

# Modalanalyse an Strukturen mit Kreiselwirkung symmetrischer und unsymmetrischer Rotoren

J. Bienert

*Die Berücksichtigung von Kreiselwirkungen in der Rotordynamik führt auf drehzahlabhängige Differentialgleichungen. Ist der Rotor in seinen Trägheitseigenschaften unsymmetrisch, so treten außerdem zeitvariante Matrizen auf. Es liegt dann ein parametererregtes Schwingungssystem vor. Diese Eigenschaften der Struktur erschweren die 'Experimentelle Modalanalyse'. Es werden Modifikationsverfahren vorgeschlagen, welche es ermöglichen, die Messung bei stehendem Rotor durchzuführen und den Kreiseleinfluß nachträglich in einer Modifikationsrechnung zu berücksichtigen.*

## 1 Einleitung

In der Rotordynamik muß immer dann, wenn ein starrer Rotor an eine schwingende Struktur gekoppelt wird und Schrägstellungen der Scheibe möglich sind, der Drallsatz in der Bewegungsdifferentialgleichung berücksichtigt werden. Dabei ist die Unterscheidung, ob es sich bezüglich der Trägheitsmatrix um einen symmetrischen oder unsymmetrischen Rotor handelt, wesentlich. Im symmetrischen Fall tritt in der Bewegungsgleichung lediglich eine schiefsymmetrische Matrix proportional zur Drehzahl auf, die sogenannte gyroskopische Matrix. Durch diese werden die beiden Drehfreiheitsgrade der Schrägstellung der Scheibe miteinander gekoppelt. Beim unsymmetrischen Rotor treten zusätzlich periodisch-zeitvariante Koeffizienten sowohl in der Massen- als auch in der gyroskopischen Matrix auf.

Bei der Aufstellung der Bewegungsgleichung, bei der die Systemmatrizen der Struktur ohne rotierende Anteile z.B. mit der Finite-Element-Methode (FEM) erzeugt wurden, muß diese um Anteile des Rotors ergänzt werden. Nachteilig wirkt sich hierbei die sehr große Anzahl an Freiheitsgraden oder die ungenaue Modellbildung der Diskretisierungsverfahren aus. Außerdem ist in vielen Fällen kein FEM-Modell vorhanden, so daß man das Schwingungsverhalten der Struktur experimentell an einem Prototyp ermitteln möchte. Hierzu ist die 'Experimentelle Modalanalyse' bei Systemen ohne Kreiseleinfluß eine geeignete Methode, um aus Messungen von Übertragungsfunktionen die Eigenschwingungsparameter zu ermitteln. Bei Systemen mit Kreiseleinfluß ist das Übertragungsverhalten jedoch drehzahlabhängig und bei Messungen mit Rotation treten ungewollte Störungen wie Unwuchterregungen oder Lagerrauschen auf. Eine Messung bei stehendem Rotor ist deshalb vorzuziehen.

Ziel ist es, bei stehendem Rotor zu messen und den Kreiseleinfluß des Rotors nachträglich zu berücksichtigen. Es bieten sich hierfür zwei Vorgehensweisen an. Bei den nichtparametrischen Verfahren wird das gemessene Übertragungsverhalten für die gewünschte Drehzahl korrigiert. Dies ist, wie noch erläutert wird, nur für symmetrische Rotoren möglich. Das zweite, parametrische Verfahren basiert auf den Modaldaten der nichtrotierenden Struktur und stellt in dessen Modalraum eine Bewegungsgleichung auf, welche dann mit üblichen Verfahren gelöst werden kann. Das Verfahren ist für symmetrische und unsymmetrische Rotoren geeignet.

## 2 Bewegungsgleichung für mechanische Systeme mit starren Rotoren

Zur Herleitung der Bewegungsgleichung sei die synthetische Methode gewählt. Im Mittelpunkt steht die Bewegungsgleichung des als starr angenommenen Rotors, für den die Kreiselmechanik anzuwenden ist.

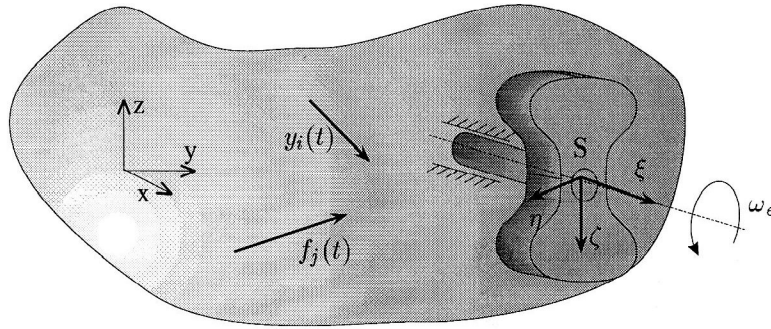


Bild 1. Schwingende Struktur mit starrem, unsymmetrischem Rotor

Bild 1 zeigt eine schwingungsfähige, elastische Struktur mit aufgesetztem, starrem Rotor. Nach Freischnitten des Rotors von der Welle gelten für den Kreisel der Schwerpunktsatz

$$\vec{F} = m \vec{a}_S \quad (1)$$

und der Momentensatz bezüglich des Schwerpunkts  $S$

$$\vec{M}^{(S)} = \frac{d_F}{dt}(\mathcal{J}^{(S)})\vec{\omega} + \mathcal{J}^{(S)} \frac{d_F}{dt}\vec{\omega} + \vec{\omega}_F \times (\mathcal{J}^{(S)}\vec{\omega}) \quad (2)$$

Es wird hierbei ein Führungssystem  $\xi, \eta, \zeta$  verwendet, welches nur einen Teil der Bewegung, nämlich die Drehungen um die  $\eta$ - und  $\zeta$ -Achse mitmacht. Somit unterscheidet sich die Führungswinkelgeschwindigkeit

$$\vec{\omega}_F = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_\eta \\ \omega_\zeta \end{pmatrix} \quad (3)$$

von der absoluten Winkelgeschwindigkeit

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_\xi = \omega_e \\ \omega_\eta \\ \omega_\zeta \end{pmatrix} \quad (4)$$

Die Differenz zwischen beiden ist gleich der Drehwinkelgeschwindigkeit (Drehzahl)  $\omega_e$  des Rotors um die Figurenaxe  $\xi$ . Der Vorteil dieses Führungssystems liegt darin, daß die Winkelgeschwindigkeiten um  $\eta$  und  $\zeta$  denen im Inertialraum gleichen und die Transformation der Matrix der Massenträgheitsmomente  $\mathcal{J}^{(S)}$  nur mit dem Drehwinkel um die Figurenaxe zu erfolgen braucht. Nach der Mohrschen Transformationsvorschrift folgen mit den körperfesten Hauptträgheitsmomenten  $J_1, J_2, J_3$  die Koordinaten in der Trägheitsmatrix bezüglich des Führungssystems

$$J_\xi = J_1, \quad (5)$$

$$J_{\eta\eta} = \frac{1}{2}(J_2 + J_3) + \frac{1}{2}(J_2 - J_3) \cos(2\omega_e t) \quad (6)$$

$$J_{\zeta\zeta} = \frac{1}{2}(J_2 + J_3) - \frac{1}{2}(J_2 - J_3) \cos(2\omega_e t) \quad (7)$$

$$J_{\eta\zeta} = \frac{1}{2}(J_2 - J_3) \sin(2\omega_e t). \quad (8)$$

Die Größe  $\Delta J$  ist dabei ein Maß für die Unsymmetrie des Rotors. Für  $\Delta J = 0$  liegt ein symmetrischer Rotor vor. Der Rotor sei vollständig ausgewuchtet, so daß alle weiteren Trägheitskoordinaten verschwinden. Nach der Kopplung des Rotors an die Struktur folgt die Bewegungsgleichung für das Gesamtsystem

$$(\mathbf{M} + \Delta\mathbf{M}(t)) \ddot{\mathbf{y}}(t) + (\mathbf{B} + \mathbf{G} + \Delta\mathbf{G}(t)) \dot{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{y}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (9)$$

