

Zum Problem der mathematischen Modellierung in der Ophthalmologie

A.N. Mironov, B.N. Semenov

Es wird eine mathematische Modellierung auf ein Problem der Ophthalmologie angewandt, und zwar auf Plombenaufnähmung bei Netzhautablösung. Die Schichtenstruktur der äußeren Lederhaut und die elastische Verformung der Plombe werden vernachlässigt, und die Plombierung wird als Kontaktproblem einer homogenen elastischen Schale mit einem harten Stempel betrachtet. Spannungs- und Verzerrungszustand der Schale und ihre Abhängigkeit von der Belastung werden untersucht.

In den letzten Jahren hat die Anwendung von mathematischen Methoden in der Medizin stark zugenommen, weil die mathematische Modellierung es gestattet, das komplizierte Zusammenspiel von verschiedenen Faktoren bei modernen Operationsmethoden zu verfolgen.

Bei der hier untersuchten Operation wird die äußere Lederhaut (Sclera) mittels einer relativ harten Plombe nach innen bis zu ihrer Einpassung in die abgelöste Netzhaut (Retina) eingedrückt. Dabei sind die Größe der Plombe und der Druck zu optimieren und die dabei entstehenden Spannungen und Verformungen zu berechnen.

Es werden

1. die Lederhaut als eine dünne elastische homogene Kugelschale,
2. die abgelöste Netzhaut als ein Teil der dünnen, an der inneren Fläche der Kugelschale liegenden Schicht, ähnlich einer Blase zwischen der Kugelschale und dieser Schicht,
3. die Plombe als ein harter Stempel in Form eines Rotationsellipsoides mit den Halbachsen $a = b$ und c , der im Bereich der abgelösten Netzhaut in die Kugelschale vom außen hineingedrückt wird,

modelliert.

Die Orientierung der Halbachsen des Ellipsoides ist im Bild 1 dargestellt.

Betrachtet wird der drehsymmetrische Fall dieses Kontaktproblems mit der Symmetrieachse Z . Wegen der Drehsymmetrie kann für die geometrische Darstellung des Problems das folgende Koordinatensystem r, θ ($0 < \theta < \pi$) benutzt werden. Der Abstand eines Punktes von der Symmetrieachse Z wird hier mit r und der Winkel zwischen der Symmetrieachse Z und dem Strahl vom Nullpunkt durch diesen Punkt wird mit θ bezeichnet. Der Stempel wird mit der Kraft P in die Schale hineingedrückt und dann mit nicht deformierbaren Fäden längs des Parallelkreises $\theta = \theta_0$ an die Schale angenäht. Bei der Modellbildung wird die auf den Stempel wirkende Kraft P durch gleichmäßig längs des Parallelkreises $\theta = \theta_0$ verteilte Kräfte Y kompensiert. Diese Kräfte Y bilden mit der Normalen in den Punkten des Parallelkreises $\theta = \theta_0$ den Winkel γ . Der Abstand der Parallelen $\theta = \theta_0$ zur Symmetrieachse Z ist Rx_1 .

Es wird angenommen,

1. daß es keine Reibung zwischen Plombe und Schale gibt, d.h., daß die Schubspannungen auf der Kontaktfläche vernachlässigt werden können,
2. daß der Abstand Rx_1 vom Parallelkreis, an den die Plombe angenäht wird, bis zur Symmetrieachse und der Diameter \bar{x} der Kontaktfläche wesentlich kleiner als der Radius R der Schale sind.

Damit kann die Schale längs des Parallelkreises $\theta = \theta_0$ in zwei Teile geteilt werden. Ein Teil davon, Schale 1 ($0 < \theta < \theta_0$), ist wegen der 2. Annahme flach (Bild 1).

