_1 = 2,0 \cdot 10^{-6} \text{ Nms}$ ) kommt der Rotor 1 nicht zur Ruhe. Seine Rotation mit der synchronen Winkelgeschwindigkeit  $\Omega = 5,00 \text{ 1/s}$  wird durch die Rückwirkung der Schwingerbewegung auf den Rotor aufrechterhalten. Ist  $k_1$  zu groß, kann keine Rotationserhaltung beobachtet werden. Der Rotor 1 kommt zur Ruhe.

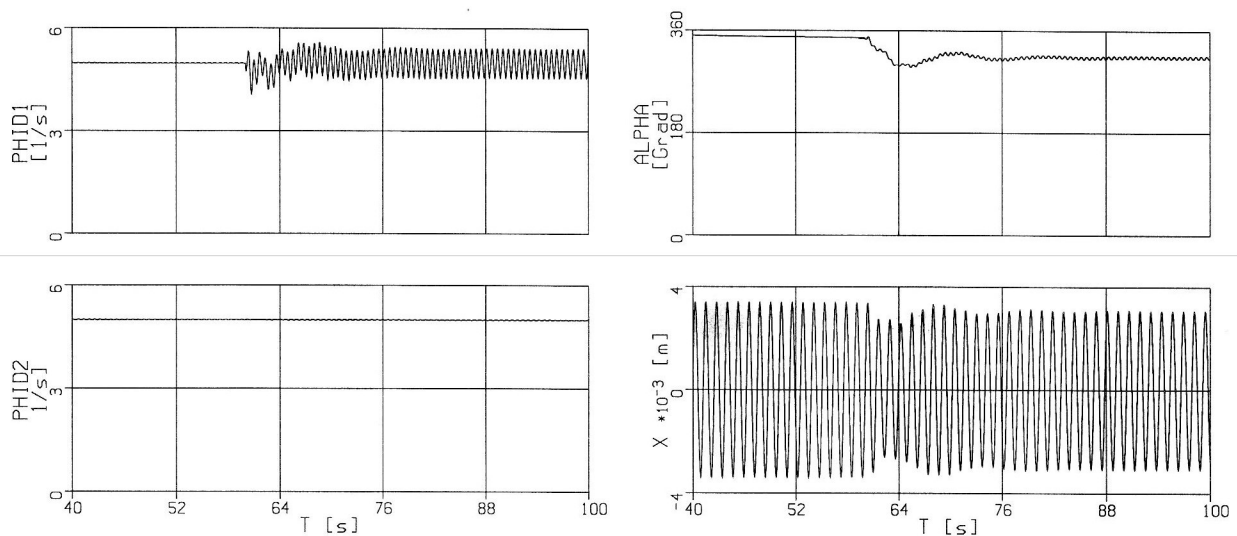


Bild 11. Ausfall des Rotorantriebes 1, unterkritisch  $\rightarrow$  Rotationserhaltung