Hierin sind  $\mathbf{M}, \mathbf{B}$  und  $\mathbf{K}$  die üblichen Massen-, Dämpfungs- und Steifigkeitsmatrizen des Schwingungssystems. Aus dem Kreiseinfluß kommen diejenigen Matrizen  $\mathbf{G}, \Delta\mathbf{G}(t), \Delta\mathbf{M}(t)$  hinzu, welche von der

Drehwinkelgeschwindigkeit  $\omega_e$  abhängen. Sie verschwinden bei stehendem Rotor. Mit einem Freiheitsgradvektor  $\mathbf{y} = [\dots, \varphi_\eta, \varphi_\zeta]$  tritt beim symmetrischen Rotor

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & 0 & 0 & J_1 \omega_e \\ \dots & 0 & -J_1 \omega_e & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

als schiefsymmetrische, gyroskopische Matrix auf. Für den unsymmetrischen Rotor kommen noch zwei weitere, drehzahlabhängige und zeitvariante Matrizen

$$\Delta \mathbf{M}(t) = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & 0 & \Delta J \cos(2\omega_e t) & -\Delta J \sin(2\omega_e t) \\ \dots & 0 & -\Delta J \sin(2\omega_e t) & -\Delta J \cos(2\omega_e t) \end{bmatrix} \text{ und} \quad (11)$$

$$\Delta \mathbf{G}(t) = -2\omega_e \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & 0 & \Delta J \sin(2\omega_e t) & \Delta J \cos(2\omega_e t) \\ \dots & 0 & \Delta J \cos(2\omega_e t) & -\Delta J \sin(2\omega_e t) \end{bmatrix} \quad (12)$$

hinzu. Die Bewegungsgleichung ist somit in jedem Fall drehzahlabhängig. Bei unsymmetrischen Rotoren liegt wegen der Zeitvarianz der Koeffizienten ein Schwingungssystem mit Parametererregung vor. Im folgenden wird die Drehwinkelgeschwindigkeit  $\omega_e$  als konstant vorausgesetzt, so daß die Parametererregung periodisch-zeitvariant wird. Die Periode der Parameter ist die halbe Periode der Rotation, so daß sich die Systemmatrizen nach einer halben Umdrehung gleichen.

### 3 Experimentelle Modalanalyse - Strukturmodifikation

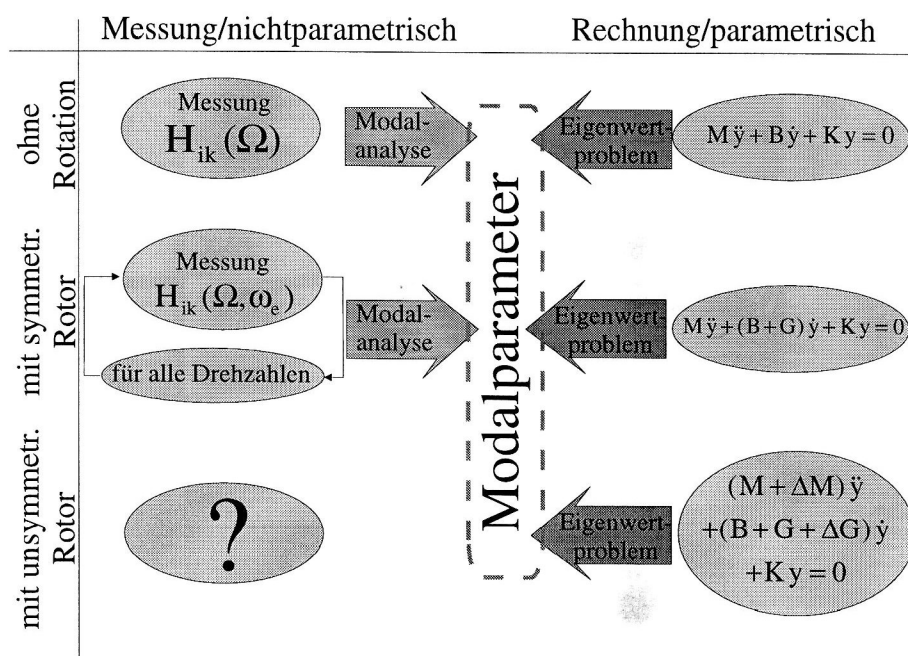


Bild 2. Modalanalyse für verschiedene Systeme

Die Bewegungsgleichungen der drei Systeme ohne Rotation, mit rotierendem, symmetrischem Rotor und rotierendem, unsymmetrischem Rotor unterscheiden sich qualitativ voneinander, so daß diese in Bild 2 unterschieden werden. Für den Fall, daß die Bewegungsgleichungen bekannt sind, führen verschiedene Formulierungen von Eigenwertproblemen zu den gesuchten Modalparametern der Strukturen. Hier soll jedoch der experimentelle Weg über die Messung von Übertragungsfunktionen verfolgt werden. Bei

Systemen mit symmetrischen und zeitinvarianten Matrizen ist die Identifikation der Modalparameter ein Standardverfahren. Dieses ist grundsätzlich auch bei Strukturen mit rotierendem, symmetrischem Rotor anzuwenden. Die Schwierigkeiten liegen zum einen in der unsymmetrischen Übertragungsmatrix aber vor allem in der Drehzahlabhängigkeit der Übertragungsfunktionen. Somit muß grundsätzlich für alle interessierenden Drehzahlen eine Messung durchgeführt werden, was einen extrem hohen Meßaufwand bedeuten kann. Bei Systemen mit Parametererregung ist zunächst einmal überhaupt keine Identifikation möglich.

Es ist deshalb sinnvoll die Messung am nichtrotierenden System durchzuführen und den Kreiseinfluß nachträglich mit Hilfe der Strukturmodifikation zu berücksichtigen. Dazu werden zwei prinzipielle Verfahren in Bild 3 skizziert.