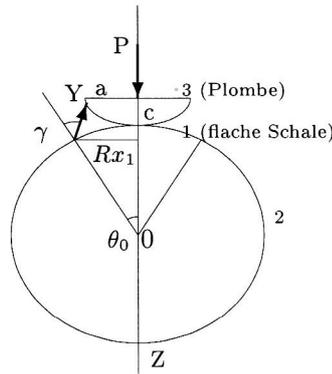


Bild 1. Darstellung vom Schnitt des Modells längs der Symmetrieachse

Die Gleichgewichtsgleichungen für eine flache Schale bei der Wirkung einer längs des Parallelkreises ξ (in unserem Fall $\xi = \sin(\theta_0) = R x_1 / R$) gleichmäßig verteilten Kraft der Intensität 1 werden in folgender Form geschrieben (Art'uchin und Karasev, 1990):

$$\Delta \Delta w - \frac{R}{D} \Delta F = \frac{R^2}{2\pi D x} \delta(x - \xi)$$

$$E R h \Delta w + \Delta \Delta F = 0 \quad (1)$$

Darin bedeuten w die Durchbiegung, F die Spannungsfunktion, h die Dicke, R den Radius der Schale, E den Elastizitätsmodul, ν die Poissonsche Zahl, δ die δ -Funktion, r den Abstand bis zur Achse Z . Ferner gilt

$$D = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)} \quad x = \frac{r}{R} \quad \Delta = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx}$$

Die allgemeine Lösung der Gleichungen (1) kann man in der Form

$$w = w_1 + w_2 + G \quad \text{und} \quad F = F_1 + \bar{F}$$

darstellen, wobei w_1 , w_2 und F Lösungen der homogenen Gleichungen, sowie G und \bar{F} die Fundamentallösungen vom System (1) sind.

Die Funktionen w_1 , w_2 , G , F und \bar{F} sehen folgendermaßen aus (Art'uchin und Karasev, 1990; Korenev, 1971):

$$w_1 = C_1 \text{ber}(\varepsilon x) + C_2 \text{bei}(\varepsilon x) + C_3 \text{ker}(\varepsilon x) + C_4 \text{kei}(\varepsilon x)$$

$$w_2 = C_5 \ln(x) + C_6 \quad \text{mit} \quad \varepsilon^4 = \frac{R^2 E h}{D}$$

$$G(x, \xi) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq \xi \\ \frac{R^2}{2\pi D \varepsilon^2} [-\text{kei}(\varepsilon x) \text{ber}(\varepsilon \xi) - \text{ker}(\varepsilon x) \text{bei}(\varepsilon \xi) + \\ \quad + \text{bei}(\varepsilon x) \text{ker}(\varepsilon \xi) + \text{ber}(\varepsilon x) \text{kei}(\varepsilon \xi)] & \text{für } x > \xi \end{cases}$$

$$F_1 = \frac{D}{R} \Delta w_1 + B_1 + B_2 \ln(x)$$

$$\bar{F} = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq \xi \\ \frac{D}{R} \Delta G(x, \xi) - \frac{R}{2\pi} \ln\left(\frac{x}{\xi}\right) & \text{für } x > \xi \end{cases} \quad (2)$$

durch *ber*, *bei*, *ker* und *kei* werden die Kelvin-Thomson- Funktionen bezeichnet. Die Funktion G genügt der Gleichung

$$\Delta \Delta G + \frac{R^2 E h}{D} G = \frac{R^2}{2\pi D x} \delta(x - \xi)$$

Für Kontaktspannungen $\sigma(x)$ ist die folgende Gleichung auf der Kontaktfläche gültig (Art'uchin und Kurasev, 1977, 1990; Popov, 1975):

$$\alpha \sigma(x) + 2\pi R^2 \int_0^{\bar{x}} G(x, \xi) \sigma(\xi) \xi d\xi = -w_1(x) - w_2(x) + f(x) + 2\pi R^2 p \int_0^{\bar{x}} G(x, \xi) \xi d\xi \quad (3)$$

$$\text{für } 0 < x < \bar{x} \quad \text{mit } \alpha = \frac{13(1-\nu^2)h}{32E}$$

Hier bedeuten p die Änderung des Augeninnendruckes, \bar{x} die Grenze der Kontaktfläche, $f(x)$ eine von der Form und der Verschiebung des Stempels abhängende Funktion.