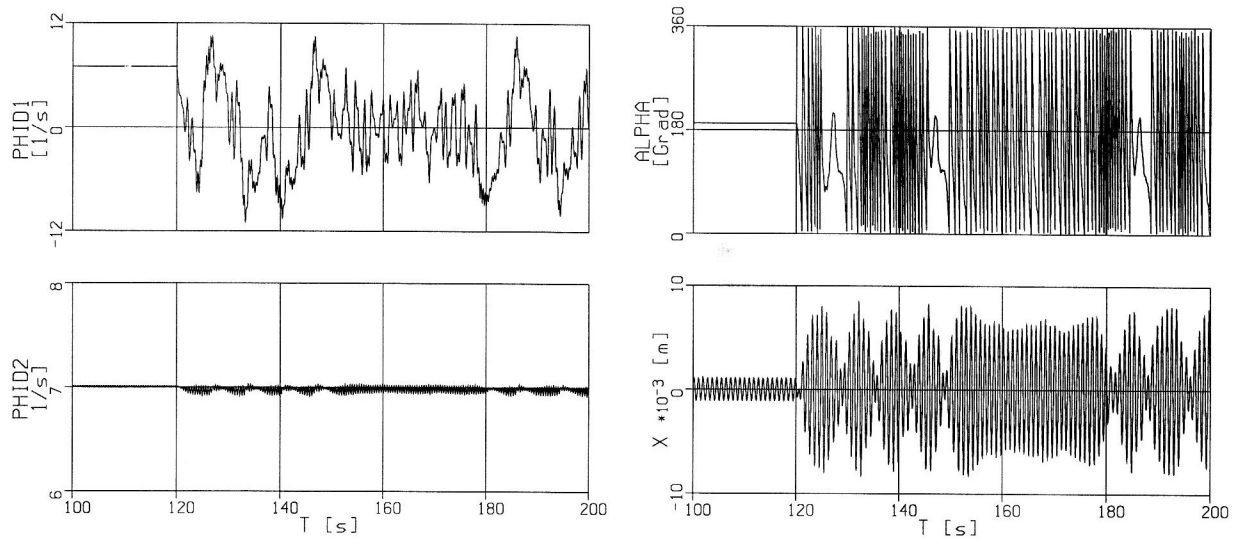


Bild 12. Ausfall der Rotorantriebes 1, überkritisch  $\rightarrow$  chaotische Bewegung

Bild 12 zeigt den Bewegungsverlauf für den überkritischen Fall mit  $L_1^0 = 28,05 \cdot 10^{-3}$  Nm und  $L_2^0 = 28,00 \cdot 10^{-3}$  Nm; alle anderen Parameter bleiben gleich. Jetzt stellt sich nach dem Abschalten des Rotorantriebes 1 ( $L_1^0 = 0$ ,  $k_1 = 1,0 \cdot 10^{-5}$  Nms) bei hinreichend kleinem  $k_1$  eine unregelmäßige Bewegung ein, wobei das System durch den Rotor 2 erregt wird. Der Phasenraumschnitt für die vorgegebene Erregerphase  $\alpha_2 = 30^\circ$  (Bild 13) bestätigt, daß es sich bei der erhaltenen Bewegung um einen chaotischen Bewegungszustand handelt.

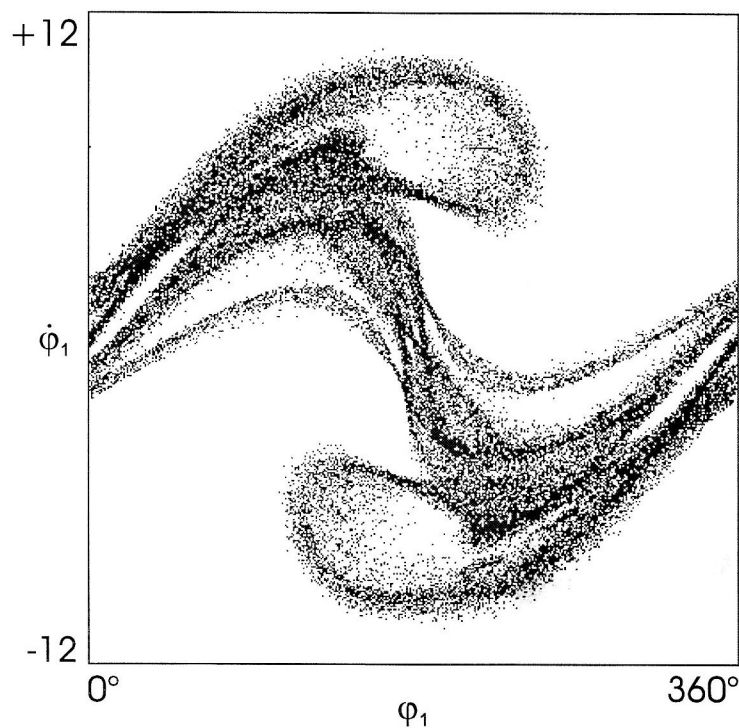


Bild 13. Phasenraumschnitt für  $\alpha_2 = 30^\circ$

## 5 Zusammenfassung

Es wurden anhand eines Modellsystems, bestehend aus einem gedämpften translatorischen Schwinger mit einem Freiheitsgrad, der durch zwei separat angetriebene statisch unwuchtige Rotoren erregt wird, numerische Simulationen des Effektes der Selbstsynchronisation durchgeführt.