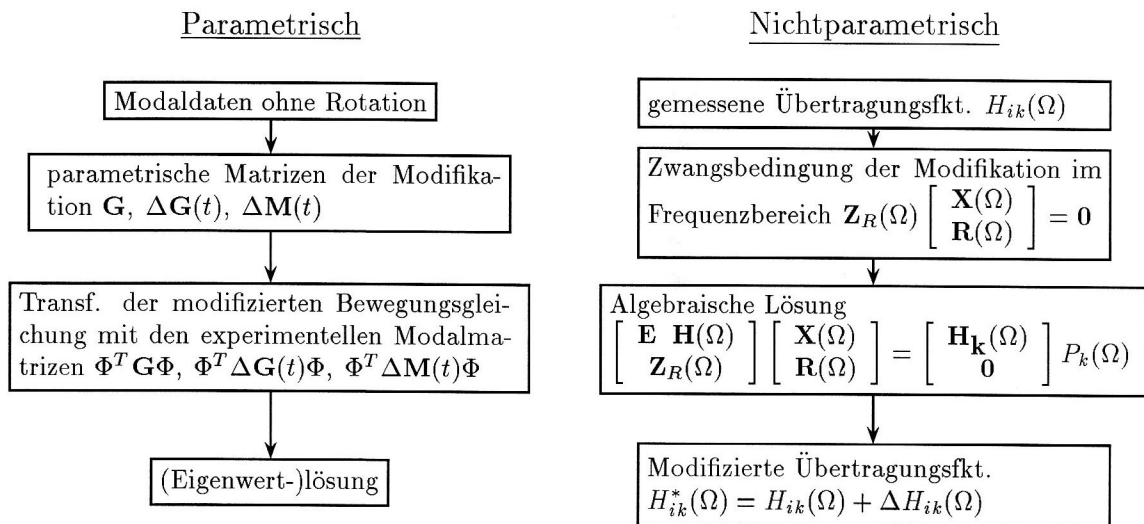


Bild 3. Verfahren zur Strukturmodifikation

#### 4 Symmetrischer Rotor - Nichtparametrische Verfahren

Die nichtparametrischen Verfahren, welche auf modifizierte Übertragungsfunktionen abzielen, sind wegen des komplizierten Übertragungsverhaltens der parametererregten Systeme nur auf Systeme mit symmetrischen Rotoren anwendbar (siehe auch Gleichung (29)).

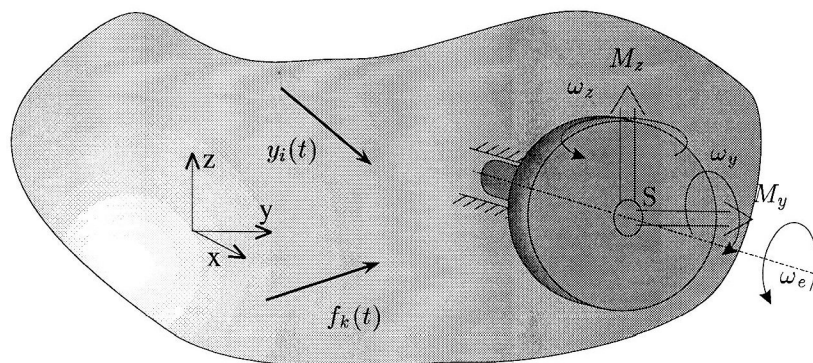


Bild 4. Übertragungsverhalten einer Struktur mit symmetrischem Rotor

Das Übertragungsverhalten  $H_{ik}^*(\Omega)$  zwischen der Wegantwort  $y_i$  am Ort  $i$  und der Erregerkraft  $f_k$  am Ort  $k$  bei der Frequenz  $\Omega$  und der Drehwinkelgeschwindigkeit  $\omega_e$  ist von Interesse. Dieses soll in der Form

$$H_{ik}^*(\Omega) = H_{ik}(\Omega) + \Delta H_{ik}(\Omega, J_1 \omega_e) \quad (13)$$

ausgedrückt werden, wobei  $H_{ik}(\Omega)$  die Funktion bei stehendem Rotor und  $\Delta H_{ik}(\Omega, J_1 \omega_e)$  ein analytischer Modifikationsterm ist. Dazu müssen die durch die Rotation entstehenden, zusätzlichen Kreiselmomente



aus den gyroskopischen Anteilen in der Bewegungsgleichung berücksichtigt werden. Diese treten auf, wenn der Rotor bei der Schwingung Kippbewegungen durchläuft. Sie werden im unteren Teil des Gleichungssystems (14) im Frequenzbereich berücksichtigt

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & H_{i,S\Phi_y} & H_{i,S\Phi_z} \\ 0 & 1 & 0 & H_{S\Phi_y,S\Phi_y} & H_{S\Phi_y,S\Phi_z} \\ 0 & 0 & 1 & H_{S\Phi_z,S\Phi_y} & H_{S\Phi_z,S\Phi_z} \\ 0 & 0 & i\Omega J_1\omega_e & -1 & 0 \\ 0 & -i\Omega J_1\omega_e & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_i \\ Y_{S\Phi_y} \\ Y_{S\Phi_z} \\ M_{S\Phi_y} \\ M_{S\Phi_z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{ik} \\ H_{S\Phi_y,k} \\ H_{S\Phi_z,k} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} F_k \quad (14)$$

In diesem Gleichungssystem stehen die unbekanntenen Größen über verschiedene Übertragungsfunktionen mit der Erregerkraft in Zusammenhang. Das algebraische Auflösen nach der gesuchten Größe  $Y_i$  liefert einen linearen Zusammenhang mit der Erregerkraft  $F_k$ , welcher der gesuchten Übertragungsfunktion  $H_{ik}^*(\Omega)$  entspricht. Hieraus läßt sich der Modifikationsterm  $\Delta H_{ik}(\Omega, J_1\omega_e)$  leicht abspalten:

$$\begin{aligned} \Delta H_{ik} &= \frac{1}{N} (i\Omega J_1\omega_e (H_{i,S\Phi_z} H_{S\Phi_y,k} - H_{i,S\Phi_y} H_{S\Phi_z,k}) \\ &+ (i\Omega)^2 (J_1\omega_e)^2 (-H_{i,S\Phi_z} H_{S\Phi_y,S\Phi_y} H_{S\Phi_z,k} + H_{i,S\Phi_y} H_{S\Phi_y,S\Phi_z} H_{S\Phi_z,k}) \\ &+ (i\Omega)^2 (J_1\omega_e)^2 (H_{i,S\Phi_z} H_{S\Phi_y,k} H_{S\Phi_z,S\Phi_y} - H_{i,S\Phi_y} H_{S\Phi_y,k} H_{S\Phi_z,S\Phi_z})) \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} N &= 1 - i\Omega J_1\omega_e (H_{S\Phi_y,S\Phi_z} + H_{S\Phi_z,S\Phi_y}) \\ &+ (i\Omega)^2 (J_1\omega_e)^2 (H_{S\Phi_y,S\Phi_z} H_{S\Phi_z,S\Phi_y} - H_{S\Phi_y,S\Phi_y} H_{S\Phi_z,S\Phi_z}) \end{aligned} \quad (16)$$

Der Term ist im Frequenzbereich numerisch schnell auswertbar. Die wesentliche Aufgabe besteht in der Messung der in den Gleichungen (15),(16) benötigten Funktionen. Dies sind im wesentlichen Übertragungsfunktionen bezüglich der Drehfreiheitsgrade des Rotorschwerpunkts. Alle Funktionen können jedoch bei stehendem Rotor gemessen werden. Die Modifikationsgleichung ist anschließend für jede beliebige Drehzahl auswertbar.

## 5 Unsymmetrischer Rotor

### 5.1 Parametererregte Systeme

#### 5.1.1 Homogene Bewegungsgleichung

Bevor die Kreiselmofifikation für unsymmetrische Rotoren angewendet wird, soll zuvor auf die schwierigere mathematische Beschreibung des Schwingungsverhaltens parametererregter Systeme eingegangen werden.