Die Funktion $f(x)$ wird in der Nähe von $x = 0$ durch folgende Zerlegung approximiert:

$$f(x) = a_0 + a_1 x^2 + a_2 x^4$$

Dabei wird der Koeffizient a_0 durch eine starre Verschiebung des Stempels bestimmt. Die Koeffizienten a_1 und a_2 hängen von der Form des Stempels ab. Nach Anwendung des Operators

$$L = \Delta \Delta + \frac{R^2 E h}{D}$$

auf Gleichung (3) gelangt man zur Differentialgleichung

$$\alpha L \sigma(x) + \frac{R^4}{D} \sigma(x) = -Lw_1 - Lw_2 + Lf + \frac{R^4}{D} p \quad (4)$$

Die allgemeine Lösung der Gleichung (4) kann in der Form

$$\sigma(x) = \sigma_1(x) + \sigma_2(x)$$

dargestellt werden. Hier bedeutet $\sigma_1(x)$ die Lösung der homogenen Gleichung (4)

$$\sigma_1(x) = A_1 \text{ber}(\kappa x) + A_2 \text{bei}(\kappa x) + A_3 \text{ker}(\kappa x) + A_4 \text{kei}(\kappa x) \quad (5)$$

$$\text{mit } \kappa^4 = \frac{R^2}{D\alpha} (R^2 + \alpha E h)$$

sowie $\sigma_2(x)$ die spezielle Lösung

$$\sigma_2(x) = \frac{R^2 p}{R^2 + \alpha E h} - z w_2 + z f + z_1$$

$$\text{mit } z = \frac{E h}{R^2 + \alpha E h} \quad \text{und } z_1 = \frac{64 D a_2}{(R^2 + \alpha E h)^2}$$

Wird $\sigma(x)$ mit Hilfe der Gleichung (4) ausgedrückt und in Gleichung (3) eingesetzt, so erhält man nach der Integration eine Gleichung, die 4 linear unabhängige Funktionen (*ber*, *bei*, *ker*, *kei*) enthält.

$$\xi \left(G \frac{d}{d\xi} \Delta_\xi y - y \frac{d}{d\xi} \Delta_\xi G + \frac{dy}{d\xi} \Delta_\xi G - \Delta_\xi y \frac{dG}{d\xi} \right) \Big|_0^{\bar{x}} = \frac{R^2}{2\pi D} w_1 \quad (6)$$

wobei

$$y(\xi) = \alpha \sigma_1(\xi) + w_2(\xi) - f(\xi) + \alpha p + \alpha z_1$$

$$\Delta_\xi = \frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi}$$

Wenn man in Gleichung (6) die Koeffizienten von links und von rechts bei gleichen Funktionen gleichsetzt, erhält man ein System von algebraischen Gleichungen für die Bestimmung der unbekanntenen Koeffizienten, die in Gleichung (2) eingehen.

Es ist notwendig, zu diesen Gleichungen noch die Gleichgewichtsbeziehung des Stempels

$$P = |Y 2\pi R x_1 \cos(\gamma - \theta_0)| = 2\pi R^2 \int_0^{\bar{x}} x \sigma(x) dx$$

und die Bedingung $\sigma(\bar{x}) = 0$ hinzuzufügen und eine Beschränkung der Lösung im Punkt $x = 0$ zu verlangen. Der Spannungszustand in der Schale 2 wird nach dem in der Monographie von Novozhilov (1962) angegebenen Verfahren berechnet. Die Bedingungen der Schalenkopplung kann man in der Form

$$w^2 |_{\theta=\theta_0} = -w^1 |_{x=x_1}$$

$$u^2 |_{\theta=\theta_0} = u^1 |_{x=x_1}$$

$$\vartheta^2 |_{\theta=\theta_0} = -\vartheta^1 |_{x=x_1}$$

$$M_1^2 |_{\theta=\theta_0} = -M_1^1 |_{x=x_1}$$

$$T_1^2 |_{\theta=\theta_0} = T_1^1 |_{x=x_1} - Y \sin \gamma$$

$$N_1^2 |_{\theta=\theta_0} = N_1^1 |_{x=x_1} + Y \cos \gamma$$

schreiben, wobei $x_1 = \sin \theta_0$ ist.

Auf diese Weise erhält man ein System von nichtlinearen algebraischen Gleichungen bezüglich der unbekanntenen Koeffizienten in den Gleichungen (2) und (5) und der unbekanntenen Grenze der Kontaktfläche \bar{x} . Dieses System wird numerisch behandelt, und die Kontaktgrenze wird mittels einer Iterationsmethode bestimmt.