Die vorgestellten Bewegungsverläufe zeigen das Einfangen in den selbstsynchronisierten Bewegungszustand, den Bewegungsverlauf, wenn keine Selbstsynchronisation erfolgt, die für den Sommerfeld-Effekt charakteristische Sprungerscheinung in Resonanznähe bei flachen Motorkennlinien sowie die Möglichkeiten der Rotationserhaltung (unterkritisch) bzw. einer chaotischen Bewegung (überkritisch) nach dem Ausfall eines Rotorantriebes.

Die Darstellungen von  $L_1^0 - L_2^0$  über  $L_1^0 + L_2^0$  zeigen für stationäre Bewegungszustände eine gute Übereinstimmung zwischen den Simulationsergebnissen und den Resultaten der auf der Theorie der periodischen Lösungen sowie der Theorie der Stabilität einer Bewegung basierenden Näherungstheorie. Diese Übereinstimmung gilt auch noch für relativ große Unwuchtmassen  $m_i$  im Verhältnis zur Gesamtmasse des Schwingungssystems ( $m_i = 0,2M$ ) auch bei deutlicher Dämpfung ( $\vartheta = 0,1$ ) bis in die Nähe der Resonanz. Analoge Resultate ergeben sich, wenn die Unwuchttoren neben der jeweiligen Unwuchtmasse  $m_i$  noch eine unwuchtfreie Masse besitzen, die ein zusätzliches Massenträgheitsmoment  $J_i$  liefert. Für flache Motorkennlinien erhält man im Ergebnis der Simulationen in Resonanznähe durch den Sommerfeld-Effekt hervorgerufene Instabilitätsgebiete, die nicht durch die Näherungstheorie erklärt werden können.

## Literatur

1. Blechman, I.I.: Synchronisation dynamischer Systeme (russ.). Nauka, Moskau, (1971).
2. Blechman, I.I.: Synchronisation in Natur und Technik (russ.). Nauka, Moskau, (1981).
3. Breitenecker, F., Ecker, H., Bausch-Gall, J.: Simulation mit ACSL. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft, Braunschweig/ Wiesbaden, (1993).
4. Merten, F.: Untersuchungen zum Sommerfeld-Effekt mittels Simulation und Experiment. Preprint Nr. 6, 1995, Fakultät für Maschinenbau, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, 1 – 34.
5. Sperling, L.: Beitrag zur allgemeinen Theorie der Selbstsynchronisation umlaufender Unwuchtmassen im Nichtresonanzfall. Wiss.Z.d. TH O.v.G. Magdeburg 11, 1, (1967), 63 – 87.
6. Sperling, L.: Selbstsynchronisation statisch und dynamisch unwuchtiger Vibratoren. Teil I: Grundlagen. Technische Mechanik 14, 1, (1994), 61 – 76.
7. Sperling, L.: Selbstsynchronisation statisch und dynamisch unwuchtiger Vibratoren. Teil II: Ausführung und Beispiele. Technische Mechanik 14, 2, (1994), 85 – 96.

Die Arbeit entstand im Rahmen eines von der Deutschen Forschungsgemeinschaft geförderten Forschungsprojektes (Nr. Sp 462/2-1) zum Thema „Selbstsynchronisation und Kreiseffekte in der Schwingungstechnik“.

---

*Anschriften:* Dipl.-Phys. Falk Merten, Professor Dr.-Ing. habil. Lutz Sperling, Institut für Mechanik, Otto-von-Guericke-Universität, Postfach 4120, 39016 Magdeburg