Die Bewegungsgleichung (9) wird dazu mit dem Zustandsvektor  $\mathbf{x}^T = [\mathbf{y}^T \dot{\mathbf{y}}^T]$  (Dimension  $2f$ ) in den Zustandsraum überführt:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} + \mathbf{G} + \Delta\mathbf{G} & \mathbf{M} + \Delta\mathbf{M} \\ \mathbf{M} + \Delta\mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{M} - \Delta\mathbf{M} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{f}(t) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$\mathbf{A}_1(t) \dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{A}_0(t) \mathbf{x}(t) = \mathbf{p}(t) \quad (18)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \underbrace{-\mathbf{A}_1^{-1}(t)\mathbf{A}_0(t)}_{\mathbf{A}(t)} \mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_1^{-1}(t) \mathbf{p}(t) \quad (19)$$

Dabei ist auch die neue Systemmatrix  $\mathbf{A}(t + T_P) = \mathbf{A}(t)$  periodisch, wegen  $\Delta\mathbf{M}(t + T_P) = \Delta\mathbf{M}(t)$  und  $\Delta\mathbf{G}(t + T_P) = \Delta\mathbf{G}(t)$ . Die Parameterkreisfrequenz ist  $\Omega_P = 2\omega_e$  und hängt unmittelbar mit der Periode der Systemmatrix zusammen  $T_P = \frac{2\pi}{2\omega_e}$ .

Die Lösung der homogenen Gleichung steht zunächst im Vordergrund, da aus der Theorie der parametererregten Systeme bekannt ist, daß bei bestimmten Parameterkonstellationen, in diesem Fall der Parameter  $\Delta J$  und  $\omega_e$ , instabile homogene Lösungen auftreten können.

Die fundamentale Lösung kann in Form der Zustandsüberführungsmatrix (Transitionsmatrix) angegeben werden, welche ebenfalls die Differentialgleichung erfüllt:

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0) \mathbf{x}(t_0) \quad (20)$$

$$\dot{\Phi}(t) = \mathbf{A}(t) \Phi(t) \quad (21)$$

Für den vorliegenden Sonderfall der Periodizität gilt

$$\Phi(t + T_P) = \Phi(t) \mathbf{C} \quad (22)$$

mit der konstanten Matrix  $\mathbf{C}$ , so daß die numerische Berechnung der Transitionsmatrix innerhalb einer Periode ausreicht. Die Eigenwerte von  $\mathbf{C}$  werden 'Charakteristische Multiplikatoren' genannt. Nach einem Satz von Floquet kann die Lösung in der Form

$$\Phi(t) = \mathbf{P}(t) e^{\mathbf{R}t} \quad \text{mit} \quad \mathbf{C} = e^{\mathbf{R}T_P} \quad (23)$$

geschrieben werden. Die Eigenwerte von  $\mathbf{R}$  heißen 'Charakteristische Exponenten' und  $\mathbf{P}(t)$  ist periodisch mit  $T_P$ . Die Matrix  $\mathbf{P}(t)$  ist dabei für eine Ljapunov-Transformation

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{P}(t) \mathbf{x}(t) \quad (24)$$

geeignet, welche die Differentialgleichung auf eine mit konstanten Koeffizienten transformiert:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \underbrace{\mathbf{P}^{-1}(t) (\mathbf{A}(t)\mathbf{P}(t) - \dot{\mathbf{P}}(t))}_{\text{const.}} \mathbf{z}(t) \quad (25)$$

Die Eigenschaften aus dem Satz von Floquet nutzt der Ansatz von Hill:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t} \mathbf{u}(t) \quad \text{mit} \quad \mathbf{u}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathbf{u}_k e^{ik\Omega_P t} \quad (26)$$

Der Ansatz beinhaltet somit einen zeitabhängigen, periodischen Eigenvektor in Form einer Fourierreihe. Nach der Fourierentwicklung der periodischen Systemmatrix

$$\mathbf{A}(t) = \sum_{a=-\infty}^{+\infty} \mathbf{A}_a e^{ia\Omega_P t} \quad (27)$$

und der Forderung nach harmonischer Balance kann ein Hypereigenwertproblem von unendlicher Dimension abgeleitet werden, dessen Struktur in Gleichung (28) angedeutet wird:

$$\left( \lambda \hat{\mathbf{E}} - \begin{bmatrix} \mathbf{A}_0 + i2\Omega_P \mathbf{E} & \mathbf{A}_{-1} & \mathbf{A}_{-2} & \mathbf{A}_{-3} & \mathbf{A}_{-4} \\ \mathbf{A}_{+1} & \mathbf{A}_0 + i\Omega_P \mathbf{E} & \mathbf{A}_{-1} & \mathbf{A}_{-2} & \mathbf{A}_{-3} \\ \mathbf{A}_{+2} & \mathbf{A}_{+1} & \mathbf{A}_0 & \mathbf{A}_{-1} & \mathbf{A}_{-2} \\ \mathbf{A}_{+3} & \mathbf{A}_{+2} & \mathbf{A}_{+1} & \mathbf{A}_0 - i\Omega_P \mathbf{E} & \mathbf{A}_{-1} \\ \mathbf{A}_{+4} & \mathbf{A}_{+3} & \mathbf{A}_{+2} & \mathbf{A}_{+1} & \mathbf{A}_0 - i2\Omega_P \mathbf{E} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{-2} \\ \mathbf{u}_{-1} \\ \mathbf{u}_0 \\ \mathbf{u}_{+1} \\ \mathbf{u}_{+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (28)$$

Die Beschränkung des Ansatzes auf  $-J \leq j \leq +J$  Glieder (in Gleichung (28)  $J = 2$ ) führt dazu, daß nur die interessierenden Fourierglieder in der Nähe des Konstantanteils bei  $j = 0$  berechnet werden, was in der Praxis völlig ausreicht. Somit reduziert sich die unendliche Dimension des Eigenwertproblems auf eine numerisch verträgliche Größe. Aus dem Ansatz (28) folgt eine Redundanz in den  $(2J + 1) 2f$ -Lösungen, da sich die Schwingungsfrequenz aus zwei Anteilen, im Eigenvektor und in der Exponentialfunktion, zusammensetzt. Mit einer Frequenzverschiebung im Eigenwert,  $\lambda_k = in\Omega_P + \lambda_l$ , geht eine Verschiebung im Eigenvektor einher. Nach Auswahl der  $2f$ -Lösungen kann die Lösung modal superponiert werden. Die Modalmatrix erfüllt dabei die Anforderungen für die Ljapunov-Transformation.

### 5.1.2 Inhomogene Bewegungsgleichung

An die Lösung der inhomogenen Gleichung für erzwungene Schwingungen gelangt man, indem die Bewegungsgleichung der Ljapunov-Transformation unterzogen wird. Die Berechnung des Antwortverhaltens

erfolgt dann wie bei einem System mit konstanten Koeffizienten. Einen zusätzlichen Aufwand stellt lediglich die Berechnung der Erregerkraftterme im Frequenzbereich sowie die Rücktransformation in den Zustandsraum dar, weil hier Produkte von zeitabhängigen Funktionen auftreten. Das Ergebnis ist

$$\mathbf{X}(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathbf{U}_k \operatorname{diag} \left[ \frac{1}{i(\Omega - k\Omega_P) - \lambda_n} \right] \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \tilde{\mathbf{U}}_l \mathbf{P}(\Omega - k\Omega_P - l\Omega_P) \quad (29)$$

$$\mathbf{U}_k = [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n, \dots, \mathbf{u}_{2f}]_k \quad \mathbf{u}_n(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathbf{u}_{n,k} e^{ik\Omega_P t} \quad (30)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}(t) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \tilde{\mathbf{U}}_l e^{il\Omega_P t} = \mathbf{U}^{-1}(t)$$

Es treten dabei Rechts- und Linksmodalmatrizen ( $\mathbf{U}_k, \tilde{\mathbf{U}}_l$ ) in Form von Fourierreihen auf. Das Antwortverhalten bei einer Frequenz  $\Omega$  hängt dabei von der Erregerkraft bei dieser Frequenz  $\Omega$  sowie von um Vielfache von  $\Omega_P$  verschobenen Frequenzen  $(k + l)\Omega_P$  ab. Das Übertragungsverhalten kann somit in Reihen von Übertragungsfunktionen angegeben werden.