In den Bildern 2 und 3 sind die Berechnungsergebnisse für einen Stempel von der Form eines Rotationsellipsoids mit den Halbachsen $a = b = 12$ mm, $c = 3$ mm und einer Augenschale mit den Parametern $E = 14,3$ MPa, $\nu = 0,45$, $h = 1$ mm, $R = 12$ mm, $\gamma = \frac{\pi}{4}$, $x_1 = 0,3$, $p = 10$ Torr dargestellt.

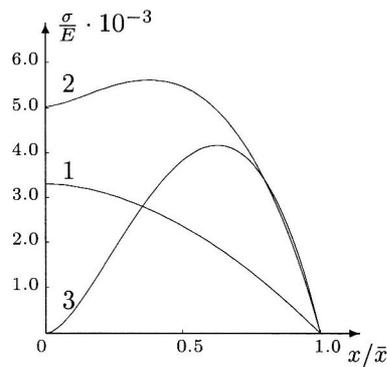


Bild 2. Verteilung Kontaktspannungen σ/E unter dem Stempel

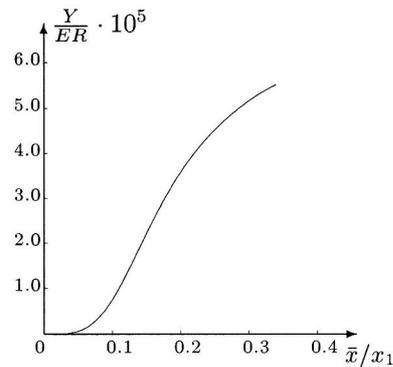


Bild 3. Abhängigkeit der Randbelastung vom Durchmesser der Kontaktfläche

In Bild 2 ist die Verteilung der dimensionslosen Kontaktspannungen σ/E unter dem Stempel bei folgenden dimensionslosen Kräften $Y/(ER)$ dargestellt: 1) $6,6 \cdot 10^{-7}$, 2) $4,86 \cdot 10^{-5}$, 3) $5,5 \cdot 10^{-5}$. In Bild 3 wird die Abhängigkeit der Randbelastung vom Durchmesser der Kontaktfläche angegeben.

Es sei erwähnt, daß bei der Lösung angenommen wurde, daß der Anfangsinnendruck in der nicht deformierten Schale gleich dem Außendruck ist. Da die Deformationen sehr klein sind, kann der Einfluß vom Innendruck, der sich vom Außendruck unterscheidet, einfach mittels Superposition berücksichtigt werden.

Die im Artikel beschriebenen Untersuchungen wurden durch die finanzielle Unterstützung über das Projekt 95-01-00590 des Russischen Programms für Grundlagenforschung ermöglicht.

Literatur

1. Art'uchin, J.P.; Karasev, S.N.: Anwendung der genauer bestimmten Schalentheorie bei der Lösung von Kontaktproblemen. Schalentheorie mit Berücksichtigung des Querschubs. (1977), 132–153.
2. Art'uchin, J.P.; Karasev, S.N.: Wirkung von Kreisstempeln auf spherische Schalen. Proc. of XV Conf. of Plates and Shells Theory, Kazan, vol.1, (1990), 3–8. (in Russisch)
3. Bauer, S.M.; Zimin, B.A.; Mironov, A.N.; Kachanov, A.B.; Begun, P.I.: Mathematische Modellierung des Spannungszustandes des Auges bei Zirklage. Beiträge LPMI "Verletzungen des Sehorgans bei Kindern", (1991), 57–64. (in Russisch)
4. Korenev, B.G.: Einführung in die Theorie der Besselschen Funktionen. Moskau, (1971). (in Russisch)
5. Novozhilov, V.V.: Theory of thin shells. Leningrad, (1962). (in Russisch)
6. Popov, G.J.: Kontaktprobleme für Platten und Schalen. Proc. of Conf. of Theory of Plates and Shells, Kutaisi, (1975). Tbilisi, „Mezniereba“, vol.1, (1975), 244–250. (in Russisch)

Anschrift: Dr. A.N. Mironov und Professor Dr. B.N. Semenov, Fakultät für Mathematik und Mechanik, Staats-Universität Sankt Petersburg, Bibliotechnaya pl. 2, Stary Peterhof, RUS-198904 St. Petersburg, E-mail: bns@sem.niimm.spb.su