## 5.2 Parametrische Verfahren

Möchte man an Systemen nach Bild 1 eine experimentelle Modalanalyse durchführen, so existieren zunächst einmal keine Identifikationsverfahren für ein solches Übertragungsverhalten (29). Die Anzahl der Parameter ist durch das Auftreten der Modalmatrizen in Reihen sehr hoch, so daß eine eindeutige Identifikation aus gemessenen Frequenzgängen fehleranfällig sein dürfte. Es ist daher günstig, die Messung am System ohne Rotation durchzuführen und die rotatorischen Anteile nachträglich in einer Modifikationsrechnung hinzuzufügen. Die Vorgehensweise zeigt Bild 5.

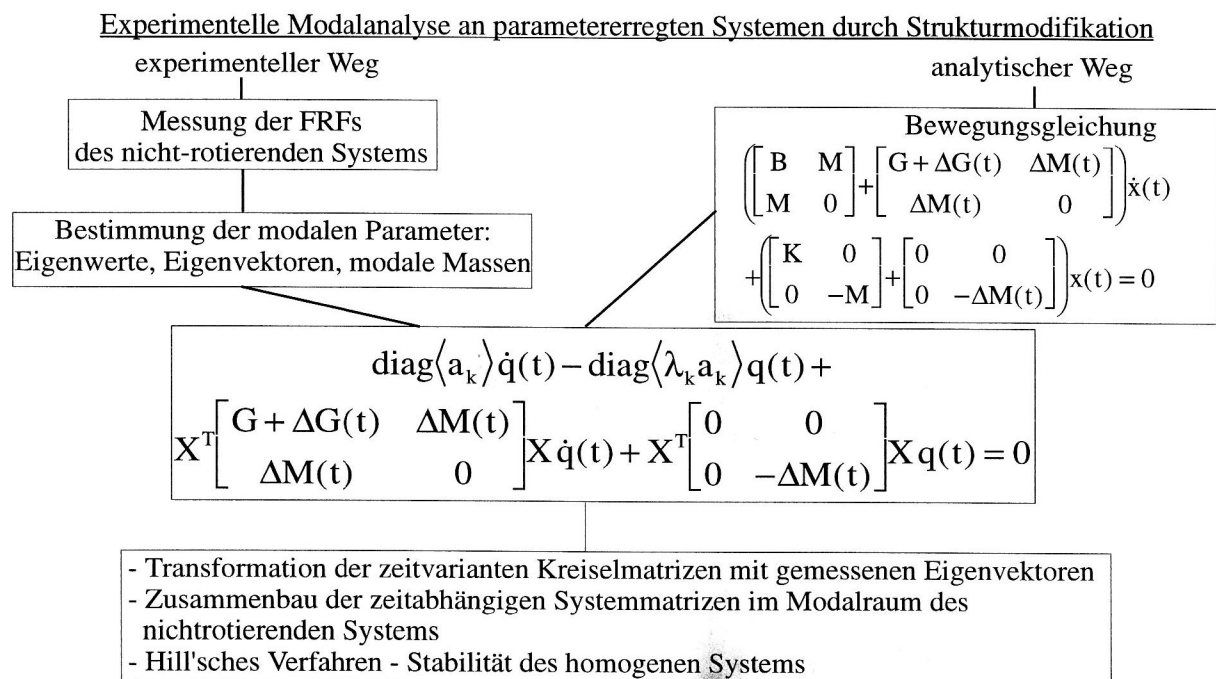


Bild 5. Parametrische Modifikation

Grundlage ist hierbei die Messung an der Struktur ohne Rotation und die anschließende Modalanalyse für dieses System mit konstanten Systemmatrizen. Die vollständige Bewegungsgleichung mit Kreiseltermen wird anschließend formal mit der Modalmatrix transformiert, und es entsteht dabei eine Bewegungsgleichung für das parametererregte System im Modalraum der nichtrotierenden Struktur, welche mit den o.g. Verfahren gelöst werden kann. Die geringe Anzahl an modalen Freiheitsgraden ist hierbei vorteilhaft.

## 6 Experimentell-numerische Ergebnisse

Mit den beschriebenen Verfahren wurde eine Balkenstruktur nach Bild 6 untersucht. Der starre Rotor besteht dabei aus mehreren Scheiben, die gegeneinander verdreht werden können, so daß die Symmetrie des Rotors bei konstantem Trägheitsmoment um die Figurenachse variiert werden kann. Der Parameter  $\eta = \left| \frac{J_2 - J_3}{J_{max} - J_{min}} \right|$  ist dabei ein Maß für die Unsymmetrie, welcher zwischen 0 und 1 liegen kann.

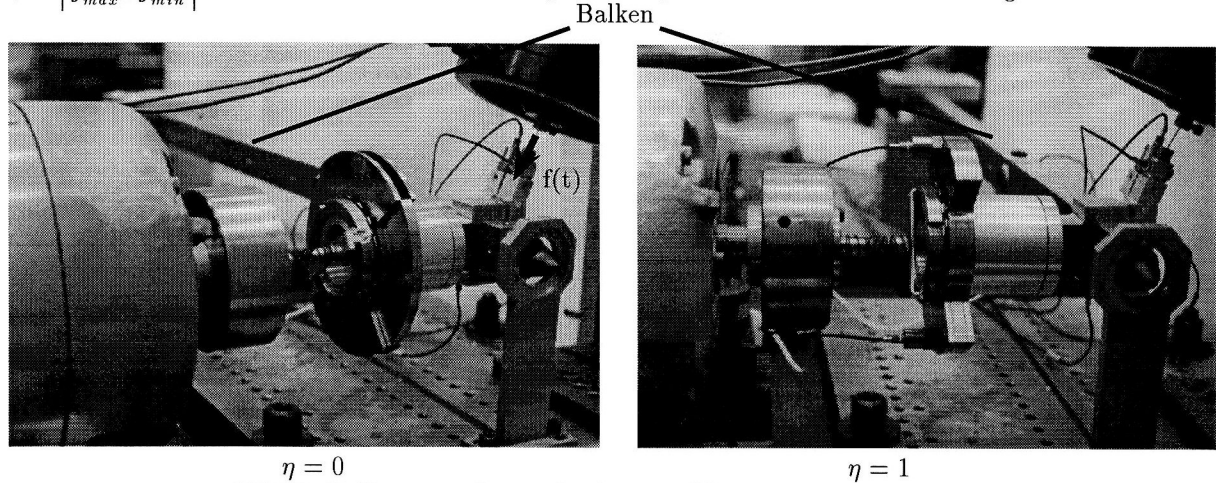


Bild 6. Balkenversuchsstand mit verstellbarer Rotorunsymmetrie

### 6.1 Symmetrischer Rotor

Für den symmetrischen Rotor  $\eta = 0$  wurde das nichtparametrische Modifikationsverfahren angewendet. Als Beispiel ist eine Übertragungsfunktion bezüglich des in Bild 6 dargestellten Erregerfreiheitsgrades (driving-function) für verschiedene Drehzahlen dargestellt (Bild 7). Die Kreiselmomente hängen von der Schrägstellung der Rotorscheibe und damit auch von der Eigenform ab. Für die Teststruktur haben somit die Kreiselmomente insbesondere für den dritten und vierten Mode deutliche Auswirkungen. Im Zoom sind die gegenläufigen Eigenfrequenzverschiebungen, welche für Systeme mit Kreiselmomente typisch sind, deutlich zu erkennen. Die Eigenfrequenzen des Systems ohne Rotation sind durch die gestrichelten Linien hervorgehoben. Weiterhin verursacht die Kreiselmomente beim vierten Mode überhaupt erst dessen Anregung, da hier der Erregerort beim nichtrotierenden System nahezu in einem Knoten liegt.

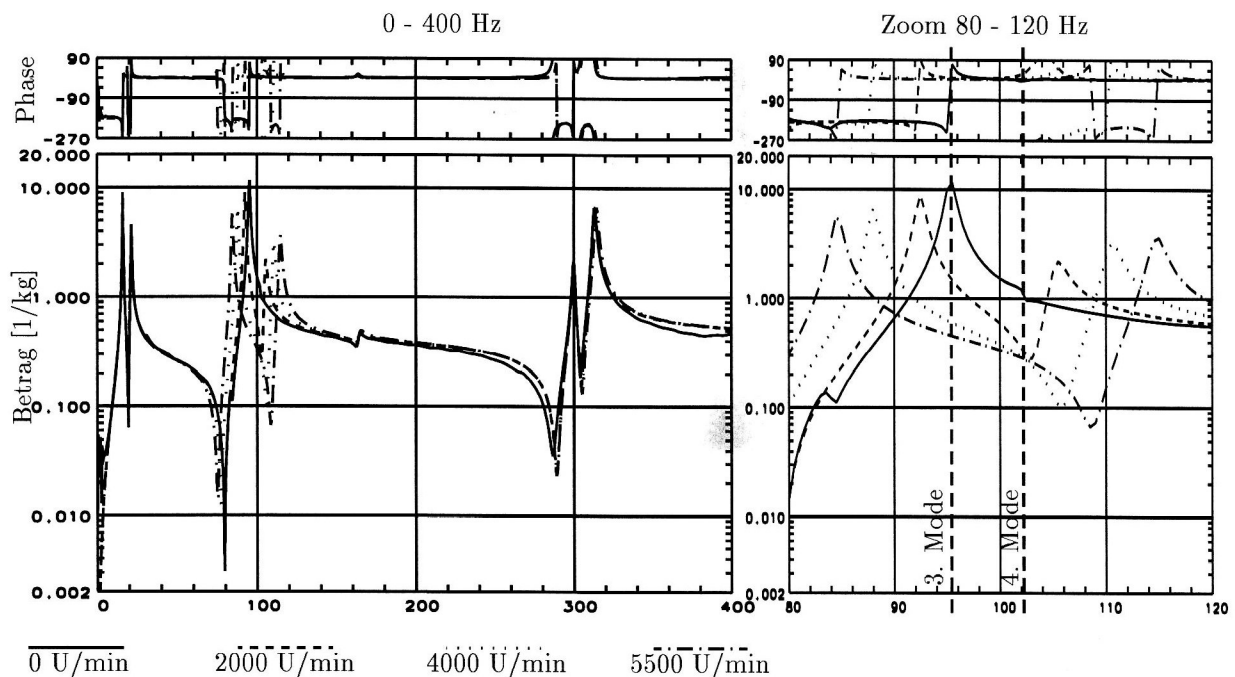


Bild 7. Modifizierte Übertragungsfunktionen

Die durch die Modifikationsrechnung erhaltenen Funktionen können im weiteren Verlauf als Eingangsdaten für die experimentelle Modalanalyse verwendet werden.

## 6.2 Unsymmetrischer Rotor

Die Anwendung der parametrischen Modifikation erzeugt eine Bewegungsgleichung im Modalraum der nichtrotierenden Struktur, welche mit dem Hillschen Verfahren gelöst wird. Die modale Basis bestand für die vergleichsweise einfache Balkenstruktur aus 6 Moden, wobei neben den Eigenfrequenzen und den Eigenvektoren auch die für die Stabilität wesentlichen modalen Dämpfungen enthalten sind. Zur Untersuchung der Stabilität der Eigenschwingungen sind die Realteile der Eigenwerte  $\lambda_n$  von Bedeutung. Ist ein Realteil eines Eigenwertes größer Null, dann klingt die Schwingung exponentiell auf und ist somit instabil. In Bild 8a ist deshalb der größte aller Realteile über der Parameterebene aus Drehzahl und Unsymmetrie  $\eta$  aufgetragen. In den stabilen Bereichen ist der Realteil wegen der Strukturdämpfung leicht negativ. Mit zunehmender Unsymmetrie treten Drehzahlbereiche auf, in denen Instabilität vorliegt. Die Projektion in Bild 8b zeigt die instabilen Bereiche (grau) noch einmal deutlicher. Es bestätigt sich der Satz von Cesari, welcher mögliche Instabilitätsbereiche mit den Eigenfrequenzen des Systems mit konstanten Koeffizienten in Beziehung setzt:  $n\Omega_P = \omega_i \pm \omega_j$ .

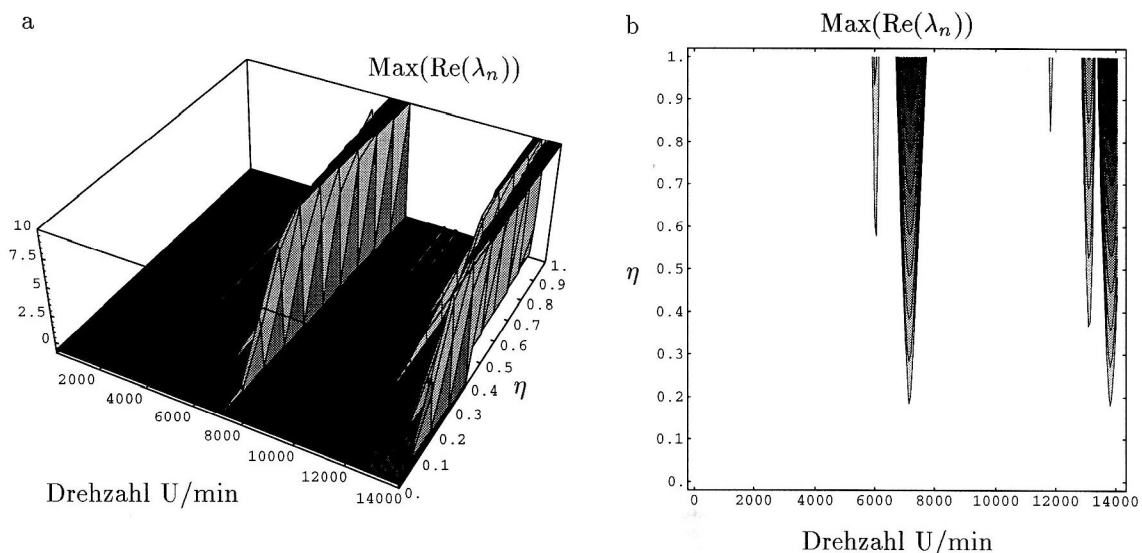


Bild 8. Stabilitätskarte der homogenen Lösung

Im folgenden sind die Eigenschwingungsformen von Interesse. Nach dem Hillschen Ansatz liegen diese in Form von Fourierreihen vor, so daß die Eigenschwingungen mit einer Grundfrequenz plus/minus von Vielfachen der Parameterfrequenz ablaufen. In den Tabellen 1-3 sind vier Komponenten von 6 Eigenvektoren als Real- und Imaginärteile in der komplexen Ebene aufgetragen. Auf die Darstellung der 6 konjugiert komplexen Eigenvektoren des Systems erster Ordnung mit  $2f = 12$  Freiheitsgraden wurde verzichtet. Dabei ist die Rücktransformation in physikalische Koordinaten  $\mathbf{y}$  berücksichtigt. Jede Zeile steht dabei für einen Fourieranteil. Das System mit nichtrotierendem Rotor besitzt wegen der fehlenden Kreiselwirkung und der proportionalen Dämpfungsverteilung konstante, rein reelle Eigenvektoren. Kommt die Rotation eines symmetrischen Rotors hinzu, so bleiben die Eigenvektoren konstant, aber sie sind dann zwingend komplex. Dies bedeutet eine Phasenverschiebung zwischen den einzelnen Freiheitsgraden während der Eigenschwingung. Insbesondere die Kippbewegung der Rotorscheibe hat in den beiden Drehfreiheitsgraden eine Phasendifferenz von etwa 90 Grad, so daß daraus die typische Taumelbewegung der Scheibe folgt. Bei einem rotierenden, unsymmetrischen Rotor kommen Fourierkoeffizienten hinzu.

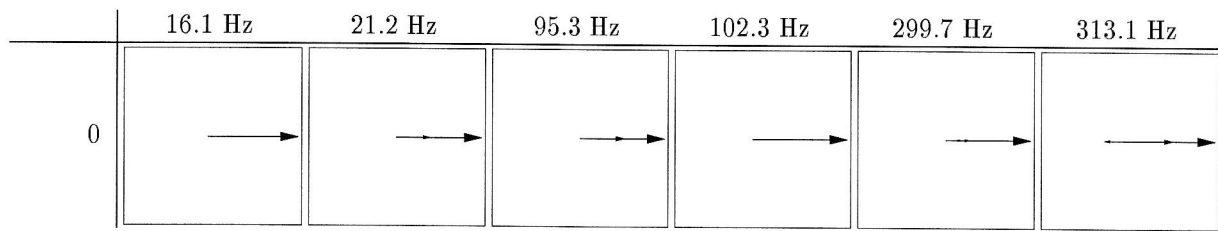


Tabelle 1. Symmetrischer Rotor 0 U/min - komplexe Eigenvektorkomponenten

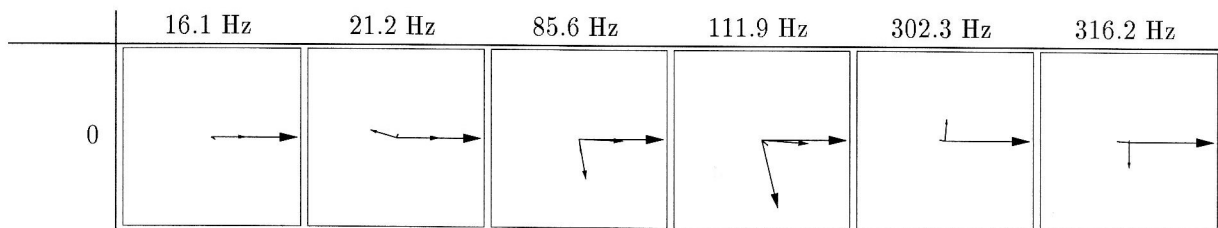


Tabelle 2. Symmetrischer Rotor 5500 U/min - komplexe Eigenvektorkomponenten

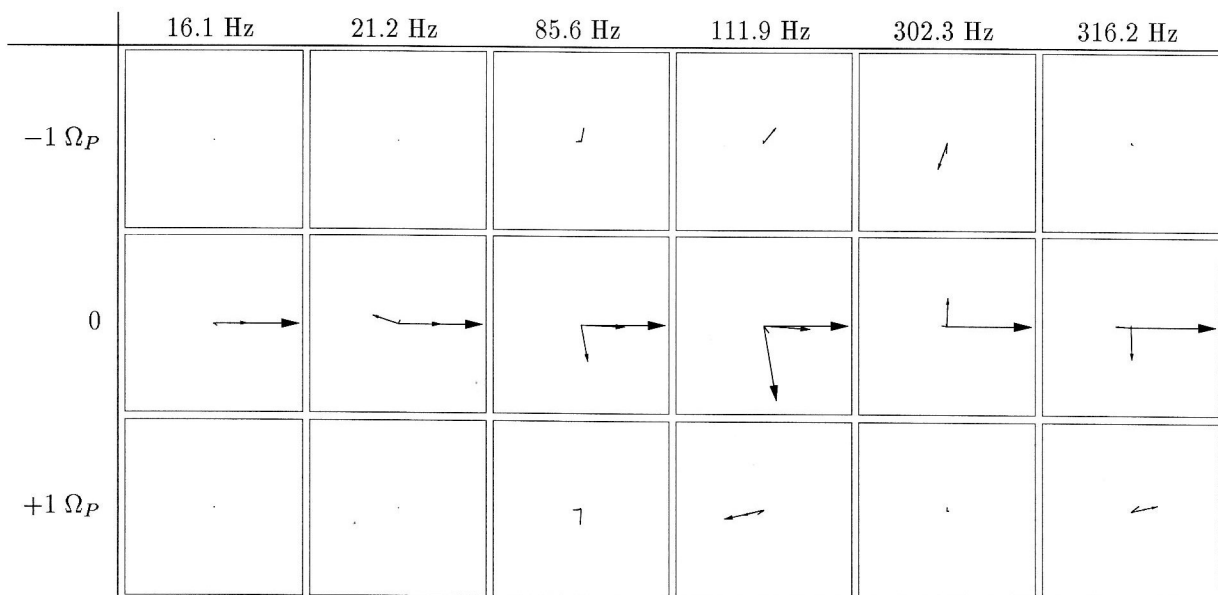


Tabelle 3. Unsymmetrischer Rotor 5500 U/min - komplexe Eigenvektorkomponenten

Auf der Basis der modalen Lösung lassen sich mit Hilfe von Gleichung (29) auch die erzwungenen Schwingungen im Frequenzbereich als Reihen von Übertragungsfunktionen multipliziert mit dem Erregerspektrum darstellen. Die Struktur antwortet auf eine monofrequente Erregung mit einem Linienspektrum. Die Funktionen für den Erregerefreiheitsgrad des Balkenversuchsstands in Bild 6 stehen in Tabelle 4. Die Funktion an der Stelle 0/0 gibt dabei die Übertragungsfunktion des Systems ohne Parametererregung wieder. Sie ist bei der gewählten Drehzahl von 5500 U/min die dominierende Funktion, da die Konstantanteile der Eigenvektoren größer sind als die höheren Fourierkoeffizienten (vgl. Bild 7).



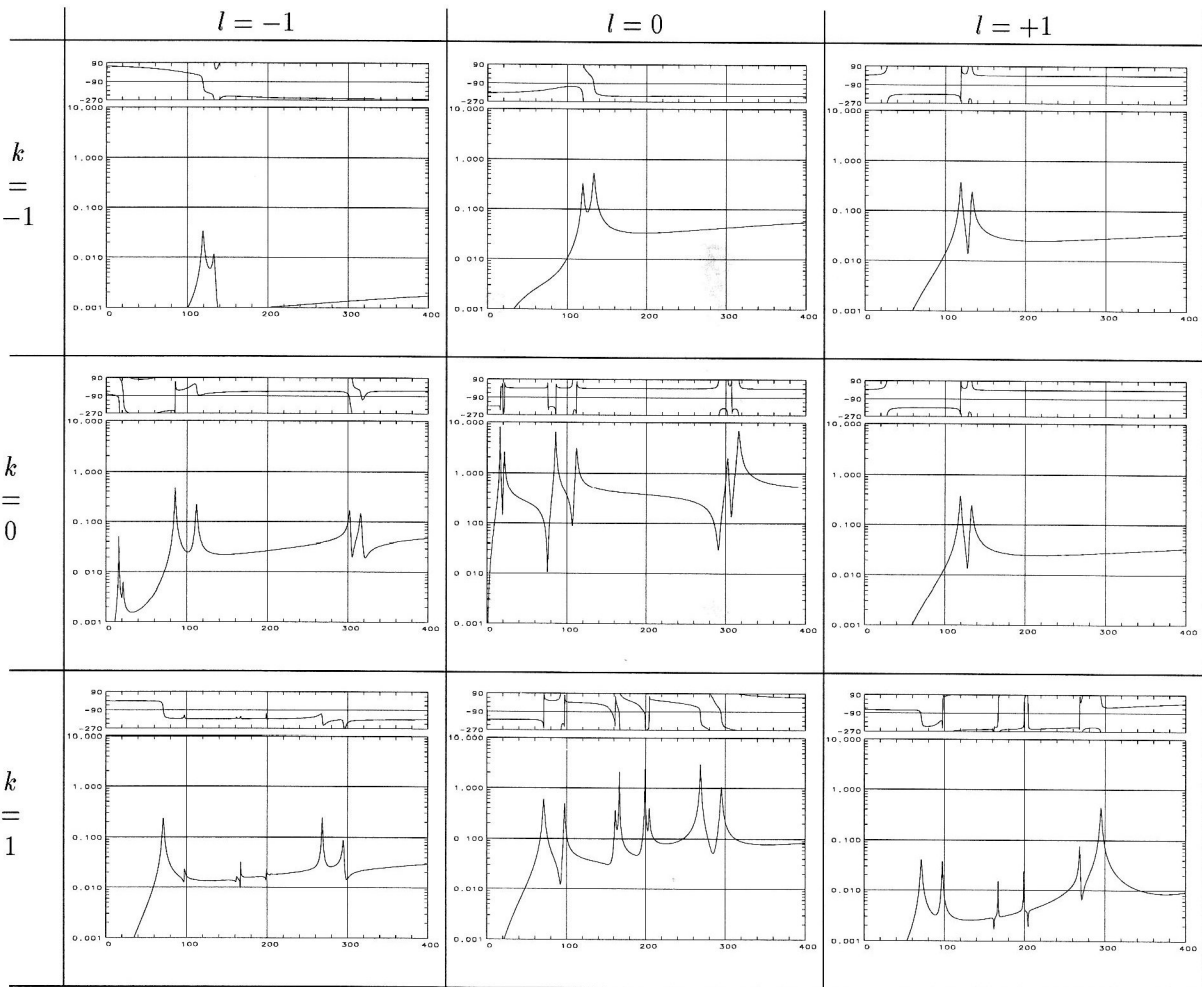


Tabelle 4. Übertragungsverhalten der Struktur mit Parametererregung für 5500 U/min

## 7 Zusammenfassung

Der Beitrag zeigt den Einfluß von Kreiselwirkungen starrer Rotoren auf die Bewegungsgleichung einer Struktur. Es entstehen dabei in jedem Fall Differentialgleichungen, deren Koeffizienten drehzahlabhängig sind. Bei unsymmetrischen Rotoren treten zusätzlich zeitvariante Koeffizienten auf, so daß ein System mit Parametererregung vorliegt. Dies erschwert die experimentelle Modalanalyse bzw. macht sie unmöglich. Es werden deshalb Strukturmodifikationsverfahren vorgeschlagen, welche es ermöglichen, die Messung am System ohne Rotation durchzuführen. Die Identifikation beschränkt sich somit auf die Ermittlung der kritischen Elemente, der Massen-, Dämpfungs- und Steifigkeitsverteilungen. Randbedingungen wie Einspannsteifigkeiten werden dabei berücksichtigt. Der rotierende Rotor, welcher zwar die Bewegungsgleichung verkompliziert aber dessen Parameter vorab bekannt sind, wird nachträglich in einer Rechnung für die interessierende Drehzahl berücksichtigt. Bei symmetrischen Rotoren ist dabei eine parametrische und nichtparametrische Modifikation möglich, bei unsymmetrischen nur die parametrische.

Die Verfahren wurden an einer Laborstruktur verifiziert. Technische Anwendungen sind z.B. Abgasturbo-lader oder Staudruckturbinen von Passagierflugzeugen. Erweitert man die Modifikationen auf allgemeine Modifikationselemente unabhängig vom Kreiseinfluß, so kommen weitere Anwendungsgebiete wie Rotoren mit Riß oder Kurbelwellentorsionsschwingungen hinzu.

## Literatur

1. Bienert, J.; Witfeld, H.: Modal Analysis and Modification Theory for Gyroscopic Systems. in: Proceedings of the 14th International Modal Analysis Conference (IMAC), Dearborn (Mi), USA, (1996).
2. Ertz, M., Reister, A., Nordmann, R.: Zur Berechnung der Eigenschwingungen von Strukturen mit periodisch zeitvarianten Bewegungsgleichungen. in: Schwingungen in rotierenden Maschinen III, Irretier, Nordmann, Springer (Hrsg.), Vieweg, (1995).
3. Gasch, R.; Pfützner, H.: Rotordynamik. Springer-Verlag, (1975).
4. Köhlert, H.: Experimentelle und numerische Untersuchungen zum dynamischen Verhalten von Schwingförderrinnen. Dissertation Universität der Bundeswehr Hamburg, (1992).
5. Lee, C.-W.: Vibration Analysis of Rotors. Kluwer Academic Publishers, (1993).
6. Xu, J.: Aeroelastik einer Windturbine mit drei gelenkig befestigten Flügeln. Fortschrittsberichte VDI, Reihe 11, Nr. 185. Düsseldorf: VDI-Verlag, (1995).

---

Adresse: Dipl.-Ing. Jörg Bienert, Institut für Mechanik, Universität der Bundeswehr Hamburg, Holstenhofweg 85, D-22043 Hamburg